

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang

1970/1971

no 1

aug./sept.

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oestgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt f 15,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Noughuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden f 10,50. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Naar een nieuw onderwijsprogramma voor de wiskunde

DRS. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest

1 Het wiskundeleerplan dat in 1968 met de brugklas van start is gegaan en dat te lezen is in het Voorstel Leerplan Rijksscholen [4] is opgesteld onder supervisie van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Tegen dit leerplan wordt wel eens het bezwaar gemaakt dat daarbij geen duidelijke doelstellingen van het (wiskunde-) onderwijs zijn geformuleerd. Dat bezwaar is gegrond maar niet helemaal rechtvaardig. Er zijn voldoende argumenten te noemen, die aannemelijk maken waarom de Commissie het leerplan indertijd in zijn huidige vorm ter publikatie aan de Staatssecretaris van Onderwijs heeft aangeboden. Het is echter niet mijn bedoeling die argumenten hier te noemen en te bespreken.

Iets anders is, dat degenen die het bezwaar maakt daarmee stilzwijgend schijnt te willen stellen dat het zonder meer onmogelijk zou zijn over een leerplan te spreken voordat de doelstellingen geformuleerd zijn. Ik meen dat die stelling onjuist is. Het is ondenkbaar dat bij het formuleren van doelstellingen de bestaande onderwijspraktijk vergeten zou kunnen worden. Er moet wisselwerking bestaan tussen het denken over doelstellingen en het formuleren van leerstof en de kennis van onderwijsmethoden en -middelen.

De oorzaak van de onjuistheid van de stelling is naar ik geloof de verwarring van logische samenhang en chronologische volgorde. Het verschijnsel, dat logische en chronologische volgorde niet overeenstemmen is normaal, ook in de wiskunde: de manier waarop een probleem opgelost wordt wijkt gewoonlijk sterk af van de manier waarop de oplossing tenslotte op schrift gesteld wordt.

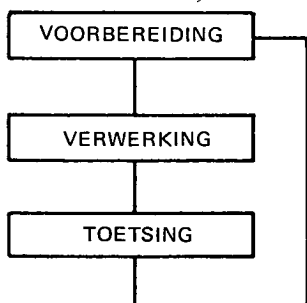
Dit artikel gaat over de ontwikkeling van een onderwijsprogramma voor wiskunde. Ik ga daarbij uit van een schema dat een logische samenhang suggereert. De lezer gelieve echter te bedenken dat ik daarmee niet de chronologische volgorde heb willen vastleggen van de verschillende taken die uitgevoerd moeten worden. Ik heb alleen willen proberen de vorm vast te leggen die het onderwijsprogramma tenslotte zal moeten hebben. Over de chronologische volgorde, het werkplan dus, dat naar het uiteindelijke programma moet leiden zal ik in dit artikel weinig zeggen. Men leze daarvoor het stuk van Broekman elders in dit nummer.

Men zou zich kunnen afvragen waar het allemaal voor nodig is, dat gepraat over doelstellingen en leerplannen en zo. We hebben nu toch een nieuw leerplan. Het onderwijs is toch al zo in beweging, laten we nu alsjeblieft even rustig ervaringen opdoen met datgene waar we pas aan begonnen zijn.

Daar ben ik het wel mee eens, maar alle ontwikkelingen wijzen erop dat we over een tiental jaren echt wel iets anders moeten hebben. En als we daar nu niet over beginnen te denken lopen we het gevaar, dat we straks weer in de verdrukking komen met onze experimenten. En dan moeten we weer overhaast iets invoeren waarvan we hopen en geloven dat het goed is, maar dat niet steunt op zorgvuldig onderzoek.

Daarom ben ik voorstander van een groot onderzoek, dat zich niet alleen beperkt tot het produceren van een leerplan, maar ook de methoden en middelen bestudeert waarmee dat leerplan gerealiseerd zou kunnen worden. Dat is dan ook de reden dat ik niet over een leerplan, maar over een onderwijsprogramma wil spreken. Het plan is ambitieus, maar nodig. Ik hoop dan ook van harte dat het geen zaak wordt van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren alleen, maar reken op krachtige steun van andere organen en verenigingen die zich met het wiskundeonderwijs bezighouden.

Om het mezelf en de lezer niet te moeilijk te maken zou ik in eerste instantie een onderwijsprogramma willen verdelen in drie hoofdstukken: *voorbereiding*, *verwerking* en *toetsing*. Ik kom dan tot het volgende (logische, niet chronologische) schema:



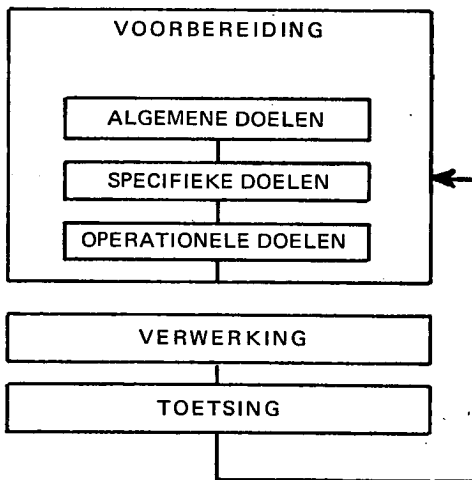
In de voorbereiding staan doelstellingen en leerplannen geformuleerd. Hier moet antwoord gegeven worden op vragen als: *Waarom* wiskunde op school? *Welke* wiskunde op school? *Hoeveel* wiskunde op school?

De verwerking is praktischer dan de wat theoretisch gerichte voorbereiding. Hier moeten de doelstellingen gerealiseerd worden. Er moeten onderwijsstrategieën worden uitgestippeld, methoden en middelen worden uitgedacht. De leerlingen moet de vereiste vaardigheden, kennis en houding bijgebracht worden. Kortom, de vraag moet beantwoord worden: *Hoe* wiskunde op school?

De toetsing dient om te onderzoeken of de doelstellingen gerealiseerd konden worden. Dat onderzoek moet naar twee kanten werken. Enerzijds dient zij om de leerlingen te tonen in welke mate zij aan de gestelde eis hebben voldaan, anderzijds moeten we er uit kunnen afleiden of de doelstellingen voor wijziging vatbaar zijn. Vandaar de terugkoppeling in het schema.

Kenner van stroomdiagrammen zullen opmerken dat er een lus is ontstaan en zich misschien afvragen of we niet steeds in hetzelfde kringetje blijven ronddraaien. Ik zou daarop willen antwoorden, dat ik dat van harte hoop. We moeten ons nooit gaan verbeelden dat we het ideale onderwijsprogramma te pakken hebben, maar we moeten telkens weer opnieuw beginnen.

2 Ik wil nu een poging wagen de drie hoofdstukken verder uit te werken. Om te beginnen de voorbereiding. Dit hoofdstuk is weer te verdelen in drie onderdelen: *algemene*, *specifieke* en *operationele* doelen. De lezer vergeve mij deze weinig zeggende woorden, maar ik moet hier een gebrek aan fantasie bekennen. Hopelijk krijgen de termen na de nu volgende toelichting meer inhoud. Ik houd me aanbevolen voor een meer heldere terminologie.



2.1 De algemene doelen geven antwoord op de vraag waarom er wiskunde op school gegeven wordt. Uit de aard van de zaak zullen deze antwoorden weinig gespecificeerd kunnen zijn, maar ze mogen ook weer niet zo vaag en nietszeggend zijn dat we er eigenlijk niets mee kunnen doen. Ze moeten op twee manieren bruikbaar zijn. In de eerste plaats dienen ze om er de verschillende leerstofgebieden aan te toetsen. Elk leerstofgebied moet een rol spelen bij het vervullen van een of meer algemene doelen. Het zou best eens kunnen zijn dat een bepaald stuk uit de leerstof alleen op grond van traditie of persoonlijke voorkeur in het leerplan staat, terwijl het geen functie vervult bij het voldoen aan de doelstellingen. Een voorbeeld hiervan is de stelling van Ptolemaeus. Niemand

zal er tegenwoordig nog behoefte aan hebben deze stelling als verplichte leerstof voor te schrijven. Het is dan ook volstrekt onduidelijk welke rol de stelling zou kunnen hebben in het wiskundeonderwijs.

Anderzijds is het heel goed denkbaar dat we bij bestudering van de algemene doelen ontdekken dat een bepaald aspect van de wiskunde in het onderwijs thuis hoort, terwijl het bestaande leerplan daarin niet voorziet. Een prachtig voorbeeld hiervan is te vinden in de belangrijke ontwikkelingen die er gaande zijn ten aanzien van de computerkunde.

Zonder vooruit te willen lopen op de voorstellen van de didactiekcommissie zou ik hier toch wel graag een vijftal algemene doelen willen noemen. Ik trof ze aan in Johnson [1] en ik vind ze er nogal aantrekkelijk uitzien omdat ze aan beide bovenstaande eisen kunnen voldoen: men kan er bestaande leerstofgebieden aan toetsen en men kan ermee op het spoor komen van nieuwe leerstofgebieden.

- a De leerling moet weten hoe wiskunde bijdraagt tot het begrijpen van natuurverschijnselen.
- b Hij moet begrijpen hoe hij wiskundige methoden kan gebruiken bij het onderzoeken van, bij het interpreteren van, en bij het nemen van beslissingen in intermenselijke relaties.
- c Hij moet zich kunnen voorbereiden voor een beroep waarbij hij wiskunde gebruikt als producent en als consument van goederen en diensten.
- d Hij moet begrijpen hoe de wiskunde als wetenschap en als 'kunst' bijdraagt in de ontwikkeling van onze cultuur.
- e Hij moet wiskundige begrippen goed en begrijpelijk kunnen overdragen aan anderen.

Dit vijftal is een tamelijk letterlijke vertaling uit het genoemde boek. Ik heb nog geen poging gewaagd ze te modelleren naar Nederlandse behoefte. We zullen er nog wel wat aan moeten prutsen, maar in grote lijn zijn ze wel goed.

De aanhalingstekens om het woord kunst in de vierde doelstelling zijn van mij. In de oorspronkelijke Engelse tekst staat het woord art, dat hier niet goed te vertalen is door kunst. Weet iemand een beter woord?

2.2 Specifieke doelen vormen een verbinding tussen de algemene en de operationele. Hier worden de verschillende aspecten van elk der algemene doelen onderzocht. En wel op twee manieren. In de eerste plaats moeten die aspecten genoemd worden, en in de tweede plaats moet bij elk van die aspecten een niveau aangegeven worden waarop de leerling dat bepaalde aspect moet kunnen beheersen. En omdat die niveau's voor verschillende leerstofgebieden verschillend kunnen zijn, moet er bij elk der aspecten als het ware een glijdende niveauschaal aangebracht worden. Ik zal nu eerst een aantal aspecten noemen. Ze zijn ook weer uit het boek van Johnson afkomstig. Ik ben er iets minder enthousiast

over dan over de door hem geformuleerde algemene doelstellingen, maar ik geloof wel dat we het in deze richting zullen moeten zoeken.

- a De leerling kent en begrijpt wiskundige processen, feiten, principes.
- b Hij begrijpt de logische structuur van de wiskunde en de betekenis van een bewijs.
- c Hij voert berekeningen uit met begrip, nauwkeurigheid en doelmatigheid.
- d Hij kan vraagstukken oplossen.
- e Hij ontwikkelt een gedragspatroon dat leidt tot nieuwsgierigheid, initiatief, vertrouwen en interesse.
- f Hij leest goede methoden voor de studie en overdracht van wiskunde, en ontwikkelt gewoonten die noodzakelijk zijn voor zelfstandige arbeid.

Het is duidelijk dat bij elk van de algemene doelen meer dan een van deze aspecten aan de orde zullen moeten komen.

Voor het nader omschrijven van elk van de aspecten door niveaueisen zullen we verder moeten afzien van woorden als: begrippen, leren, inzicht hebben, kunnen. Deze worden in zoveel verschillende betekenissen gebruikt dat zij oorzaak zijn van veel verwarring. Beter kunnen we woorden gaan gebruiken als: opschrijven, uitrekenen, oplossen, onderscheid maken, herkennen, samenvatten, tekenen.

Ik geef hier de schaal die Johnson bij aspect a noemt. De voorbeelden tussen haakjes zijn van hem.

- a De leerling kent en begrijpt wiskundige processen, feiten, principes.
 - 1 Hij herkent een uitspraak, voorbeeld, of definitie ('Welk van de volgende figuren is het plaatje van een rechthoek?')
 - 2 Hij herinnert zich een feit, symbool of term. ('Teken het plaatje van een rechthoek').
 - 3 Hij vermeldt een begrip in een nieuwe terminologie ('Schrijf de open uitspraak $O = l \cdot b$ in woorden').
 - 4 Hij maakt onderscheid tussen eigenschappen van begrippen. ('Wat is het verschil tussen een vierkant en een rechthoek?')
 - 5 Hij herkent de logische implicatie van het begrip. ('Hoe kun je de oppervlakte van een parallellogram in verband brengen met dat van een rechthoek?')
 - 6 Hij past deze kennis toe op een nieuwe situatie. ('Wat is de oppervlakte van deze doos?')
 - 7 Hij breidt het begrip uit om een nieuwe generalisatie te ontdekken. ('Wat is de formule voor de oppervlakte van een kubus?')
 - 8 Hij toetst de generalisatie aan een bewijs. ('Hoe bewijs je de formule voor de oppervlakte van een driehoek?')
 - 9 Hij bedenkt een nieuwe uitbreiding van het begrip ('Wat is de formule voor de oppervlakte van een rechthoek als de eenheid van oppervlakte die van een gelijkzijdige driehoek met zijde 1 is?')

Op dergelijke manier gaat Johnson ook te werk bij andere aspecten. Men ziet wat de bedoeling is. Het is duidelijk dat men bijvoorbeeld bij een onderwerp als oppervlakte van bijvoorbeeld een mavo-leerling meer zal eisen dan niveau 1, maar minder dan niveau 9. De eis zal ergens tussenin liggen. Dat betekent dan dat die leerling ook aan alle voorgaande eisen zal moeten voldoen, maar niet aan de volgende.

Overigens is deze schaalverdeling van Johnson niet goed. Hij slaat wat stappen over en de volgorde is ook niet in orde. Maar zijn bedoeling is goed, het idee om op deze manier te werk te gaan is bruikbaar en doelmatig.

De mensen die dit werk gaan aanpakken behoeven niet alles zelf te gaan verzinnen. Er is goede literatuur over, bijvoorbeeld Bloom [2]. Ik meen trouwens in de lijsten van Johnson ook een poging te ontdekken volgens de indeling van Bloom te werk te gaan. Dan is er nog een voortreffelijk boek van De Cecco [3], dat ik elke leraar zou willen aanbevelen. Er worden in begrijpelijke en goed leesbare taal veel verstandige en leerzame dingen gezegd over de praktijk van het lesgeven.

2.3 Het laatste onderdeel van de voorbereiding bestaat uit operationele doelen. Dit onderdeel staat het dichtst bij de praktijk, omdat de leraar dagelijks werk kan geven.

Een operationeel doel bestaat uit drie gedeelten:

- a Omschrijving van een leerstofgebied.
- b Beschrijving van de manier waarop de leerling moet tonen het leerstofgebied te beheersen.
- c Beschrijving van de mate waarin de leerling het leerstofgebied moet beheersen.

Voorbeeld: De leerling moet van elke vergelijking van het type $ax + b = cx + d$, waarin a, b, c, d gegeven rationale getallen zijn, de oplossingsverzameling in $\mathbb{N}$, in $\mathbb{Z}$ en in $\mathbb{Q}$ opschrijven.

Hieruit blijkt:

- a De omschrijving van het leerstofgebied: '... vergelijking van het type $ax + b = cx + d$, waarin a, b, c, d gegeven rationale getallen zijn ...'
- b De wijze waarop het leerstofgebied beheerst moet worden: 'De leerling moet ... de oplossingsverzameling in $\mathbb{N}$, in $\mathbb{Z}$ en in $\mathbb{Q}$ opschrijven.'
- c De mate waarin hij het leerstofgebied moet beheersen: '... van elke ...' hetgeen betekent dat geen fouten gemaakt mogen worden.

Eigenlijk zou er nog bij moeten staan in welke tijd de prestatie geleverd moet worden.

De gedachte dat doelstellingen geoperationaliseerd moeten worden is natuurlijk niet nieuw. Dergelijke doelstellingen bestaan in zekere zin al, maar ze zijn moeilijk als zodanig te herkennen. Er worden namelijk naast het reeds genoemde Voorstel Leerplan Rijksscholen dat onder verantwoordelijkheid van de

Staatssecretaris is uitgegeven, door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde toelichtingen op dat leerplan [5], [6] en [7] verspreid. Verder komen er van andere instanties boekjes met voorbeelden van vraagstukken op eindexamenniveau. Dit geheel van leerplannen, toelichtingen en vraagstukkenverzamelingen zou men kunnen beschouwen als een verzameling geoperationaliseerde doelstellingen. Toch is dit veel te veel versnipperd naar mijn zin. Ik zou graag mee willen werken aan iets wat meer samenhang heeft, en overzichtelijker is. Het is wel duidelijk dat het produceren van operationele doelstellingen een reusachtig werk is, dat pas kan beginnen als we beschikken over een inventaris van mogelijke leerstofgebieden. De opstellers ervan zullen niet alleen naar het huidige leerplan moeten kijken, maar ook naar buitenlandse leerplannen en ze zullen moeten bedenken wat er verder nog voor nieuwe leerstof in zou moeten. Daarom moeten eerst de algemene doelen en specifieke doelen gemaakt worden (Zie het stuk van Broekman, I.1) er moet een lijst van leerstofgebieden gemaakt worden (I.2) Behalve dat zullen de opstellers ook al met een half oog moeten kijken naar de praktische uitvoerbaarheid en zullen zij zich af moeten vragen in hoeverre de resultaten meetbaar moeten zijn. Daartoe moeten zij de beschikking hebben over een lijst van werkvormen en hulpmiddelen (I.3) en een inventaris van toetsingsmethoden (I.4)

Daarom kan de produktie van operationele doelen pas later beginnen: fase II van het werkplan. Hier blijkt alweer de onverenigbaarheid van logische en chronologische volgorde. Met dit veelomvattende, maar belangrijke werk wordt het eerste gedeelte van het onderwijsprogramma, de voorbereiding, afgesloten.

2.4 Literatuur over het hoofdstuk Voorbereiding.

- [1] Johnson & Rising, Guidelines for teaching mathematics (Wadsworth Publ. Co., Belmont, California, 1967).
- [2] Bloom e.a., Taxonomy of educational objectives (Longmans, London, 1956).
- [3] De Cecco, The psychology of learning and instruction (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968).
- [4] Voorstel Leerplan Rijksscholen (Staatsuitgeverij 's-Gravenhage) (uitverkocht).
- [5] Toelichting op het leerplan brugklas (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Utrecht, 1968).
- [6] Toelichting op het leerplan onderbouw mavo, havo, vwo (Idem, 1969).
- [7] Toelichting op het leerplan bovenbouw havo en vwo (Idem) (in voorbereiding).

(wordt vervolgd)

Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Zoals in Euclides reeds is aangekondigd, is door het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een didactiekcommissie ingesteld. Deze commissie bestaat uit:

Dr. J. K. van den Briel, Heemstede
Drs. H. G. B. Broekman, Soest
H. G. de Jong, Zaandam
F. Goffree, Hengelo
L. A. G. M. Muskens, Schijndel
J. H. G. Vaessens, Maastricht.

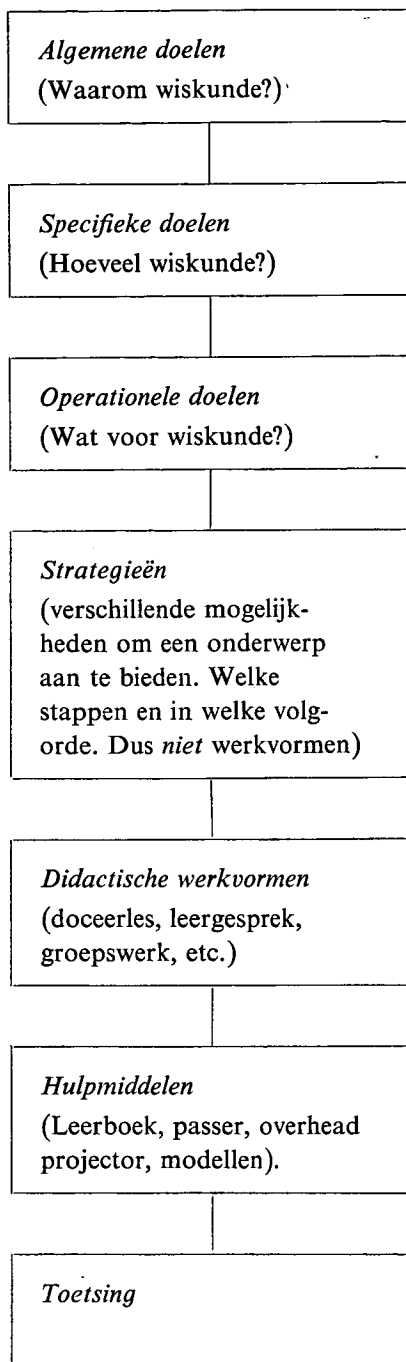
Direct bij de start van haar werkzaamheden zag de commissie zich geplaatst voor de vraag of haar werk zich zou moeten richten op de toekomst, of dat zij zich tot het huidige leerplan zou moeten bepalen. Het is hard nodig om over de toekomst te gaan nadenken; het leerplan 1968 zal over 10 jaar zeker verouderd zijn. Anderzijds roept het leerplan 1968 zoveel vragen op, dat we ons doel voorbij zouden schieten als we alleen op de toekomst gericht werk zouden verrichten. Door Van Dormolen werd een plan ingediend, waarin het werk op korte termijn en dat op lange termijn gecombineerd konden worden. Dit plan werd door ons aanvaard als werkplan.

De vraag of het wel op de weg van de Vereniging van Wiskundeleraren ligt om over de toekomst te spreken, of dat dat niet meer het werk van de CMLW is, menen wij ontkennend te moeten beantwoorden. Vanzelfsprekend heeft de CMLW hieraan een belangrijke taak, maar wij zouden als wiskundeleraren erg dom zijn als we ons alleen met de problemen van nu zouden bezighouden. Bovendien is het bekend dat de CMLW initiatieven vanuit de praktijk ten eerste toejuicht. De didactiekcommissie is beslist *niet* van plan de CMLW buiten haar plannen te houden. Integendeel, zij streeft een zo groot mogelijke samenwerking na met de CMLW en alle andere personen, instituten en organen die zich met het wiskundeonderwijs bezighouden.

Werkplan

Er wordt toegewerkt naar het volgende schema. (Zie ook het artikel van Van Dormolen over een onderwijsprogramma voor wiskunde¹)

¹) In dit nummer op pagina 1.



Om een dergelijk onderwijsprogramma te realiseren is het werk als volgt onderverdeeld.

I: *Inventarisatie*

Dit kan gesplitst worden in een inventarisatie van:

- I.1 Algemene en specifieke doelstellingen
- I.2 Leerstofgebieden
- I.3 Werkvormen en hulpmiddelen
- I.4 Toetsingsmethoden.

II: *Coördinatie*

- II.1 Keuze van leerstofgebieden in verband met algemene doelen
- II.2 Niveau-bepaling van de geselecteerde leerstofgebieden, uitgaande van de lijst met specifieke doelstellingen. Operationele doelstellingen.
- II.3 Produktie van toetsen uitgaande van de resultaten van II.2

III: *Integratie*

- III.1 Ontwerpen van en kiezen uit strategieën
- III.2 Ontwerpen van en kiezen uit werkvormen en hulpmiddelen

IV: *Evaluatie*

Aan de praktijk toetsen van III.1 en III.2

Opm.: Ook al worden zij niet expliciet genoemd, het zal toch duidelijk zijn dat de individuele leerlingen (en groepen van leerlingen) voortdurend een zeer belangrijke rol spelen.

De didactiekcommissie heeft op zich genomen om de inventarisatie aan te pakken, omdat zij meent dat we allemaal ten eerste gediend zijn met een goed *overzicht* van de concrete gegevens die er zijn op ieder van de genoemde gebieden. Dit onderdeel van het werk is immers niet alleen gericht op de toekomst, maar is noodzakelijk voor het inzicht krijgen in en het eventueel verbeteren van de huidige praktijk.

Voor ieder van de gebieden I. 1-I.4 zal een subcommissie komen, die zich bezighoudt met

- a) literatuuronderzoek
- b) lijstconstructie
- c) publikatie
- d) reconstructie van de lijst als gevolg van reacties op de publikaties. Ieder van de subcommissie I.1-I.4 zal zeer frekwent (b.v. via Euclides) verslag uitbrengen van haar vorderingen, zodat alle wiskundeleraren mee kunnen denken (werken).

In principe wordt iedereen die daarvoor interesse heeft, en bereid is enig werk te verzetten, toegelaten als lid van één of meer werkgroepen.

Bij de inventarisatie kunnen de verschillende subgroepen met elkaar en betrekkelijk onafhankelijk van elkaar werken. Bij de coördinatie etc. is dat nog maar ten dele mogelijk. Voor de uitvoering hiervan (coördinatie, integratie,

evaluatie) is een samenbundeling nodig van alle personen, instituten en organen, die zich in ons land bezighouden met het wiskundeonderwijs. Er wordt daarom overwogen om in oktober een samenkomst van al deze geïnteresseerden te organiseren, waaruit een goede *samenwerking* moet resulteren.

Dringende oproep aan alle wiskunde-leraren

- 1 Willen al diegenen, die mee willen werken aan een van de subgroepen I.1–I.4 zich aanmelden bij onderstaand adres? Graag vermelding van naam, adres, werkkring en opgave van de werkgroep waarvoor men interesse heeft.
- 2 Willen al degenen, die over gegevens beschikken over de gebieden I.1–I.4. deze aan onderstaand adres sturen. Onder gegevens wordt hier verstaan zowel literatuuropgave als ervaring met verschillende werkvormen, zelf ontwikkelde hulpmiddelen, etc. Denk niet: ‘och dit heeft zo weinig waarde’, maar stuur alles in.
- 3 In overleg met de redactie van Euclides komt er in dit blad een rubriek ‘Zo doe ik het’. De bedoeling is dat deze rubriek gevuld wordt met artikelen over klasse-ervaringen. Deze artikelen vallen niet onder de verantwoordelijkheid van de redactie, maar onder die van de auteurs. De bedoeling is dat we door onze collega’s te vertellen hoe we bepaalde problemen in de klas oplossen elkaar helpen met de verbetering van ons onderwijs. Schrijf ook eens een artikeltje voor deze nieuwe rubriek.

Namens de didactiekcommissie,
H. Broekman

Correspondentie aan:

Didactiekcommissie van de Ned .Ver. v. Wiskundeleraren.
p/a Ped. Did. Inst. voor de Leraarsopleiding
Budapestlaan 6
Utrecht

Richtlijnen betreffende onderwijsresearch

C. VAN SCHAGEN

Amersfoort

In het artikel: *De determinerende en vormende functie van de wiskunde in de brugklas*¹, werden drie onderwerpen aangegeven, waarover research uitgevoerd zou moeten worden.

1 *Wat zijn de karakteristieke ideale bekwaamheden die leerlingen in de bovenbouw in staat stellen tamelijk complexe theorieën te begrijpen en tamelijk complexe problemen op te lossen?*

2 *Wat zijn de in het basisonderwijs verkregen bekwaamheden, die het mogelijk maken dat de onder 1 genoemde bekwaamheden zich kunnen ontwikkelen?*

3 *Welke situaties dienen in de brugklas aangeboden te worden, zodat de gewenste ontwikkeling inderdaad plaatsvindt?*

Het belangrijkste probleem dat zich bij deze research zal voordoen is, dat het niet gaat om het leren van de begrippen en regels van het vak, maar om het veranderen van een instelling, en dan nog wel tweemaal. Op ongeveer 11-jarige leeftijd moet een instelling zodanig veranderen, dat een verandering van instelling op ongeveer 15-jarige leeftijd mogelijk wordt. Hierbij verwijs ik naar het in mijn vorige artikel signaleerde boekvink-effect.

In de huidige praktijk van het brugklasonderwijs schuilt een groot gevaar, omdat door de homogenisering gegrepen wordt naar een methodiek, die probeert verder te werken met de instelling die de leerlingen van het basisonderwijs meebrengen, en waarmee men een maximale stofbeheersing nastreeft. Doordat men zich niet richt op een instellingsverandering, zal de ontwikkeling naar een hoger niveau van functioneren geblokkeerd worden, zodat in de toekomst het VWO leeg zal lopen of men de eisen voor het VWO drastisch zal moeten verlagen. Ik meen te kunnen aantonen dat dit volstrekt onnodig is.

Allereerst iets over de praktische verwezenlijking van het onderzoek. Dit behoeft niet veel extra tijd te kosten. Een centrum voor onderwijskunde neemt ongeveer 50 scholen voor zijn rekening. Op gezette tijden wordt aan een aselechte keuze van 10 scholen uit die 50 een proefwerk toegezonden, dat door de leerlingen wordt gemaakt. Daar de school niet weet of ze voor een bepaalde keer

¹ Zie Euclides, 45, maart 1970, p. 224.

is uitgezocht, behoeft het proefwerk niet op een tevoren vastgestelde dag gemaakt te worden. De docent kan ermee wachten tot zijn leerlingen de betreffende stof achter de rug hebben. Elke docent maakt van het werk een foutenanalyse en stuurt deze op aan het centrum. Het doornemen van 10 foutenanalyses hoeft niet veel tijd te kosten.

Alvorens in te gaan op de mogelijkheden van het onderzoek zelf is het nodig een aantal begrippen min of meer scherp te definiëren.

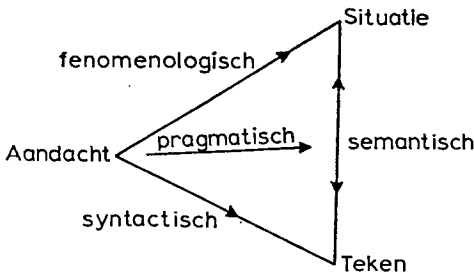
Elke theorie is een systeem van situaties. Het is een systeem, omdat het een samenhangend geheel is. Het bestaat uit situaties, omdat telkens de aandacht gericht kan worden op een eveneens samenhangend geheel van dingen. Men behoeft maar een wiskundeboek ergens open te slaan en te lezen. Dan plaatst men zich onmiddellijk in een bepaalde situatie.

Elke situatie is opgebouwd uit begrippen. Als er staat driehoek *ABC*, dan vindt men in die driehoek het begrip driehoek zelf, maar ook zijden, hoekpunten, hoeken enz. Richtten we nu de aandacht op één enkel begrip, dan kunnen we zeggen: We schrijven het woord neer of spreken het uit; dat noemen we het teken. Van het begrip is het teken de syntactische dimensie. Voorts verwijst het teken ergens naar, het verwijst naar alle situaties waarin het begrip past. Als men een meetkundeboek doorbladert vindt men talloze situaties, waarin het begrip hoek past. Dit noemen we van het begrip het designaat, de semantische dimensie. Tenslotte brengt het teken een informatie over, waarmee iets gedaan kan worden, of niet als men dat liever doet. Dit noemen we het bericht; het is de pragmatische dimensie.

De semantische dimensie van een begrip is het gemakkelijkst toegankelijk, het bestaat uit de verzameling van alle situaties waarin het begrip past. De hiërarchie van de begrippen is dus een getrouwe afspiegeling van de hiërarchie van de verzamelingen situaties. De verzameling van alle situaties waarin het begrip gelijkbenige driehoek past is een deelverzameling van de verzameling van alle situaties waarin het begrip driehoek past. Het begrip driehoek staat dus boven het begrip gelijkbenige driehoek. Wiskundig gezien vormen de begrippen dus een partieel geordende verzameling.

Begripsvorming vindt dus plaats, door het aanbieden van situaties waarin het begrip past, en situaties waarin het niet past. En dat zoveel mogelijk langs de grenzen van het begrip. Om het begrip parallellogram aan te brengen, laten we vierhoeken tekenen met gelijke overstaande zijden, met evenwijdige overstaande zijden, met supplementaire aanliggende hoeken, met elkaar middendoordelende diagonalen, enz., maar ook vierhoeken met maar één paar gelijke overstaande zijden, maar één paar evenwijdige overstaande zijden, maar één paar aanliggende supplementaire hoeken, maar één diagonaal die de andere middendoor deelt. Dit laatste wordt vaak vergeten.

De syntactische en pragmatische dimensie zijn psychische functies, d.w.z. werkingen van de hersenen. Hier grijpt de psychologie in in de didactiek. Om een geheel te kunnen overzien moeten we bedenken, dat er nog een derde psychische functie is, n.l. het begriploze kennen van een situatie. Dit noemen we de fenomenologische dimensie. Dit levert dan het volgende beeld op:



Dit beeld maakt duidelijk, dat begripsvorming wel een semantische zaak is, maar dat de hersenen het toch zijn die het moeten doen. D.w.z. begripsvorming vindt plaats door een goed afgewogen samenspel van de fenomenologische, syntactische en pragmatische dimensies. De grootste fout die men bij het onderwijs maakt is het te sterk benadrukken van de syntactische dimensie, waardoor de leerlingen de begrippen in de situaties niet kunnen herkennen en ze niet weten wat ze ermee moeten doen. De betere wiskunde resultaten bij jongens vergeleken met meisjes komt voor een belangrijk deel daardoor, dat jongens door het spelen met blokken en het aaneenleggen van spoorrails de situaties beter fenomenologisch hebben leren kennen.

Elke theorie bevat ook een systeem van regels. Regels zijn transformaties van situaties in andere situaties. Een regel grijpt ergens in een situatie in en vormt die om tot een andere. Een vergelijking wordt door ontbinding in factoren omgezet in een andere gelijkwaardige vergelijking. De stelling van Pythagoras maakt van een rechthoekige driehoek met twee bekende zijden een rechthoekige driehoek met drie bekende zijden.

Elke situatie waarop een regel van toepassing is behoort tot het werkgebied van die regel. Hoe kleiner het werkgebied hoe specifiekere de regel, hoe groter het werkgebied hoe algemener de regel. Onderzoekingen hebben uitgewezen, dat specifiekere regels hoger scoren, dus gemakkelijker zijn, maar er zijn dan meer regels nodig om problemen op te lossen. Wil men het de leerlingen gemakkelijk maken, dan geeft men zo specifiek mogelijke regels. Maar dat heeft tot gevolg, dat het aantal te kennen regels erg groot wordt. En kennen van een regel houdt in: de formulering onthouden, het werkingsgebied precies kennen, weten waar de regel aangrijpt in de situaties, en weten wat voor soort situatie na de toepassing ontstaat. Dit is nogal wat! Dit maakt, dat de leertijd sterk progressief toeneemt

met het aantal te leren regels. Dit levert nu precies de toestand op die ik in het begin van dit artikel signaleerde. Een operationele instelling, wat de basisschoolinstelling is, geeft wel de mogelijkheid tot het leren hanteren van specifieke regels, maar door de sterk toenemende leertijd komen de leerlingen in tijdnood, ze raken overbelast, wat de hoofdoorzaak is van het reeds gesignaleerde doubleerprobleem. Hoe hoger het ontwikkelingsniveau is, des te beter kunnen de leerlingen met algemener regels werken, des te meer tijdswinst ze behalen, des te meer ze in het voordeel komen t.o.v. minder ontwikkelden.

Om een regel goed te kunnen toepassen op een situatie moet men weten welke regel men moet nemen, waar deze in de situatie ingrijpt, en wat er dan met de situatie gebeurt. Men kan dan ook het toepassen van een regel aanleren in een in stijgende moeilijkheid geordende reeks van opdrachten.

- 1 Men geeft een situatie met één regel en deelt mee waar de regel moet worden toegepast.
 - 2 Men geeft een situatie met één regel en laat uitzoeken waar de regel moet worden toegepast.
 - 3 Men geeft een situatie met meerdere regels en deelt mee waar een van de regels moet worden toegepast en laat uitzoeken welke regel het moet zijn.
 - 4 Men geeft een situatie met meerdere regels en laat uitzoeken welke regel moet worden toegepast en waar.
 - 5 Men geeft een situatie met meerdere regels en deelt mee wat er met de situatie moet gebeuren en laat uitzoeken welke regel dit doet, en waar.
 - 6 Men geeft een situatie die eerst met een oudere regel omgezet moet worden voordat de nieuwe regel kan worden toegepast.
- Deze laatste situatie kan dan weer analoog aan de eerste vijf opgevoerd worden.

Het blijkt mogelijk een inzicht te krijgen in het toepassen van regels. Het weten van een regel, hoe hij werkt, waar hij werkt, wanneer hij werkt voor een categorie van analoge situaties noemen we het kennen van een principe. In de leerboeken komen principes zelden voor, ze blijven ook meestal in het hoofd van de docent zitten. Op zijn best gebruikt een docent ze om de leerlingen in een klasgesprek te leiden. En dan geschiedt het grote wonder: de klas komt in het socratische klasgesprek tot het mooie resultaat, maar hoe dat kon blijft voor de meesten een duistere zaak. Dan zeggen ze: we begrijpen het helemaal, maar we kunnen het nog niet zelf.

Analoog als bij de regels kunnen ook principes aangeleerd worden.

Leerlingen zijn buitengewoon dankbaar voor het krijgen van een expliciet geformuleerd helder principe. Zelfs de onwilligste leerling gaat hard aan het werk

als hij met één principe een aantal regels op een aantal situaties mag proberen. Laten we nu het volgende model eens bekijken: Een situatie wordt voorgesteld als een punt. (Eigenlijk een dik punt, als een cel, want het zit nog vol met de DNA, RNA, ribosomen, enz., van de begrippen.) De situaties die door een regel in elkaar kunnen overgaan worden verbonden met een lijnstuk. Zo ontstaat een ingewikkeld netwerk, zoiets als een spoorwegnet of een wegennet. In sommige punten komen maar twee lijnstukken uit, maar de meeste punten vormen knooppunten van zeer vele wegen. Dan is er nog een tweede netwerk van verbindingen tussen de punten, de begripsmatige, als een soort telefoonnet. Het zou interessant zijn na te gaan hoe deze twee netten t.o.v. elkaar liggen. In elk geval is er maar één wegennet, maar zijn er veel onderling losse telefoonnetten.

Wat is nu een probleem? Dat is een beginpunt en een eindpunt, die met een enkele weg verbonden dienen te worden. Principes zijn nu niet anders dan richtlijnen voor het kiezen van de goede weg bij een knooppunt. Maar daarmee zijn we er nog niet. Men zou een spoorboekje moeten hebben om de juiste aansluitingen te vinden, of een wegenkaart om de route te kunnen uitstippelen. Deze bestaan echter niet. Ervaring moet het doen, of anders een verzameling richtlijnen die van dienst kan zijn. Dit nu noemen we strategieën. En hiermee is het voor de leerlingen nog slechter gesteld dan met de principes. De moeilijkheid is, dat strategieën zo sterk met de persoonlijkheidsstructuur verbonden schijnen te zijn. Een ideale strategie bestaat uit het goed verdelen van de aandacht. D.w.z. een vrij sterke concentratie op de omgeving van het punt waar men aan het werk is, en een daarbij aansluitende zwakkere aandacht over de verdere omgeving, zoiets als een verdeling van Gauss. Weet waar je staat en waar je mee bezig bent, maar hou voldoende aandacht over voor de rest om de samenhang in het oog te houden. Sommigen lijden aan een te flauwe verdeling, anderen aan een te sterke concentratie op één punt. De fouten die daardoor ontstaan zijn zeer karakteristiek en onmiddellijk te herkennen. De eerste uit zich in slordigheid, de tweede in zich verkijken.

Er bestaan natuurlijk ook minder algemene, specifiekere strategieën. Hiervoor gelden ook analoge aanleermethoden als bij de principes en de regels.

Als voorbeeld kies ik een vraagstuk over hoeken en bogen. (Bos en Lepoeter, Wegwijzer in de meetkunde, deel 3, taak 7, vraagstuk 7¹.) We nemen eerst de begrippen met de klas door: omtrekshoek, koorde, gelijkbenige driehoek, raaklijn enz.; daarna een aantal regels: verband omtrekshoek-boog, gelijke hoeken in een gelijkbenige driehoek, regel over de buitenhoek van een driehoek, enz.; vervolgens repeteren we even hoe deze regels werken; tenslotte geef ik als principe op: werk van het gegeven uit tot je alleen iets over bogen overhoudt, werk van het te bewijzen terug ook tot je alleen iets over bogen overhoudt; uiteindelijk: kijk of je met algebräische regels die twee uitdrukkingen in elkaar kunt overvoeren.

Over de mogelijkheden van het onderzoek kan ik nu kort zijn.

De ideale bekwaamheden zijn de zo algemeen mogelijke regels, principes en strategieën. De foutenanalyses kunnen gerubriceerd worden naar: begripsfouten, regelfouten, principefouten en strategiefouten.

De bekwaamheden die uit het basisonderwijs meegenomen moeten worden zijn een verzameling concreet geworden operaties, een goed ontwikkelde operatieve instelling, en een goede fenomenologische kennis van voor de wiskunde belangrijke structuren. Het Malmbergwiskundeproject geeft hierin voor de toekomst veel hoop.

De situaties die in de brugklas de instelling moeten veranderen naar een formeler denken zijn die, die inleiden tot een ontwikkelen naar steeds algemener regels en principes. De invoering tot de strategieën beware men tot de 15-jarige leeftijd, d.w.z. tot de instellingsverandering die hoort bij de overgang van onderbouw naar bovenbouw.

Mathematica & Paedagogia

Op initiatief van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren is besloten, dat abonnees op Euclides of op Mathematica & Paedagogia faciliteiten kunnen verkrijgen, indien ze zich op beide tijdschriften willen abonneren.

Het tijdschrift Mathematica & Paedagogia is het officieel orgaan van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren. Het verschijnt vier maal per jaar; de omvang van elke aflevering is ongeveer drie vel. Sommige artikelen zijn in het Nederlands, andere in het Frans geschreven. De inhoud van het tijdschrift is zeer de moeite waard.

De abonnementsprijs bedraagt in België 150 BF. Lezers van Euclides kunnen een abonnement verkrijgen tegen de gereduceerde prijs van 100 BF. Zij moeten zich daartoe opgeven bij de penningmeester van Euclides (Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek), en wel voor 1 december van dit jaar, onder gelijktijdige overmaking van f 7,30 op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Oosterbeek. Het abonnement gaat in op 1 januari 1971.

Schoolonderzoek (ter overdenking)

1 Volgens de ontwerp nota van toelichting op het onderwerp Besluit eind-examen V.W.O.-H.A.V.O.-M.A.V.O. artikel 16 lid 1 dient het schoolonderzoek voor wiskunde tenminste de examenstof te omvatten, waarover volgens het eindexamenprogramma het schriftelijk examen zich niet kan uitstrekken en ten hoogste de gehele examenstof volgens het eindexamenprogramma.

Opmerking

Voor het H.A.V.O. betekent dit m.i. dat het schoolonderzoek tenminste niets omvat en ten hoogste de gehele examenstof volgens het eindexamenprogramma.

2 Volgens artikel 16 lid 5 dient tenminste één proef van het schoolexamen voor wiskunde op schriftelijke wijze afgenomen te worden. Als toelichting hierop wordt het volgende vermeld:

‘De mogelijkheid die het schoolonderzoek aan iedere school biedt om het eigene van de school bij het eindexamen tot zijn recht te laten komen en een eigen oordeel over iedere kandidaat te geven die mede telt bij de eindbeoordeling van de kandidaat, betekent tegelijkertijd een grote verantwoordelijkheid voor de school tegenover de kandidaten en tegenover de maatschappij en andere onderwijsinstellingen. Het lijkt dus voor de hand te liggen dat het schoolonderzoek zodanig wordt ingericht dat voor de vakken die zich daarvoor lenen het oordeel van de school uitsluitend of althans mede wordt gebaseerd op schriftelijk werk. Immers dit levert een blijvend ‘bewijs’ van de prestaties van de kandidaten.

Ook voor het toezicht op de scholen is uiteraard van belang dat de inspectie zich aan de hand van gemaakt schriftelijk werk een indruk kan maken van het onderwijs aan de betrokken school’.

Opmerkingen

a Attitude-vorming wordt m.i. ten onrechte opnieuw naar de tweede (secundaire) plaats verwezen, of is iemand in staat het leerproces dat gericht is op attitude-vorming door een schriftelijk onderzoek af te sluiten?

b Wél een door de overheid zeer strak gereguleerd examen, maar geen door de overheid verzorgd ‘leerplan’ (een *echt* leerplan) waarvan dit examen een afsluiting is.

H. Broekman

Differentialen en kettingregel

W. AMSE

Heerenveen

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta, \delta > 0, a \in \mathbb{R}\}$ is de verzameling van de reële getallen, die tussen $a - \delta$ en a of tussen a en $a + \delta$ liggen. De verzameling bevat a zelf niet en wordt daarom een *gereduceerde* δ -omgeving van a genoemd.

Zij $f(x)$ een gegeven functie. Men zegt:

De limiet van $f(x)$ voor x is a is l (notatie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$) als er een getal l

bestaat, dat de volgende eigenschap heeft: Welke nauwkeurigheidsgraad van benadering we ook voorschrijven, *steeds* is er een gereduceerde δ -omgeving van a te bepalen, waarop de functiewaarden nog nauwkeuriger door l benaderd worden. Exacte formulering:

Bij *ieder* positief getal ε is er een positief getal δ te bepalen zodanig, dat voor $0 < |x - a| < \delta$ voldaan is aan $|f(x) - l| < \varepsilon$.

In bovenstaande omschrijving staat geen woord Spaans. Toch krijg ik de indruk dat men het limietbegrip niet langer primair wil stellen en aan uitgebreide beschouwingen over continuïteit de voorkeur gaat geven. Ik kan hier niet enthousiast over zijn. De 'statische' omschrijving van de exacte limietdefinitie stelt ook duidelijk het geniale van deze definitie, waarop de hele analyse berust: Het doet er niet toe of a al dan niet tot de definitieverzameling behoort.

Is dit wel zo, dan is dit leuk; vooral als $f(a)$ ook nog 'de eigenschap' heeft (f heet nu continu voor $x = a$).

Maar van

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

is a nimmer een element van de definitieverzameling. En juist nu bestaat het getal l nog al eens en het is dan ook niet van ieder belang gespeend.

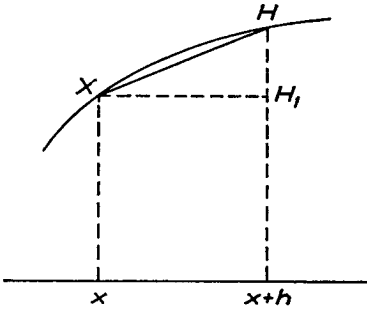
Hoe belangrijk is op dit punt de 'statische' omschrijving van de limietdefinitie! Zelfs al doen we alleen maar wat aan raaklijntje spelen. Maar dan wel oppassen, dat we hier niet buitenspel gaan staan, ik bedoel: Niet van een raaklijn uitgaan, maar een raaklijn definiëren.

Een proeve hiervan om tot mijn onderwerp te komen:

I.p.v. met argument x stelt men via $x-a = h$ het differentiequotiënt ook wel als functie met argument h op. Er komt dan:

$$\varphi_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Nu gaat het om de limiet voor $h = 0$.
 Bovendien kan men nu de heel wat suggererende, maar in feite even weinig als x zeggende letter a weer door x vervangen

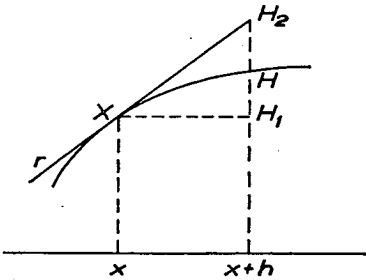


FIGUUR 1

Met $h \neq 0$ behoort $x+h$ steeds tot een gereduceerde δ -omgeving van x , terwijl het differentiequotiënt steeds de tangens van de hoek, die de koorde XH met de positieve richting van de X -as maakt, voorstelt. Bestaat nu $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_x(h)$, dan heeft dit getal de volgende eigenschap:

Bij iedere voorgeschreven nauwkeurigheidsgraad van benadering is steeds een gereduceerde δ -omgeving van x te bepalen, waarvoor geldt: als $x+h$ hiertoe behoort, dan worden bovengenoemde tangenten nog nauwkeuriger door dit getal benaderd.

Met dit getal, dat men als $f'(x)$ pleegt te noteren, definieert men:
De lijn door een punt $(x, f(x))$ van de grafiek van f , die met de positieve richting van de x -as een hoek maakt, waarvan de tangens $f'(x)$ is, heet de raaklijn in dit punt aan de grafiek



FIGUUR 2

De tangens van de hoek, die r met de positieve richting van de x -as maakt is dus niet via het bekende quotiënt

$$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

vastgelegd, maar via het getal $f'(x)$, dat een limiet is. Dit neemt niet weg, dat we, nu éénmaal vaststaat wat een raaklijn is, $f'(x)$ alsnog als bovengenoemd quotiënt kunnen beschouwen. Zo kunnen we t.a.v. fig. 2 stellen:

$$f'(x) = \frac{H_2 H_1}{X H_1}$$

De getallen, die met deze keuze om $f'(x)$ als quotiënt te bepalen, corresponderen, noemt men *differentialen*.

De gekozen noemer heet *primaire differentiaal* en deze wordt met het symbool dx aangeduid. Let wel: dx speelt de rol van h . *De primaire differentiaal kan niet nul zijn.*

Is de primaire differentiaal gekozen, dan ligt de teller $H_2 H_1$ als $f'(x) \cdot X H_1 = f'(x) dx$ vast. Dit getal zullen we de *toegevoegde differentiaal* noemen en deze geven we aan met het symbool df . *De toegevoegde differentiaal kan alleen maar nul zijn, als de afgeleide nul is.* Uit $df = f'(x) dx$ en $dx \neq 0$ volgt

$$df = f'(x) dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Rechts staat $f'(x)$ als *differentiaalquotiënt* geschreven. Historisch heeft dit begrip veel meer te betekenen, dan uit het voorgaande blijkt. Het zou thans geheel ongenoemd kunnen blijven, ware het niet, dat differentialen nog steeds een belangrijke rol spelen. Zo geldt:

De toegevoegde differentiaal benadert $f(x+h) - f(x)$ (HH_1 in fig. 2) des te nauwkeuriger, naarmate de absolute waarde van de primaire differentiaal kleiner gekozen wordt.

$f(x+h) - f(x)$ of te wel $f(x+dx) - f(x)$ is een belangrijk verschil; het bepaalt de verandering van de functiewaarde, die met de algebraïsche toename dx van het origineel correspondeert (mag ik hier wel argument schrijven i.p.v. origineel ...?) Het is waardevol om hiervoor een *eenvoudige* benadering als de toegevoegde differentiaal bij de hand te hebben:

Voorbeeld 1.

Kubieke uitzettingscoëfficiënt ≈ 3 maal de lineaire. Beschouw hiertoe $f(x) = x^3$. Stel dx gelijk aan de lineaire uitzettingscoëfficiënt, dan gaat het om een verantwoorde benadering voor $f(1+dx) - f(1)$. Wegens $f'(1) = 3$ gaat

$$f(1+dx) - f(1) \approx f'(1)dx \text{ over in:}$$

kubieke uitzettingscoëfficiënt ≈ 3 maal de lineaire.

Voor gasen is één en ander te grof omdat dx nu niet klein genoeg is.

Voorbeeld 2.

Geef een benadering van $f(3,953)$ als $f(x) = x^2 - 3x + 1$

Opl. Met $dx = -0,047$ kunnen we stellen:

$$f(3,953) = f(4+dx) \approx f(4) + f'(4)dx = 5 + 5(-0,047) \approx 4,8$$

De foutenanalyse zouden we best differentiaalrekening kunnen noemen.

Daar in de wiskunde uitsluitend met onbenoemde getallen wordt gewerkt, zijn grootheden als in de natuurkunde onbekend. Toch speelt het onbenoemde getal in toepassingen van de analyse binnen de wiskunde dikwijls een specifieke rol.

Zo kunnen x en y de kentallen van een vector of de coördinaten van een punt zijn.

Kentallen en coördinaten kunnen door een *parametervoorstelling* vastgelegd worden, b.v.

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t + 8 \end{cases} \quad \text{vgl. met } \vec{x} = (3, 8) + \lambda(2, -1) = (3 + 2\lambda, 8 - \lambda) \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (2)$$

Analytisch is er geen onderscheid tussen b.v.

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t + 8 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} f(t) = 2t + 3 \\ \varphi(t) = -t + 8 \end{cases}$$

Er is immers slechts sprake van vervanging van de normale symbolen $f(t)$ en $\varphi(t)$ door resp. x en y , zodat er in feite functies in het geding zijn. De leepste notatie om aan te geven, dat x en y uiteindelijk gewoon functies met argument t zijn, is de volgende

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (3)$$

Met de gedachte aan de coördinaten van een punt op de achtergrond, is het begrijpelijk, dat met (3) een puntenverzameling van het vlak correspondeert. Men noemt deze verzameling een *vlakke kromme* of *boog*, gedefinieerd op $a \leq t \leq b$, als $x(t)$ en $y(t)$ hierop differentieerbaar zijn, terwijl $x'(t)$ en $y'(t)$

hierop continu zijn, doch niet beide identiek nul. De kromme is gesloten als geldt $x(a) = x(b)$ en $y(a) = y(b)$. Zo is (2) op $0 \leq t \leq 2\pi$ gesloten. Ook nu is het differentiaalbegrip hanteerbaar.

Vanuit (3) komen we tot:

$$\begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases} \quad (4)$$

T.a.v. (1) luidt (4):

$$\begin{cases} dx = 2dt \\ dy = -dt \end{cases} \text{ of zonder differentiaal } \begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = -1 \end{cases}$$

In (4) is dt de primaire differentiaal.

Laten we eens veronderstellen, dat $x'(t)$ op $a \leq t \leq b$ nergens nul is, dan is de toegevoegde differentiaal dx dit ook.

Uit (4) vinden we nu door deling:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (5)$$

T.a.v. (1) wordt dit dus $dy/dx = -\frac{1}{2}$

Nu is dy/dx op zichzelf de afgeleide van y als functie van x in differentiaal-quotiëntnotatie. Slaat deze opmerking, t.a.v. (3) ergens op? Als we ook t.a.v. de keuze van de primaire differentiaal de accoladen laten spreken, dan is (5) correct onder de conditie: $x'(t)$ op $a \leq t \leq b$ nergens nul. Maar onder deze conditie wordt door (3) juist een functie f gedefinieerd, waarvoor geldt $y = f(x)$ x is nu immers monotoon op $[a, b]$, zodat x op $[x(a), x(b)]$ een inverse functie heeft, waarmee het mogelijk is t éénduidig in x uit te drukken. Door substitutie hiervan gaat $y = y(t)$ in $y = f(x)$ over. (5) *geeft dus de tangens van de hoek aan, die de raaklijn in het punt $(x(t), y(t))$ aan de kromme met de positieve richting van de x -as maakt.* Voor het geval, dat we de conditie $x'(t) \neq 0$ op $a \leq t \leq b$ niet wensen voorop te stellen, moeten we als volgt redeneren:

Zij X het punt $(x(t), y(t))$ op de kromme en H het punt $(x(t+h), y(t+h))$. De vectorvoorstelling van de koorde XH luidt dan:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x(t), y(t)) + \lambda(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)) \\ &= (x(t), y(t)) + \mu \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \text{ mits } h \neq 0 \end{aligned}$$

T.a.v. de kentallen van de richtingsvector is limietovergang voor $h = 0$ mogelijk, want $x(t)$ en $y(t)$ zijn beide differentieerbaar op $[a, b]$.

Onder de raaklijn aan de kromme in het punt $(x(t), y(t))$ verstaan we nu weer per definitie de lijn met de volgende vectorvoorstelling:

$$\vec{x} = (x(t), y(t)) + \mu(x'(t), y'(t))$$

Zoëven werd gesteld:

$x'(t)$ nergens op $[a, b]$ nul houdt in, dat t éénduidig in x uit te drukken is.

Voorbeeld: $x = 4t + 8$, $a \leq t \leq b$.

$x'(t) = 4$, dus $x'(t)$ nergens nul op $[a, b]$. De uitdrukking te achterhalen is thans niet moeilijk, want er geldt:

$$x = 4t + 8 \leftrightarrow t = \frac{1}{4}x - 2$$

Met $a \leq t \leq b$ correspondeert $4a + 8 \leq x \leq 4b + 8$, d.i. $x(a) \leq x \leq x(b)$. Heeft $x = x(t)$ derhalve op $a \leq t \leq b$ een inverse functie, dan is de definitieverzameling hiervan:

$x(a) \leq x \leq x(b)$ als $x(t)$ monotoon stijgend is op $[a, b]$

$x(a) \geq x \geq x(b)$ als $x(t)$ monotoon dalend is op $[a, b]$

Het volgende probleem is echter minder simpel:

Op $\pi/6 \geq t \geq \pi/3$ is de afgeleide van $x = \cos t$ nergens nul. Hoe moeten we uit $x = \cos t$ een uitdrukking $t = t(x)$ met definitieverandering $\cos \pi/6 \geq x \geq \cos \pi/3$ afleiden?

Analytisch verschilt deze onmogelijk lijkende opdracht niet met de volgende: Bepaal de inverse functie van $x(t) = t^2$, $1 \leq t \leq 3$.

Van beide problemen moeten er analytisch gezien n.l. domweg uitdrukkingen gedefinieerd worden. Voor het laatste is dit de reeds bekende uitdrukking $t = \sqrt{x}$ met $[1, 9]$ als definitieverzameling.

Voor het eerste probleem: $t(x) = \arccos x$ op $\frac{1}{2}\sqrt{3} \geq x \geq \frac{1}{2}$.

T.a.v. de afgeleide van een inverse functie moeten we weer vasthouden aan $x'(t)$ nergens nul op $[a, b]$. Dan geldt immers:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) \leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'(t)} \quad (6)$$

T.a.v. $t = \frac{1}{4}x - 2$ zou dus moeten gelden $dt/dx = \frac{1}{4}$, hetgeen inderdaad de afgeleide van deze functie is. Nog een voorbeeld:

$x(t) = t^3$ heeft op $1 \leq t \leq 2$ een afgeleide, die hierop nergens nul is.

De inverse functie is $t(x) = \sqrt[3]{x}$, $1 \leq x \leq 8$. Volgens (6) geldt op $[1, 8]$:

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{3t^2}$$

Nu is dit een voorschrift, waarin i.p.v. argument x argument t optreedt. Dit

euvel is echter zeer eenvoudig te verhelpen. Uit $t = \sqrt[3]{x}$ volgt immers $t^2 = \sqrt[3]{x^2}$, zodat we komen tot:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Het bovenstaande kan overigens als bewijs niet door de beugel. Eerst moet n.l. de differentieerbaarheid van de inverse functie vaststaan; dan pas mogen we met differentialen gaan manipuleren.

Een analoge waarschuwing moeten we onze leerlingen m.i. ook geven na hun eerste kennismaking met de samengestelde functie die met differentialen eveneens zo heerlijk vlot verloopt:

Zij $y = y(t)$ differentieerbaar op $a \leq t \leq b$ en $t = t(x)$ op $p \leq x \leq q$, waarbij $t'(x)$ op $[p, q]$ nergens nul is. Dan gelden:

$$dy = y'(t)dt \quad (7)$$

$$dt = t'(x)dx \quad (8)$$

Als toegevoegde differentiaal volgens (8) is dt niet nul op $[p, q]$. Daar dt volgens (7) primaire differentiaal is, is de brutale substitutie van (8) in (7) wat de kwestie van het niet nul zijn betreft, niet aanvechtbaar. Genoemde substitutie leidt tot

$$dy = y'(t) \cdot t'(x)dx \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y'(t) \cdot t'(x) \quad (9)$$

Voorts kan deze substitutie alleen zinvol zijn als $[t(p), t(q)] \subset [a, b]$. Dan kan immers t in de uitdrukking $y(t)$ door $t(x)$ vervangen worden, waardoor y een functie van x wordt i.p.v. van t . Aan $y = y(x)$ laat zich nu onderscheiden de *onderfunctie* $t(x)$ en de *hoofdfunctie*, waarvan 'de werking' door $y(t)$ vastgelegd is.

Vanuit dit standpunt noemen we $y = y(x)$ een *samengestelde* functie, gedefinieerd op $p \leq x \leq q$.

(9) leert nu inderdaad, dat van een samengestelde functie de afgeleide gelijk is aan het produkt van de afgeleiden van hoofd- en onderfunctie. Streng theoretisch is het zelfs mogelijk om de conditie ' $t'(x)$ nergens nul op $[p, q]$ ' te laten vallen. Het bewijs van de differentieerbaarheid van de samengestelde functie vergt dan de invoering van een tweede definitie voor differentieerbaarheid. Voorbeeld ter toelichting van (9):

$$y(x) = (2x^2 - 3)^4$$

Om hiervan de afgeleide te bepalen, is het niet noodzakelijk de macht eerst

uit te werken. We moeten $y(x)$ dan echter als samengestelde functie differentiëren.

de onderfunctie is $t(x) = 2x^2 - 3$

de hoofdfunctie is $y(t) = t^4$

Er geldt nu:

$$y'(x) = y'(t) \cdot t'(x) = 4t^3 \cdot 4x = 4(2x^2 - 3)^3 \cdot 4x$$

Zou in dit voorbeeld één en ander door uitwerking nog omzeild kunnen worden, vele functievoorschriften zijn zodanig, dat de afgeleide alleen via de *kettingregel* te bepalen is.

Inverse functies worden steeds via een z.g. definitieformule ingevoerd. Voorbeeld:

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x \tag{10}$$

Het linkerlid hiervan is de samengestelde functie, waarvan de door (10) gedefinieerde functie $t(x) = \sqrt[3]{x}$ de onderfunctie is en $y(t) = t^3$ de hoofdfunctie. Van beide functies is $\mathbb{R}$ de definitieverzameling. Differentiëring volgens (9) geeft $y'(x) = 3t^2 \cdot t'(x)$. Maar de afgeleide van het rechterlid is 1, derhalve:

$$3t^2 \cdot t'(x) = 1 \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow t'(x) = \frac{1}{3t^2} \Leftrightarrow t'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Opm.: (11) geldt niet voor $x = 0$.

Er is dan niet aan de voorwaarden voor differentieerbaarheid voor een inverse functie voldaan.

Het opschrift van dit artikel doelt uiteindelijk op de volgende samenvatting:

T.a.v. $dy = y'(t)dt$ is het irrelevant of t argument of onderfunctie is.

Zo geldend $dy = 6t^5 dt$ en $dy = 6(x^2 + 1)^5 d(x^2 + 1)$ resp. t.a.v. $y = t^6$ en $y = (x^2 + 1)^6$.

Het is dan ook weinig zinvol om nog langer onderscheid te maken tussen toegevoegde en primaire differentiaal; met de identieke functie als onderfunctie is de primaire differentiaal steeds als toegevoegde te interpreteren.

Gedachten rondom discrete wiskunde*

H. J. A. DUPARC

Delft

Na haar grote bloei in de Griekse tijd ontving de wiskunde in de zeventiende eeuw een enorme impuls door de ontdekking der infinitesimaalrekening, welke van zeer groot nut bleek voor het beschrijven van fysische en technische verschijnselen. Geen wonder dat juist dit deel der wiskunde grote aandacht heeft bij het technisch wetenschappelijk onderwijs en dat ook bepaalde gedeelten ervan geleidelijk hun plaats vinden in het secundair onderwijs.

Inmiddels is er naast de infinitesimaalrekening een ontwikkeling gekomen waarbij de limietvrije wiskunde, in het Engels in tegenstelling tot de infinitesimaalrekening ook wel finite mathematics genoemd, een steeds belangrijker rol gaat spelen. Het is dit deel der wiskunde, ook wel discrete wiskunde genoemd, waaraan wij hier enige aandacht willen geven.

Onder de discrete wiskunde vallen vele onderwerpen, die al lang in de wiskunde werden bestudeerd, maar die thans in een wat algemener raam hun natuurlijke plaats vinden in het geheel van de limietvrije wiskunde. Zoals in het vervolg zal blijken vinden dergelijke onderwerpen ook hun toepassing in talloze gebieden buiten de wiskunde zelf, ja zelfs lijkt het of de maatschappelijke betekenis van deze onderwerpen niet zal onderdoen voor die van de klassieke infinitesimaalrekening.

Er is een gelukkig samengaan van de gedachten over modernisering van het wiskundeprogramma bij secundair (en wellicht ook bij primair) onderwijs en de hier genoemde ontwikkeling, al zal een kritisch toeschouwer wellicht geneigd zijn op te merken dat een aantal destijds in het nieuwe wiskundeprogramma gepropageerde nieuwe onderwerpen achteraf wellicht een sterkere motivering kon vinden dan ten tijde van de eerste invoering zelf.

Misschien is het in dit kader wel goed nog even stil te staan bij de populariteit die het moderne wiskundeprogramma heeft bij een groot deel van de betrokkenen, niet in het minst bij de leerlingen zelf. Voor een deel zal dat niet aan de onderwerpen zelf toe te schrijven zijn, maar vooral aan het elan waarmee de docenten zich toeleggen op het doceren van deze nieuwe gedeelten van hun

* Voordracht gehouden voor de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Utrecht op 22 december 1969.

onderwijs en de onbevangen stijl, waarin de desbetreffende leerboeken zijn geschreven. Het stemt echter wel tot nadenken dat een dergelijk elan en een dergelijke suggestieve wijze van brengen van de stof in de leerboeken niet bij het klassieke wiskundeonderwijs konden worden opgebracht. Met verdriet stel je vast, dat men in die hoek wel kansen voorbij heeft laten gaan en onvoldoende een open oog heeft gehad voor de vele fraaie en nuttige zaken die de klassieke wiskunde ook had kunnen bieden.

Maar nu ter zake met de discrete wiskunde, die in vele facetten als een soort relatieleer of algebra te beschrijven valt. Bij een vluchtige poging tot inventarisatie zou men een zevental hoofdgedeelten kunnen opsommen, die – soms al eeuwen her, soms pas in de laatste tijd – aandacht vragen voor de onderwijsprogramma's. Het is naar mijn oordeel wellicht goed om die onderwerpen hier successievelijk te behandelen, enerzijds in hun analogie, waardoor zij elk hun plaats in het geheel der discrete wiskunde kunnen innemen, anderzijds in hun toepassingsgebied, dat die plaats in het onderwijs mede argumenteert.

I (Formele) logica. Zodra men aan dit onderdeel de naam van redeneeralgebra zou toekennen, is het duidelijk waarom dit gebied thuis hoort in de discrete wiskunde en ook van welk verder nut dit vak wel is. Het kan ons het frame bieden van een mathematische (of zelfs in andere gebieden van wetenschap of dagelijks leven optredende) redenering. Geen wonder dat hier ook verbanden liggen met de activiteiten van rekenrobots, veelal deftig computers genoemd.

II Enigszins verwant aan de logica is de verzamelingsleer, die men in zeker opzicht wel structuuralgebra zou kunnen noemen. Wie de plaatjes ziet die de huidige leerboeken over verzamelingsleer bevatten en ook die die als vluchtige krabbels worden gezet in bestuursstructuurcommissies (zoals men die de laatste tijd kent bij onze universiteiten en hogescholen en vaak al langer in het bedrijfsleven), wordt getroffen door een sterke overeenkomst. Ook in de grondslagen van de waarschijnlijkheidsrekening ontmoet men formules waarin de bekende begrippen uit logica en verzamelingsleer ('en', 'of', 'niet'; 'vereniging', 'doorsnede', 'complement') van nut zijn.

III De klassieke schoolalgebra, handelende over een systeem met de in de moderne algebra scherper geanalyseerde operaties als optelling enz., een voor verdere wiskundehandelingen onmisbaar apparaat. Het is merkwaardig dat een poging tot axiomatiek, in de meetkunde al sinds de dagen van Euclides een inherent deel van dat vak, bij de algebra pas sinds Van der Waerden begint door te dringen. Het is ook merkwaardig dat terwijl men nu bij de algebra daaraan meer aandacht geeft, de aandacht bij de meetkunde voor deze zaken verflauwt (of moet men zeggen: verschuift?).

IV Het is gebruikelijk bij de algebra een belangrijk deelgebied af te zonderen,

het deelgebied der lineaire algebra. Voorlopig nog in de klassieke vorm van analytische meetkunde, maar toch ook al hier en daar via de vectorrekening treedt dit gebied steeds sterker op in het programma van het secundair onderwijs. Van huis uit was het belangrijkste toepassingsgebied de euclidische meetkunde zelf; het blijft wel te hopen dat men toch steeds ook aandacht blijft geven aan de meetkundige behandeling van dit vak, waarbij het element van aanschouwing (door sommigen als onwiskundig, dus verwerpelijk, aangemerkt, door anderen als hulpmiddel wel degelijk – soms clandestien – aanvaard) naar mijn oordeel een constructief hulpmiddel bij het wiskundig handelen blijft. Alleen al daarom zou ik het jammer vinden als men het als de grootste trouwaille van deze eeuw zou zien dat het gehele meetkundeonderwijs analytisch zou dienen te geschieden. Dat de analytische meetkunde echter op de achtergrond een geschikt laatste redmiddel is als men er op andere wijze niet uitkomt, is troostrijk; dat zij soms elegant hulp kan bieden bij gemakkelijker problemen, is iets waarvan men natuurlijk ook partij dient te trekken.

V De algebra van Boole, waarbij men kennis maakt met tralies of roosters heeft twee nuttige elementen: ten eerste dat men ziet dat de definitie van 'som' en 'produkt' niet steeds op de klassieke wijze behoeft te geschieden, ten tweede dat men hier een geschikt middel heeft om schakelingen te beschrijven, iets dat geschiedt in de schakelalgebra welke men toegepaste algebra van Boole zou kunnen noemen.

VI De getallentheorie kan meer hulp bieden bij de beschrijving van bepaalde gedeelten uit de techniek, zoals de informatica, dan de getallentheoretici van weleer ooit hadden durven of willen onderkennen. Met name de theorie der eindige lichamen (waarbij vooral het restklassensysteem der gehele getallen modulo 2 een grote rol speelt) is hierbij een onontbeerlijk hulpmiddel. Verwant aan het in de vorige rubriek genoemde is de opmerking, dat hierbij alweer een systeem met optelling en vermenigvuldiging optreedt dat afwijkt van het klassieke maar dat ook nog verschilt van wat men bij de algebra van Boole ontmoet.

VII Ten slotte valt nog een tegen de klassieke analyse aanleunend gebied als dat der differentierekening te noemen. Hierin worden functies $f(x)$ beschreven voor discrete, vaak ekwidistante waarden van de onafhankelijk veranderlijke x . De differenties $f(x+1)-f(x)$ spelen daarbij een belangrijke rol; men kan – althans bij differentieerbare functies – het natuurlijk toch niet nalaten die via de stelling van Rolle in verband te brengen met de afgeleide. Maar ook bij niet-differentieerbare functies is een differentie van belang. Menig bankdirecteur kijkt met bezorgdheid of vreugde naar de zo duidelijk tot hem sprekende staafdiagrammen, in feite aangeklede grafieken van discrete functies, welke verleden, heden en soms ook de toekomst van zijn bedrijf kunnen illustreren. En ook in de numerieke wiskunde, waar vele problemen uit de

continue wiskunde via een discrete rekentechniek worden aangepakt, maakt men veel gebruik van resultaten en methoden uit de differentierekening. Zou men tenslotte zich nog durven wagen aan een algemene omschrijving van discrete wiskunde, misschien op deze plaats beter dan dit in het begin kon geschieden? Als wij dat proberen dan zou men wellicht komen tot iets als: leer der relaties.

Een iets verdere uitwerking van die gedachten zou kunnen voeren tot de volgende kenschetsing van de discrete wiskunde: de leer der eindig vaak toegepaste relaties op bepaalde systemen en (dus) van hun werking. Of in die systemen zelf eindig of oneindig veel elementen bevat zijn, is daarbij niet relevant. Het eerste is onder meer het geval bij het rekenen met gehele getallen modulo 2, het laatste bij de verzameling der natuurlijke getallen of der functies $f(x)$, beschouwd voor alle gehele x .

Tot slot kan nog worden opgemerkt dat een vak als de (klassieke) algebra met zijn relatieve rijkheid aan relaties een uiterst nuttig hulpmiddel is in zeer vele verdere gebieden der wiskunde, maar dat ook allerlei systemen met een schaarsere structuur thans evenzeer hun gerechtvaardigde plaats opeisen. Die wordt niet alleen gerechtvaardigd door de wetenschappelijke of educatieve charme, waarmee die onderwerpen zijn te behandelen, maar wel degelijk ook door hun grote veld van toepassingen in natuurwetenschappen, techniek, economie, kortom op vele kernplaatsen in onze maatschappij. Dit te onderkennen en daarnaar te handelen maakt de soms zo abstracte wiskunde tot een maatschappelijk vak van grote kracht en betekenis.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributieverhoging

Op de algemene ledenvergadering van 22 december 1969 is de contributie verhoogd tot f 15,— per verenigingsjaar in verband met duurder abonnement op Euclides en andere hogere kosten. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen betalen een contributie van f 8,—.

De penningmeester maakt de leden erop attent dat het verenigingsjaar op 1 augustus begint. De verschuldigde contributie wordt gaarne ontvangen op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

Korrel CLXII

Volledige inductie

Voor de termen van een rekenkundige rij geldt

$$\begin{aligned}t_1 &= a \\t_2 &= a + v \\t_3 &= a + 2v \\t_4 &= a + 3v \\&\dots\end{aligned}$$

De n^{e} term krijgt men dus door bij de 1^{e} term $n - 1$ keer het verschil op te tellen. Dus

$$t_n = a + (n - 1)v.$$

Iedere leerling begrijpt het. Hij ziet, dat 'het zo doorgaat'. Vakmensen zeggen, dat dit niet streng is en dat het bewijs gegeven moet worden met volledige inductie. Dus:

Onderstel, dat k een natuurlijk getal is, waarvoor geldt

$$t_k = a + (k - 1)v, \tag{1}$$

dan is ook $k + 1$ een dergelijk getal. Immers uit (1) volgt

$$\begin{aligned}t_{k+1} &= a + (k - 1)v + v = \\&= a + kv = \\&= a + ((k + 1) - 1)v.\end{aligned}$$

Reactie van de leerling, die het niet begrijpt: het was me volkomen duidelijk, maar nu snap ik er niets meer van. Reactie van de leerling, die het wel begrijpt: dat heb ik immers ook beweerd. Ik zei, dat het zo doorging. Gaan we 1 term verder, dan komt er 1 keer v bij. Het aantal keren v blijft dus 1 minder dan het rangnummer. Maar waarom zegt u iets eenvoudigs zo ingewikkeld?

Inderdaad heeft deze leerling gelijk. Het probleem zit echter dieper. Dat het zo doorgaat, is wel duidelijk. Minder duidelijk, althans vanuit het standpunt van de vakman, is dat uit het 'zo doorgaan' volgt, dat de formule juist is voor elk natuurlijk getal. Dit hangt samen met de structuur van de natuurlijke getallen en berust uiteindelijk op een axioma, waarmee we onze leerlingen uiteraard niet lastig vallen. In ons onderwijssysteem berust de stringentie van het bewijs met volledige inductie dus op intuïtieve gronden. Hier heb ik geen enkel bezwaar tegen. Maar ik begrijp niet, waarom men het in de aanvang gegeven bewijs voor de formule $t_n = a + (n - 1)v$ veroordeelt, omdat het niet streng is, maar alleen

maar intuïtief juist. Het is even streng als het daarna gegeven bewijs, alleen is de formalistiek vervangen door een redenering van gelijke strekking.

Op deze wijze inductieve bewijzen introduceren is dan ook m.i. niet verantwoord. Laten we liever proberen voorbeelden te zoeken, waaruit de noodzaak van de inductieve methode duidelijk blijkt.

Als voorbeeld kies ik de rij van Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots,$$

gedefinieerd door

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_{n+2} = t_n + t_{n+1}.$$

We beweren, dat deze rij bestaat uit telkens twee oneven termen gevolgd door één even term. Je ziet, dat dit in het begin van de rij uitkomt en je ziet ook, dat het zo doorgaat. Maar ditmaal is dat laatste niet evident. Het vereist een redenering. Inderdaad begint de rij met: oneven, oneven, even. Verder geldt:

op oneven, even volgt oneven,

op even, oneven volgt oneven,

op oneven, oneven volgt even.

Hieruit volgt, dat het 'zo doorgaat'.

Dergelijke voorbeelden lijken me van veel nut om de leerling draagwijdte en doel van het bewijs met volledige inductie bij te brengen.

Ik zou hier nog aan toe willen voegen, dat de gedachtengang, die aan een inductief bewijs ten grondslag ligt, voor de leerling niet moeilijk is. Het is niet moeilijker dan het begrijpen van erfelijkheid. Het formalisme daarentegen is wel moeilijk. Als we willen bewijzen:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) A(n),$$

dan doen we dit door aan te tonen:

$$1 \quad A(1),$$

$$2 \quad \text{als } k \text{ een natuurlijk getal is, waarvoor geldt } A(k), \text{ dan geldt ook } A(k+1).$$

Nu gaan we uit van $A(k)$ en bewijzen, dat ook $A(k+1)$ geldt. De leerling is gewoon, als hij uitgaat van $A(k)$ daaronder te verstaan $(\forall k) A(k)$. Dat mag hij hier per se niet doen. De premisse $A(k)$ wil niet zeggen, dat $A(k)$ voor elke k juist is. Wel is de deductie van $A(k+1)$ uit $A(k)$ voor elke k juist. En dus is de strekking van het betoog, dat bewezen wordt: $(\forall k) \cdot A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Hier zit de kneep, waardoor het inductieve bewijs zoveel moeilijkheden voor het begrip oplevert.

Conclusie: geef inductieve bewijzen, maar vermijd de formele gedaante. Breng dus de leerling een goed inzicht in de methode bij en geen halfbegrepen formalistiek.

P. G. J. Vredenduin
Oosterbeek

Staatsexamen Gymnasium A en B 1969

Uit het examenverslag

WISKUNDE

De subcommissie voor de wiskunde heeft geconstateerd dat het gemiddelde van de dit jaar door de A-kandidaten behaalde cijfers voor de algebra 5,3 en voor de meetkunde 5,3 bedroeg.

Vorig jaar waren deze gemiddelden 5,3 resp. 5,4.

Ten aanzien van de verscheidene onderwerpen die tot de examenstof behoren, kan het volgende worden opgemerkt:

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen kon men goed met de zgn. abc-formule overweg. Verscheidene kandidaten hadden er echter nogal wat moeite mee de methode van het kwadraat-afsplitsen te gebruiken of te ontbinden in factoren.

Bij de theorie van de kwadratische functie valt op dat velen weten dat de grafiek van een dergelijke functie een dalparabool is als de coëfficiënt van x^2 positief is, maar hiervoor geen verklaring kunnen geven.

Het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden met de daaraan gekoppelde begrippen strijdigheid en afhankelijkheid bleek evenals vorig jaar tot de zwakke punten in de wiskunde-kennis van vele kandidaten te behoren.

Bij de 'geschiedenis van de wiskunde' is het niet voldoende, dat men alleen de Egyptische en Babylonische wiskunde heeft bestudeerd; het accent behoort te vallen op de Griekse wiskunde (t.e.m. Euclides Elementen Boek I).

De stof voor het examen in de beginselen van de statistiek omvat de volgende onderwerpen: frequentieverdeling, histogram, gemiddelde, spreiding, permutaties en combinaties, kansrekening, kansverdeling, steekproeven (en eventueel ook de normale kromme).

Bij de planimetrie heeft de subcommissie geconstateerd dat de kandidaten in het algemeen de goniometrie beter beheersen dan in de voorafgaande jaren het geval was. Het voorstellingsvermogen schiet wel eens te kort; men moet ogenblikkelijk kunnen inzien dat een driehoek met zijden 1, 2 en 7 tot de onmogelijkheden behoort.

De subcommissie meent dat de stereometrie voor vele A-kandidaten een zware belasting is.

De B-kandidaten behaalden dit jaar gemiddeld voor algebra 6,0, voor stereometrie 6,3, voor goniometrie en analytische meetkunde 5,7. Vorig jaar bedroegen deze cijfers resp. 6,6; 6,7 en 6,2.

Bij de algebra verdient het aanbeveling bij enigszins gecompliceerde ongelijkheden gebruik te maken van grafieken. Men verdrinkt hier anders snel in existentie-voorwaarden en andere nevenvoorwaarden die, zonder het tekenen van grafieken, de oplossing erg onoverzichtelijk maken.

Bij de stereometrie was het inzicht in de ligging van lijnen en vlakken in lichamen als viervlak en kubus gering.

Bij de analytische meetkunde had men moeilijkheden bij het elimineren van parameters, speciaal als een hoek als parameter optrad.

Het lijkt juist in dit verband eens te wijzen op het nut van een betrekking als $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ als bijv. de x-coördinaat van een punt een lineaire functie van $\sin \phi$ en de y-coördinaat van $\cos \phi$ is.

Het opdoen van routine aan de hand van vraagstukken die aan het inzicht de nodige eisen stellen is bijzonder gewenst.

Boekbespreking

E. Bouqué, *Kardinaalgetallen*, Story's Wiskundige Monografieën deel 3, Wetenschappelijke Uitgeverij E. Story – Scientia, Gent 1970, 92 blz., Bfrs. 160.

Voor de derde keer heeft Bouqué de wiskundeleraren in België de dienst bewezen een uitstekend boekje te schrijven over een onderwerp uit de hedendaagse wiskunde en dit op moderne wijze te behandelen. Het doorwerken van dit boekje maakt de lezer vertrouwd met moderne methoden en notaties. Natuurlijk is het niet alleen van belang voor de Belgische wiskundeleraar, voor wie het in het bijzonder samengesteld is. Zijn Nederlandse collega zal met evenveel vrucht het boek kunnen lezen. Ook voor hem draagt het bij tot een goed begrip van het hedendaagse wiskundige denken.

Eerst worden de kardinaalgetallen in het algemeen behandeld. We zien, hoe we ermee kunnen rekenen, hoe ze geordend zijn en ten slotte wat het verschil is tussen eindige en oneindige kardinaalgetallen. Oneindige kardinaalgetallen worden gedefinieerd als kardinaalgetallen van verzamelingen, die met een van hun echte delen gelijkmachtig zijn; eindig zijn de niet-oneindige kardinaalgetallen.

In een volgend hoofdstuk komen de eindige kardinaalgetallen aan de orde. Op basis van de theorie van de kardinaalgetallen wordt de theorie van de natuurlijke getallen ontwikkeld. In het bijzonder worden de axioma's van Peano bewezen.

Het laatste hoofdstuk is gewijd aan de transfinitie kardinaalgetallen. We leren hier rekenen met $\aleph$ en $\mathfrak{c}$ (de oneindig aftelbare resp. de continue machtigheid). We leren machtsverheffen met kardinaalgetallen en we zien, dat voor elk kardinaalgetal p geldt: $2^p > p$. Verder zien we, dat het aantal deelverzamelingen van een verzameling met kardinaalgetal p gelijk is aan 2^p . Tot slot een enkele kritische opmerking. Op pag. 63 bewijst de schrijver, dat elke oneindige verzameling een deelverzameling heeft, die aftelbaar oneindig is. Hij bewijst dit door gebruik te maken van het keuzeaxioma, zij het impliciet. Hij had dit kunnen vermijden door bij het bewijs van een sliert gebruik te maken. Misschien is dit wel een opmerking, die typisch is voor iemand uit het land van Brouwer.

De volgende opmerking is echter minder typisch. Op pag. 70 zegt de schrijver de continuüm-hypothese als axioma te willen aanvaarden. Dit doet hij blijkbaar, omdat hij dat bij sommige bewijzen gemakkelijk vindt. Zo gebruikt hij de continuümhypothese bij het bewijs van de stelling, dat de machtigheid van het interval $[0, 1]$ gelijk is aan $\mathfrak{c}$. En ook om te bewijzen, dat $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Beide bewijzen kunnen echter ook zonder veel moeite gegeven worden zonder van de continuümhypothese gebruik te maken. Het lijkt mij beter niet de schijn te wekken, dat voor het bewijs van deze eigenschappen het aanvaarden van de continuümhypothese noodzakelijk zou zijn.

Deze kleine schermutselingen doen echter, zouden ze gegrond zijn, niets af aan de grote waarde die het boek voor de huidige leraar heeft.

Ik las, dat in voorbereiding zijn twee deeltjes over algebraïsche structuren van de hand van R. Holvoet. Ik zie ze met veel belangstelling tegemoet.

P. G. J. Vredenduin

E. Hemmerling, *Fundamentals of College Geometry*, John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 1969, 2e druk, 463 blz., 80/-.

De eerste druk verscheen in 1964. Deze werd besproken in de 40ste jaargang, blz. 283. De nieuwe druk is aangepast aan de wensen, naar voren gebracht door gebruikers van de eerste druk. Schrikt men van de prijzen van onze hedendaagse schoolboeken, ook dit boek is in dit opzicht niet direct om gerust te zijn.

Burgers

Drs. H. Jansen, *Algebra voor de derde klas*, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1970, 80 blz. f 4,75.

Het boekje is verdeeld in 5 hoofdstukken (vierkantsvergelijkingen, de rekenliniaal (Aristo Scholar 0903LL), functies, ongelijkheden en herhaling) en 38 lessen.

In les 1 wordt terecht betoogd dat het berekenen van de wortels berust op de stelling: Een produkt is dan en slechts dan 0 als een van de factoren 0 is.

Het is jammer dat de auteur dit niet consequent heeft doorgevoerd. Het is ook even storend dat in de afleiding van de *abc*-formule een 'vergelijking' versierd is met twee $=$ -tekens en dat plot-seling, zonder een opmerking, wordt overgegaan op $\sqrt{(b^2-4ac)/4a^2}$.

Dat de *abc*-formule ook in $\mathbb{C}$ geldt is nu niet relevant. Kritisch nagaan van de toepasbaarheid van operaties was meer aanbevelingswaardig. Dit geldt ook voor een systematische behandeling van de kwadratische functies en hun grafieken. Het is toch aardiger als de leerlingen uit de grafiek van x^2 ineens ontdekken die van: x^2+1 , x^2-2 , $2x^2$, $2x^2+1$, $(x-1)^2$, $(x+1)^2$, $(x-2)^2+3$ enz. Het kwadraatafsplitsen wordt dan tevens ontdekt. Ook de vetgedrukte samenvattingen op blz. 48 en 49 kunnen me niet bekoren. Domme of liever minder intelligente leerlingen willen dit gauw van buiten leren en dat kan toch niet de bedoeling zijn. Maar de auteur zal misschien reageren met een zin uit het voorwoord: De positie van het leerboek is nog steeds dezelfde, ondergeschikt aan de les.

Burgers

W. R. Fuchs, *Denken met computers*, W. Gaade, N.V. Den Haag, 1970, 365 blz., f 35.—.

Dit is het tweede deel uit de serie 'Wegwijzers door de wetenschap'. De oorspronkelijke titel is: *Knaurs Buch der Denkmaschinen*. De Nederlandse vertaling is van H. G. Bremer.

Het leidt geen twijfel dat voor menigeen de computer als een denkende robot wordt aangezien. In science-fiction verhalen en in t.v.-series ontmoet men al zelfstandig opererende robots die de macht van hun maker hebben overgenomen. Dit schrikbeeld wil de auteur tot zijn ware proporties terugvoeren. Het is dan nuttig om het 'denken' nader te analyseren, de taal te onderzoeken en de informatie en communicatie aan een nauwkeurig onderzoek te onderwerpen. Het boek bestaat uit, althans daar lijkt het op, dertien lezingen. De verschaafte informatie is redundant¹. Na 180 bladzijden komt pas het eerste 'denktuig' m.b.v. bistabiele schakelingen, ja-neen beslissers, via waterkranen (open-dicht) aan de orde. Deze schakelingen automatiseren de waarheidstabellen van de logische oordelen: $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ e.a. De invoering van elektrische schakelingen versnellen het proces en dank zij de transistors wordt de schakelsnelheid tot nanoseconden (10^{-9} sec) teruggebracht. Veel aandacht is besteed aan de informatietheorie. Wordt eerst de redundantie zo gering mogelijk gemaakt, om storingen in de communicatie te minimaliseren wordt weer een beperkte redundantie ingevoerd. Na ongeveer 250 bladzijden komt dan het 'rekentuig' aan de orde.

Het boek zal m.i. in ruime kring belangstelling in deze materie bevredigen. Wiskundige kennis wordt niet vereist.

Burgers

Mathematics, deel I en II. Under the editorial direction of Roy Dubisch and Isabelle P. Rucker. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1969, 53/—.

In deze boeken geven de schrijvers een benadering van de wiskunde op een moderne, voor de leerlingen aansprekende, wijze.

¹. De tekst op het reclamebord: 'Hier verkoopt Sam verse vis' is redundant. 'Hier' is natuurlijk overbodig, dat is wel duidelijk. Men betaalt voor wat men meeneemt, dus 'verkoopt' is overbodig. Dat de vis *vers* is, dat ruikt men wel. Dat het *vis* is ziet men wel en dat de verkoper Sam heet, interesseert niemand.

Elk hoofdstuk wordt ingeleid met voorbeelden waarin op speelse wijze de problemen worden benaderd. Nadat hierdoor de belangstelling voor het hoofdstuk gewekt is wordt met veel voorbeelden de theorie uitgewerkt, waarbij elk onderdeel is voorzien van zeer veel oefenmateriaal, variërend van zeer eenvoudig tot moeilijk. Behalve inzicht wordt de leerling hierdoor zeer veel gelegenheid tot oefening geboden.

In de boeken zijn algebra en meetkunde dooreen verwerkt.

Bij de algebra wordt veel aandacht besteed aan eigenschappen van operaties, terwijl ook een groot aantal onderwerpen uit de rekenkunde van onze lagere school hier wordt behandeld (breuken, verhoudingen, deelbaarheidseigenschappen, ggd en kgv). Vervolgens wordt de rekenkunde met rationale getallen behandeld en gaat men over op reële getallen. Tenslotte worden vergelijkingen, ongelijkheden, functies, grafieken en relaties behandeld.

De meetkunde heeft een intuïtieve opbouw, waarbij opvalt dat veel figuren uit de vlakke meetkunde te voorschijn komen als doorsneden van stereometrische figuren met platte vlakken.

Ook zijn enige hoofdstukken gereserveerd voor waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, waarbij ook samengestelde kansen worden behandeld.

Elk hoofdstuk eindigt met een verwijzing naar verdere literatuur over het behandelde onderwerp.

J. Maassen

C. Petersen en E. Feddersen, a. *Logarithmenrechnen, ein Lehrprogramm*; 130 blz.; ingen. D.M. 7.80; b. *Schüler-Arbeitsheft*; 68 blz.; ingen. D.M. 3.40; c. *Lehrerheft*, met antwoorden op de testopgaven; 8 blz.; gratis. Hermann Schroedel, Hannover; 1969.

Hoewel deze boeken uiteraard slechts bestemd zijn voor scholen waar Duits de voertaal is, hebben ze toch voor Nederlandse docenten met belangstelling voor de didactiek van de wiskunde betekenis. De hoge kosten die aan invoering van leerapparaten (teaching machines) verbonden zijn, leiden ertoe, dat de geprogrammeerde instructie op West-europese scholen voornamelijk via het geprogrammeerde leerboek in ons onderwijs doordringt. Programmering van een afgerond deelgebied van de wiskunde zoals dat van het logaritmisch rekenen, leent er zich uitstekend toe de betekenis van de geprogrammeerde instructie voor ons huidig onderwijs in het licht te stellen.

Petersen en Feddersen hebben een lineair programma samengesteld dat uit 500 schakels bestaat en in ongeveer 900 minuten doorgewerkt zal kunnen worden. Het is bestemd voor het negende en tiende schooljaar en voor zelfstudie. Het rekenen met machten wordt bekend ondersteld, het begrip logaritme wordt aangebracht en toegepast bij het vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken, de functie $y = \log x$ wordt besproken en het lineaire interpoleren behandeld. Het boek bevat tussentests en een eindtest. Het leraarsboekje bevat waardevol didactisch commentaar.

De technische uitvoering voldoet aan hoge eisen.

We bevelen kennismaking met dit programma aan de Nederlandse wiskundeleraar gaarne aan.

Joh. H. Wansink

H. Hermes, *Einführung in die mathematische Logik*, 2. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1969, 204 blz.

De eerste druk is besproken in Euclides 39 (1963–1964), p. 316.

In de tweede druk is een slothoofdstuk toegevoegd, waarin de stelling van Beth bewezen wordt, volgens welke in de predikatenrekening een impliciete definitie van een predikaat of van een functie vervangen kan worden door een expliciete.

P. G. J. Vredenduin

Prof. dr. A. van der Sluis, *Computers en algoritmen*, Torusreeks nr. 5; Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969, 88 pag.; f 6.15.

Geen inleiding, zoals de schrijver opmerkt, maar een persoonlijk gekleurde keuze van onderwerpen. Niettemin verschaft dit boekje de lezer, die het heeft doorgenomen, het idee, dat hij behoorlijk is ingeleid in het wezen van een algoritme en de wijze, waarop een computer deze verwerkt. Naar mijn mening moet een leerling van het v.w.o., die zich, ook met het oog op zijn beroepskeuze, wil oriënteren, het in de schoolbibliotheek kunnen vinden. Hij zal dan een en ander kunnen lezen over de enorme nauwkeurigheid, waarmee de achtereenvolgende stappen in een algoritme moeten worden aangegeven en gelezen, want een computer handelt naar de letter en leest niet tussen de regels door. Met veel genoegen heb ik het boekje bestudeerd.

H. W. Lenstra

A. van Dop, B. Groeneveld, A. van Haselen, L. W. van der Horst, *Moderne algebra voor v.w.o.*, deel 2v., 104 blz., Prijs f 6,25.

Idem, *Moderne algebra voor h.a.v.o.*, deel 2h., 88 blz., Prijs f 5,75.

Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen.

In het tweede deel voor v.w.o. worden behandeld: vergelijkingen, reële getallen, wortels, verzamelingen in verband met logische operaties, relaties en vierkantsvergelijkingen.

Het h.a.v.o.-deel loopt hiermee nauwgezet parallel. Enkele onderwerpen vervallen zoals bijv. intervallen en het verschil van twee verzamelingen. De invoering van het reële getal is aanzienlijk vereenvoudigd.

Bij het doorlezen van bovenstaande delen rijzen bij mij dezelfde bezwaren als bij het eerste deel. Het zelfstandig doorwerken van delen theorie lijkt mij voor weinig leerlingen mogelijk.

Bijna steeds worden zonder een inleidend voorbeeld de problemen voorgeschoteld. Men leze slechts de eerste paragraaf van hoofdstuk 1 in beide delen.

Ik vind dat het eigen karakter dat de h.a.v.o. wiskunde zou moeten hebben, hier niet tot zijn recht komt.

L. v. d. Zijden

Boeken-aanwinsten

Mathematisch Instituut - Groningen

Periode juni 1968 – maart 1969

Handbuch der Schulmathematik. Bd. 7. Hannover, 1967.

Howard, A. E., W. Farmer and R. A. Blackman,
Teaching mathematics. Londen, 1968.

Klein, F.,
Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 3 Bde. Berlijn, 1968.

Butler, C. H., and F. L. Wren,
The teaching of secondary mathematics. New York, 1965.

Dienes, Z. P.,
The power of mathematics. A study of the transition from the constructive to the analytical phase of mathematical thinking in children. Londen, 1967.

Dienes, Z. P., and M. A. Jeeves,
Thinking in structures. Londen, 1965.

Ehrenfest-Afanassjewa, T.,
Didaktische opstellen wiskunde. Zutphen, 1960.

Idenburg, Ph. J.,
Schets van het Nederlands schoolwezen. Groningen, 1964.

James, E. J.,
The teaching of modern school mathematics. Londen, 1964.

Kovach, L. D.,
Modern elementary mathematics. San Francisco, 1968.

Langeveld, M. J.,
Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbareschoolleeftijd. Groningen, 1961.

Lessons (Some) in mathematics by members of the association of teachers of mathematics. Edit. by. T. J. Fletcher. Cambridge, 1965.

Mursell, J. L.,
Successful teaching. Its psychological principles. New York, 1964.

Papy, G.,
Mathématique moderne, tomes 3, 5 et 6. 1966–1967. (1 en 2 zijn ook aanwezig; bovendien 1, 2 en 3 in Nederlandse vertaling.) Brussel.

Perquin, N.,
Algemene didaktiek. Speciaal ten behoeve van het V.W.O. Roermond, 1967.

School mathematics project. vol. 1–4. Teachers guide for book 1–3. Cambridge, 1967–1968.

Wiegersma, S., en M. Groen,
Resultaten van wiskundeonderwijs. Groningen, 1968.

Beberman, M., and H. E. Vaughan,
High school mathematics. Boston, 1966. 2 vols.

Bewegingsmeetkunde. Door A. D. de Groot e.a. Groningen, 1968.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en
correspondentie over deze rubriek aan
Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25,
Oosterbeek

244 Men heeft vier voorwerpen, die elk 9 of 10 gram wegen. Bepaal door middel van een briefeweger in drie wegingen het gewicht van de vier voorwerpen. (ingezonden door Dr. P. Bronkhorst; ontleend aan American Mathematical Monthly)

245 Van hoeveel natuurlijke getallen kleiner dan 10^6 is de som van de cijfers gelijk aan 17? De getallen zijn decimaal geschreven. (B. Kootstra)

Oplossingen

241 Voor hoeveel paren natuurlijke getallen geldt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6!}?$$

We beantwoorden eerst de vraag: voor hoeveel paren natuurlijke getallen geldt, dat er een $c \in \mathbf{N}$ bestaat, waarvoor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}, \quad (1)$$

c een deler van $6!$ is en a , b en c geen factor gemeen hebben? Men ziet direct in, dat het antwoord op deze vraag gelijk is aan het gevraagde antwoord.

Nu is (1) gelijkwaardig met

$$c(a+b) = ab.$$

Elke factor van $a+b$ is dus een factor van a of van b en dus een gemeenschappelijke factor van a en b , en dientengevolge geen factor van c . Onderstel $a+b$ bevat precies 1 factor 2. Dan bevat zowel a als b een factor 2 en dus c een factor 2, hetgeen niet kan. Op dezelfde manier zien we, dat $a+b$ niet precies 3 factoren 2 bevat. Immers dan bevat a of b een factor 4 en dus bevatten a en b een factor 4 en dientengevolge c een factor 2, hetgeen weer niet kan. We vinden zo, dat $a+b$ een kwadraat is.

Stel $a+b = k^2$. Dan bevatten a en b een factor k . Stel $a = ka_1$ en $b = kb_1$. Dan is

$$c = a_1 b_1.$$

We kunnen b.v. kiezen $a_1 = 1$, $b_1 = 1$. Daaruit volgt $k = a_1 + b_1 = 2$ en $c = 1$.

De vraag is nu gereduceerd tot: op hoeveel manieren kunnen we a_1 en b_1 zo kiezen, dat ze geen factor gemeen hebben en hun produkt een deler van $6!$ is?

We kunnen kiezen:

$a_1 = 1$, b_1 is deler van 720; dit levert 30 mogelijkheden,

$a_1 = 2 \vee a_1 = 2^2 \vee a_1 = 2^3 \vee a_1 = 2^4$, $b_1 = 3 \vee b_1 = 3^2 \vee b_1 = 5 \vee b_1 = 3 \cdot 5 \vee b_1 = 3^2 \cdot 5$; dit levert 20 mogelijkheden,

$a_1 = 3 \vee a_1 = 3^2$, $b_1 = 5 \vee b_1 = 5 \cdot 2 \vee b_1 = 5 \cdot 2^2 \vee b_1 = 5 \cdot 2^3 \vee b_1 = 3 \cdot 5^4$; dit levert 10 mogelijkheden,

$a_1 = 5$, $b_1 = 2 \cdot 3 \vee \dots \vee b_1 = 2^4 \cdot 3^2$; dit levert 8 mogelijkheden.

Totaal dus 68 mogelijkheden.

242 Iemand wil uit $1, 2, \dots, n$ een deelserie $p, p+1, \dots, q$ ($p \neq q$) kiezen zo, dat de som van de deelserie deelbaar is door n . Op hoeveel manieren lukt dit, als $n = 600$? Voor welke waarden van n lukt het niet?

De som van de deelserie is

$$\frac{1}{2}(p+q)(q-p+1).$$

Dit is deelbaar door 600, als bv.

$$p+q = 400$$

$$q-p+1 = 3,$$

dus $p = 199, q = 201$.

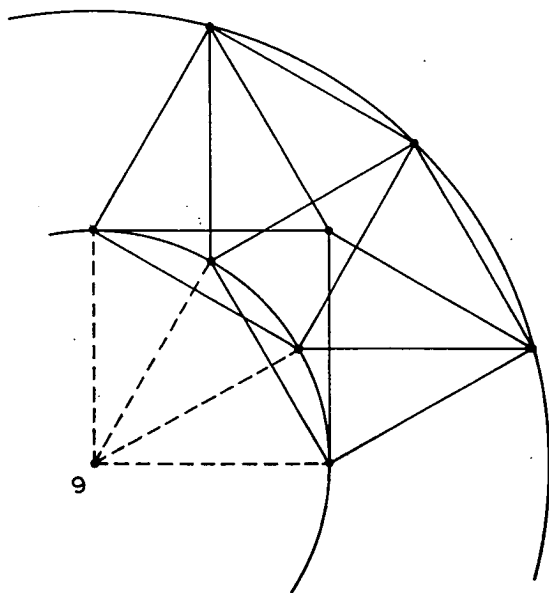
I.p.v. 3 en 400 kan men ook kiezen 3 en 800, 5 en 240, 5 en 480, 5 en 720, 5 en 960, 15 en 80, 15 en 160, $\dots$, 15 en 1120. Dus op $(3-1) + (5-1) + (15-1) = 20$ manieren lukt het. (Dit resultaat laat zich niet zonder meer generaliseren).

Men vindt langs deze weg altijd oplossingen, als n een oneven deler heeft. Omdat $p+q$ en $q-p+1$ een van tweeën oneven zijn, mislukt het echter, als n alleen maar even delers bevat. Het mislukt dus voor de waarden van n , die een macht van 2 zijn.

243 Gevraagd werd 8 bomen zo te plaatsen, dat 14 afstanden gelijk worden. De oplossing moet verschillen van die, waarbij een netwerk van gelijkzijdige driehoeken ontstaat.

En plaats 9 bomen zo, dat 18 afstanden gelijk worden.

De oplossing van beide problemen ziet men in onderstaande figuur.



85 wiskundige puzzels

Hoeveel paarden kan men maximaal zo op een schaakbord plaatsen, dat geen enkel paard door een paardesprong een veld kan bereiken, waarop één van de andere paarden staat?

Het antwoord op deze vraag vindt u in

Dr. P. G. J. Vredenduin

Vijfentachtig wiskundige puzzels

ISBN 90 01 92080 2 ingenaaid f 5,15

Geschikt voor ontspanning van leraar en klas.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever, postbus 567, Groningen.

Vermeld bij uw bestellingen steeds titel, auteur en ISBN



Wolters-Noordhoff

Vreemde woorden in de sterrenkunde

Het gebruik van vreemde woorden in de wetenschap, zo zegt Prof. Dr. M. G. J. Minnaert in zijn voorrede, heeft zijn kwade, maar ook zijn goede zijde. Het is die kwade zijde, die van de moeilijke toegankelijkheid van een tekst voor de niet-geschoolde lezer, die **Prof. Dr. P. H. van Laer** ertoe bracht zijn

Vreemde woorden in de sterrenkunde f 9,25
2e druk ISBN 90 01 52250 5
samen te stellen.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.

Wolters-Noordhoff



Inhoud

Drs. J. van Dormolen: Naar een nieuw onderwijsprogramma voor de wiskunde	1
H. Bröekman: Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	8
C. van Schagen: Richtlijnen betreffende onderwijsresearch	12
Mathematica & Paedagogia	17
H. Broekman: Schoolonderzoek	18
W. Amse: Differentialen en kettingregel	19
H. J. A. Duparc: Gedachten rondom discrete wiskunde	27
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren	30
Korrel	31
Staatsexamen gymnasium 1969	33
Boekbespreking	34
Boeken-aanwinsten	38
Recreatie	39