EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no 8
mei 1970

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

De doelstellingen van het wiskundeonderwijs*

H. van der HAK
Vlaardingen

Er komen in de praktijk verschillende feiten aan het licht, die ons nopen ons nader te bezinnen over de doelstellingen van het wiskundeonderwijs. Deze feiten zijn een gevolg van de arbeid, die de docent verricht. Immers velen in de maatschappij zijn direct of indirect betrokken bij de wijze waarop de leraar zijn functie uitoefent en bij de doelen die hij met zijn werkzaamheden wil bereiken. De direct betrokkenen zijn de leerlingen en hun ouders. De leerlingen zullen iets van de doelstellingen van het wiskundeonderwijs moeten begrijpen om voldoende gemotiveerd te zijn en zich voor een bepaalde taak te willen inzetten en zij zullen daarbij de steun behoeven van hun ouders. Vele leerlingen, afkomstig uit de z.g. lagere milieus, zullen deze steun moeten ontberen, daar hun ouders meestal nimmer met de wiskunde hebben kennisgemaakt. Daarnaast zijn er velen, die in het bedrijfsleven werkzaam zijn alsmede onderwijsdeskundigen wier specialisme niet noodzakelijk de wiskunde behoeft te zijn, die min of meer belang hebben bij de gestelde doelen. Al deze mensen vormen de buitenwereld, die door de positie, die zij in de maatschappij innemen, de doelen van het wiskundeonderwijs nauwlettend zullen gadeslaan en indien zij dit nodig achten, zich niet zullen onthouden van kritiek. Dit en het feit, dat niemand een doelloze arbeid kan en wil verrichten heeft tengevolge gehad, dat ook de wiskunde docent-zich voortdurend afvraagt, wat de zin is van zijn arbeid. De invoering van modernere wiskunde in het voortgezet onderwijs heeft de docent nog eens extra op dit feit geattendeerd. Tijdens de heroriënteringscursus in september 1968 bleek duidelijk, dat hier voor vele collega's een knelpunt aanwezig is. In de discussiegroep, waarvan ik deel uitmaakte was dit het eerste onderwerp dat ter sprake kwam, wat wel te verwachten was, omdat de vraag naar het waarom steeds geopperd zal worden wanneer men met de inhoud van een programma wordt geconfronteerd.

Tevens zal men nog kunnen opmerken, dat de doelstellingen bepalend zijn voor de didactiek. Volgens prof. van Nauta Lemke, in zijn diesrede aan de T.H. van 13 januari 1969 zou dit niet juist zijn. De maatregelen die men neemt en het complex dat men wil regelen bepalen evenzeer het doel. Er zou hier sprake zijn van een wisselwerking. Misschien geldt dit eveneens voor het onderwijs. Men zou hierbij kunnen denken aan aanpassing van de doelstellingen aan

* Voordracht voor de wiskundewerkgroep (WVO)-bijeenkomst op 25 jan. 1969.

nieuwere leermiddelen, die ons tengevolge van de technische ontwikkeling ter beschikking worden gesteld. Zo kunnen bijvoorbeeld lesmachines, of geprogrammeerde instructie de doelstellingen noodgedwongen min of meer wijzigen. Vooral wanneer maatschappelijke omstandigheden tot het benutten van andere methoden dwingen. Bovendien kunnen de leerlingen veranderen. Daar elk kriterium mij ontbreekt, zie ik mij genoodzaakt, deze wisselwerking tussen doelstellingen en didactiek verder buiten beschouwing te laten. Wij kunnen de volgende doelstellingen onderscheiden:

1 de wiskunde heeft een belangrijke vormende waarde en draagt bij tot de algemene ontwikkeling van de leerlingen.

2 de beoefening van de wiskunde ontwikkelt het denkvermogen.

3 de wiskunde is een spel, dat mede door de esthetische elementen die het bevat, waard is te worden beoefend.

4 de wiskunde is een belangrijke hulpwetenschap.

Ik zou nu de volgende taak op mij moeten nemen, alvorens deze punten te gaan bespreken: a) nagaan of deze opsomming volledig is b) onderzoeken, of dit viertal punten al of geen strijdigheden bevatten en c) of er afhankelijkheid bestaat tussen deze punten. Ik hoop aan te tonen, dat deze afhankelijkheid aanwezig is. Dan mag ik misschien de kwestie van de volledigheid wel buiten beschouwing laten, omdat wanneer er nog meer punten aan toegevoegd kunnen worden het vermoeden voor de hand ligt, dat deze niet belangrijker zullen zijn dan de vier genoemde, juist vanwege die afhankelijkheid. Bovendien acht ik mij tengevolge van deze afhankelijkheid ontheven van het onderzoek naar de al of niet strijdigheid. Teneinde misverstand te voorkomen, wil ik hierbij wel opmerken, dat het geenszins mijn bedoeling is een geometrische bewijsvoering te geven, zoals Spinoza dit in zijn Ethica heeft gedaan. Ik geloof niet, dat dit mogelijk zal zijn.
Allereerst dan de kwestie van de vormende waarde van de wiskunde en de bijdrage tot de algemene ontwikkeling zoals ik die in punt 1 heb genoemd. Ik geloof dat dit een modeverschijnsel is geweest, waarbij wij geïnspireerd werden door het voorbeeld van de Grieken. De Ouden immers meenden, dat om een harmonische geest te verkrijgen, men zich diende te oefenen in de artes liberales, de zeven vrije kunsten n.l. grammatica, rhetorica, dialectica, geometria, musica, arithmetica en astronomia. Men zou zich kunnen afvragen of de Grieken het hiermee bij het rechte eind hadden. M.a.w. wanneer iemand deze zeven onderwerpen niet of niet geheel heeft bestudeerd, is hij dan als mens mislukt? En hoever moet men deze onderwerpen bestuderen om tot een gunstig resultaat te komen? In onze moderne maatschappij kan niemand meer deze kunsten in zijn geheel beheersen. Door zijn strakke logische opbouw en vooral door de meetkunde, zal men niet kunnen ontkennen, dat de wiskunde zekere esthetische elementen bevat. Hieraan zal men dan een vormende waarde kunnen ontlenen. De vraag is echter, of degenen, die hier niet voor openstaan, ook bereikt zullen

worden. Daarnaast zal men zich kunnen afvragen, of het niet wenselijk is, dat zij die hogere functies in de maatschappij bekleden, met de beginselen van de wiskunde op de hoogte zijn. Ik denk voornamelijk aan de noodzakelijkheid om met anderen te kunnen communiceren. Die anderen zijn dan die naaste medewerkers, die de wiskunde als hulpwetenschap gebruiken. Ook zou men zich kunnen afvragen of men onder de vormende waarde van de wiskunde niet moet verstaan het feit, dat men door de wiskunde kritisch en ordelijk leert denken. Toch lijkt mij de kwestie van vorming en algemene ontwikkeling moeilijk te verkopen. Men zal, en wellicht terecht, kunnen opmerken, dat deze zaken ook nog langs andere wegen zijn te realiseren. Bovendien is het zeer de vraag, of iemand die zich innerlijk tegen het wiskundeonderwijs verzet, zoveel baat zal hebben bij de opleiding. Vorming en algemene ontwikkeling zullen de leerlingen weinig aanspreken.

2 De beoefening van de wiskunde ontwikkelt het denkvermogen. Sport staalt spieren en wiskunde de hersenen. Ik geloof daar wel enigszins in. Wie nooit oefent zal zijn denken niet ontwikkelen. Maar de vraag rijst: wat was er het eerst: het denkvermogen of het onderwijs? Vermoedelijk zal hierbij sprake zijn van een zekere wisselwerking. Ik geloof wel, dat er een zekere mate van aanleg aanwezig moet zijn, wil het wiskunde-onderwijs een nuttig effect hebben. Maar of men in het algemeen door wiskunde te leren het denkvermogen ontwikkelt is zeer de vraag. Mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa en prof. Freudenthal hebben hierover uitvoerig gediscussieerd. In de publikatie van de W.V.O. nr. 1 'Kan het Wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?' blijken zij niet tot een eensluidende conclusie te komen. Het is buitengewoon interessant kennis te nemen van hun denkbeelden. Maar als deze bij uitstek deskundigen niet tot overeenstemming kunnen komen, hoe kunnen wij dan ooit de tweede doelstelling als een hechte basis voor ons onderwijs beschouwen? Is het denken, dat men in de wiskunde aanleert niet te eenvoudig van aard en te zeer gericht op scherpomlijnde abstracties, die in lijnrechte tegenstelling staan met de gecompliceerde en dikwijls vage structuur van de feiten uit de praktijk van het dagelijkse leven en de andere wetenschappen? Maar is niet juist hierdoor de wiskunde als een propedeuse op het denken te beschouwen? Dan zullen wij wel op moeten passen, dat er om te beginnen geen denkfouten in onze leerboeken sluipen, die de leerlingen in verwarring kunnen brengen. Hierbij denk ik in het bijzonder aan wat collega van Hiele hierover in november 1968 heeft gezegd.
Wanneer door ons wiskundeonderwijs het denken ontwikkeld zou worden dan zullen wij toch ervaren, dat velen niet in staat zijn ons onderwijs te volgen. Buitenstaanders zullen ons wijzen op de mensen die maatschappelijk geslaagd zijn en soms hoge posten bekleden, terwijl deze lieden het bij de wiskunde-lessen lieten afweten. Wijst dit niet duidelijk op een aanleg of een attitude in een bepaalde richting? Wij noemen deze mensen eenzijdig begaafden, wat misschien wel een euphemisme is voor veelzijdig dommen.

Trouwens, om de rijzende vragen te kunnen beantwoorden zal men toch een enigszins gefundeerde kennis moeten hebben van wat denkvermogen eigenlijk inhoudt. Velen delen de opvatting van Steinbuch, die reeds het functioneren van automaten als een vorm van denken beschouwt. Misschien kan men hier van een afgeleid denkvermogen spreken. Toch zou ik in verband hiermee willen wijzen op het principe van de tegenkoppeling, dat in de stuurkunde zo'n belangrijke rol speelt. Als voorbeeld het volgende. Wanneer ik de intentie heb om van het kastje naar de muur te lopen, dan zal ik, wanneer ik halverwege het doel gevorderd ben toch steeds de muur in gedachten moeten houden om als een astronaut op kleine schaal, eventueel noodzakelijke koerscorrecties te kunnen uitvoeren. Wanneer ik onderweg het doel vergeten ben, dan kom ik niet bij de muur. Aan dergelijke overwegingen is bij het wiskundeonderwijs te weinig aandacht geschonken. Leken veronderstellen, dat wiskundigen mensen zijn, die door een strakke logische redenering in staat zijn om uitgaande van het kastje in casu het gegeven, de muur d.w.z. het te bewijzen te bereiken. Door deze opvattingen heeft de wiskunde voor velen een image verkregen dat hen afstoot door zijn schijnbaar fantasieloze harde logica. Dit voert ons tot de mogelijkheid om het wiskundeonderwijs te benutten voor het aanleren van research. Ik denk hierbij niet alleen aan de wetenschappelijke research maar aan onderzoek in het algemeen zoals dit in de praktijk van het leven zich kan voordoen. Hierdoor zal het onderwijs totaal van karakter veranderen. M.i. is de wiskunde de meest geëigende wetenschap om een dergelijk onderzoek te leren, omdat de wiskunde, hoe vreemd dit ook moge schijnen, de eenvoudigst denkbare wetenschap is. Zo zullen de geschiedenisboekjes vermelden, dat in 1555 Karel V afstand deed van de regering t.b.v. zijn zoon Filips II. Dit is een bewering waarvan de leerlingen de juistheid niet kunnen onderzoeken. Ook lijkt het mij ondoenlijk de leerlingen te belasten met een onderzoek naar bouw en functie van het vissehart door hen bijvoorbeeld thuis in de keuken een haring te laten slachten teneinde een en ander vast te stellen.
In de wiskunde is dit alles veel eenvoudiger. Er zijn een groot aantal methoden volgens welke men te werk kan gaan om te trachten een vraagstuk op te lossen. Ik behoef U deze niet te noemen. Maar buitenstaanders, en daartoe behoren dus ook onze leerlingen, vragen zich dikwijls af, hoe het mogelijk is om een dergelijke wijze van oplossen te vinden. Misschien zoeken zij de verklaring wel in de aanwezigheid van een wiskunde-knobbel. In het leerboekje 'Moderne Wiskunde' (de z.g. Schotse methode) staat een hoofdstukje 'problemen voor onderzoekers'. Een systematische behandeling van de wijze waarop men een onderzoek moet verrichten is vooraf echter niet gegeven. Dit is naar ik meen een lacune bij ons wiskundeonderwijs. M.i. is het noodzakelijk de kinderen van het begin te leren op welke wijze men een vraagstuk moet aanpakken. Misschien is het zelfs wel zo, dat een dergelijke aanpak niet alleen de oplossing van wiskundige vraagstukken voor velen zou vergemakkelijken, maar dat een dergelijke systematische behandeling door zal werken op andere gebieden waar onderzoek noodzakelijk is, zoals ik reeds eerder opmerkte. Deze transfer is

echter, zoals wij weten, meestal niet zo eenvoudig.
Een systematische behandeling van een dergelijk onderzoek kan ik hier natuurlijk niet geven. Als voorbeeld vermeld ik enkele punten ontleend aan het boekje 'How to solve it' van G. Polya. Polya heeft een lijst met vragen opgesteld waarbij hij er op wijst, dat het in de eerste plaats noodzakelijk is een probleem goed te begrijpen alvorens aan een oplossing te beginnen. Wat is de onbekende? Wat zijn de gegevens? Wat is de gestelde voorwaarde? Is het mogelijk aan de gestelde voorwaarde te voldoen? Is de voorwaarde voldoende om de onbekende te bepalen? Of onvoldoende? Of bevat de voorwaarde strijdige elementen? Teken een figuur. Gebruik hierbij een passende notatie. Scheid de verschillende delen van de voorwaarde. Kun je ze opschrijven?
Vervolgens komt hij aan het opstellen van een plan, de uitvoering en een terugblik. Het is in kort bestek niet mogelijk hierop uitvoerig in te gaan. Ik noem slechts enkele punten waarmee wij in de klasse-praktijk vaak te maken hebben. Gebruikte je het gehele gegeven? Controleer iedere stap. Kun je duidelijk zien dat de stap, die je hebt ondernomen correct is? Kun je dit bewijzen? Kun je het resultaat controleren? Kun je met één oogopslag zien, dat het resultaat nog op een andere wijze is te verkrijgen? En misschien op een eenvoudiger manier?
Dit alles zal U uit Uw klasse-praktijk wel bekend voorkomen. In de klas geschiedt alles echter veel te fragmentarisch. Pogingen die ik in het werk stelde om een en ander in praktijk te brengen leden schipbreuk door de beperkte tijd, die voor behandeling in klasseverband beschikbaar is. Natuurlijk zou men hiervoor studie-uren kunnen gebruiken, maar ook dit biedt te weinig mogelijkheden.
Nu beschouwde Polya dit alles als een middel om de leerlingen bij te brengen, hoe je tot een oplossing van een vraagstuk kunt geraken. Ik zou dit liever als behorend tot de tweede doelstelling van het wiskundeonderwijs willen zien. Niet het feit, dat de hoogtelijnen door één punt gaan vind ik belangrijk, maar wel de manier waarop je dit bewijs kunt vinden.
In 'Computers Mensen en Systemen' van de Groen en Grunsven, citeren de schrijvers een uitspraak van de automatie deskundige John Diebold. Deze beweert, dat in 1975 het management wiskundig georiënteerd zal zijn. Managers moeten niet onbewust beslissingen nemen maar zij moeten kunnen besluiten op basis van gegevens waarover zij beschikken. De antwoorden op hun vragen kunnen zij dan krijgen. Echter zal de kunst van het stellen van exacte vragen moeten worden ontwikkeld. De ervaring leert, dat de managers niet in staat zijn deze vragen te stellen. Misschien is het mogelijk dit stellen van vragen te oefenen op de wijze zoals ik hier heb geschetst. Om dan tot de ontdekking te komen, dat de wiskunde nu als hulpwetenschap wordt gedoceerd. Trouwens bij het kiezen van onderwerpen, die behandeld moeten worden zou het onverstandig zijn de ogen te sluiten voor de door de praktijk gestelde eisen. Bovendien zal bij allerlei andere schoolvakken, ik denk hierbij aan natuurkunde en economie, de wiskunde als hulpwetenschap noodzakelijk blijven.

3 De wiskunde is een spel, dat mede door de esthetische elementen die het bevat, waard is te worden beoefend.
Het zal niet moeilijk zijn een esthetisch element in de wiskunde te ontdekken. Vooral de fraaie opbouw van de meetkunde van Euclides dwingt bewondering af, maar het meest zullen de leerlingen getroffen worden door de figuren, die eerder hun fantasie in werking zetten dan de meer abstracte algebraïsche theorie. Bovendien vinden jonge leerlingen het prettig te kunnen handelen, en wel letterlijk, met passer en liniaal. Ik vrees, dat dit bij sommige moderne leermethoden niet meer helemaal tot zijn recht komt.
Voor zover het de kunstzinnige zijde van ons vak betreft denk ik hier vooral aan het inspirerende voorbeeld dat Ir. A. E. Bosman heeft gegeven met zijn boek 'Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde'.
Verder lijkt mij het begrip 'spel' moeilijk te definiëren. Wanneer men bij spel uitsluitend denkt aan iets waarbij men volgens vaste regels te werk moet gaan, dan zou men de wiskunde inderdaad als een spel kunnen betitelen. Dergelijke spelregels komen ook bij voetballen voor, maar ik meen te weten, dat het voetbalspel hieraan niet zijn aantrekkelijkheid voor velen ontleend. Bovendien zijn de spelregels in de wiskunde dermate gecompliceerd, dat de meeste leerlingen aan het spelen van dit spel maar zelden toekomen. Anderzijds zou men onder een spel kunnen verstaan, een handeling die men niet behoeft te verrichten; men speelt voor zijn plezier. Zo beschouwd zal men wiskunde als een spel kunnen zien, wat elk der hier aanwezigen zal kunnen bevestigen. En de populariteit van het tijdschrift Pythagoras bewijst, dat velen van onze leerlingen er precies zo over denken. Aan het spel-element in de wiskunde heeft Dr. P. Bronkhorst op het veertiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen grote aandacht gewijd en hij heeft hierin, als ik hem goed heb begrepen, een onderwijs-doelstelling gezien. Op zichzelf is daar niets tegen, al zullen vele leerlingen het reeds genoemde voetbal blijven prefereren. Immers het spel dat men kiest – en van keuze moet hier altijd sprake zijn wil het een spel blijven – is afhankelijk van subjectieve elementen. Bovendien zal de buitenwereld zich afvragen, of het wel juist is aan het spelen van dit spel zo'n grote belangrijkheid toe te kennen, want elke ernst doet het spel afbreuk. Ook zal de buitenwereld terecht van mening zijn, dat het spel dat men kiest, afhankelijk is van subjectieve factoren en inderdaad zijn er mensen, die het schaakspel als vak willen invoeren, waar weinig tegen in te brengen is, omdat dit kennelijk ook een spel is. De weg is dan geëffend tot bridge op de havo en misschien klaverjas voor de mavo.
De leraren zullen trachten hun vesting te verdedigen wanneer buitenstaanders beweren, dat wij de kinderen onpraktische dingen leren, maar hun cordon zal geen hecht aaneengesloten geheel vormen omdat zich vele weifelaars in hun gelederen zullen bevinden. Dan blijkt er echter een voordehandliggende uitweg uit de impasse te zijn gelegen n.l. in de vierde doelstelling: wiskunde is een belangrijke hulpwetenschap.

4 De wiskunde wordt als hulpwetenschap in toenemende mate gebruikt in allerlei gebieden. Gold voor de tweede wereldoorlog nog de stelling, dat wiskunde alleen nuttig was voor hen, die zich in natuurkunde of techniek wilden bekwamen of zich geroepen voelden voor het onderwijs, nu echter hebben zich de toepassingsmogelijkheden enorm uitgebreid en zelfs in de z.g. alpha-vakken benut men mathematische disciplines. Het gevolg is echter een prioriteitenslag, waarbij allerlei onderwerpen uit de wiskunde aan een onderzoek moeten worden onderworpen i.v.m. hun maatschappelijke nuttigheidswaarde en de mogelijkheid ze te kunnen doceren. Moeten wij onze leerlingen onderwijs geven in differentiaal- en integraalrekening, in boole-algebra, programmeren of statistiek? Wanneer wij het oog richten op de toepasbaarheid, dan doceren wij op een ongerichte vakschool met vele doeleinden als wij eveneens letten op de andere vakken. In het onderwijs van de moderne talen kan men een dergelijk verschijnsel n.l. ook waarnemen; daar heeft een verschuiving van het zwaartepunt plaatsgevonden van taalwetenschap naar taalgebruik en naar kennis van de sociale achtergronden in het vreemde land.

Op zichzelf is daar geen bezwaar tegen. De kinderen krijgen de gelegenheid tot kennismaking met vele vakken waarvan zij anders het bestaan ternauwernood zouden vermoeden. Maar zijn het ook alle vakken? Hier komt weer het begrip algemene ontwikkeling te voorschijn, waaraan door de veelheid van wetenschappen in onze tijd niet meer is te voldoen. Bovendien kan de leerling een tegenzin ontwikkelen in een bepaald vak doordat dit vak van hem te veel gaat eisen. Men denke bijvoorbeeld aan Frans, dat toch zeker nuttig is maar waarvan men vermoedt, dat het niet zoveel door de leerlingen zal worden gekozen in hun studiepakket.

Ook krijgt men weer de kritiek te horen van de buitenstaanders, die een heterogene groep vormen en daardoor met zeer verschillende eisen zullen komen. De leraren zijn hiertegen weerloos, want zij zijn onvoldoende op de hoogte van datgene wat er in het bedrijfsleven en de wetenschappen omgaat. En al naar de aard en samenstelling van de pressie-groepen zal dan dit en dan weer dat op het lesrooster moeten worden geplaatst. Dit komt de rust bij het onderwijs niet ten goede. Ook zijn er enkele jaren nodig om de kneepjes van een nieuw onderdeel te leren kennen, zoals velen na de invoering van de mammoeth zullen hebben ervaren.

Maar niet alleen zal bijvoorbeeld het Hoger Onderwijs eisen stellen, het zal ons ook verzoeken onze handen af te houden van bepaalde onderwerpen. Ik denk hierbij aan de onlangs geuite mening, dat wij er beter aan doen ons niet met limieten, differentiaal- en integraalrekening bezig te houden. Bij het Hoger Onderwijs zegt men dit veel beter te kunnen onderrichten. De vraag is nu wat moeten wij wel en wat niet. Het blijkt, dat de functie van hulpwetenschap, die wiskunde bezit, ons ook geen ondubbelzinnig middel aan de hand doet om een doelstelling te formuleren. Mijn ervaring als docent aan een avond-H.T.S. heeft mij geleerd, dat het zeer wel mogelijk is de leerlingen, met voorbijgaan van allerlei exactheden, technieken te leren zoals het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen, het werken met determinanten en het gebruiken van vektor-algebra en vektor-analyse. Met deze kennis gewapend kunnen zij de lessen in bijv. veldentheorie volgen alsmede de vaktijdschriften op hun niveau lezen. En dit niveau is, op enkele uitzonderingen na beslist niet hoger dan wat wij in vierde of vijfde klas HBS gewend zijn. Toch is het voor mij een wonderlijke ervaring, dat je deze mensen technieken kunt leren waaraan wij bij het V.W.O. nooit toekomen. Daarbij moet men wel bedenken, dat enige uitdieping van een onderwerp tot protesten leidt, omdat deze leerlingen slechts datgene willen accepteren waarvan zij weten, dat het van onmiddellijk nut is voor hun technische opleiding. Men zou zich in dit verband kunnen afvragen of een leerling pas intelligent is wanneer hij bereid is dingen te doen waarvan een ander (de leraar) beweert, dat ze goed voor hem zijn. Deze leerling moet dan wel een onbegrensd vertrouwen hebben in de door ouderdom wijsgeworden leraar. De patriarch zal zijn doelstellingen op overtuigende wijze aan de jeugd moeten motiveren, want anders zal deze jeugd zich met alle middelen verzetten tegen wat zij beschouwen als een vorm van dwingelandij, die hen wordt opgelegd door een oudere generatie.

Wanneer die wiskunde nu zo belangrijk is als hulpwetenschap en bovendien zoals mij gebleken is, zo eenvoudig is te onderrichten, waarom moeten wij het dan bij het V.W.O. ingewikkelder maken? De jeugd zal het allemaal weinig interesseren. Elke docent weet, dat kinderen niet pragmatisch zijn ingesteld. Zelfs in de hoogste klassen weten zij dikwijls nog niet, wat zij na hun eindexamen zullen gaan doen.

Concluderend zou ik dit willen opmerken: De genoemde doelstellingen zijn niet scherp van elkaar te scheiden, zoals alles wat buiten de eigenlijke wiskunde valt vage contouren heeft. Volgens mij zijn allen waard als doelstelling van het wiskundeonderwijs in aanmerking te komen. Zij vormen een organisch geheel dat meer is dan de som van de delen waaruit het bestaat. Wie toch tot een scheiding meent te moeten overgaan beschouwt een facet van het wiskundeonderwijs. Maar is deze polyvalentie inherent aan de wiskunde? Vindt een boer voldoening in het bewerken van zijn akker en een koopman in zijn business omdat zij weten hiermede een belangrijk maatschappelijk werk te verrichten? Ik geloof hier niets van. Zelfs in de eenvoudigste arbeid moet een esthetisch- of spelelement aanwezig zijn. Anders spreken wij van weliswaar nuttig, maar dood werk. Vele van deze dingen worden in onze maatschappij verbloemd en komen nauwelijks aan de oppervlakte. Koopman, arts en politie-agent zullen wijzen op het algemeen belang van hun werk en de kaartenbak-bijhouder zal het omgekeerde doen. Hij zal ons weten te vertellen, dat zijn arbeid meer inhoud heeft dan wij wel denken door te wijzen op de langdurige ervaring, die noodzakelijk is om vlot met deze bakken en deszelfs inhoud te kunnen omgaan. Systeem-analisten, die belast zijn met de automatisering van een bedrijf, ondervinden hierdoor veel tegenwerking.

Waarom maken wiskunde-leraren zich zoveel zorgen om de doelstellingen van hun onderwijs? Misschien is dit wel een gevolg van de invoering van een nieuw

programma. Maar misschien wordt dit ook wel veroorzaakt doordat, door de aard van ons werk wij vaak ons geweten moeten raadplegen. Met onze handelingen grijpen wij diep in in de levens van de aan ons toevertrouwde kinderen. En dat beseffen wij dagelijks. Maar daarnaast hebben wij nog een wiskundig geweten. In zijn rede van november 1968 voor de werkgroep heeft collega van Hiele ons er op duidelijke wijze op gewezen, dat ons wiskundig geweten ondergeschikt behoort te zijn aan ons pedagogisch didactisch geweten. Het geweten van de docent wordt bezwaard door de vaak tegenstrijdige eisen van de pedagogiek, de didactiek, de wiskunde en de maatschappij.
Ik geloof, dat wij hier de gulden middenweg moeten bewandelen, door onze leerlingen de stof op zodanig gevarieerde wijze aan te bieden, dat de vier door mij genoemde doelstellingen tot hun recht komen. Wij mogen ons gelukkig prijzen, dat wij een vak doceren, waarin zovelen zoveel van hun gading kunnen vinden.
Aan U wil ik dit alles gaarne ter discussie voor leggen.

Discussie

Hieronder volgen in het kort enkele onderwerpen waarover tijdens de vergadering werd gediscussieerd alsmede enkele opmerkingen die ik later naar aanleiding van deze lezing heb ontvangen.
Gaarne zou ik verdere reacties ontvangen van de lezers. Ik verzoek U deze te zenden aan de secretaris van de Werkgroep: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem. Deze kunnen dan in de Mededelingen geplaatst worden

1 G.I. en lesmachines etc. zijn hulpmiddelen en niets anders. Het gebruik van deze hulpmiddelen kan ons hooguit op het spoor brengen van onvolkomenheden in onze doelstellingen. Ook dit wordt trouwens door velen betwijfeld.
Antw. Zoals ik opmerkte, kunnen bepaalde ontwikkelingen in de maatschappij ons dwingen tot het benutten van nieuwe hulpmiddelen. Zo heb ik vroeger 'dik en dun' leren schrijven met een kroontjespen. De komst van vulpen en ballpoint hebben de doelstellingen van het schrijfonderwijs veranderd. De oude doelstelling 'schoonschrijven' is verdwenen. In het wiskundeonderwijs zal het uitvoeren van berekeningen m.b.v. logaritmen verdwijnen. De technische en maatschappelijke ontwikkeling is niet voorspelbaar, maar de dynamiek hiervan is wel voelbaar.
Doelstellingen kunnen niet door hulpmiddelen worden ontdekt. Wiskundeleraren kunnen de doelstellingen formuleren, maar de maatschappij (de buitenstaanders zoals ik ze noemde) moet het hier mee eens zijn. Daarom zou het gewenst zijn, dat in een later stadium de discussie buiten de enge kring van wiskundeleraren wordt gebracht. De inhoud van de doelstellingen moet altijd zeer eenvoudig zijn en de gemiddelde mens aanspreken. Anders dreigt het gevaar dat de wiskundeleraren op de bovenste verdieping van de ivoren toren terecht komen.

2 Als doelstelling zou men kunnen toevoegen, dat het noodzakelijk is wiskunde te leren, omdat wiskunde een belangrijk cultuurverschijnsel is.
Antw. Inderdaad. Maar nadert dat niet dicht tot de kwestie van de vormende waarde van de wiskunde en zijn belang voor de algemene ontwikkeling? Algemene ontwikkeling houdt toch kennis van de cultuur in.

3 Men kan wanneer men zich beperkt tot de objectieve doelstellingen deze onderverdelen in het materiële doel, het algemene doel en het formele doel.
Antw. Voor het materiële doel zie 4. Het algemene doel, waarbij latente aanleg ontwikkeld wordt zou men kunnen vinden in hetgeen ik gezegd heb onder 2 en voor het formele doel mag ik misschien eveneens naar dit punt verwijzen. De definities zijn niet scherp te geven en de doelstellingen hebben raakpunten waar zij geleidelijk in elkaar overvloeien. Dit bedoelde ik met 'onderlinge afhankelijkheid'.

4 Is niet juist een van de taken van de leraar, dat hij er aan mee werkt, dat de leerlingen open komen te staan voor het esthetische (ook in de wiskunde)?
Antw. Dat zou ik gaarne willen beamen. Ik zie echter niet duidelijk hoe dit in de praktijk moet worden gebracht. Niet iedereen heeft dezelfde smaak en ieder heeft bepaalde voorkeuren (muziek, beeldende kunst, enz.). Op deze subjectieve factoren heb ik o.a. bij het spel gewezen. Dit geldt m.i. ook t.a.v. Uw opmerking. Ieder mens heeft het recht hier een keuze te doen.

5 U noemt voetbal als voorbeeld van een spel. Dit is een ongelukkige keuze, want het is niet voor niets dat men bij georganiseerd voetbal (vaste regels) niet meer van spel spreekt, maar van sport.
Antw. U hebt gelijk. Wat denkt U van het speelse in de wiskunde? Is dit niet nauw verwant aan het creatieve en het esthetische? Misschien komt ongeorganiseerd voetbal dichter bij hetgeen ik bedoelde. Ik speelde dit spel vroeger op straat met en tegen mijn vriendjes (en tegen de ruiten).

6 Is de doelstelling 'de wiskunde is een belangrijke hulpwetenschap' bruikbaar voor het mavo?
Antw. Ik vind dit een moeilijk te beantwoorden vraag. Eerlijk gezegd geloof ik van niet. Het zwaartepunt zou zeker niet op deze doelstelling moeten liggen. (De aanwezigen waren unaniem van mening, dat voor mavo-leerlingen de wiskunde vooral van belang was voor de ontwikkeling van bepaalde denkstructuren. Dit zou eveneens gelden voor leerlingen van havo en vwo.)

7 De wiskunde is m.i. de eenvoudigste wetenschap, omdat het de *enige* wetenschap is die losgekomen is van het alleen maar constateren van wetmatigheden, het rangschikken hiervan en het zoeken van verbanden.
Antw. Na Uw woord 'omdat' volgt geen verklaring, maar een opsomming van

kenmerken, die de wiskunde met andere wetenschappen gemeen heeft. Ik meen, dat dit 'loskomen' een gevolg is van het feit, dat wij in de wiskunde sterk idealiseren, d.w.z. abstraheren van de werkelijkheid. De objecten in de wiskunde komen in de werkelijkheid niet voor. Deze werkelijkheid is aanzienlijk gecompliceerder.

8 Zonder de ideeën van Polya te willen bestrijden (het tegendeel is het geval) wil ik toch wel opmerken dat een 'puur' systematisch onderzoek alleen bij zeer eenvoudige gevallen mogelijk is.
Antw. Mijn opvattingen heb ik niet duidelijk genoeg naar voren gebracht. De methodische aanpak bij het oplossen van vraagstukken zoals Polya dit doet heb ik *niet* willen propageren, al zal ik het belang hiervan niet ontkennen. Polya geeft een methodiek om vraagstukken te leren oplossen. Ik wil het omgekeerde doen. Ik wil vraagstukken hebben om de methodiek te leren.

9 U beweert, dat het belangrijk is deze methodiek te leren om te gebruiken bij research. Er zijn echter slechts weinig leerlingen, die later in de research gaan.
Antw. Ik heb niet uitsluitend aan research gedacht maar aan een veel breder terrein waar onderzoek noodzakelijk is. Ik zou mij kunnen voorstellen, dat een mavo-leerling, die iets van deze zaken heeft begrepen, in bepaalde gevallen problemen die hij in zijn latere leven tegenkomt, methodischer zal kunnen aanpakken.

10 Een computer kan niet schaken, omdat hij puur systematisch te werk gaat (het duurt te lang).
Antw. De ideeën van Polya zijn niet uitzonderlijk. Wie geroutineerd is in het oplossen van wiskundige problemen past ze vaak, bewust of onbewust, toe. Ik bedoel niet, dat in de hogere klassen elk vraagstuk moet worden opgelost, door alle mogelijkheden bewust na te lopen. Men heeft toch wel iets geleerd en mag toch van zijn ervaringen gebruik maken!
Om een vraagstuk op te lossen moet men altijd puur systematisch te werk gaan. De computer doet dit ook, maar toch is zijn systeem anders dan het onze. Zijn systeem berust op 'onderzoek alle dingen en behoud het goede' en dat is inderdaad een langdradig proces. De computer heeft blijkbaar in zijn verleden niets geleerd. (Dit geldt dan voor de computers die momenteel te koop of te huur zijn. Computers met een vermogen tot leren bevinden zich reeds in een vergevorderd stadium van ontwikkeling maar hebben het laboratorium nog niet verlaten.)

Differentialen

P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

De uitbreiding, die het programma analyse heeft ondergaan, maakt het wenselijk in ons onderwijs met differentialen te werken. In dit artikel wil ik een verslag geven van een poging het begrip differentiaal te introduceren. Ik ben daarbij uitgegaan van het volgende tweeledige principe:

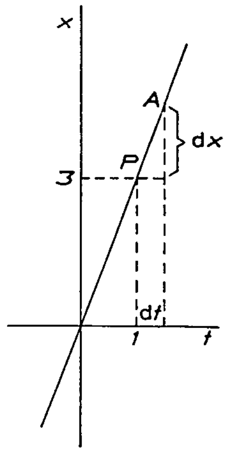
1 het onderwijs in de analyse kan bij het vwo niet geheel streng gegeven worden en het is dus geen ramp, als een bescheiden beroep op de aanschouwing gedaan wordt;

2 begrippen moeten op een zodanige wijze geïntroduceerd worden, dat volstrekt duidelijk is, wat eronder verstaan wordt.

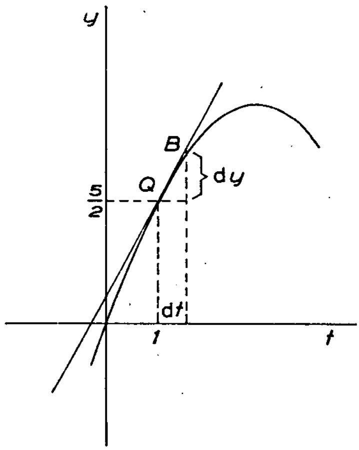
Voorkennis. Bekend is wat onder de afgeleide van een functie verstaan wordt. Bekend is, wat verstaan wordt onder een raaklijn aan een kromme. En bekend is het verband tussen de afgeleide van een functie en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek.
Bij wijze van voorbeeld stellen we het volgende probleem. Een kogel wordt afgeschoten met een beginsnelheid $3\sqrt{2}$ in een richting, die een hoek maakt van 45° met het horizontale vlak. De 'versnelling van de zwaartekracht' is gelijk aan 1. Teken de baan, die de kogel beschrijft.
Kies de x-as horizontaal, de y-as verticaal naar boven en laat de kogel ten tijde $t = 0$ in de oorsprong zijn. Dan wordt de plaats van de kogel ten tijde t bepaald door

$$x = 3t$$
$$y = 3t - \tfrac{1}{2}t^2.$$

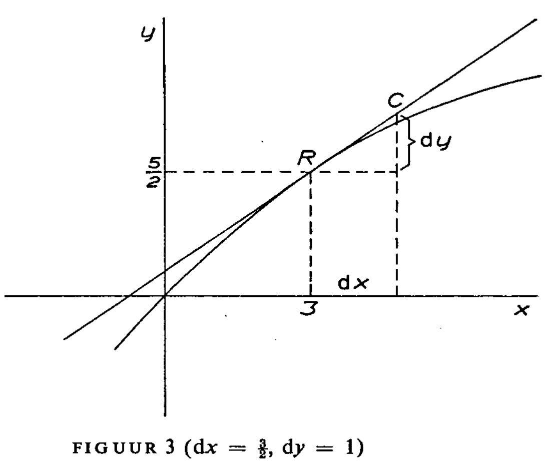
Zowel x als y zijn dus functies van t. Hun grafieken zijn getekend resp. in figuur 1 en in figuur 2.
Uitgaande van figuur 1 en figuur 2 kunnen we de kogelbaan vinden. We geven aan t verschillende waarden. Bij elke waarde van t hoort een punt op de grafiek in figuur 1 en een punt op de grafiek in figuur 2. En bij dit puntenpaar hoort een punt van de kogelbaan. De kogelbaan is getekend in figuur 3. (In alle drie grafieken zijn ook negatieve waarden van t toegelaten.)



FIGUUR 1 ($dt = \frac{1}{2}$, $dx = \frac{3}{2}$)



FIGUUR 2 ($dt = \frac{1}{2}$, $dy = 1$)



FIGUUR 3 ($dx = \frac{3}{2}$, $dy = 1$)

Natuurlijk kunnen we figuur 3 ook vinden door t te elimineren uit $x = 3t$ en $y = 3t - \frac{1}{2}t^2$. Deze eliminatie levert:

$$y = x - \tfrac{1}{18}x^2.$$

Maar in verband met hetgeen volgt, is de eerste methode ook van belang. We hebben dus te maken met drie functies:

$$\begin{aligned} f &: t \to x = 3t \\ g &: t \to y = 3t - \tfrac{1}{2}t^2 \\ h &: x \to y = x - \tfrac{1}{18}x^2. \end{aligned}$$

Kies een waarde van t, b.v. $t = 1$. Daarbij vinden we $x = 3$ en $y = \frac{5}{2}$. Hiermee correspondeert punt P in figuur 1, punt Q in figuur 2 en punt R in figuur 3. Elk van de drie functies gaan we differentiëren en we vragen naar het verband tussen de drie afgeleiden. Om te beginnen beschouwen we daartoe de afgeleide van g:

$$g' : t \to 3 - t.$$

Voor $t = 1$ vinden we $g'(t) = 2$. Trek in figuur 2 in het punt Q een raaklijn aan de grafiek. De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is dan gelijk aan 2. Dat wil zeggen: als we langs deze raaklijn voortgaan en t b.v. p $(p \neq 0)$ laten toenemen, dan zal de toename van y gelijk zijn aan $2p$. Dus:

> de afgeleide van de functie (voor $t = 1$) is gelijk aan de toename van y gedeeld door de toename van t, als we langs de raaklijn (in P) voortgaan.

De toename van t hebben we hierboven p genoemd. We kunnen de toename van t noemen zoals we willen en kunnen haar dus ook $\mathrm{d}t$ noemen. De bijbehorende toename van y noemen we $\mathrm{d}y$. Doen we dit, dan vinden we:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2.$$

Omdat in het voorgaande $p \neq 0$ en dus $\mathrm{d}t \neq 0$ is ondersteld, staat hier een welgedefinieerd quotiënt. De teller en de noemer van dit quotiënt worden differentialen genoemd. Het quotiënt heet daarom ook wel een differentiaalquotiënt.

Nu de beide andere functies. De functie f geeft geen moeilijkheden. De raaklijn aan de grafiek valt in elk punt met de grafiek samen. Duidelijk is dus, dat voor f geldt:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3.$$

Nu gaan we naar figuur 3. Kies een waarde van t. Hierbij hoort een punt A op de raaklijn in P (figuur 1) en een punt B op de raaklijn in Q (figuur 2). En hieruit vinden we in figuur 3 punt C. Variëren we t en laten we dáárbij A de raaklijn in P doorlopen en B de raaklijn in Q, dan doorloopt C de raaklijn in R in figuur 3. Bij dit doorlopen is

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3 \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2.$$

Waaruit volgt:

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tfrac{2}{3}$$

Waarmee de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in R gevonden is.
Imponerend is dit geheel voor de leerlingen niet. Het is een methode om datgene, wat ze reeds wisten, op een nieuwe en voor hen op dit moment moeilijker manier te formuleren. We zullen de nieuwe denkwijze dus moeten rechtvaardigen door haar toe te passen in een geval, waarin de oude ons in de steek laat. De oude is van toepassing op functies. De nieuwe blijkt een ruimer toepasbaarheid te hebben en ook bruikbaar te zijn bij relaties, die geen functie zijn. Als voorbeeld kiezen we de relatie

$$\{(x, y) \mid x^2+y^2 = 4\}.$$

De grafiek van deze relatie is een cirkel. We vragen naar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de cirkel in een punt ervan. We stellen daartoe eerst een parametervoorstelling van de relatie op, nl.

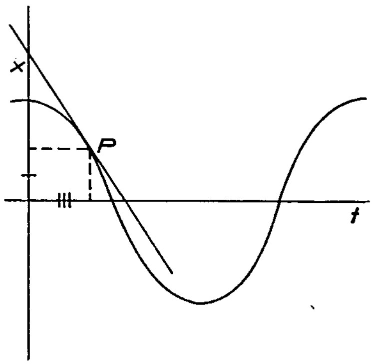
$$x = 2\cos t$$
$$y = 2\sin t.$$

In figuur 4 en figuur 5 zijn getekend de grafieken van de functies

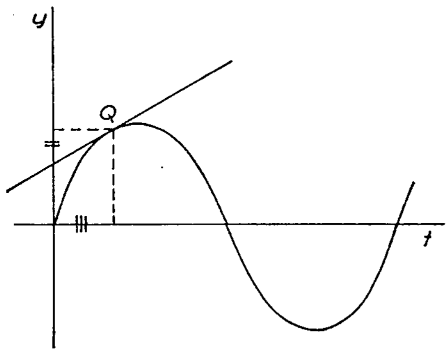
$$f : t \to x = 2\cos t$$
$$g : t \to y = 2\sin t$$

en in figuur 6 de grafiek van de relatie

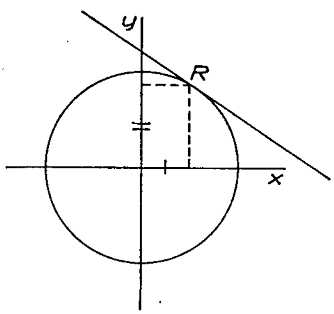
$$\{(x, y) \mid x^2+y^2 = 4\}.$$



FIGUUR 4



FIGUUR 5



FIGUUR 6

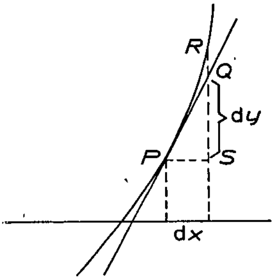
Kies nu een punt R op de cirkel. Hierbij hoort een bepaalde waarde van t en daarmee een punt P op de grafiek van f en een punt Q op de grafiek van g. We trekken de raaklijnen in P, Q en R aan de drie grafieken. De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in P en Q zijn resp. gelijk aan

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\sin t \quad \text{en} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cos t$$

(omdat $f'(t) = -2 \sin t$ en $g'(t) = 2 \cos t$). Hieruit volgt:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2 \cos t}{-2 \sin t} = -\frac{1}{\tan t}.$$

(In de klas zal men voor t wel eerst een getalwaarde kiezen, b.v. $\frac{1}{3}\pi$, en daarna pas overgaan naar het algemene geval.)
En passant hebben we hiermee afgeleid, dat de raaklijn aan een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt.
Aan de hand van figuur 7 lichten we de betekenis van de differentialen nog



FIGUUR 7

eens toe. Getekend is de grafiek van een functie of van een relatie en de raaklijn in een punt P ervan. Onderstel, dat in punt P b.v.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2.$$

Dan is

$$\frac{SQ}{PS} = 2.$$

Dan is, ten minste als we $\mathrm{d}x$ klein kiezen,

$$\frac{SR}{PS} \text{ ongeveer gelijk aan 2.}$$

D.w.z. gaan we langs de grafiek van P naar R, dan is

$$\frac{\text{toename } y}{\text{toename } x} \text{ ongeveer gelijk aan 2.}$$

of

$$\text{toename } y \text{ ongeveer gelijk aan } 2 \cdot \text{toename } x.$$

(De juiste formulering van deze huiselijke uitspraak is natuurlijk: de limiet van $\frac{\text{toename } y}{\text{toename } x}$ voor toename $x = 0$ is gelijk aan 2.)
De fysicus is met deze huiselijke formulering erg gelukkig. Maar ook voor de mathematicus en zeker voor de leerling is deze intuïtief-slordige formulering verhelderend. M.i. is ze echter alleen verhelderend, nadat we op verantwoorde wijze de betekenis van $\frac{dy}{dx}$ uitgelegd hebben. Zouden we tevreden zijn met alleen maar de slordige formulering, dan zouden we ons houvast kwijtraken.
We kunnen nu regels voor het vormen van differentiaalquotiënten opstellen. Ze lopen parallel met de regels aangaande het differentiëren. Onderstel, dat x en y functies van t zijn. Dan is ook xy een functie van t. De afgeleide naar t geven we aan door $'$. Dan is

$$(xy)' = x\,y' + y\,x'.$$

Bij een functie is de afgeleide gelijk aan het differentiaalquotiënt, dus

$$\frac{dxy}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}.$$

Hieruit volgt

$$dxy = x\,dy + y\,dx.$$

Als volgend voorbeeld nemen we x^2. Weer nemen we aan, dat x een functie is van t. Dan is

$$(x^2)' = 2x\,x'.$$

Dus

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

of

$$dx^2 = 2x\,dx.$$

Zonder moeite kan men zo elke formule aangaande afgeleiden omvormen in een formule betreffende differentialen.

Na deze voorbereidingen nog een laatste voorbeeld. We vragen te onderzoeken de relatie

$$\{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 = 3\}.$$

We denken ons x en y beide functies van een of andere parameter t. Hoe deze functies eruit zien, interesseert ons niet, omdat we ze toch verder niet nodig hebben. Volgens het voorgaande is nu

$$\frac{\mathrm{d}(x^2 + xy + y^2)}{\mathrm{d}t} = 0$$

en dus

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$2x\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1}$$

Begrijpen we eenmaal, wat er gebeurt, dan schrijven we natuurlijk direct de laatste regel op.

Kies nu een punt op de grafiek, b.v. het punt $x = 1$, $y = 1$. Uit (1) vinden we dan

$$2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1.$$

Dit stelt ons in staat de raaklijn aan de grafiek in het punt (1, 1) te tekenen. In het bijzonder interesseren ons de horizontale en de verticale raaklijnen. Voorwaarde voor een horizontale raaklijn is $\mathrm{d}y = 0$. Omdat $\mathrm{d}x \neq 0$, levert (1) dan

$$2x + y = 0.$$

Omdat ook

$$x^2 + xy + y^2 = 3,$$

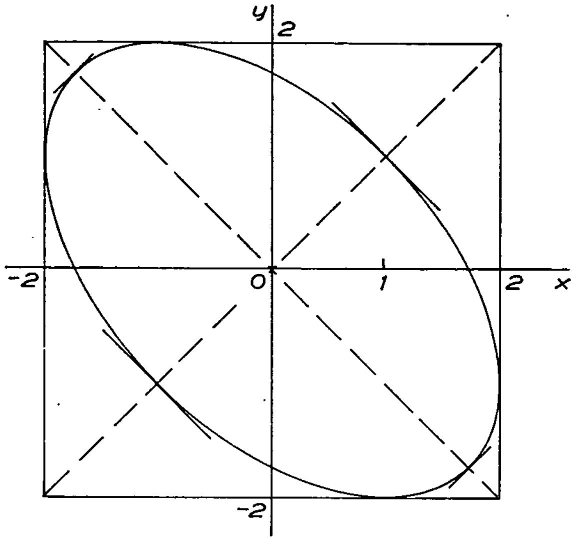
vinden we dan

$$x = 1,\ y = -2 \text{ of } x = -1,\ y = 2.$$

De voorwaarde voor een verticale raaklijn is $\mathrm{d}x = 0$. Dit levert op dezelfde manier

$$x = -2,\ y = 1 \text{ of } x = 2,\ y = -1.$$

We kunnen nu verdere eigenschappen van de relatie opsporen en b.v. laten zien, dat de grafiek niet alleen de lijnen $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$, $y = 2$ raakt maar verder geheel binnen het door deze lijnen omsloten vierkant ligt, laten zien dat $x = y$ en $x = -y$ symmetrieassen van de grafiek zijn en dat de oorsprong er middelpunt van is. Men kan de snijpunten met de symmetrieassen opsporen en de raaklijnen in deze snijpunten. Zo komt langzamerhand de bekende ellips tevoorschijn zonder dat we officieel weten, dat het een ellips is (figuur 8) [1].



FIGUUR 8

Voor ons is één ding op dit ogenblik nog van speciaal belang. We hebben gevraagd naar de verticale raaklijnen en daarbij $dx = 0$ gesteld. Op het moment, dat we dit doen verlaten we de opvatting, dat we te maken hebben met een quotiënt $\frac{dy}{dx}$. Als we toelaten, dat $dx = 0$, mogen we het niet meer algemeen hebben over het quotiënt van dy en dx, maar wel over hun verhouding. En hiermee zijn we de officiële betekenis van differentialen een stuk nader gekomen. Onder de differentialen dx en dy verstaan we twee getallen, waarvan de verhouding gelijk is aan de limiet van de verhouding van de toenamen van x en y, als deze beide toenamen tot 0 naderen. Strikt genomen heeft het dus eigenlijk geen zin over differentialen te spreken, maar kunnen we beter praten over differentiaalverhoudingen. Maar daar vallen we onze leerlingen hopelijk niet mee lastig.

Nog één raad. Het lijkt mij verstandig bij het differentiëren uitsluitend de schrijfwijze f' voor de afgeleide van f te gebruiken en niet $\frac{df}{dx}$ of $\frac{dy}{dx}$ te schrijven. Natuurlijk had ik dat zelf wel gedaan. Ik had toen het voordeel, dat ik bestaande symbolen een nieuwe interpretatie kon geven, hetgeen de uitleg in technisch opzicht vergemakkelijkte. Maar ik geloof, dat het belemmerend gewerkt heeft op het verkrijgen van een goed inzicht.

---

[1] De hier gevolgde manier kan ook met vrucht op het voorgaande voorbeeld toegepast worden. Daar was gegeven de relatie $\{(x, y) \mid x^2+y^2 = 4\}$. We vinden dan $2x\,dx+2y\,dy = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. En dus staat de raaklijn loodrecht op de straal naar het raakpunt.

Homomorfie in de schoolwiskunde

1 Moeten we achter de titel hierboven een vraagteken plaatsen? Is het de bedoeling dat we het begrip homomorfie in de school brengen? In de schoolwiskunde kunnen we homomorfie nu reeds op talrijke plaatsen aanwijzen. Als we al een teken achter de titel willen plaatsen dan misschien een uitroepteken; zo in de betekenis van: homomorfie ook op de school!

2 In het nieuwe programma – het is ons al vaak voorgehouden – moeten we aandacht besteden aan structuren. We moeten ze herkennen door de (school) wiskunde heen en we moeten er voor zorgen dat de leerlingen ze zien.
Om welke structuren het gaat weten we allemaal wel. Lucienne Félix somt ze op en bespreekt ze in haar aardige boekje Mathématiques modernes $\cap$ enseignement élémentaire [1]: elementen (verzamelingen), relaties, operaties, functies (afbeeldingen), kwantoren, omgevingen.

3 In een recent artikel [2] voegt Eugene Krause daar de homomorfie aan toe. Hij geeft daarbij niet minder dan 38 voorbeelden (van 'Kindergarten' tot de 'graduate school'). Het komt me goed voor u er enige door te geven. Wie er meer wil kennen, kan ze zelf opsporen of Krause's artikel lezen.

4 Is f een functie (afbeelding) van een verzameling A in een verzameling B, dan zijn dus bij elke $a, b \in A$ bepaald $f(a), f(b) \in B$.
Is nu in A een binaire operatie $*$ gedefinieerd en in B een binaire operatie $\circ$, dan zegt men dat f een homomorfisme van $(A, *)$ in $(B, \circ)$ is als geldt $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ (handig om te onthouden maar op de bekende wijze slordig gezegd: 'het beeld van het produkt is het produkt van de beelden').

Een voorbeeld: we beschouwen de verzameling der natuurlijke getallen met daarin de optelling als operatie $(\mathbf{N}, +)$. We beelden af in $(\mathbf{N}, \cdot)$ door middel van de functie 'breng p tot die macht'. Dit is een homomorfisme, immers

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{N}, +) & \xrightarrow{f} & (\mathbf{N}, \cdot) \\ 2 & \longrightarrow & p^2 \\ 3 & \longrightarrow & p^3 \\ + \overline{} & & \overline{}\ \cdot \\ 5 & \rightarrow & p^5 = p^2 \cdot p^3. \end{array}$$

Het optellen van de originelen correspondeert met het vermenigvuldigen van de beelden.

5.1 Krause geeft zo veel meer voorbeelden. Ik neem daarvan nog enkele. V is een verzameling disjuncte verzamelingen, $\cup$ de vereniging; we beelden

$(V, \cup)$ door de functie 'tel het aantal elementen' af in $(\mathbf{N}, +)$

$$\begin{array}{lcc}
 & (V, \cup) \xrightarrow{f} & (\mathbf{N}, +) \\
 & \{a, b, c\} \longrightarrow & 3 \\
 & \{d, e\} \longrightarrow & 2 \\
\cup & \overline{\qquad\qquad} & \overline{\qquad\quad} + \\
 & \{a,b,c,d,e\} \rightarrow & 5 = 3+2
\end{array}$$

Dit is het homomorfisme, schrijft Krause, dat de kleintjes gebruiken als ze de som van 3 en 2 moeten bepalen; ze steken 3 vingers op en nog eens 2 en tellen nu het aantal. Oudere mensen doen 't juist andersom: als we willen weten hoeveel leerlingen de school telt, dan brengen we ze niet samen in een lokaal, maar we nemen eenvoudig de som van de aantallen van de verschillende klassen.

5.2 V is weer een verzameling verzamelingen, $\times$ het cartesisch produkt; door dezelfde functie 'tellen' beelden we af in $(\mathbf{N}, \cdot)$

$$\begin{array}{lccc}
 & (V, \times) & \xrightarrow{f} & (\mathbf{N}, \cdot) \\
 & A & \longrightarrow & n(A) \\
 & B & \longrightarrow & n(B) \\
\times & \overline{\qquad\quad} & & \overline{\qquad\quad} \cdot \\
 & A \times B \rightarrow & n(A \times B) = & n(A) \cdot n(B)
\end{array}$$

Tellen is dus een homomorfisme t.o.v. het cartesisch produkt en de vermenigvuldiging: het behoeft ons niet te verbazen, schrijft Krause; tenslotte is de vermenigvuldiging juist zo gedefinieerd.

5.3 $(\{\text{decimaal geschreven getallen}\}^3, \cdot) \xrightarrow{f} (\mathbf{N}, +)$ met f = 'tel het aantal cijfers achter de komma'

$$\begin{array}{lcc}
 & 9{,}42 \longrightarrow & 2 \\
 & 1{,}003 \longrightarrow & 3 \\
\cdot & \overline{\qquad\quad} & \overline{\qquad\quad} + \\
 & 9{,}44826 \rightarrow & 5 = 2+3
\end{array}$$

5.4 $(\mathbf{N}, \cdot) \xrightarrow{f} (\mathbf{N}, \cdot)$, met $f(x) = x^5$
$(a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5$.

5.5 $(\mathbf{R}^+, \cdot) \xrightarrow{f} (\mathbf{R}, +)$, waarbij $f = \log$, is wel het klassieke voorbeeld: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

5.6 $(\{\text{differentieerbare functies}\}, +) \xrightarrow{D} (\{\text{functies}\}, +)$, waarbij D = 'neem de afgeleide'
$D(f+g) = Df + Dg$

5.7 $(\{\text{open bewering op } \mathbf{N}\}, \wedge) \xrightarrow{f} (\{\text{deelverzameling van } \mathbf{N}\}, \cap)$
waarbij f is 'neem de waarheidsverzameling'

$$\begin{array}{lcr} x^2+28 = 11x & \longrightarrow & \{4,7\} \\ x^2 < 25 & \longrightarrow & \{1,2,3,4\} \\ \wedge\text{———} & & \text{———}\cap \\ x^2+28 = 11x \wedge x^2 < 25 & \rightarrow & \{4\} = \{4\} \end{array}$$

5.8 $(\{\text{deelverzameling van } V\}, \cup) \xrightarrow{f} (\{\text{deelverzameling van } V\}, \cup)$
waarbij f = 'neem de doorsnede met A'

$$\begin{array}{lcr} B & \longrightarrow & A \cap B \\ C & \longrightarrow & A \cap C \\ \cup\text{———} & & \text{———}\cup \\ B \cup C & \rightarrow & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}$$

De andere distributieve wet is natuurlijk ook een voorbeeld.

5.9 $(\{\text{onafhankelijke gebeurtenissen } E_k\}, \cup) \xrightarrow{f} (\mathbf{R}, +)$
f = de kans op E_k: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1)+p(E_2)$

5.10 $(\mathbf{Z}, +) \xrightarrow{f} (\mathbf{Z}_5, +) \qquad (\mathbf{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\})$
is een homomorfisme, als we onder f verstaan 'neem de equivalentieklasse van n, mod 5'. Klokrekenen!

6 Ik gaf wel genoeg voorbeelden. De lezer kan er zelf bijvinden. Dat doen de leerlingen ook: 'ze hebben de gewoonte om homomorfismen aan te wijzen die er niet zijn' (Krause). U kent ze wel:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$$
$$|a+b| = |a|+|b|$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$$

Krause voegt er aan toe, dat homomorfismen 'nice' functies zijn. Als men met andere functies moet werken, dan is het van belang om te weten hoeveel er aan het homomorf zijn mankeert! Dát geeft dan de juiste formule.

7 Homomorfie wordt vaak toegepast bij de uitbreiding van een systeem tot een nieuw; bijv. $(\mathbf{Z}, +)$ tot $(\mathbf{Q}, +)$. De structuur van het nieuwe wordt dan zo gegeven dat het verband een homomorfisme is; natuurlijk, we willen immers als som van 2 en 3 'hetzelfde' krijgen als die van $\frac{4}{2}$ en $\frac{12}{4}$!
Een andere toepassing is de constructie van een wiskundig model bijv. van een fysische situatie. Het verband in de natuur moet homomorf corresponderen met dat in het model.

8 In Krause's artikel vinden we veel voorbeelden kennelijk met de bedoeling om in de school op het begrip te wijzen.
Wij kunnen ons nog afvragen, wanneer men dat moet gaan doen. Het antwoord

kan m.i. slechts zijn: nadat er voldoende aandacht besteed is aan het functiebegrip én er een goede aanleiding is om er over te beginnen.
Ik denk aan het geval 5.5 (v.w.o. en havo). Maar als u dit nog te vroeg vindt, dan toch zeker bij de lineaire afbeeldingen, die voor wiskunde II (v.w.o) op 't programma staan.

AMK

---

[1] Uitg. Librairie Scientifique A. Blanchard, Parijs, 1965; er is ook een Duitse uitgave: Mathematische Strukturen als Leitfaden für den Unterricht, verschenen bij Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1963.

[2] Eugene F. Krause: Homomorphism: A Unifying concept, The Mathematics Teacher, **62**, 8, dec. 1969.

[3] Hier ben ik weer slordig. Mogen we een verzameling wel zo noteren? Ik bedoel hier natuurlijk „de verzameling van decimaal geschreven getallen". Dezelfde vrijheid heb ik me ook verder nog enige keren veroorloofd.

[4] of $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ als men vindt dat $0 \in \mathbf{N}$.

Korrel CLIX

Raaklijn en raakvlak

Bij de behandeling van raakproblemen in het experiment meetkunde met vectoren gaf ik de hierbij gevoegde berekeningen. Denkend aan de oproep van de redactie van EUCLIDES om ervaringen uit te wisselen, dacht ik aan de mogelijkheid van plaatsing als een 'Korrel'.

1. De lijn in een punt P van een bol loodrecht op de verbindingslijn van P met het middelpunt heeft met de bol slechts het punt P gemeen.

Als de bol B wordt voorgesteld door $(\underline{x}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{m}) = \rho^2$ [1]
dan is dus $(\underline{p}-\underline{m}, \underline{p}-\underline{m}) = \rho^2$ [2]
De loodlijn l wordt geschreven $\underline{x} = \underline{p}+\lambda\underline{r}$ [3]
met $(\underline{r}, \underline{p}-\underline{m}) = 0$ [4]

Gemeenschappelijke punten voldoen aan [1] en [3]; we substitueren [3] in [1] en verkrijgen:

$$\lambda^2\|\underline{r}\|^2+2\lambda(\underline{r}, \underline{p}-\underline{m})+\|\underline{p}-\underline{m}\|^2 = \rho^2 \qquad [5]$$

Uit [2], [4] en [5] volgt $\lambda^2\|\underline{r}\|^2 = 0$, dus $\lambda = 0$, zodat $B \cap l = \{P\}$.

2. Het loodvlak in P heeft dezelfde eigenschap.

Dit loodvlak V: $(\underline{p}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{p}) = 0$ [6]

wordt doorgaans met gebruikmaking van [2] geschreven:

$$(\underline{p}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{m}) = \rho^2. \qquad [7]$$

De punten van $B \cap V$ voldoen dus zowel aan [1] als aan [7]; door aftrekking:

$$\begin{array}{lll} & (\underline{x}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{m}) = \rho^2 & [1] \\ & (\underline{p}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{m}) = \rho^2 & [7] \\ \hline \text{ontstaat} & (\underline{x}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{p}) = 0 & [8] \\ \text{en met [6]:} & (\underline{p}-\underline{m}, \underline{x}-\underline{p}) = 0 & \\ \hline & (\underline{x}-\underline{p}, \underline{x}-\underline{p}) = 0 & [9] \end{array}$$

zodat $\underline{x}-\underline{p} = 0$ en $B \cap V = \{P\}$.

3. Uiteraard kunnen bovenstaande berekeningen ook reeds bij de behandeling van de cirkel worden gemaakt; de kern van de raakproblemen komt er nog eens helder in naar voren.
De behandeling in de klas gaf mij de gelegenheid om de meetkundige betekenis van [8] te bespreken en naar aanleiding van vragen opnieuw de gelijkwaardigheid van stelsels vergelijkingen te belichten.

G. A. Oosterholt
Leiden

Boekbespreking

R. Bens, E. Bouqué, E. Dewilde, F. Smissaert, A. Snauwaert, *Opbouw* 2, Wiskunde voor het secundair onderwijs, Wesmael-Charlier, Namen, 1969, XV+272 blz.

Met heel veel genoegen heb ik het tweede deel van Opbouw, bestemd voor de vijfde klassen (onze tweede klassen) van het Belgische voortgezet onderwijs, gelezen.
De schrijvers trachten zo streng mogelijk te zijn zonder echter dogmatisch de didactische kwaliteiten van het boek ondergeschikt te maken aan het streven naar strengheid.
Karakteristiek voor hun methode is de zuivere scheiding tussen de affiene en de metrische meetkunde. Eerst worden de dilataties besproken met als bijzonder geval de verschuivingen, daarna komen uiteraard de vectoren aan de orde, maar alleen nog maar de optelling en de vermenigvuldiging met een geheel getal (de rationale getallen zijn nog niet aan de orde geweest).
Met behulp van de kennis omtrent translaties komt de getallenrechte tot stand. Onderverdelingen leiden tot punten, waaraan vormen a/b zijn toegevoegd. Zo ontstaan de rationale getallen. De translatie levert de definitie van de optelling van rationale getallen. Met behulp van homothetieën (reeds geïntroduceerd bij de dilataties) wordt de vermenigvuldiging gedefinieerd.
Nu volgt een hoofdstuk over groepen, waarin de gemeenschappelijke structuur in verschillende voorgaande verzamelingen naar voren komt. Uit de groepseigenschappen worden eigenschappen van optelling en aftrekking afgeleid, echter tot mijn spijt niet daarna analoge eigenschappen van vermenigvuldiging en deling.
Nu volgt een verantwoorde invoering van de reële getallen. D.w.z. met de strengheid is juist zoveel de hand gelicht, dat een kort en begrijpelijk betoog ontstaat. Ik mis tot mijn grote vreugde een uitvoerige beschouwing over optelling en vermenigvuldiging in de verzameling van de reële getallen; alleen in enkele vraagstukken is daaraan aandacht besteed.
Nu zijn we zover, dat we aan de metrische meetkunde moeten beginnen. Eerst wordt de loodrechte stand besproken, daarna de spiegeling. Op de spiegelingen volgen de isometrieën, d.z. samenstellingen van spiegelingen. De groep van de isometrieën vormt de basis voor de definitie van de congruentie. Gelijkheid van lijnstukken en van hoeken wordt gedefinieerd. Lengten van lijnstukken en grootten van hoeken worden gedefinieerd, echter alleen nog maar als ekwivalentieklassen en niet als getallen. Ten slotte volgen de bewijzen van vier congruentiegevallen van driehoeken.
De wijze, waarop de stof is gerangschikt, vind ik zeer goed doordacht. Het boek is helder en duidelijk geschreven. De schrijvers hebben gepoogd door de keuze van hun vraagstukken de techniek niet te verwaarlozen.

P. G. J. Vredenduin

V. van Achter,
De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool;
107 blz.; Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1969.

Voor allen die zich willen oriënteren inzake de problematiek van een te moderniseren rekenonderwijs op de basisschool als onderdeel van de wiskundige vorming in een longitudonale leerstofplanning, is dit boekje uit *Malmbergs Mathematische Bibliotheek* een goede gids. De geplande modernisering van het wiskunde-onderwijs op scholen voor voortgezet onderwijs zal nimmer het beoogde doel volledig bereiken, als het traditionele rekenonderwijs niet wordt vervangen door een onderwijs waarbij leerlingen reeds op jeugdige leeftijd, met behulp van concreet materiaal en bij een adequate werkvorm geconfronteerd worden met wiskundige structuren die eerst in een latere fase diepgaand geanalyseerd dienen te worden. Als de modernisering eerst in het voortgezet onderwijs begint, dreigt het gevaar dat de leerlingen door het voorafgaand traditionele onderwijs reeds verkeerd geconditioneerd zijn.
Na de noodzaak van een didactische hervorming te hebben bepleit geeft Van Achter een overzicht van het werk van een aantal op de voorgrond tredende onderzoekers (o.a. van Piaget, Bruner en Dienes). De methodische vernieuwing in het basisonderwijs, waarin ook symboolspelletjes en structurele spelletjes hun betekenis kunnen hebben, wordt uiteengezet, evaluatieproblemen bij de bepaling van de waarde van nieuwe onderwijsmethoden komen aan de orde, suggesties voor programmaherziening worden gegeven. De rol die materiële hulpmiddelen kunnen hebben in een onderwijs dat de nadruk legt op de activiteit van de leerlingen zelf, op de problematiek inzake het opvatten van zinvolle gehelen in gestalttheoretische geest en op het leren van complexe structuren, wordt belicht. De herscholing van de onderwijzer krijgt bijzondere aandacht. Dit laatste punt is van eminent belang,omdat de huidige scholing van de onderwijzer op wiskundig gebied ten enenmale onvoldoende is om er een modernisering van het onderwijs op de basisschool op te funderen.
Een verantwoorde bibliografie achter in Van Achters boekje kan van dienst zijn voor allen die zich voor de behandelde problematiek interesseren. Dat deze belangstelling in ons land aanwezig is, valt niet te betwijfelen: het recente project WISKOBAS, dat een introductie van wiskunde in het basisonderwijs beoogt, legt er getuigenis van af.

Joh. H. Wansink

A. Rouveaux, *Introduction aux équations aux différences finis.* Lidec Inc., Montreal 1966, 100 blz., $ 1.75.

Dit aardige boekje over differentievergelijkingen werd besproken in de 42e jaargang blz. 155. Het vindt een natuurlijk vervolg in
Équations differentielles au secondaire van dezelfde auteur en dezelfde uitgever, 80 blz. prijs niet opgegeven.
Parallel aan het eerstgenoemde boekje worden de differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met constante coëfficiënten, homogeen en niet homogeen besproken aan de hand van praktische voorbeelden. De oplossingen worden gevonden m.b.v. het bepalen van primitieve functies. Aan continuïteit en differentieerbaardheid van functies wordt aandacht besteed. De behandeling is niet streng maar voldoet aan redelijke eisen voor de leerlingen waarvoor het bedoeld is. Een aardig boekje.

Burgers

J. Breuer, *Initiation à la theorie des ensembles*, Dunod-Paris, 1969, tweede druk, 115 blz., 17 F.
De eerste druk werd besproken in de 37ste jaargang, blz. 206. De tweede druk is een aanvulling en omwerking van de eerste, zonder het principe 'theorie naive' te verliezen. De notaties zijn gemoderniseerd.

Burgers

Caleb Gattegno, *Zur Didaktik des Mathematischen Unterrichts*, Band I, Neue Ansätze; 120 blz.; geb. 17.80 D.M.; 1969; Schroedel Verlag, Hannover.

Dit werk is een vertaling uit het Frans van R. en Kl. Heipcke. De oorspronkelijke titel was: *L'enseignement des mathématiques* en was opgenomen in de serie *Actualités pédagogiques et psychologiques* van het Instituut J. J. Rousseau te Genéve.
In jaargang 31 van Euclides is aan de Franse uitgave een bespreking van meer dan 10 bladzijden gewijd. We kunnen dus over de Duitse vertaling hier kort zijn. Er is aan de stof van destijds niets nieuws toegevoegd. Ook de lijst van conferenties van de C.I.E.A.E.M. die in de Franse uitgave van 1950 tot 1955 liep, is niet verder aangevuld, hoewel de conferenties nog regelmatig voortgang hebben. Dat E. W. Beth, die een belangrijke bijdrage schreef over organisatie en methode in het wiskunde-onderwijs, in 1964 overleed, wordt in deze vertaling van 1969 niet vermeld. Ook is de voornaam-spelling Ewart voor Evert gehandhaafd.
Ik beschouw dit boek als een belangrijke informatiebron over moderne didactische inzichten inzake het wiskunde-onderwijs. De namen Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnerowicz en Choquet staan borg voor het hoge peil van de bijdragen. We beschouwen de Duitse vertaling als een gunstige factor voor de verbreiding van de geponeerde inzichten.

Joh. H. Wansink

H. Bilshausen, F. Thieseman und H. Weppner, *Grundbegriffe und Grundkonstruktionen der Geometrie*;

Teil I, *Gerade Linien und Punkte in der Ebene*; 216 schakels; Teil II, *Der Winkel*; 160 schakels; Teil III, *Die Parallelverschiebung*; 98 schakels;Teil IV, *Die Geradenspiegelung*; 94 schakels; Teil V, *Die Drehung*; 104 schakels. Bij elk deel behoort een *Schüler-Arbeitsheft.*
Prijs van de vijf leerboeken samen DM 34,60 en van de vijf werkschriften DM 9,60; Hermann Schroedel Verlag, Hannover; 1969.

De didactische kwaliteiten van de geprogrammeerde instructie zijn apert; vele ervan zouden echter ook bij een herziening van het traditionele onderwijs reeds tot hun recht kunnen komen. We ontmoeten de programmering bij de computer assisted instruction, bij de leerapparaten (teaching machines) en in zijn simpelste vorm bij het geprogrammeerde leerboek. De CAI verkeert nog in de experimentele fase, de leerapparaten hebben hun betekenis voor het onderwijs reeds bewezen maar de hoge prijzen ervan staan een algemener gebruik nog ernstig in de weg; het geprogrammeerde leerboek daarentegen opent de mogelijkheid om op minder kostbare wijze de voordelen van goed doordachte programmering in onze scholen tot hun recht te laten komen. Dat de prijs van een geprogrammeerd leerboek toch nog altijd een veelvoud bedraagd van de prijs van een ouderwets leerboek over dezelfde stof is alleszins begrijpelijk als men let op de technische eisen die aan de produktie van die leerboeken gesteld worden. De programmeringen ten dienste van het wiskunde-onderwijs bleven tot dusver in hoofdzaak beperkt tot specifieke onderdelen van de leerstof, zoals het gebruik van de rekenliniaal, en de algebra. Algebra blijkt gemakkelijker te programmeren dan meetkunde. Bij het eerste onderwerp staan namelijk algoritmische oplossingstechnieken op de de voorgrond, terwijl bij het tweede het inzichtelijk leren en de ontwikkeling van de creativiteit extra moeilijkheden opleveren.
Maar ook de meetkunde heeft voldoende veel technische aspecten die de systematische inoefening in een geprogrammeerde cursus mogelijk maken.
We beschouwen de methode van Bilshausen c.s. als een geslaagde poging van programmering van een stuk meetkunde uit het aanvangsonderwijs. Hun methode verdient zeker ook de belangstelling van de Nederlandse wiskundeleraar, maar ook van de onderwijzer bij het basisonderwijs. De "Aufbauprogrammme" in deze vijf deeltjes behandelen een stuk meetkunde

dat op alle scholen van voortgezet onderwijs aan de orde komt. Alle meetkundige begrippen die in een op het transformatiebegrip berustend onderwijs van betekenis zijn, worden in een zorgvuldig opgestelde reeks van uiterst kleine stapjes vastgelegd. De leerlingen worden nergens voor ernstige moeilijkheden geplaatst. Oefeningen ter zelfcontrole zijn ingelast, materiaal voor een eindtest is in elk van de werkschriften ingelegd. Doordat in de werkschriften alle figuren reeds partieel zijn opgenomen, heeft de leerling weinig tijd nodig om de gestelde opdrachten uit te voeren.
De leerling leert de betekenis van alle fundamentele meetkundige begrippen, hij leert deze begrippen in eenvoudige toepassingen gebruiken, opgaven waarbij een beroep gedaan wordt op het "inventief vermogen" van de soort die oudere verzamelingen vaak moeilijk maakten, zal men tevergeefs zoeken. Er wordt niet gededuceerd, er wordt geverifieerd, gecontroleerd en geconstrueerd.
De technisch uitvoering, zowel van de Aufbauprogramme als van de Schüler-Arbeitshefte, voldoet aan hoge eisen.

Joh. H. Wansink

C. Corduneanu, Almost periodic functions; Interscience Publishers (John Wiley and Sons), New York/London; 237 bladz.; prijs 126/—.

Bijna-periodieke functies vinden hun toepassingen in de functietheorie, de theorie van de gewone en partiële differentiaalvergelijkingen, in de getallentheorie en de mathematische statistiek. De theorie over deze functies is nog betrekkelijk jong; hij werd ontwikkeld door de Deense mathematicus H. Bohr en vele anderen (o.a. Stepanov, R. Weyl, Boshner, Von Neumann, Bogoliubov, W. Maak). De auteur geeft in dit uitstekende boek een gefundeerde opbouw van de theorie, waarbij hij in het eerste hoofdstuk op de verwantschap met periodieke functies in het geval van reële argumenten ingaat, in hoofdstuk III definitie en fundamentele eigenschappen van analytische bijna-periodieke functies in het complexe vlak behandelt, om in twee daarop volgende hoofdstukken een inleiding te geven van de toepassing der bijna-periodieke functies in de theorie van de gewone en partiële differentiaalvergelijkingen. In het laatste tweetal hoofdstukken wordt de theorie uitgebreid tot bijna-periodieke functies met waarden in Banachruimten resp. tot functies gedefiniëerd op groepen.
De opbouw van de theorie is fraai en de uiteenzettingen zijn helder. Er wordt meer aandacht aan theoretische achtergronden dan aan toepassingen besteed. Zo valt in de hoofdstukken over de differentiaalvergelijkingen de nadruk op existentieproblemen. Het aantal concrete voorbeelden, waarin de theorie wordt toegelicht, is betrekkelijk gering.
Een uitgebreide litteratuurlijst vergemakkelijkt de lezer om verder in dit gebied thuis te raken. De bibliografische aantekeningen aan het einde van vrijwel ieder hoofdstuk zijn voor dit doel eveneens waardevol.
De typografische verzorging is uitstekend. De vertaling van oorspronkelijk Roemeense tekst in het Engels loopt in het algemeen goed.

W. J. Claas

Liwenagel

Notulen van de ledenvergadering op vrijdag 3 oktober 1969 om 14.00 uur in het Evert Kuipersoord te Amersfoort.

De vergadering werd geopend door de voorzitter, Drs. M. Koksma, die de aanwezigen welkom heette en zich daarbij in het bijzonder richtte tot de inspecteurs, Dr. F. Balkema, Drs. M. L. G. Brogtrop, Dr. W. H. Capel en Drs. B. J. Westerhof, tot de spreker Drs. H. A. van Wely, en tot de vertegenwoordigers van zusterverenigingen, Drs. Th. H. ten Berge (Velebi) en Drs. W. C. Riel (Velines).
De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd. Van de kascommissie was een verslag binnengekomen waarin werd vermeld, dat de boekhouding van de penningmeester in stipte orde was bevonden, zodat de penningmeester kon worden gedechargeerd.
Bestuurskandidaat Drs. Th. H. ten Berge werd bij enkele kandidaatsstelling verkozen verklaard.
Op voorstel van het bestuur benoemde de vergadering het 'even weggeroepen' aftredende bestuurslid, Dr. J. C. van der Steen, tot erelid. Met applaus werd hij begroet, waarna de voorzitter zijn vele verdiensten voor Liwenagel in de ruim 25 jaar dat hij bestuurslid was, memoreerde. Dr. Van der Steen sprak een woord van dank.
Vervolgens konden de aanwezigen genieten van de causerie door Drs. H. A. van Wely, die verbonden is aan de Europese School in Mol (België) en die een studiereis naar Amerika had gemaakt. Van deze causerie, 'Het onderwijs op Amerikaanse en Europese scholen, een vergelijking', gaf de spreker zelf onderstaande samenvatting.
De verschillen tussen het onderwijs (lager, middelbaar en hoger) in de V.S. en in Europa zijn drieërlei.

I. Waar in Europa het onderwijs voornamelijk staatszaak is, is in de V.S. het publiek onmiddellijk betrokken bij zaken het onderwijs betreffende. Niet alleen is iedere staat autonoom in de wijze waarop hij de plicht tot het doen geven van onderwijs wil uitvoeren, iedere burger is in zijn eigen schooldistrict financieel en bestuurlijk betrokken bij het onderwijs.

II. Een tweede verschil wordt gevormd door de geest waarin men werkt. In Europa zijn de meningen zeer verdeeld als de vraag gesteld wordt: aan welke eisen moet een school gehoorzamen en welk doel dient een school na te streven? Gaat het om kennisoverdracht, cultuurspreiding, persoonlijkheidsvorming, nationale bewustwording of politieke wilsvorming? Men krijgt de indruk dat het de Amerikaanse burger duidelijk is wat onderwijs in hoofdzaak dient te zijn. Om het met de woorden van de grootste lerarenorganisatie te zeggen: Men wil een systeem van vrij openbaar onderwijs handhaven teneinde een effectieve democratie te vestigen. Een politiek doel dus? Gedeeltelijk wel, maar ook een streven naar: de beste man of vrouw op de beste plaats, ongeacht afkomst, ras (ook dat!), sexe, geloof of bezit.

III. In de derde plaats is de jacht op het 'papiertje' van een geheel andere aard dan bij ons. Weliswaar heeft een jeugdige zonder high-schooldiploma vrijwel geen kansen, vooral in de steden, doch het behalen van dat diploma hangt meer af van karakter dan van intelligentie. Een ruime keuzemogelijkheid in de leerstof loodst op de 'comprehensive' scholen vrijwel iedere achttienjarige naar dat diploma. En meestal is de leerstof van de laatste drie jaren van de middelbare school beslissend voor de verdere carrière. Het selectieve karakter van onze diploma's kent men in de V.S. wel enigszins, doch op een andere wijze.

Naast alle nadelen van een gedecentraliseerde en aan plaatselijke wensen – en soms willekeur – aangepaste onderwijsstructuur springt één groot voordeel in het oog. Men kan, vaak gesteund door machtige fondsen, regionaal en zelfs lokaal experimenten uitvoeren die de mogelijkheid bieden door anderen te worden nagevolgd zonder inmenging van 'bovenaf'. Legio zijn dan

ook de experimenten met teamteaching, computer assisted intruction, leraarsopleiding, bijscholing van leraren, scholenbouw, part-time schoolbezoek, volwassenenonderwijs, e.d. In het algemeen steekt de positie van onderwijzer en leraar ongunstig af bij de onze. Mannen die hun hele leven voor de klas staan, vindt men nauwelijks, de salarissen zijn bescheiden, de sociale status is laag. Waar grote investeringen gedaan worden in gebouwen, uitrusting en researchmogelijkheden wordt op de honorering van de werkers vaak beknibbeld. Een leraar aan deze zijde van de oceaan mag dan wel eens ontevreden zijn over de hem van overheidswege toegekende behandeling, zijn positie geeft, in vergelijking met zijn Amerikaanse collega, weinig reden tot klagen.
Na een geanimeerde discussie dankte de voorzitter de spreker voor zijn boeiend betoog. Hierna sloot de voorzitter de vergadering.

D. Leujes, secretaris

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Elemente der Mathematik, XXIII^4–XXIV^5; juli 1968–sept. 1969.

J. P. Tschupik, Über Drehflächenumrisse in Perspektive und schiefer Axonometrie;
W. D. Klix, Netzprojektion eines Tetraeders;
Cartwright and Harary, On the colouring of signed maps.

L. Fejes Tóth, Über das Didische Problem;
R. Wodicka, Zur Herleitung der Gronwallschen Nomographierbarkeitsbedingungen;
H. Hadwiger, Ungleichungen für konvexe Rotationskörper;
S. K. Stein, Higher moments of plane convex sets.

H. Hadwiger, Eine Schnittrekursion in die Eulersche Charakteristik euklidischer Polyeder;
F. Fricker, Eine Bemerkung zur Untersuchung unbestimmter Ausdrücke;
F. Stowener, Einfacher Beweis des Wilsonschen Satzes.

H. E. Debrunner, Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern;
O. Bottema, A theorem of Bobillier on the tetrahedron;
D. Suryanarayana, Super perfect numbers.

E. Kreyszig, Die Realteil- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen;
H. Sieber, Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität;
S. Lajos, On (m, n)-ideals in subcommutative semigroups;
J. R. Clay, A note on integral domains that are not right distributive.

M. Bezhad and G. Chartrand, Line-coloring of signed maps;
F. Heigl, Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung;
H. J. Kanold, Über 'super perfect numbers';
K. Fladt, Zur Möbiusinvolution der Ebene.

H. Zeitler, Inhaltsmasszahlen für hyperbolische Rotationskörper;
S. Tauber, On Sc-functions.

E. Heil und W. Krautwold. Konjugierte Durchmesser und extremale Vierecke konvexer Bereiche;

H-J. Kanold, Een einfacher Beweis der Stirlingsche Formel;
H. Harborth, Diagonalen im regularen n-Eck;
J. Brejcha, Die Wallaceschen Geraden und die Feuerbachschen Kreise in einem Sehnenviereck;
A. Makowski, Angles of a parallelogram with vertices in lattice points.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

237 Elke rij van n natuurlijke getallen bevat een deelrij, waarvan de som door n deelbaar is. Bewijs dit. (Dr. P. Bronkhorst)

238 De boer uit opgave 236 heeft vier bomen op een rechthoekig stuk land zo geplant, dat de kortste afstand van twee bomen maximaal is. Het ongeluk wil, dat hij er een vijfde boom bij krijgt. Deze wil hij op zijn land planten bij de vier andere zo, dat de kortste afstand van twee bomen weer maximaal is. Hoe moet hij dit doen?

OPLOSSINGEN

235 Op welke tweetallen cijfers kan de 20e macht van een natuurlijk getal eindigen? Onderstel, dat het laatste cijfer van het natuurlijke getal a is en dat het getal gelijk is aan $a+10b$. Dan vinden we

$$(a+10b)^{20}= a^{20}+20a^{19}\cdot 10b+10^2p \quad (\text{waarin } p\in \mathrm{N})$$

en dus

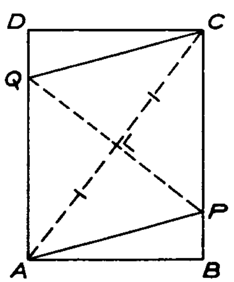
$$(a+10b)^{20}= a^{20} \pmod{100}.$$

Een eenvoudige berekening geeft nu, dat het laatste paar cijfers kan zijn 00, 01, 25, 76.

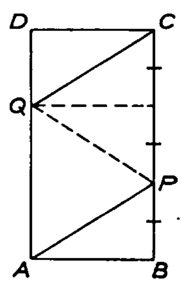
236 Een boer heeft een rechthoekig stuk land. Hij wil er vier bomen op planten zo, dat de kortste afstand van twee bomen maximaal is. Hoe moet hij dit doen?

Noem de rechthoek $ABCD$. Plant in elk geval twee bomen in A en in C.

Onderstel, dat $AB \leqq AD$. Trek de middelloodlijn van AC. Deze snijdt BC in P en AD in Q. Als nu $PQ \geqq AP$, dan is de kortste afstand van twee bomen gelijk aan AP en aan CP. We zien, dat bij een virtuele verplaatsing van P minstens één van de beide lijnstukken AP en CP korter wordt. Zie fig. 1. Dit geval doet zich voor, als $AB \geqq \frac{1}{3}BC\sqrt{3}$. Onderstel, dat $AB < \frac{1}{3}BC\sqrt{3}$. Kies nu P op BC zo, dat $BP= \frac{1}{3}BC$ en Q op AD zo, dat $DQ= \frac{1}{3}AD$. Nu is de kortste afstand van twee bomen gelijk aan AP en aan PQ. Bij een virtuele verplaatsing van P wordt ten minste één van deze afstanden kleiner. Zie fig. 2.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Universiteit van Amsterdam

De Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen maakt bekend, dat per 1 september 1970 bij de vakgroep wiskunde der Faculteit vaceert het

docentschap

met leeropdracht in de didactiek van de wiskunde

De opdracht omvat het geven van een college aan en de begeleiding van aanstaande leraren in de wiskunde.

De werkzaamheden kunnen één tot twee dagen per week in beslag nemen.

Gedacht wordt aan een docent bij het VHMO, die zich ten minste één dag per week beschikbaar kan stellen.

Hem zal opgedragen worden het onderwijs in de didactiek voor aanstaande leraren in de wiskunde nieuwe inhoud te geven en daarbij vooral aandacht te besteden aan de huidige modernisering van het wiskunde-onderwijs.

Sollicitanten wordt verzocht te schrijven aan de voorzitter van de vakgroep wiskunde, Prof. Dr. H. A. Lauwerier, Mathematisch Instituut, Roetersstraat 15, Amsterdam-C.

Inhoud