EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no 7
april 1970

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Kooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Notaties voor verzamelingen

P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

Verzamelingen worden genoteerd door de elementen op te sommen en tussen accoladen te plaatsen, en door middel van de zg. set-builder. Deze laatste notatie ziet er in de regel ongeveer zo uit: $\{x| \ldots x \ldots\}$. Ten aanzien van deze notatie vraagt men zich vaak af, wat nu wel en wat niet geoorloofd is uit wetenschappelijk oogpunt. Ik wil trachten een paar vraagpunten nader te bekijken.

1. De verzameling rationale getallen tussen 1 en 3 schrijven we uiteraard niet

$$\{x|1 < x < 3\},$$

want aan deze schrijfwijze kunnen we niet ontdekken, of het gaat over een verzameling reële getallen, rationale getallen of misschien over nog iets anders. We moeten dus de schrijfwijze zo modificeren, dat blijkt dat we een verzameling rationale getallen bedoelen. Twee mogelijkheden worden verdedigd:

a. $\{x|1 < x < 3 \wedge x \in \mathbf{Q}\}$,

b. $\{x \in \mathbf{Q}|1 < x < 3\}$.

Er schijnt geen principieel verschil tussen beide schrijfwijzen. Toch is het er wel. Als we sub b willen onderzoeken, of een element p tot de verzameling behoort, dan vinden we voor de streep de restrictie, dat we p dienen te kiezen uit **Q**. Doen we dit niet, dan kunnen we substitutie van p in $1 < x < 3$ wel achterwege laten, want we hebben van te voren bepaald ons tot elementen van **Q** te willen beperken. Sub a is er echter geen enkel bezwaar tegen te onderzoeken of b.v. $\sqrt{2}$ tot de verzameling behoort. Substitutie levert

$$1 < \sqrt{2} < 3 \wedge \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$$

en dit blijkt onjuist te zijn, omdat $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Het nare is, dat de schrijfwijze sub a geen enkele beperking oplegt aangaande de objecten, die voor x gesubstitueerd mogen worden. Je kan je afvragen, of je voor x ook zou mogen proberen de oorsprong van het coördinatenstelsel, de verzameling wortels van de vierkants-

vergelijking $x^2 = 4$, de functie $x \rightarrow x^2+1$ of misschien zelfs het hondje van mijn buurvrouw.
Laten we eens zien, hoe we het buiten de wiskunde doen. Euclides is nu eenmaal een blad voor leraren en dus vragen we in gedachten aan de klas: wie heeft deze som niet goed? Dus: welke is de verzameling

$$\{x \mid x \text{ heeft deze som niet goed}\}?$$

Het zal u dan weinig interesseren, dat uw collega voor Nederlands de som niet goed had, de rector evenmin, om maar niet te spreken over de bakker aan de overkant en de poes van de concierge. Allicht niet, want u had het alleen maar over de leerlingen van uw klas. Goed, we doen het beter en schrijven:

$$\{x \mid x \text{ heeft deze som niet goed en } x \text{ is leerling van de klas}\}.$$

Interessant, dat nu de poes van de concierge niet tot de verzameling behoort, omdat hij geen leerling van de klas is. Maar hier ging het u niet om. U hebt zich a priori willen beperken tot de verzameling L van de leerlingen uit de klas en willen weten, wie van hen de som niet goed had. Uw bedoeling wordt het beste weergegeven door de schrijfwijze

$$\{x \in L \mid x \text{ heeft deze som niet goed}\}.$$

Zo is het in de praktijk steeds. Vraagt men naar alle elementen met een bepaalde eigenschap, dan heeft men zich van te voren reeds de restrictie opgelegd, dat men alleen elementen van een bepaalde verzameling wenst te beschouwen. D.w.z. men vormt steeds een verzameling als deelverzameling van een reeds gevormde verzameling.
Een goed wiskundige is door deze redenering niet overtuigd, want de redenering is aan de praktijk ontleend en het is de vraag, of deze praktische argumenten in de wiskunde onverminderd van kracht zijn. Er zijn echter meer klemmende argumenten voor de mathemaat. Het ongebreideld vormen van verzamelingen heeft tot paradoxen geleid. Bekend is de paradox van Russell, die als volgt luidt.

Definitie. $v \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \notin x\}$.

Gevolg. $v \in v \Leftrightarrow v \notin v$.

Dan is het onmogelijk, dat $v \in v$, en dus geldt: $v \notin v$.
Maar evenzeer is het onmogelijk, dat $v \notin v$, en dus geldt $v \in v$.
Waarmee een paradoxaal resultaat is gevonden.
Wat doen we hiertegen? Niet toelaten bij het vormen van verzamelingen, dat x 'zo maar van alles' mag zijn. Anders gezegd: van te voren vaststellen, uit welke verzameling x gekozen mag worden.
Deze eis leidt ertoe de schrijfwijze sub a te verwerpen en die sub b toe te laten.

Conclusie. Men behoort te schrijven:

$$\{x \in \mathbf{Q} | 1 < x < 3\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} | 3x + 2y - 1 = 0\},$$
$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}_2 | \, ||\vec{x}|| \leqq 1\}.$$

Er is een geval, waarin we tegenwoordig hardnekkig eisen dit ook werkelijk te doen. Bij het oplossen van een vergelijking is het vereist eerst vast te leggen uit welke getalverzameling we de onbekende kiezen. We zeggen b.v.:

los x in $\mathbf{Q}$ op uit $3x - 1 = x^2$.

Dit is nu juist de bewoording van: welke is de verzameling

$$\{x \in \mathbf{Q} | 3x - 1 = x^2\}?$$

Welnu, dezelfde eis moeten we stellen bij het noteren door middel van de set-builder van een willekeurige verzameling.
Een tweede en ditmaal didactische vraag is: zullen we hem stellen? Ik zou zeggen: dat moet ieder zelf maar bepalen. Persoonlijk heb ik er geen enkel bezwaar tegen boven een hoofdstuk te zetten: de variabelen stellen reële getallen voor. En dan ben ik voor een tijdje weer van de preciesheid af. Of door het maken van de afspraak: kleine letters stellen lijnen en hoofdletters punten voor, me voor lange tijd te vrijwaren van de eigenlijk noodzakelijke toevoegingen.

2. Als we een bepaalde notatie invoeren, dan moeten we weten, hoe we er weer af komen. We moeten in staat zijn uit een uitspraak, waar de notatie in voorkomt, hem ook weer te elimineren. Bij de set-builder lukt dat gemakkelijk. De enige mathematische context, waarin de set-builder voorkomt, is van de vorm

$$p \in \{x \in V | A\}. \tag{1}$$

Hierin is V een verzameling en A een uitspraak, waarin in de regel de vrije variabele x zal voorkomen, hoewel dit niet noodzakelijk is. (Denk maar aan de verzameling $\{x \in \mathbf{R} | 1 = 1\}$ of $\{x \in \mathbf{R} | 1 \neq 1\}$; hier staat resp. de verzameling $\mathbf{R}$ en de verzameling $\emptyset$.)
Wat betekent nu (1)? Mocht p geen element van V zijn, dan is (1) een zinloze tekencombinatie. Hierover behoeven we ons gelukkig dus niet verder te bekommeren. Als p wel element van V is, dan betekent (1):

$$\binom{x}{p} A.$$

Dit symbool stelt voor de uitspraak, die men krijgt door in A overal waar de variabele x vrij voorkomt, deze te vervangen door p.
Men kan het voorgaande scherper zeggen. Als men een nieuw symbool invoert,

moet men er een definitie van geven. Het nieuwe symbool is in ons geval de set-builder. De definitie ervan luidt:

$$p \in \{x \in V|A\} \text{ betekent: } \binom{x}{p} A. \tag{E}$$

Een zonderlinge definitie? Toch niet. Immers ze stelt ons in staat elke uitspraak, waarin een set-builder voorkomt, om te vormen in een uitspraak, waarin deze niet meer voorkomt.
Nu we eenmaal deze definitie van de set-builder gegeven hebben, zullen we ervoor moeten zorgen, dat overal waar hij gebruikt wordt, hij inderdaad conform het voorschrift (E) geëlimineerd kan worden.
Het schijnt, dat er ook andere uitspraken zijn, waarin de set-builder voorkomt. B.v.

$$\{x \in \mathrm{N}|x \text{ is priem en } x \text{ is even}\} = \{x \in \mathrm{N}|x = 2\}.$$

Dit is echter schijn, want volgens de definitie van gelijkheid van verzamelingen staat hier:

$$\forall p \cdot p \in \{x \in \mathrm{N}|x \text{ is priem en } x \text{ is even}\} \Leftrightarrow p \in \{x \in \mathrm{N}|x = 2\}.$$

En zo blijkt de set-builder toch weer alleen in de standaardvorm voor te komen.
Nu we dit gezien hebben, kunnen we overgaan naar het volgende probleem.
Gegeven is de functie van **R** naar **R**:

$$x \to x^2 + x.$$

We vragen naar de verzameling waarden, die de functie aanneemt, als x het interval $-1 \leqq x \leqq 2$ doorloopt. Of, wat moderner uitgedrukt, we vragen naar het beeld van $[-1, 2]$.
Men ziet hier vaak de volgende schrijfwijze opduiken:

$$\{x^2 + x| -1 \leqq x \leqq 2\}.$$

Eigenlijk zou het moeten zijn

$$\{x^2 + x \in \mathbf{R}| -1 \leqq x \leqq 2 \wedge x \in \mathbf{R}\}.$$

Maar dat interesseert me voor het moment niet. We hebben reeds vermeld, dat het ging over een functie van **R** naar **R** en dus zullen we maar accepteren, dat de variabelen reële getallen voorstellen. Er is echter een andere moeilijkheid. Hoe elimineren we de set-builder? Wat betekent:

$$2 \in \{x^2 + x| -1 \leqq x \leqq 2\}?$$

Het hierboven vermelde eliminatievoorschrift (E) laat ons in de steek. Wat zouden we moeten doen om te onderzoeken of 2 tot de verzameling behoort? Dan moeten we onderzoeken, of er een waarde voor x te vinden is zo, dat

$x^2+x = 2$ en zo, dat tevens $-1 \leqq x \leqq 2$. Welnu, laten we dan schrijven wat we bedoelen. Dus

$$\{y \in \mathbf{R} | \exists x \cdot x^2+x = y \wedge -1 \leqq x \leqq 2\}.$$

Dit is een correct gebruik van de set-builder. Terwijl '$\{x^2+x | -1 \leqq x \leqq 2\}$' niets anders is, dan in gedachten zeggen: 'alle waarden van x^2+x, waarin $-1 \leqq x \leqq 2$' en nu de woorden min of meer klakkeloos in deze volgorde door symbolen vervangen, zonder zich te realiseren of de zo verkregen symboliek ook verantwoorde symbolische taal is.

3. Nu nog een laatste moeilijkheid. De parametervoorstelling van een rechte lijn is in de tweedimensionale vectormeetkunde:

$$\vec{x} = \vec{v} + \lambda \vec{w},$$

waarin λ de reële getallen doorloopt. Vaak zien we hieruit de volgende notatie resulteren:

$$\{\vec{x} | \vec{x} = \vec{v} + \lambda \vec{w}, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Beter is natuurlijk

$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}_2 | \vec{x} = \vec{v} + \lambda \vec{w}, \lambda \in \mathbf{R}\}. \tag{2}$$

Waar het echter om gaat is, dat hier een geheel nieuw gebruik van de set-builder gemaakt wordt. We kunnen hier de set-builder niet elimineren door toepassing van het voorschrift (E), want wat hier staat is niet van de vorm $\{x \in V | A\}$. Om het huiselijk te zeggen: die komma zit me dwars (voor '$\lambda \in \mathbf{R}$').
Hoe is de notatie (2) tot stand gekomen? Door te denken: 'de verzameling van alle vectoren $\vec{x}$, die te schrijven zijn als $\vec{v} + \lambda \vec{w}$, waarin λ de reële getallen doorloopt'. En dan zijn gedachten in deze volgorde om te zetten in symbolen zonder zich af te vragen, of de zo verkregen symboolcombinatie verantwoorde symbolische taal is.
Trouwens, in de gedachtengang zit ook al iets vaags. Wat is dat doorlopen eigenlijk? Er wordt bedoeld, dat men de verzameling wil vormen van alle vectoren $\vec{x}$, die de eigenschap hebben, dat er een reële λ bestaat, waarvoor $\vec{x} \in \vec{v} + \lambda \vec{w}$. Nu we scherper hebben gezegd, wat we bedoelen, kunnen we ook meteen een geëigende notatie bedenken:

$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}_2 | \exists \lambda \in \mathbf{R} \cdot \vec{x} = \vec{v} + \lambda \vec{w}\}. \tag{3}$$

Deze notatie is correct. Men kan er het eliminatievoorschrift (E) op toepassen. Nu geef ik gaarne toe, dat de didactische aspecten van ons onderwijs niet gebukt mogen gaan onder de wetenschappelijke. Uit didactisch oogpunt kan (2) de voorkeur verdienen boven (3). Bij jonge leerlingen zou ik stellig (2) prefereren, ook al om niet genoodzaakt te zijn in een vroeg stadium de existentiekwantor te introduceren. In een later stadium kan juist (3) verhelderend werken, b.v. als we over willen gaan op het elimineren van de parameter λ. Ik kan mij dus levendig voorstellen, dat men toch de schrijfwijze (2) wil gebruiken en ik doe dit zelf trouwens ook. Men kan dan zelfs zijn wetenschappelijk geweten sussen door op te merken, dat de schrijfwijze (2) wetenschappelijk verantwoord wordt, zodra per definitie vastgesteld wordt, dat (2) hetzelfde betekent als (3).

Mijn bedoeling is alleen geweest enige klaarheid te brengen in het gebruik van de set-builder. Als men het gebruik koppelt aan de eliminatieregel (E), dan komt men tot een eenvormig gebruik van de set-builder. Dit kan in een vroeg stadium didactische moeilijkheden geven, op de duur kan het de helderheid van de notatie slechts bevorderen. Evenals in het dagelijks leven zal men wel eens aanleiding vinden van het rechte pad af te wijken. Maar het verdient aanbeveling zich daarbij te realiseren, wat het rechte pad is en dus te weten, waarvan men afwijkt. Anders is het moeilijk te rechtvaardigen, dat men ervan afwijkt.

4. Nog een tweetal slotopmerkingen.

a. In de brugklas werkt men veelal alleen met de notatie, waarbij de elementen van een verzameling opgesomd worden en dan tussen accoladen geplaatst. Hoe noteren we nu de verzameling van b.v. de vierkanten? Alle vierkanten opsommen gaat niet zo best. Toch willen we ze allemaal tussen de accoladen hebben en schrijven daarom

$$\{\text{vierkanten}\}.$$

Het kan zonder twijfel didactische voordelen hebben deze notatie in te voeren als kruising tussen een set-builder en een enumeratie. Deze bastaard komt in de officiële wiskunde niet voor (voorzover ik weet) en zal dus het veld moeten ruimen, zodra men over een betere beschikt, d.i. in de tweede klas.

b. De set-builder dient om deelverzamelingen van reeds bestaande verzamelingen te vormen. Dientengevolge zijn er enkele manieren om verzamelingen te vormen, waarbij de set-builder in het algemeen niet gebezigd kan worden. Dat zijn:

$V \cup W$; men kan immers niet definiëren: $V \cup W =_{\text{def}} \{x \in V \cup W | x \in V \vee x \in W\}$,

$V \times W$; men kan immers niet definiëren: $V \times W =_{\text{def}} \{(x, y) \in V \times W | x \in V \wedge y \in W\}$.

Een derde methode om nieuwe verzamelingen te vormen, waarbij de set-builder geen dienst kan doen, is het vormen van de verzameling van alle deelverzamelingen van V.

Bij een axiomatische fundering van de verzamelingenleer ziet men dan ook afzonderlijke axioma's, die het vormen van dit soort verzamelingen mogelijk maken.

Statistiek op het vwo

In het 'Voorstel leerplan Rijksscholen' en in het 'Voorstel programma eindexamen v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.' staat onder vwo-wiskunde I vermeld:

een nog nader vast te stellen toepassing van de wiskunde.

Door de Programmacommissie en door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde is op hun vergaderingen van 13 en 17 januari j.l. besloten de Staatssecretaris te adviseren te beslissen, dat dit onderwerp zal zijn:

inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en tot de mathematische statistiek.

Deze formulering laat een veelheid van interpretaties toe. Opzettelijk, want door de omvang van de te behandelen stof niet nader officieel te preciseren blijft het mogelijk na enkele jaren op gemakkelijke wijze correcties aan te brengen, indien dit noodzakelijk mocht blijken. Het schijnbare nadeel hiervan is, dat de leraren niet weten, wat er van hen verwacht wordt. Om dit te voorkomen is door de CMLW een commissie ingesteld, die als opdracht had een toelichting op het programma te schrijven, opdat ieder duidelijk zal zijn, wat de doelstelling en de omvang van het onderwijs in waarschijnlijkheidsrekening en statistiek dient te zijn. Deze toelichting zal tegelijk met de toelichting op de andere onderwerpen uit de bovenbouw gedrukt en verspreid worden. Omdat hiermee echter veel tijd gemoeid is, heeft de CMLW de redactie van Euclides verzocht de toelichting in haar blad op te nemen. Voor deze bereidheid is de CMLW de redactie zeer erkentelijk.

Hieronder volgt de toelichting.

Toelichting op het programma waarschijnlijkheidsrekening en statistiek voor v.w.o.-wiskunde I

Tot het eindexamenprogramma voor wiskunde I behoort:

inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek.

De inhoud van dit onderwerp is opzettelijk niet nader gespecificeerd om de ontwikkeling van dit nieuwe vak niet direct te zeer aan banden te leggen. Het is echter wel noodzakelijk kenbaar te maken, zij het dan langs minder officiële weg, welke inhoud dit nieuwe vak toegedacht is, althans aanvankelijk. Zonder een dergelijke toelichting zouden de wiskundeleraren geheel in het onzekere verkeren, wat ze beter wel kunnen behandelen en wat overbodig geacht kan worden. Omdat het vak nieuw is, is de toelichting vrij uitvoerig gegeven en is er niet van uitgegaan, dat de lezers reeds een grondige kennis van de stof hebben. Dit brengt met zich mee, dat hier en daar vrij precies ingegaan is op de behandelingswijze. Men moet dit niet opvatten als een opgelegde dwang. Zonder hier en daar in concreto een bepaalde behandelingswijze te volgen, was het niet goed mogelijk duidelijk uiteen te zetten, wat als doelstelling van het onderwijs in waarschijn-

lijkheidsrekening en statistiek gedacht is. Uiteraard is het gestelde doel op verschillende manieren bereikbaar en is de hierna gepresenteerde behandelingswijze en stofindeling slechts één van deze manieren.
De gebezigde terminologie in deze toelichting is ontleend aan het stencil 'Statistische begrippen met hun vertalingen in het Engels, Frans en Duits', dat uitgegeven is door het Instituut voor toepassingen van de wiskunde van de Universiteit van Amsterdam.

1 Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening

De bedoeling van deze inleiding is de leerling een goed inzicht bij te brengen in het kansbegrip en in discrete kansverdelingen. Als men kansrekening laat ontaarden in een training tot het maken van ingenieuze kansvraagstukken, zal men het gestelde doel in de beschikbare tijd niet kunnen bereiken.
Een didactisch goede inleiding tot het kansbegrip wordt geleverd door de bekandeling van situaties, waarin de definitie van Laplace gebruikt kan worden om hansen te vinden. Een experiment kan m verschillende resultaten hebben. We willen de kans vinden, dat het experiment een bepaalde (gunstige) afloop heeft, die in slechts g van de m gevallen bereikt wordt. De kans op gunstige afloop is dan per definitie g/m. Zo is de kans op het trekken van een boer, vrouw of heer uit een spel van 52 kaarten 12/52. Het gooien met dobbelstenen, het opgooien van een munt, het trekken van een knikker uit een vaas zijn geschikte voorbeelden van situaties, waarin de kansdefinitie van Laplace toegepast kan worden.
Uitgaande van deze kansdefinitie kan men de somregel afleiden, met als bijzonder geval de complementregel. Conditionele kansen worden behandeld. Deze behandeling voert tot de produktregel en daarna tot een definitie van onafhankelijke gebeurtenissen.
Het spreekt vanzelf, dat een goed inzicht in het voorgaande alleen verkregen kan worden door de nodige vraagstukken te maken. Daarbij mag men ervan uitgaan, dat permutatie en combinatie reeds in de onderbouw behandeld zijn, zodat hiervoor geen tijd meer uitgetrokken behoeft te worden. Ook de behandeling van het binomium van Newton is stof voor de onderbouw. Men raadplege hiervoor de Toelichting op het Leerplan Wiskunde van de mavo, onderbouw havo en onderbouw vwo, blz. 44. Bij het maken van vraagstukken kan men zich ertoe bepalen zoveel opgaven te maken als nodig is om de theorie te leren begrijpen. Het is aan te bevelen de verleiding te weerstaan aardige opgaven te laten maken, die geschikt zijn om de intelligentie van de leerling te peilen en die proefwerken tot intelligentietests maken, i.p.v. tot een middel om verkregen inzicht te peilen. Het is te hopen, dat ook op het eindexamen kansopgaven nimmer als intelligentietests misbruikt zullen worden, omdat dan onherroepelijk het onderwijs dit voorbeeld zal volgen en daardoor zijn hoofddoel zal voorbijstreven.
Ter verduidelijking volgen hier een paar opgaven, die o.i. ongeschikt zijn.
Iemand trekt uit elk van twee kaartspelen van 52 kaarten 2 kaarten. Bereken de kans, dat hij trekt 2 harten, 1 klaver en 1 ruiten.

Uit 600 loten, genummerd van 1 tot en met 600, trekt men een lot. Bereken de kans, dat het getal dat op het lot staat, deelbaar is door 7.
30 personen, waaronder A en B, worden op een rij geplaatst. Bereken de kans, dat A en B naast elkaar komen te staan.

Al spoedig blijkt, dat de Laplace-definitie ons in de steek laat. Gooi een tol, een punaise of iets dergelijks op. Deze kan neerkomen met de punt omhoog of met de punt omlaag. Geen zinnig mens zal de kans dat de tol met de punt omhoog neerkomt, en de kans dat hij met de punt omlaag neerkomt, beide gelijk stellen aan $\frac{1}{2}$. De Laplace-definitie komt er in wezen op neer, dat men uitgaat van een bepaalde kansverdeling. Men trekt een kaart uit een spel van 52 kaarten. Men stelt de kans op het trekken van klavertwee 1/52, de kans op het trekken van ruitentwee 1/52, . . ., de kans op het trekken van schoppenaas 1/52. Verder postuleert men:

> de kans op het trekken van een twee = de kans op het trekken van klavertwee + de kans op het trekken van ruitentwee + de kans op het trekken van hartentwee + de kans op het trekken van schoppentwee = $1/52 + 1/52 + 1/52 + 1/52 = 1/13$.

D.w.z. men postuleert, dat men voor het berekenen van kansen de somregel mag toepassen. Dit is gebaseerd op een intuïtieve overtuiging, dat elke kaart 'even gemakkelijk' getrokken kan worden. Deze intuïtieve overtuiging is bij de tol niet meer aanwezig. En daarmee vervalt de mogelijkheid de Laplace-definitie te blijven handhaven.
De vraag, hoe het kansbegrip opnieuw gefundeerd moet worden, is een vraag waarop zowel de mathematicus als de fysicus een antwoord geven. Om duidelijk te blijven, laten we de mathematicus en de fysicus ieder afzonderlijk hun antwoord bepalen om daarna tot een synthese te komen.
Eerst de wiskundige. Volgens Laplace is de kans een getal, dat aan een element van een resultatenverzameling wordt toegevoegd. Het trekken van een kaart kan 52 verschillende resultaten hebben. Aan elk van deze resultaten wordt het getal (de kans) 1/52 toegevoegd. Aan een deelverzameling van de resultatenverzameling wordt de som toegevoegd van de getallen, die aan de elementen ervan toegevoegd zijn. Aan de deelverzameling 'er wordt een twee getrokken' wordt toegevoegd $1/52 + 1/52 + 1/52 + 1/52$.
Aan de totale resultatenverzameling wordt op deze wijze toegevoegd $52 \cdot 1/52 = 1$.
Deze gedachtengang laat zich generaliseren tot een meer algemene kansdefinitie, waarbij niet aan alle elementen van de resultatenverzameling hetzelfde getal toegevoegd wordt. En wel als volgt:
Gegeven is een eindige verzameling V (de resultatenverzameling).
Aan elk element van deze verzameling wordt een getal toegevoegd, dat $\geqq 0$ is.
Bovendien wordt aan elke deelverzameling W van V een getal toegevoegd, en wel de som van de getallen die aan de elementen van W toegevoegd zijn.
Aan de gehele verzameling V wordt het getal 1 toegevoegd.
De functie, die aan elk element van V een getal toevoegt, heet een kansverdeling.

De getallen, die door de functie aan de elementen van V toegevoegd worden, heten kansen. En ook de getallen, die aan de deelverzamelingen van V toegevoegd worden, worden kansen genoemd.
De somregel is een direct gevolg van de gegeven kansdefinitie. De conditionele kans $P(A|B)$ (kans op A indien B het geval is) wordt gedefinieerd als $P(A \wedge B)/P(B)$. De produktregel

$$P(A \wedge B) = P(B)P(A|B)$$

is een direct gevolg van deze definitie. De gebeurtenissen A en B heten onafhankelijk, als

$$P(A|B) = P(A|\text{ niet-}B),$$

hetgeen gelijkwaardig blijkt met

$$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B).$$

We vinden zo alle vroeger op grond van de Laplace-definitie gevonden formules weer terug. In het geval, waarin de kansverdeling zo is, dat aan alle elementen van V hetzelfde getal toegevoegd is, blijkt de Laplace-definitie van toepassing. Inderdaad is de nieuwe definitie dus een generalisatie van de oorspronkelijke.
Het spreekt haast wel vanzelf, dat het voorgaande in deze vorm voor de leerlingen in een te abstracte vorm gegoten is en dat met name de definities van conditionele kans en van onafhankelijke gebeurtenissen grondig toegelicht en plausibel gemaakt moeten worden.
Nu de fysicus. Voor hem is een kans een fysische grootheid, die gemeten kan worden. Hij wil de kans meten, dat de tol neerkomt met de punt naar boven. Daartoe gooit hij de tol een groot aantal keren, b.v. 1000 keer, op en telt hoe vaak de punt bovenkomt. Laat dit 380 keer zijn. Dan besluit hij op grond van zijn meetresultaat, dat de kans op punt boven gelijk is aan 380/1000. In wezen gaat hij niet anders te werk dan bij het meten van een andere fysische grootheid. Als hij een lengte wil meten, stelt hij een methode vast om deze te meten. Er zijn verschillende meetmethoden, grovere en fijnere. Zo ook met betrekking tot de kans. Hoe groter de serie waarnemingen is, des te nauwkeuriger is het resultaat. De kans wordt zo door de fysicus gedefinieerd als de relatieve frekwentie van het voorkomen van een bepaalde uitkomst in een serie resultaten van een bepaald experiment. De betrouwbaarheid van de uitkomst wordt verhoogd door vergroting van het aantal resultaten.
Nu de synthese. De wiskundige kanstheorie laat zich goed toepassen op de fysische kansen. Immers de somregel blijkt van kracht te zijn. De relatieve frekwentie van het voorkomen van A of B is, als A en B elkaar uitsluiten, gelijk aan de som van de relatieve frekwenties van het voorkomen van A en van B. Conditionele fysische kansen blijken te gehoorzamen aan de gegeven wiskundige definitie van een conditionele kans. En daarmee gehoorzamen de fysische

kansen ook aan de produktregel. Hieruit volgt, dat de gehele wiskundige kanstheorie van toepassing is op de fysische kansen.
Men kan natuurlijk de behandelingswijze simpeler maken. Op bovenstaande manier heeft men echter een unieke gelegenheid de leerlingen duidelijk te maken, hoe het mogelijk is een mathematische theorie te ontwerpen met het doel ze buiten de wiskunde toe te passen.
Het wordt nu tijd kansverdelingen te gaan onderzoeken. Daarbij beperken we ons tot kansverdelingen, waarbij het origineel een getal is, b.v. de geldprijs die op een lot valt, het aantal successen in een serie van n experimenten. Desgewenst kan men hiervoor de term stochastische grootheid invoeren, noodzakelijk is dit niet.
Twee begrippen zijn bij een dergelijke kansverdeling van fundamenteel belang: de verwachting en de spreiding. Deze zijn gedefinieerd door

$$\mathrm{E} = \Sigma\, x\mathrm{P}(x)$$

$$\sigma = \sqrt{\Sigma(\mathrm{E}-x)^2\mathrm{P}(x)}.$$

Aan de hand van enkele zelf geconstrueerde kansverdelingen, zoals kansen op een bepaalde geldprijs bij een loterij, kan men deze begrippen toelichten.
Een belangrijke kansverdeling, die in ieder geval besproken dient te worden, is de binomiale verdeling. De kans op succes bij een bepaald experiment is p en de kans op geen succes $q = 1-p$. Beschouw een serie van n experimenten. De kans op precies k successen in deze serie is een functie van k. Een dergelijke functie heet een binomiale verdeling.
Om de verwachting en de spreiding te berekenen beschouwen we eerst het geval $n = 1$. De kansverdeling is dan de functie P, gedefinieerd door $\mathrm{P}(0) = q$, $\mathrm{P}(1) = p$. Voor deze functie geldt

$$\mathrm{E} = p \text{ en } \sigma = \sqrt{pq}.$$

Om over te kunnen gaan op het algemene geval moeten we eerst twee eigenschappen van E en σ afleiden. Zijn P_1 en P_2 twee kansverdelingen en is $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$, dan geldt

$$\mathrm{E}(\mathrm{P}) = \mathrm{E}(\mathrm{P}_1) = \mathrm{E}(\mathrm{P}_2).$$

Zijn de verdelingen onafhankelijk, dan geldt bovendien

$$\sigma^2(\mathrm{P}) = \sigma^2(\mathrm{P}_1)+\sigma^2(\mathrm{P}_2).$$

Het bewijs van de laatste formule vereist enige inspanning, maar het loont toch de moeite haar af te leiden.
Past men deze formules toe op een binomiale verdeling betreffende n experi-

menten, dan vindt men onmiddellijk

$$E = np \text{ en } \sigma = \sqrt{npq}.$$

Van groot belang is verder de poisson-verdeling. Beschouw gebeurtenissen, die elk ogenblik kunnen plaatsvinden, zoals het uiteenvallen van een atoom in een radioactieve stof. Gegeven is een tijdsverloop t. De kans $P(k)$ dat in dit tijdsverloop de gebeurtenis precies k keer plaatsvindt, is een functie van k. Verdeel t in een zo groot aantal gelijke delen, dat het praktisch uitgesloten is, dat de gebeurtenis in één zo'n interval meer dan éénmaal plaatsvindt. Noem dit aantal n en onderstel, dat de kans dat de gebeurtenis in één zo'n tijdsinterval plaatsvindt, $c \cdot t/n$ is. Dan is de kans, dat in precies k van deze n intervallen de gebeurtenis plaatsvindt

$$\binom{n}{k}\left(\frac{ct}{n}\right)^k\left(1-\frac{ct}{n}\right)^{n-k},$$

omdat we te maken hebben met een binomiale kansverdeling.
Beschouw nu een serie dergelijke kansverdelingen met toenemende n. We vinden dan

$$P(k) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{ct}{n}\right)^k\left(1-\frac{ct}{n}\right)^{n-k} = \frac{(ct)^k}{k!}e^{-ct}. \tag{1}$$

Voor deze verdeling geldt:

$$E = ct \text{ en } \sigma = \sqrt{ct}.$$

We kunnen (1) ook opvatten als een functie van k en t. We kunnen dan b.v. $k = 0$ kiezen en vragen, voor welke t de kans dat de gebeurtenis nog niet is opgetreden, gelijk aan $\frac{1}{2}$ is.
De poisson-verdeling is verkregen door limietovergang uit de binomiale verdeling. Er is een andere, nog belangrijker verdeling, die eveneens door limietovergang uit de binomiale verdeling ontstaan kan: de normale verdeling. We gaan uit van een galton-bord. Een kogeltje valt op een pin en heeft een kans $\frac{1}{2}$ naar links en een kans $\frac{1}{2}$ naar rechts te worden gekaatst. Het valt dan op een lager gelegen pin en heeft weer een kans van $\frac{1}{2}$ naar links resp. naar rechts te worden gekaatst. Enz. Na n keer zo naar links of naar rechts te zijn gekaatst bereikt het de bodem. Er zijn $n+1$ verschillende eindstanden mogelijk. De kansen op de verschillende eindstanden kunnen weergegeven worden door een binomiale verdeling.
Nu gaan we het aantal onder elkaar gelegen rijen pinnen vergroten. De breedte van het galton-bord zou daarbij steeds groter worden en de verdeling steeds

'vlakker'. Om het model van de verdeling zoveel mogelijk constant te houden, stellen we de eis dat σ correspondeert met een onveranderlijk lijnstuk op de bodem. Ga nu over tot de limiet voor n nadert tot oneindig. De binomiale verdeling nadert dan tot een limiet. Deze limiet heet een normale verdeling.
Door het demonstreren van tekeningen, waarin binomiale verdelingen met $p = \frac{1}{2}$ weergegeven zijn voor verschillende waarden van n, kan men laten zien dat deze verdelingen inderdaad tot een limiet naderen. Het geven van een bewijs hiervoor zou veel te ver gaan.
De normale verdeling is een continue verdeling. We gaan niet in op de theorie van de continue verdelingen.
In de praktijk spelen normale verdelingen een grote rol. Aan voorbeelden kan dit gedemonstreerd worden. Men kan dit plausibel maken door aan te nemen, dat een groot aantal factoren werkzaam zijn, die elk een positieve of negatieve invloed op het eindresultaat kunnen hebben, zoals bij het galton-bord het geval was.
Toepassing op de foutentheorie. Bij elke waarneming bestaat er kans op fouten. Om de gedachten te bepalen denken we ons de kansverdeling op een bepaalde afwijking ten gevolge van waarnemingsfouten normaal (deze kansverdeling is weer een continue, omdat het origineel een reëel getal is). De spreiding noemen we σ. Naarmate σ groter is, zijn de waarnemingsresultaten minder betrouwbaar. Doe nu een serie van n waarnemingen. Volgens de formule

$$\sigma^2(P) = \sigma^2(P_1)+\sigma^2(P_2)$$

is de spreiding in het gemiddelde slechts $\sigma/\sqrt{n}$. Hieruit ziet men het grote belang van het doen van een serie waarnemingen en het middelen van de verkregen resultaten.
Een aardige toepassing is het volgende. Geef een serie waarnemingsresultaten. Neem aan, dat deze normaal verdeeld zijn. Bereken de spreiding. Bereken de spreiding in het gemiddelde. Een tabel behorend bij de normale verdeling levert nu, dat de kans 0,95 is, dat de fout in het gemiddelde minder dan 2 maal de spreiding in het gemiddelde is.
Hier wordt duidelijk, dat van de waarschijnlijkheidsrekening belangrijke toepassingen gemaakt kunnen worden.

2 Statistiek

In brochure 3 uitgegeven door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde is een rapport gepubliceerd 'Over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van statistiek in het onderwijs voor mavo, havo en vwo'. Volgens dit rapport komt voor het vwo alleen in aanmerking statistiek te behandelen niet als afzonderlijk onderwerp, maar als toepassingsgebied van de waarschijnlijkheidsrekening. Men vindt dit op blz. 13 van het rapport in § 4, sub 3.
Door dit advies op te volgen bereiken we, dat waarschijnlijkheidsrekening en

statistiek een samenhangend geheel gaan vormen en dat aan de statistiek niet overmatig veel tijd besteed behoeft te worden.
Karakteristiek voor de aard van de problemen, die behandeld kunnen worden, is het volgende. Bij een stemming zal elke kiezer moeten stemmen op A of op B. We toetsen de hypothese: 50% van de kiezers stemt op A. We nemen een steekproef van 100 personen. Daarvan blijken er 40 op A te stemmen. Als we aannemen dat de hypothese juist is, dan is de kans dat hoogstens 40 kiezers op A stemmen, gelijk aan 0,02. A priori stellen we vast, dat indien de zo gevonden kans kleiner is dan b.v. 0,05, we de hypothese zullen verwerpen. We verwerpen nu de hypothese dus ten gunste van de hypothese, dat minder dan 50% van de kiezers op A zal stemmen.
Essentieel zijn de volgende momenten in het onderzoek:
1 We gaan uit van een hypothese, die we willen toetsen.
2 We gaan uit van een kansverdeling (in het bovenstaande voorbeeld een binomiale verdeling).
3 We kiezen een onbetrouwbaarheidsdrempel (in ons voorbeeld 0,05).
4 We nemen een steekproef.
5 We bepalen de kans dat, indien de hypothese juist is, het aantal successen in de steekproef hoogstens (minstens) gelijk is aan het gevonden aantal.
6 Indien de sub 5 gevonden kans kleiner is dan de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel, verwerpen we de hypothese; anders verwerpen we de hypothese niet.
Een soortgelijk vraagstuk, waarbij een andere verdeling gebruikt moet worden, is het volgende. In een stad hebben gemiddeld 8 dodelijke verkeersongevallen per maand plaats. In een bepaalde maand is dit aantal 15. Is dit een reden om aan te nemen, dat er iets bijzonders geweest is of kan dit nog redelijkerwijs aan toeval toegeschreven worden?
Bij het beantwoorden van de vraag gaan we uit van een poisson-verdeling. Omdat we de verwachting, nl. 8, kennen, is de verdeling bepaald (vgl. de formule $E = ct$). Wat 'redelijkerwijs' betekent, moet vastgelegd worden in een getal d.w.z. we kiezen een onbetrouwbaarheidsdrempel. Nu bepalen we, of de kans op minstens 15 ongevallen groter of kleiner is dan de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel. In het eerste geval is er geen reden naar een speciale oorzaak van het grote aantal ongelukken te zoeken, in het tweede geval wel.
Men moet de nodige tabellen tot zijn beschikking hebben om de opgaven te kunnen maken.
Het is niet nodig te vragen een betrouwbaarheidsgebied te bepalen, het onderscheid te behandelen tussen eenzijdig en tweezijdig toetsen. Men kan desgewenst volstaan met alleen het gebruik van tabellen en kan diagrammen missen (zoals de ellipsen met behulp waarvan men de betrouwbaarheidsgebieden vindt).

Rij en reeks

L. van den BROM
Amsterdam

... for assertion can demand no more
than counter-assertion and what
is affirmed on the one side,
we on the other can simply deny.
Francis Herbert Bradley.

In het dagelijkse leven doen wij vele uitspraken zonder daarbij een argumentatie te geven. Verschillende beweringen zijn daar zelfs zo aan de persoonlijke intuïtie of smaak ontsproten, dat een objectief bewijs voor hetgeen we beweren onmogelijk te geven is.
In de rapporten en artikelen, die de laatste tijd verschijnen in verband met de veranderingen van het onderwijs, kan men soms ook aanbevelingen aantreffen, die niet op duidelijke wijze ondersteund worden door een argumentatie of voorzien zijn van een verwijzing naar een uitvoerige documentatie over een proefneming. Niet alleen dat men daarmee de indruk vestigt, dat slechts de persoonlijke mening van de auteur wordt weergegeven, maar wat erger is, door het ontbreken van de premissen zal een discussie over de conclusies ontaarden in een nietes-welles debat.
In Korrel CXL, Rij en reeks, (Euclides 43, blz. 22) komt zo'n ongemotiveerde aanbeveling voor. Mijn laatste bewering niet ongeargumenteerd latende het volgende:

1 In de aanvang van genoemd artikel wordt gesteld, dat de nomenclatuurcommissie in het verleden geen kans zag naast de term 'rij', de term 'reeks' op een voor het v.h.m.o. bevredigende wijze te definiëren. De knoop doorhakkende, beval men aan zich te beperken tot de rijen. Ondanks dat een negatief argument aanleiding gaf tot die beperking, zie ik geen belangrijk bezwaar ertegen. Integendeel, middels *de rij van partiële sommen* van een rij kan het begrip reeks, meer omschrijvend, meer fundamenteel, toch aan de orde gesteld worden.
Het bezwaar tegen de door de nomenclatuurcommissie voorgestelde beperking, door velen uit het hoger onderwijs (wie?) aangevoerd – dat diegenen, die later wiskundige vakliteratuur onder ogen krijgen dan een niet voldoende basis bezitten om de termen reeks, convergente reeks, divergente reeks en som van

een reeks te begrijpen – lijkt mij onwezenlijk. Omdat men in die disciplines, waarin de reeksen ijverig worden toegepast, de a.s. collega's tijdens hun opleiding ook nog een verdere wiskundestudie laat ondergaan, heeft men daar toch gelegenheid om voortbouwende op de bij het v.o. ter sprake gebrachte rijen, de reeksen te introduceren.

2 'De moeilijkheid, waarmee de nomenclatuurcommissie zat, is het geven van een verantwoorde definitie van een reeks', wordt in genoemd artikel gesteld. Verzwegen wordt daarbij waarom het moeilijk was. Wel wordt in een voetnoot op de geciteerde zin vermeld: 'Wil men de term "reeks" definiëren, dan vervalt men in de definitie: onder de reeks $t_1+t_2+t_3+\ldots$ verstaat men de rij $t_1, t_1+t_2, t_1+t_2+t_3, \ldots$. Deze definitie van een reeks als bijzonder soort rij heeft een voor het v.w.o. onverteerbare structuur'. Niet gemotiveerd wordt waarom de structuur van die definitie onverteerbaar is voor het v.w.o. (Heeft men het wel eens geprobeerd op een redelijk aantal scholen?) Mijns inziens zou de definitie wel eens beter verteerbaar kunnen zijn, indien men de volledige inductie niet wegstopt in stippeltjes, maar expliciet bespreekt. (Dat is zeker ook de moeite waard eens in de praktijk te proberen!)

3 De ongeargumenteerde aanbeveling van Korrel CXL is dan dat gedefinieerd moet worden:

'*a* Men zegt, dat $t_1+t_2+t_3+\ldots$ een convergente reeks is, als de rij t_1, $t_1+t_2, t_1+t_2+t_3, \ldots$ (1) convergeert.

b Als $t_1+t_2+t_3+\ldots$ een convergente reeks is, noemt men de limiet van (1) de som van de reeks.

c Men zegt, dat $t_1+t_2+t_3+\ldots$ een divergente reeks is, als de rij (1) divergeert'.

Een leerling, die zich op deze definities gaat bezinnen en zich afvraagt, wat hij nu onder *het kale begrip reeks* dient te verstaan – niet denkbeeldig, want bij de rijen kreeg hij wel eerst het begrip rij zonder meer opgediend – zal als volgt kunnen redeneren: 'Divergent is niet convergent. Om het kale begrip reeks te krijgen kan ik dus de bijvoegelijke naamwoorden weglaten, dan volgt uit *a* en *c*: "Men zegt, dat $t_1+t_2+t_3+\ldots$ een reeks is als de rij (1) convergeert of divergeert". of "Men zegt, dat $t_1+t_2+t_3+\ldots$ een reeks is als de rij t_1, t_1+t_2, $t_1+t_2+t_3, \ldots$ bestaat".'

Met enige welwillendheid zullen wij van dat laatste maar maken: 'Onder de reeks $t_1+t_2+t_3+\ldots$ verstaat men de rij t_1, t_1+t_2, $t_1+t_2+t_3, \ldots$'. Dat is dan de in de geciteerde voetnoot als onverteerbaar gekwalificeerde definitie. Is een scheutje convergentie nu juist datgene wat het gerecht reeks verteerbaar maakt?

4 De wijze waarop het begrip reeks volgens Korrel CXL ingevoerd moet worden heeft tot gevolg dat onverbrekelijk met de reeksen het al of niet convergeren verbonden is.

De consequentie is: Voor we bewezen hebben of de rij $\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert of divergeert weten we niet wat we onder $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ dienen te verstaan.
Het is wiskundig toch weinig aantrekkelijk om een begrip onnodig afhankelijk te maken van een ander begrip. In het gewraakte geval komt daarbij dan nog dat dat andere begrip, de convergentie, in het voortgezet onderwijs meestal slechts intuïtief behandeld wordt.

5 Bij voortgezet wiskundeonderwijs kan men wel aantreffen, dat studenten of cursisten, ondanks dat een reeks nadrukkelijk als rij van partiële sommen geïntroduceerd werd, menen dat zij aan beginstukjes kunnen bewijzen wat voor 'hele' reeksen geldt. Ook wordt daar weleens ongemerkt gemanipuleerd met rekenregels voor de reeksen, die intuïtief duidelijk zijn, maar die niet expliciet afgeleid zijn door terug te gaan naar de rijen van partiële sommen.
Een voorbeeld ter illustratie:

'Bewijs: Als S de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}S$'.

Als oplossing werd gegeven:

'$S = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots =$$

$$= (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots)-2(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\ldots) =$$

$$= S-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots) = \frac{1}{2}S\text{'}.$$

De in Korrel CXL aanbevolen wijze om het reeks-begrip te introduceren, bij het voortgezet onderwijs, zal er niet toe bijdragen dat de reeks later als rij van partiële sommen zal leven, aangezien die aanbeveling juist dat fundamentele karakter van de reeks verdoezelt.

Prof. VAN DER BLIJ merkte naar aanleiding van het geciteerde voorbeeld op: 'Wanneer men meer structuur in de verzameling der reeksen aanbrengt, dan behoeft men minder vaak bij het oplossen van dit soort vraagstukken terug te gaan naar de rijen van partiële sommen'. Voor het aangehaalde vraagstuk heeft men dan nodig:

1e De gebruikelijke regels:

Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = A+B$.

Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} p\, a_n = pA$.

2e De regel dat men tussen ieder willekeurig tweetal termen van een reeks willekeurig eindig vele nullen mag tussenvoegen, zonder dat dat de convergentie of de limietwaarde aantast. (Bewijs: triviaal, slechts een kwestie van het opschuiven van de '$N(\varepsilon)$')

Op ons voorbeeld had dat dan als volgt gewerkt:

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S,$$

telkens een 'nul' tussenvoegende komen we tot:

$$0+1+0+\tfrac{1}{4}+0+\tfrac{1}{9}+0+\tfrac{1}{16}+0+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2}\left\{1+(-1)^n\right\}\frac{1}{(\frac{1}{2}n)^2} = S$$

dan:

$$0+\tfrac{1}{2}+0+\tfrac{1}{8}+0+\tfrac{1}{18}+0+\tfrac{1}{32}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{1+(-1)^n\right\}\frac{1}{n^2} = \tfrac{1}{2}S$$

Daarna:

$$\begin{array}{ccccccc} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & - & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{1+(-1)^n\right\}\frac{1}{n^2} & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \\ \| & & \| & & & & \| \\ S & - & \tfrac{1}{2}S & = & & & \tfrac{1}{2}S \end{array}$$

Terzijde zij nog opgemerkt dat de truc, 'het tussen zetten van die nullen', zeker nog wel algemener werkt, bijvoorbeeld om te bewijzen:

Als $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = S$, dan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^a}\left(1-\frac{1}{2^{a-1}}\right) S$; waarbij a willekeurig reëel.

6 Een gesprek over de kwestie rij-reeks tussen Prof. van der Blij en mij leverde ons niet veel meer op dan dat het hier om een Geschmackssache gaat. Waarbij zich dan de meer algemene vraag opdrong, of we in het wiskundeonderwijs meer intuïtief dienen te werken of dat we na een intuïtieve introductie al gauw een formele afronding moeten geven. De discussie was daarmee op een bredere basis – of zo men wil op een hoger niveau – gebracht.
Zolang de kwestie *formeel-intuïtief* niet beslist is, zolang zullen de formalisten in discussies over detailkwesties aan het langste eind trekken. De vraag of de resultaten van dergelijke discussies in de praktijk doorwerken, is een vraag bestemd voor de sociologie. Die vraag zullen we dan ook hier moeten laten rusten, omdat ze buiten het kader van dit tijdschrift voert.

7 Mijn persoonlijke mening ten aanzien van de kwestie rij-reeks is: Behandel de eindige en oneindige rijen in het v.w.o. goed – zonder de, zozeer misleidende, z.g. didactische trucjes – met daarbij de volledige inductie en recurrente betrekkingen. Liefst niet in een te eng kader! Daarbij kunnen dan ook de somrijen van rijen aan de orde gesteld worden. Eventueel kan men deze somrijen naar behoefte reeksen noemen, mits men maar accentueert dat dat rijen van partiële sommen zijn.
De praktijk zou kunnen uitwijzen dat, binnen het geheel van het leerplan, mijn voorstel te ambitieus is. Maar laat men, als men moet gaan beperken, niet de behandeling van de volledige inductie schrappen, om tijd vrij te maken teneinde een vage behandeling van het reeks-begrip te kunnen geven.

Verscheidenheden

Prof. dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXVII. *Een scheve stangenvierzijde*

Als van een *vlakke* vierhoek $ABCD$ met gegeven zijden ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) de hoekpunten A en B worden vastgehouden, dan kan CD zich nog met één vrijheidsgraad bewegen. Deze beweging is een der belangrijkste uit de vlakke kinematica en er is een bibliotheek over volgeschreven. Zij is allerminst eenvoudig: elk punt van het met CD verbonden bewegende vlak beschrijft een kromme van de zesde graad, een zogenaamde koppelkromme. Dat geldt ook voor een punt van CD zelf, al is de kromme in dat geval iets eenvoudiger doordat zij AB als symmetrie-as heeft; zij staat onder verschillende namen bekend, o.a. als de kromme van Watt.

Staat men CD toe zich *in de ruimte* te bewegen, dan ontstaat een mechanisme (de *bifilair* opgehangen staaf) met, zoals men gemakkelijk inziet, *drie* vrijheidsgraden, zodat de posities van een punt P van CD in het algemeen een stuk ruimte vullen. Wij trachten na te gaan hoe het gebied G eruit ziet waarin P gedwongen is te verblijven. Iemand met een goed ruimtelijk voorstellingsvermogen kan zich wellicht van G een globale indruk vormen. Wie dit ontzegd is zal naar analytische middelen grijpen.

Wij kiezen een rechthoekig assenstelsel $OXYZ$ zó, dat A en B de punten $(0, 0, \pm\frac{1}{2}a)$ worden. P wordt bepaald door $PD = c_1 > 0$, $CP = c_2 > 0$ met $c_1 + c_2 = c$.

Het is duidelijk dat G rotatie-symmetrie heeft t.o.v. de Z-as. Wij kunnen ons dus beperken tot de posities van P in, bij voorbeeld, het vlak OXZ. Zij $P = (x, 0, z)$. Wij fixeren de richting van CD door de hoek ϑ met OZ en de hoek φ van de projectie op OXY met OX. Dan is $C = (x - c_2 \sin\vartheta\cos\varphi, -c_2 \sin\vartheta \sin\varphi, z - c_2\cos\vartheta)$ en $D = (x + c_1 \sin\vartheta\cos\varphi, c_1\sin\vartheta\sin\varphi, z + c_1\cos\vartheta)$. Uit $BC = b$, $AD = d$ volgt dan

$$\begin{aligned} &x^2 + (z+\tfrac{1}{2}a)^2 + c_2^2 - b^2 - 2c_2 x \sin\vartheta\cos\varphi - 2c_2(z+\tfrac{1}{2}a)\cos\vartheta = 0 \\ &x^2 + (z-\tfrac{1}{2}a)^2 + c_1^2 - d^2 + 2c_1 x \sin\vartheta\cos\varphi + 2c_1(z-\tfrac{1}{2}a)\cos\vartheta = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

dus twee lineaire vergelijkingen voor $\sin\vartheta\cos\varphi$ en $\cos\vartheta$. Wij moeten nagaan

aan welke voorwaarden x en z moeten voldoen, opdat reële waarden voor ϑ en φ worden gevonden. Wij voeren kortheidshalve Q_1 en Q_2 in door

$$2Q_1c_1 = x^2+(z-\tfrac{1}{2}a)^2+c_1^2-d^2,\ 2Q_2c_2 = x^2+(z+\tfrac{1}{2}a)^2+c_2^2-b^2 \tag{2}$$

zodat (1) wordt

$$\begin{aligned} Q_1+x\sin\vartheta\cos\varphi+(z-\tfrac{1}{2}a)\cos\vartheta &= 0,\\ Q_2-x\sin\vartheta\cos\varphi-(z+\tfrac{1}{2}a)\cos\vartheta &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieruit volgt direkt voor de hoek ϑ tussen CD en AB:

$$\cos\vartheta = \frac{(Q_1+Q_2)}{a} \tag{4}$$

en de voorwaarde $|\cos\vartheta| \leqslant 1$ leidt tot

$$(Q_1+Q_2)^2 \leqslant a^2, \tag{5}$$

wat wil zeggen dat P ligt binnen een bepaalde cirkel en tevens buiten een andere bepaalde cirkel. Het is echter, zoals wij zullen zien, niet nodig deze twee nader te onderzoeken.

Uit (3) lossen wij nu $\cos\varphi$ op en veronderstellen daarbij voorlopig $x \neq 0$, $\sin\vartheta \neq 0$. Er komt dan

$$\cos\varphi = \frac{Q_1(z+\tfrac{1}{2}a)+Q_2(z-\tfrac{1}{2}a)}{ax\sin\vartheta}. \tag{6}$$

De teller is een uitdrukking van de derde graad, die wij met T aanduiden. Opdat φ reëel zij is nodig en voldoende dat $\cos^2\varphi \leqslant 1$, waaruit volgt, wegens (4)

$$\frac{T^2}{x^2\{a^2-(Q_1+Q_2)^2\}} \leqslant 1, \tag{7}$$

en dus, in verband met (5)

$$F \equiv T^2+x^2\{(Q_1+Q_2)^2-a^2\} \leqslant 0. \tag{8}$$

Daar deze betrekking als een consequentie de ongelijkheid (5) heeft, dan kan deze laatste als afzonderlijke conditie vervallen. Het gebied dat P in het XOZ-vlak bestrijkt wordt dus door (8) bepaald. Zijn grens is de kromme K met vergelijking $F = 0$. Ligt P óp K dan is $\cos^2\varphi = 1$, wat zeggen wil dat de zijde CD in XOZ ligt en de scheve vierhoek is een vlakke vierhoek. Maar dan is K niets anders dan de bij het punt P behorende kromme van Watt. Zij is naar

behoren van de zesde graad. Daar zij driemaal door elk der isotrope punten gaat ligt zij, gelijk ook vanzelf spreekt, geheel in het eindige. Voorts heeft in F de term van de hoogste graad, nl. $(x^2+z^2)^3$ een positieve coëfficiënt, waaruit volgt dat de punten P die aan (8) voldoen *binnen* K liggen.
Als $x = 0$ vallen in (1) de termen met φ weg en er blijft een vergelijking van de derde graad in z over, die zoals ook uit (8) blijkt de drie op OZ gelegen dubbelpunten van K aanwijst. Van de punten van OZ liggen alleen deze óp K en alle andere liggen er buiten. Ook het geval sin $\vartheta = 0$ geeft geen zorgen: dan is CD met AB evenwijdig en de vierhoek eveneens vlak; φ is dan onbepaald.
Daar K symmetrisch is t.o.v. de Z-as is het oppervlak dat bij rotatie om OZ ontstaat ook van de zesde graad. Wij hebben dus: het gebied G, door P bij vormverandering van de scheve vierhoek bestreken, bestaat uit de punten óp of binnen het omwentelingsoppervlak van de zesde graad dat bij rotatie om AB van de bij P behorende kromme van Watt ontstaat; deze kromme is de verzameling der posities van P bij de beweging van een vlakke vierzijde.
De kromme K vertoont (bij variatie van de verhoudingen van de parameters a, b, c_1, c_2, d) een grote verscheidenheid van gedaanten, waaronder zeer curieuze. Het eenvoudigste voorbeeld lijkt wel dat waarbij $a = b = c = d$ en $c_1 = c_2$. Dan is K ontaard in de drie cirkels $(0; a)$, $(A; \frac{1}{2}a)$ en $(B; \frac{1}{2}a)$; G is het gebied van de punten binnen of op de bol $(0; a)$ en buiten of op de bollen $(A; \frac{1}{2}a)$ en $(B; \frac{1}{2}a)$.

ZDM

Onlangs is verschenen het eerste nummer van het Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, uitgegeven bij Ernst Klett, Stuttgart. Het tijdschrift geeft een volledige documentatie van alles wat er verschijnt op het gebied van de didactiek van de wiskunde, in ruime zin opgevat. Van elk boek of artikel is een korte kenschets opgenomen. In dit eerste nummer zijn vrijwel uitsluitend publikaties geschreven in de Duitse taal vermeld. Het terrein zal in de volgende nummers verruimd worden.
Verder vindt men een aantal analyses van Duitse schoolboeken, die zeer uitvoerig zijn. En dan nog een rubriek recensies en een rubriek informatie, waarin men op de hoogte gehouden wordt van alles wat er op het vakgebied gaande is. Het documentatiegedeelte bestaat uit 60 blz. met elk acht titels, die desgewenst uitgeknipt en op kaart gebracht kunnen worden. Ze zijn van een doelmatige codering voorzien. Aan de overige onderdelen is 30 blz. besteed. Men heeft zo enigszins een indruk van de structuur van het tijdschrift. Er zullen per jaar vier nummers verschijnen. De abonnementsprijs bedraagt 68.– DM.
We mogen ons gelukkig prijzen, dat men de tijd en de energie gevonden heeft dit uitermate nuttige werk tot stand te brengen.

P. G. J. Vredenduin

Openingsrede

van de voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de heer Dr. Ir. B. Groeneveld voor de jaarvergadering van 22 december 1969.

Dames en Heren,

Op deze algemene ledenvergadering heet ik u allen van harte welkom, in het bijzonder het erelid Dr. J. H. Wansink, de inspecteurs Dr. D. N. van Neut, E. H. Schmidt en Drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van de zustervereniging Liwenagel D. Leujes en van de redactie van Euclides G. Krooshof en de sprekers Prof. Dr. H. J. A. Duparc, F. Goffree, Drs. E. J. Wijdeveld en Dr. P. G. J. Vredenduin.

In augustus '68 zijn we begonnen met de gemoderniseerde wiskunde. We bevinden ons nu in de situatie dat de stof in de brugklasse voor de tweede keer en die in de tweede klassen van de diverse schooltypen voor de eerste keer wordt onderwezen. Mede door de stimulerende werking, die uitgaat van de cursussen door de C.M.L.W. voor docenten georganiseerd, ondervindt men weinig weerstand bij de docenten ten aanzien van de nieuwe programma's. We kunnen zelfs wel zeggen, dat verreweg de meesten zich verheugen over de belangrijke veranderingen, die in ons wiskundeonderwijs hebben plaats gevonden. De toekomstige ontwikkeling zien we met belangstelling en vertrouwen tegemoet.
Het bestuur heeft een commissie ingesteld, die de opdracht heeft gekregen een verzameling vragen en vraagstukken samen te stellen, die als richtlijn kunnen dienen voor de toekomstige eindexamens. Deze commissie wordt gevormd door de heren: van Dormolen, van Erk, Kindt, Kokkelkoren, Korthagen, van Lint, Maassen, Sattler, Siepelinga, Westerhof en mijzelf. Uitdrukkelijk moet hierbij worden vermeld dat de commissie uitsluitend voor vwo-opgaven zorgt. Voor havo en mavo opgaven verschijnt in januari '70 een vraagstukkenverzameling samengesteld door een werkgroep van de drie pedagogische centra. De commissie is zich terdege bewust van haar moeilijke taak, maar zij hoopt dat door haar werk aan de verlangens van vele wiskunde-docenten wordt voldaan. Men stelt zich voor met de publikatie gereed te zijn voordat de mammoetwet is doorgedrongen tot de vijfde klasse van het vwo. Er worden alleen vraagstukken opgesteld voor de analyse van wiskunde I en van de meetkunde van wiskunde II. Het ligt niet in de bedoeling een serie modellen van wiskunde-examens te maken.
Onze vereniging telt dit jaar voor het eerst leraren van het mavo onder haar leden. Op 13 september 1969 is de eerste ledenvergadering speciaal bedoeld voor de mavo-leraren gehouden te Utrecht. De opkomst was redelijk, maar

bleef beneden de verwachting. De heer Jacobs, directeur van het onderwijskundig studiecentrum te Amsterdam heeft die middag een boeiende voordracht gehouden, waarvoor we hem nogmaals onze dank betuigen.
Volgens de statuten moet het bestuur sectiecommissies aanwijzen, die belast zijn met de zorg voor een bepaalde tak van het wiskundeonderwijs. De mavo-havo commissie bestaat uit de heren Achterop (Amersfoort), Bozuwa (Dordrecht), Gijsen (Nijmegen), Muskens (Schijndel) en Zijlstra (den Bosch) en de havo-vwo commissie uit de heren: van den Briel (Heemstede), van Dormolen (Oegstgeest), Kindt (Bennekom), Maassen (den Haag) en Vredenduin (Oosterbeek).
Zoals u uit de convocatie voor deze vergadering hebt kunnen lezen heb ik van mijn periodiek aftreden als bestuurslid een definitief aftreden gemaakt. Ik kreeg het gevoel, dat ik nu lang genoeg het voorzitterschap heb bekleed. Vandaag zal het van u afhangen wie de opengevallen bestuursplaatsen zullen innemen en na deze vergadering zal het bestuur zijn nieuwe voorzitter benoemen. De vereniging zal in de toekomst veel werk van zijn bestuur vragen en aan de energie van de nieuwe voorzitter zullen hoge eisen gesteld worden.
Op de vorige algemene ledenvergadering zijn de nieuwe statuten en het nieuwe huishoudelijk reglement na discussie aanvaard. Alleen de naam van de nieuwe vereniging, zoals wij die hadden voorgesteld, werd niet goedgekeurd. Het doet overigens wat onbevredigend aan, dat over deze veranderingen, tengevolge van het vergevorderde uur, door een uiterst klein, maar actief, deel van de leden werd beslist. Ons ledental is vooral dank zij de openstelling voor de vereniging voor mavo-leraren sterk toegenomen (tot 1337). Deze openstelling voor mavo-leraren is ook aanleiding geweest voor de vernieuwing van ons tijdschrift Euclides. We complimenteren de redactie met de huidige opzet van het tijdschrift.
Het blijkt nog geregeld voor te komen, dat wiskunde-docenten niet op de hoogte zijn van het bestaan van onze vereniging. Het bestuur overweegt dan ook op korte termijn een nieuwe propaganda-campagne op te zetten.
Eén van de zusterverenigingen heeft voorgesteld dat alle vakorganisaties hun ledenvergadering op eenzelfde zaterdag in februari zullen houden. Naarmate de vrije zaterdag meer in zicht komt is het vergaderen op die dag veel beter dan het samenkomen in een vakantie. Wij hebben dan ook gemeend, dat dit voorstel gesteund moet worden.
Het Mathematisch Centrum heeft dit jaar weer de organisatie van vakantiecursussen voor leraren op zich genomen. Op 12 en 13 augustus '69 is deze cursus in Amsterdam en op 14 en 15 augustus te Eindhoven gehouden. We zijn het M. C. veel dank verschuldigd voor de hoeveelheid werk, dat deze organisatie met zich meebrengt.
Het belangrijke werk, dat door de C. M. L. W. wordt gedaan heeft de grote waardering van iedere wiskundeleraar. Het voortzetten van haar werkzaamheden zal op hoge prijs worden gesteld. Ook de Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde heeft dit jaar belangrijk werk verzet.

In 1970 zal op 3 april het achttiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen worden gehouden. We raden alle leden aan dit congres te bezoeken.
Ons tijdschrift voor jeugdige mathematici 'Pythagoras' blijft een veelgelezen periodiek. We hebben veel bewondering voor de redacteuren, die er in geslaagd zijn het tijdschrift nog altijd even fris en aantrekkelijk te houden. Het tijdschrift bevat talloze artikelen, die ook geschikt zijn voor mavo-leerlingen.
De wiskundeolympiade is steeds een belangrijke gebeurtenis voor vele leerlingen. De opgaven zijn met grote zorg samengesteld en de organisatie loopt ieder jaar perfect.
De leesportefeuille heeft nu een andere beheerder gekregen. De heer Boost, die zo vele jaren met grote toewijding voor de regeling zorgde, is nu opgevolgd door de heer Smeur uit Breda. We danken de heer Boost voor het werk dat hij gedaan heeft en de heer Smeur voor zijn bereidwilligheid het werk op zich te nemen. Nu het aantal leden van onze vereniging zo groot is geworden, mogen we verwachten dat de animo voor de leesportefeuille zal toenemen.
Op de vorige algemene ledenvergadering namen we afscheid van de heer Alders. We hadden geen van allen kunnen vermoeden, dat dit afscheid zo plotseling definitief zou zijn.
Op 5 januari '69 overleed hij onverwachts. Zowel voor het onderwijs als voor zijn vele vrienden en kennissen heeft hij veel betekend. Wij zullen hem blijven missen.
Behalve ikzelf nemen vandaag nog twee bestuursleden afscheid. De heer den Otter, die wegens zijn benoeming tot leraar boekhouden meent niet meer bestuurslid van een vereniging van wiskundeleraren te kunnen zijn. We hebben hem maar kort in ons bestuur mogen meemaken. We zijn hem veel dank verschuldigd vooral voor de werkzaamheden, die hij heeft verricht bij het opopstellen van de nieuwe statuten van de vereniging. We hopen. dat hij zich nog veel met het verenigingsleven zal bezig houden.
Onze secretaris, de heer Maassen zal vandaag ook onze bestuurskring verlaten. Het secretariaat is altijd één van de meest tijdrovende en verantwoordelijke functies in een vereniging. De heer Maassen heeft deze functie vele jaren met grote toewijding uitgeoefend. Het bestuur hechtte altijd grote waarde aan zijn mening. Ook als mens heeft hij voor zijn medebestuursleden veel betekend. Wij wensen hem toe, dat hij in zijn carrière nog veel mag bereiken.
Thans verklaar ik de algemene ledenvergadering voor geopend.

Na afloop van de vergadering sprak Dr. Vredenduin woorden van dank tot Dr. Groeneveld voor het werk, dat deze gedurende acht jaren voorzitterschap voor de vereniging had verricht.

Korrel CLVIII

Een isomorfie

Dr. W. A. M. BURGERS
Wassenaar

Zij $S_4\{(1), (132), (123), (23), (13), (12), \cdot\}$ de symmetrische groep van de zes permutaties van drie elementen.
Het compositieschema ziet er dan als volgt uit:

$\cdot$	(1)	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
(1)	(1)	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
(132)	(132)	(123)	(1)	(13)	(12)	(23)
(123)	(123)	(1)	(132)	(12)	(23)	(13)
(23)	(23)	(12)	(13)	(1)	(132)	(123)
(13)	(13)	(23)	(12)	(123)	(1)	(132)
(12)	(12)	(13)	(23)	(132)	(123)	(1)

Men kan de dektransformaties van een gelijkzijdige driehoek ABC voorstellen door de identieke afbeelding E, twee rotaties R_1 en R_2 om het zwaartepunt Z van resp. $\frac{2}{3}\pi$ en $\frac{4}{3}\pi$ tegen de draaiingsrichting van de wijzers van de klok en drie spiegelingen S_1, S_2 en S_3 resp. t.o.v. ZA, ZB en ZC.

Dan wordt $R_1S_1 = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \xrightarrow{S_1} \begin{smallmatrix}2\\1\;3\end{smallmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{smallmatrix}3\\2\;1\end{smallmatrix}\right) = S_3$
en $S_1R_1 = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{smallmatrix}2\\3\;1\end{smallmatrix} \xrightarrow{S_1} \begin{smallmatrix}1\\3\;2\end{smallmatrix}\right) = S_2$

Men vindt:

$\cdot$	E	$R_1 \uparrow$	$R_2 \downarrow$	S_1	S_2	S_3
E	E	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2	E	S_3	S_1	S_2
R_2	R_2	E	R_1	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	E	R_1	R_2
S_2	S_2	S_3	S_1	R_2	E	R_1
S_3	S_3	S_1	S_1	R_1	R_2	E

Nu kan men (132) en (123) interpreteren als rotaties:

(132) = 1 → 3, 3 → 2, 2 → 1 dus b.v. 1 wordt 3, 3 wordt 2, 2 wordt 1:

$\substack{3\\12} \xrightarrow{(132)} \substack{2\\31}$ d.i. een positieve draaiing, en (123) dan een negatieve.

Zo is (23), 2 wordt 3 en 3 wordt 2, een spiegeling.
Men zou dus verwachten dat de afbeelding

$(1) \to E,\ (132) \to R_1,\ (123) \to R_2,$
$(23) \to S_1,\ (13) \to S_2$ en $(12) \to S_3$ een isomorfe afbeelding is.

Vergelijkt men echter beide schema's dan blijkt dit *niet* het geval te zijn.
Vergelijkt men beide structuren dan ontdekt men:

$R_1S_1(\substack{3\\12} \xrightarrow{S_1} \substack{2\\13} \xrightarrow{R_1} \substack{3\\21}) = S_3$ maar
$(132)(23) = (13)(23)(23) = (13) = S_2$

en $S_1R_1(\substack{3\\12} \xrightarrow{R_1} \substack{2\\31} \xrightarrow{S_1} \substack{1\\32}) = S_2$ maar
$(23)(132) = (23)(23)(12) = 12 = S_3$.

De oorzaak van deze discrepantie is duidelijk,

$\substack{3\\12} \xrightarrow{(23)} \substack{2\\13} \xrightarrow{(132)} \substack{1\\32}$
de rotatie (132) is tengevolge van de spiegeling negatief i.p.v. positief;

$\substack{3\\12} \xrightarrow{(132)} \substack{2\\31} \xrightarrow{(23)} \substack{3\\21}$ nu is de spiegeling (23) niet S_1 maar S_2 ten gevolge van rotatie.
Samengevat (132) en (123) zijn wel rotaties maar of ze positief of negatief zijn hangt af van de stand van de driehoek.
En (12), (13) en (23) zijn wel spiegelingen maar welke hangt weer af van de stand van de driehoek.
Natuurlijk zijn beide groepen wel isomorf. Een afbeelding is

$(1) \to E,\ (123) \to R_1,\ (132) \to R_2$
$(23) \to S_1,\ (13) \to S_2$ en $(23) \to S_1$

Beide schema's verenigd:

·	E(1)	R_1(123)	R_2(132)	S_1(23)	S_2(13)	S_3(12)
E(1)	E(1)	R_1(123)	R_2(132)	S_1(23)	S_2(13)	S_3(12)
R_1(123)	R_1(123)	R_2(132)	E(1)	S_3(12)	S_1(23)	S_2(13)
R_2(132)	R_2(132)	E(1)	R_1(123)	S_2(13)	S_3(12)	S_1(23)
S_1(23)	S_1(23)	S_2(13)	S_3(12)	E(1)	R_1(123)	R_2(132)
S_2(13)	S_2(13)	S_3(12)	S_1(23)	R_2(132)	E(1)	R_1(123)
S_3(12)	S_3(12)	S_1(23)	S_2(13)	R_1(123)	R_2(132)	E(1)

Nederlandse vereniging van wiskundeleraren

Verslag van de bestuursvergadering
op 20 december 1969.

i De heren L. v. Beek, Dr. J. K. v. d. Briel en Drs. J. W. Maassen zijn uitgenodigd om deze vergadering bij te wonen. Eerstgenoemde is met kennisgeving afwezig.

ii De jaarrede van de voorzitter wordt gelezen en geamendeerd.

iii De Raad van Leraren wenst voor 1 januari 1970 ingelicht te zijn over het standpunt van onze vereniging inzake het ongedeeld vwo.

iv De Raad van Leraren heeft aan alle vakorganisaties gevraagd om een contactpersoon aan te wijzen; het zal dan mogelijk zijn om sneller informatie van de vakorganisaties te krijgen.

Verslag van de bestuursvergadering
op 22 december 1969.

i Het bestuur kiest Dr. J. K. v. d. Briel tot voorzitter en Drs. J. W. Maassen tot secretaris.

ii Naar aanleiding van de discussie tijdens de jaarvergadering over de vraag 'gedeeld of ongedeeld vwo?' zal een brief naar de Raad van Leraren worden gezonden *

iii Drs. J. v. Dormolen wordt aangewezen als contactpersoon van het bestuur met de Raad van Leraren.

iv In het februarinummer van Euclides zullen de statuten en het huishoudelijk reglement worden afgedrukt.

v Het jaarverslag, de notulen van de jaarvergadering en het verslag van de penningmeester, zullen voortaan in een eerder nummer van Euclides dan het decembernummer worden geplaatst.

vi De volgende bestuursvergadering is op 24 januari 1970 te Utrecht.

M. Kindt

* Brief aan de Raad van Leraren.
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft de kwestie gedeeld of ongedeeld VWO in haar algemene vergadering van 22 december 1969 ter sprake gebracht. Uit de vergadering kwamen de volgende punten naar voren:
1. De vergadering vindt het imperatief voorschrijven van een ongedeeld VWO ongewenst.
2. De vergadering vindt het prematuur reeds nu een oordeel over dit punt uit te spreken.
3. De vergadering vindt het gewenst dat experimenten worden begonnen teneinde de voor- en nadelen van een ongedeeld VWO te onderzoeken. Hierbij moet vooral gelet worden op de onderwijskundige merites.

Het bestuur tekent hierbij nog aan dat zij vindt dat bij experimenten speciale aandacht moet worden besteed aan:
1. goede studie- en beroepenvoorlichting.
2. uitbreiding van de taak van de schooldekaan.
3. het creëren van mogelijkheden om door aanvullende examens per vak alsnog correcties in het eindexamenpakket aan te brengen.

Als vast contactman tussen de Raad van Leraren en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zal optreden:
Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50 Oegstgeest. tel. 01710-51015
(overdag 030-539111 toestel 1715).

Commissie modernisering leerplan wiskunde

Door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde worden in het cursusjaar 1970/1971 de navolgende cursussen georganiseerd:

I *3-daagse cursussen*:

1 Meetkunde met Vectoren I, 3, 4 en 5 sept. 1970, Groningen
2 Meetkunde met Vectoren II, vervolg, 19, 20 en 21 okt. 1970, Groningen
3 Computerkunde, 22, 23 en 24 okt. 1970, Utrecht
4 Algebra, 4, 5 en 6 jan. 1971, Utrecht
5 Toegepaste Wiskunde, 5, 6, en 7 april 1971, Utrecht [1]
6 Waarschijnlijkh. rek. & Statistiek, 7, 8, en 9 jan. 1971, Eindhoven

Toelichting:

ad 1 Deze cursus is een herhaling van die welke in jan. '70 werd gehouden. Hij is speciaal bedoeld voor leraren, die bij de meetkunde in de bovenbouw nog geen gebruik hebben gemaakt van vectoren. Als zodanig is deze cursus een eerste kennismaking.

ad 2 Op de cursus in okt. kan dan alleen ingeschreven worden door leraren, die aan één van de voornoemde cursussen Meetkunde met Vectoren I hebben deelgenomen.

ad 3 Deze cursus computerkunde is een reprise van een cursus, gehouden in maart 1970, speciaal bestemd voor leraren, die aan een experiment willen deelnemen. Als voorwaarde tot deelname werd toentertijd gesteld, dat men een aantal zelf vervaardigde programma's moest hebben ingezonden.
Deze 'toelatingseis' wordt deze maal niet gesteld. Wel zij nadrukkelijk vermeld, dat het deelnemen aan deze cursus, zonder het grondig bestudeerd hebben van de experimentele teksten 'computerkunde' (de zogenaamde 'gele boekjes' I en II), vrijwel zinloos is.

N.B. De genoemde boekjes verschijnen in 1970 in commerciële uitgave; deel I omstreeks aug.

De cursus heeft een tweeledig aspect. Enerzijds richt zij zich op achtergrondinformatie t.a.v. wat de computer kan en doet, anderzijds zullen de cursisten in practicumvorm zelf toepassingen, als in deel II van bovenvermeld experiment, te verwerken krijgen.

ad 4
1 Karakterisering van algebraïsche getallen als deellichaam van de complexe getallen, waarbij de laatste bekend worden verondersteld.
2 Constructie van een algebraïsche uitbreiding van een lichaam (zowel met rationale als eindige lichamen als voorbeeld).
3 Cirkeldelingslichamen (zowel via 1. door complexe wortels van $z^n = 1$ te adjungeren als via 2.). De bestudering van de Galoisgroep in dit geval.
4 Symmetrische functies en expliciete Galoistheorie in het geval van kwadratische en kubische uitbreidingen.
5 Iets over de klassieke problemen.

ad 5 De wens om in het wiskundeonderwijs aspecten van de toegepaste wiskunde te integreren, klinkt steeds sterker. Onder toegepaste wiskunde verstaan wij dan het opstellen van wiskundige modellen, vanuit praktische situaties.

ad 6 Deze cursus wordt gecentreerd rond het gelijknamig experiment van de C.M.L.W., dat inmiddels twee jaar loopt. Naast inhoudelijke aspecten zullen ook onderwijskundige implicaties aan de orde worden gesteld.

[1] Wijziging voorbehouden.

Aanmelding:

Ten aanzien van de aanmelding wordt opgemerkt:

1 Het deelnemersaantal per cursus bedraagt 100.

2 Voor de cursus onder nr. 2 komen in principe alleen die leraren in aanmerking, die (ook) de cursus 'Meetkunde met Vectoren' volgden. (jan. 1970, resp. sept. 1970).

3 In principe wordt elke leraar voor slechts één driedaagse cursus ingeschreven. Is bij ontvangst van het aanmeldingsformulier de gewenste cursus reeds voltekend, dan wordt de betrokken deelnemer – indien gewenst – ingeschreven voor de cursus van zijn tweede keuze, resp. derde keuze. In beide laatstgenoemde gevallen wordt de deelnemer hiervan zo spoedig mogelijk in kennis gesteld.

4 Uiterlijk vier weken voor de aanvang van de betrokken cursus, krijgen de deelnemers nader bericht over hun inschrijving met name betreffende het programma en verdere bijzonderheden.

II *maandagmiddagcyclus* (tijd 15.u.30–(ca.)17.u.30).

a Verzamelingen & logica, 14 sept., 28 sept., 12 okt. en 26 okt. 1970, Zwolle

b Onderwerpen uit de Analyse, 9 nov., 23 nov. en 7 dec. 1970, Utrecht

c Wetensch. ontwikkeling van het Integraalbegrip, 11 jan., 25 jan. en 8 febr. 1971, Eindhoven

d Meetkunde-onderwijs in het v.(w.)o., 22 febr., 8 mrt. en 22 mrt. 1971, Utrecht

Toelichting:

Deze cursus stelt zich ten doel de leraren in de gelegenheid te stellen zich gedurende een langere periode in het jaar op de hoogte te stellen van gevarieerde aspecten van de (moderne) wiskunde: mathematisch en/of didactisch en/of historisch.

ad a Vooral uit onderwijskundig oogpunt wordt in deze cursus de verzamelingsleer en de logica nogmaals benaderd vanuit historisch, mathematisch en didactisch oogpunt.

ad b Enkele wetenschappelijke onderwerpen uit de analyse worden aan de orde gesteld. Bijvoorbeeld:

1 Velden op de euclidische ruimte. Het verband tussen de beschrijving van mechanische processen en de mathematische behandeling ervan.

2 Metrische ruimten als inleiding in de analyse.

ad c De wetenschappelijke ontwikkeling van het integraalbegrip wordt historisch benaderd.

ad d Het meetkundeonderwijs in onder- en bovenbouw is onderwerp van cursussen van de C.M.L.W. geweest.
Deze cursus beschouwt het meetkundeonderwijs in het v.(w.)o. als één geheel.

Aanmelding:

Deze cursussen zijn in principe toegankelijk voor alle belangstellende leraren. Afhankelijk van de aanmelding en de beschikbare ruimte echter moet eventueel een limiet worden gesteld (naar volgorde van inschrijving).

De aanmeldingsformulieren zijn verkrijgbaar bij het sekretariaat van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Universiteitscentrum De Uithof, Budapestlaan 6, Utrecht. De aandacht zij er op gevestigd, dat ieder, die wil deelnemen een formulier behoort in te zenden, ook zij die al eerder aan cursussen deelnamen.

De formulieren voor deelname moeten *vóór 15 juni 1970* aan het sekretariaat worden toegestuurd.

Drs. E. J. Wijdeveld

Boekbespreking

G. Krooshof c.s. *Moderne Wiskunde*: Deel I voor de brugklas; Wolters-Noordhoff, Groningen 1968; gebonden *f* 7,90.

Omdat er reeds het eerste jaar meer dan 100.000 exemplaren van dit boek verkocht zijn, kan men moeilijk van een boek-aankondiging spreken. Voorjaar 1965 besloten de drie paedagogische centra op advies van de coördinatie-commissie-wiskunde tot het instellen van een Werkgroep. Deze kreeg opdracht een modern georiënteerd leerplan op te stellen. Ze maakte kennis met 'Modern Mathematics for Schools' samengesteld door The Scottish Mathematics Group bestaande uit 17 docenten. In Nederland verscheen augustus '66 een experimentele uitgave waarbij in de redactie o.m. zaten:

> Drs. Chr. Boermeester, Den Haag, thans medewerker aan de methode 'A tot Z' (uitgave Muusses), ook D. Leujes, Delft, die nu met enige anderen leerboeken laat verschijnen bij J. Noorduijn en ook W. J. Kniep, Amsterdam, waarvan een voordracht voor Wimecos ook in Euclides is afgedrukt.

Het was van het begin af aan de bedoeling een boek te hebben, dat voor verschillende schooltypen van het voortgezet onderwijs bruikbaar zou zijn. In enige scholen werd de experimentele uitgave getoetst; de definitieve uitgave heeft een heel andere uitvoering. Ondertussen is ook een handleiding voor de gebruikers verschenen en bovendien verstrekt Wolters-Noordhoff aan de gebruikers nog een 'Bulletin', waarvan in december 1969 reeds nummer 7 verschenen is. We willen nu enige kritische beschouwingen wijden aan de algemene opzet; mogelijk kunnen we bij de bespreking van de volgende deeltjes iets dieper op details ingaan.

Zeer grote aandacht is besteed aan de woordkeuze. Het blijkt dat V.W.O.-leerlingen de tekst vrijwel zonder hulp verwerken, maar onze M.A.V.O.-leerlingen hebben daar toch stellig nog enige steun bij nodig. Het was ook beslist niet de bedoeling van de auteurs een geprogrammeerde instructie te geven, zodat hulp van de kant van de leraar nog vaak op zijn plaats is. Door de eenvoudige taal leent het boek zich wel goed voor het opgeven van enig 'huiswerk vooraf' en eventueel voor bespreking in groepjes. Helaas maakt de meer aansprekende taal de tekst veel langer dan in een boek van 10 jaar terug. Toen deed men 3 of 4 lessen over één bladzijde opgaven, nu gaan we per werkuur vaak 3 à 4 pagina's tekst vooruit. Verschillende gebruikers klagen over het feit, dat men niet klaar komt in de *toegemeten tijd*. Er zijn 480 pagina's voor ongeveer 32×4 lessen (uitgevallen lessen en proefwerken niet meegeteld) derhalve 4 pagina's per les. Deze redenering gaat alleen op voor degenen, die het boek regel voor regel doorwerken en niet voor hen, die vele stukjes luchtig behandelen als voorbereiding voor de volgende deeltjes, moeilijke vraagstukjes overlaten aan de zelfwerkzaamheid van daartoe geschikte leerlingen en een deel der herhalingsopgaven achterwege laten. Men is verplicht goed te overleggen, hoe men elk gedeelte zal willen behandelen. De informatiebulletins en de handleiding geven daarvoor goede richtlijnen. In een gemengde H.A.V.O.-klas lijkt me het doorwerken van deel I in de eerste helft (tot Kerstmis) van het eerste leerjaar goed haalbaar. Of ook elke M.A.V.O.-klas beide delen in het eerste jaar zal kunnen doorwerken is daarmee nog niet gezegd. De overgang naar een nieuw leerplan zal voor velen enige tijd vergen.

Bij de behandeling van de stof is radicaal gebroken met de veel voorkomende opzet: een of twee paragrafen theorie gevolgd door een paragraaf vraagstukken. Die oudere opzet is ontstaan uit het 'frontaal' les-geven. De voortschrijdende ontwikkeling van onze leerlingen verdraagt zich slecht met de voordragende docent, maar vraagt om een helper, die desnoods ook nog wel eens een stukje helemaal voordoet. De theorie zit nu vrijwel geheel in de opdrachten en moet daar door de leerling ontdekt worden. Hierbij zal wel een grondige controle door de leraar nodig zijn, een controle, die niet beperkt mag blijven tot het opgeven en overhoren van de compacte overzichten op de rode bladzijden. De tweede moeilijkheid bij deze methode is dan ook de *controle* — als men wil de 'proefwerken'. De bulletins geven enige voorbeelden van proefwerken. Het blijft echter zeer bezwaarlijk met geschikte controlemiddelen de vorderingen van de leerling betrouwbaar te meten.

Bij de opzet heeft men blijkbaar er naar gestreefd het aankweken van routine naar latere deeltjes te verschuiven. Toch zal dit velen afschrikken; speciaal M.A.V.O.-leraren menen vaak dat hun leerlingen alleen routine probleempjes voorgezet moeten krijgen. De recensent beschouwt het duidelijke tekort aan controleerbare *routine*-opgaven als een nadeel. Hoe eenvoudig had men niet wat meer simpele substituties kunnen opnemen, waarbij èn kennis van de rekenregels èn de vaardigheid geoefend en gecontroleerd zouden kunnen worden.

Voor de leerling is het een geweldige overgang van het traditionele rekenboek der lagere school — met paragrafen van sommen, welke bijna allemaal van hetzelfde type zijn — naar dit boek, waarin zelden een drietal opdrachten gelijkluidend is. De leerling moet telkens goed lezen wat er staat, en ook minder begaafde leerlingen beleven hierbij een plezier, dat de *aversie* tegen wiskunde in de oude omvang beslist heeft doen *verdwijnen.* Ook voor deze groep kinderen hoeven de namen van begrippen geen loze woorden te blijven. Een test hierover, waarmee het instituut van Prof. A. D. de Groot bezig is, zal ons misschien leren, in hoeverre de controle hierop nog op eenvoudige wijze te verbeteren is. Een evaluatie geheel buiten de eigenlijke methode om is zeer waardevol.

Een groot bezwaar kleeft aan de manier van antwoorden, zoals die dikwijls door de vraagstelling gesuggereerd wordt. Men vraagt meestal alleen een getal of een kreet, en er is in het boek vrijwel geen enkele aanwijzing in welke vorm de *verantwoording* moet worden opgeschreven. Niet alleen maakt dit een werkelijke controle bezwaarlijk, maar zal in de tweede klas deze habitus moeilijk te wijzigen zijn. Later komt, zelfs voor de tweede klas V.W.O., bijna nergens een verplichting tot het opschrijven van een afleiding voor, laat staan een begin van een bewijs. Dit kan de recensent niet in alle opzichten bekoren.

De doeleinden van de brugklas houden in — naast de mogelijkheid van overgang naar een ander schooltype — dat we mede trachten te bepalen welke richting de leerling daarna het beste kan kiezen. We menen te kunnen zeggen, dat de methode van dit boek daartoe een bruikbaar hulpmiddel geeft. Op welke wijze men zijn proefwerken ook normeert, steeds kan men een duidelijk verschil in aanleg, concentratievermogen, zelfstandigheid en creativiteit constateren.

Bij de bewerking van de Schotse uitgave werd vanzelfsprekend rekening gehouden met de nomenclatuur en het programma van de 'Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde'. Zo begint deel I met een hoofdstuk Verzamelingen — zoals de mode dit op het ogenblik voorschrijft. Dit gedeelte zou volgens de handleiding slechts luchtigjes behandeld moeten worden, maar dan is het moeilijk te zien, wat de laatste paragraaf nr. 8 daarbij doet, al is die veel eenvoudiger dan de overeenkomstige paragraaf 8 in de experimentele uitgave.
Aanvankelijk had men nul niet tot de natuurlijke getallen gerekend, maar in deze uitgave wel. Helaas is die verandering van standpunt in het boek niet volledig verwerkt. Wat wordt nu een even getal? Hoort nul bij de veelvouden van twee? Een antwoord op deze vragen is moeilijk in het boek te vinden. Ook blijkt dat invoering van Venn-diagrammen — en het gebruik daarvan — niet zo simpel is, als men geneigd zou kunnen zijn uit de gegeven tekst af te leiden.

Aan de uitvoering van het boek is de nodige zorg besteed. De tekst is voorzien van veel wit op de bladzijde. Het rood van sommige regels steekt goed af en de samenvattingen staan op geheel rode bladzijden. De illustraties zijn erg simpel, misschien zelfs te sober; ze verhogen de aantrekkelijkheid voor de jeugd van het royaal uitgegeven boek slechts in geringe mate.

W. P. Thijssen

Helmut Weigert, *Weierstrass's convergence test for series of complex terms*, Van Gorcum en Comp. N.V. Assen 1969, 82 pages+appendix, sewn, price Hfl. 15,—.

This book deals with the behaviour of the series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ when either

1) $$a_\nu = \frac{p_\nu}{\nu^\alpha}, \Sigma \mid p_\nu - p_{\nu+1} \mid < \infty, \lim p_\nu = p \neq 0$$

or

2) $$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1 - \frac{a}{\nu} + x_\nu, \Sigma \mid x_\nu \mid < \infty$$

or

3) $$\sqrt[\nu]{a_\nu} = 1 - a\frac{\log \nu}{\nu} + \frac{y_\nu}{\nu}, \Sigma \mid y_\nu - y_{\nu+1} \mid < \infty.$$

Let a $= \beta + i\gamma$. The cases $\beta < 0$; $\beta = 0, \gamma = 0$; $\beta = 0, \gamma \neq 0; 0 < \beta < 1$; $\beta = 1, \gamma = 0$; $\beta = 1, \gamma \neq 0; \beta > 0$; $0 < \mid z \mid < 1$; $z = 1$; $\mid z \mid = 1$, $z \neq 1$; $\mid z \mid > 1$ are distinguished.

In all these cases convergence, absolute convergence, several kinds of divergence and the existence of lim sgn $(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu z^\nu)$ or lim sgn $(-\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu z^\nu)$, if appropriate for the case under consideration, are investigated; sgn $z = z/|z|$.
All these results can be read of immediately from a very surveyable appendix.
Many of the results were known before long but the author's systematic treatment made it necessary to investigate into cases which were overlooked until now.
Great care is taken to make the proofs as perspicuous as possible.
The last 22 pages of the book give a survey of and critical comments on (a few of which have nothing to do with mathematics) the work of some 15 authors which published previously on the subject.

H. Jager.

Drs. J. van Dormolen, *Algebra voor h.a.v.o. en v.w.o., deel I voor de brugklas*, 185 blz., ingen. f, 9,25, Van Goor Zonen, Den Haag-Brussel, 1968.

Ten aanzien van het niveau van behandeling heeft de auteur een principiële beslissing genomen door in de titel het mavo-schooltype niet op te nemen onder de schoolsoorten waarvoor hij zijn boek schreef. Of men deze beslissing al of niet zal toejuichen hangt samen met algemene pedagogische principes inzake homogene of heterogene brugklassen waarover in de huidige lerarenwereld nog allerminst een communis opinio bestaat. Het weglaten van het m.a.v.o.-type doet ons een relatief hoog niveau van behandeling verwachten. Een tweede principiële beslissing van de auteur ontdekken we in het gescheiden houden van de leerstof voor algebra en voor meetkunde, in het afwijzen dus van de fusiegedachte. Ik heb de indruk dat de auteur het zeer veel docenten uit het v.h.m.o. gemakkelijker maakt tot een meer gemoderniseerde didactiek over te gaan dan bij unificering van deze beide onderdelen van de wiskunde thans nog het geval geweest zou zijn.
Ik beschouw Van Dormolens Algebra als een voorzichtige poging tot didactische modernisering. De auteur gaat uit van het ongedefinieerd begrip reëel getal en komt daardoor pas in tweede instantie tot de onderscheiding van de diverse deelgebieden. Dit betekent een aansluiting bij de opvattingen van Dieudonné die op conferenties door de rij $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ een venijnige streep pleegt te zetten en de $\mathbb{R}$ op weloverwogen wijze tot uitgangspunt kiest.

In het laatste hoofdstuk van het boek stelt Van Dormolen de te onderscheiden deelverzamelingen van R aan de orde. Als bezwaar tegen deze wijze van behandeling zou men o.a. kunnen aanvoeren, dat een term als irrationaal getal optreedt zonder dat er nog enige inhoud aan gegeven kan worden (p. 163). Didactisch wordt het voorrang geven aan het begrip reëel getal aantrekkelijk, zodra we uitgaan van de voor jonge leerlingen gemakkelijk aanvaardbare hypothese, dat bij gekozen eenheid van lengte aan elk lijnstuk een getal als lengte toekomt. Aan de taal van de algebra wordt in het boek grote zorg besteed. Het tweede hoofdstuk, dat over 'uitspraken, uitdrukkingen, variabelen' handelt, beslaat ruim 50 bladzijden. Ook in het eerste hoofdstuk komen reeds 'open uitspraken' aan de orde. De alkwantor, waarvan het gebruik zozeer de exactheid van de uidrukkingswijze bevordert, wordt ingevoerd. Hiervoor prefereert de auteur het traditionele symbool $\forall$ boven het meer modernere $\bigwedge$.
Terwijl de meeste schoolboeken uit de jongste tijd beginnen met een stuk verzamelingstheorie waarin ook diverse niet-wiskundige voorbeelden aan de orde komen, beperkt Van Dormolen zich tot getallenverzamelingen en heeft hij geen behoefte zijn beschouwingen met zogenaamde Venn-diagrammen te illustreren. Een motivering hiervoor heeft de auteur gegeven in een artikel in *Euclides* 43 (p. 273 e.v.) onder de uitdagende titel '*De nutteloosheid van Venn-diagrammen*', waarnaar we gaarne verwijzen. In het hoofdstuk 'Vergelijkingen en ongelijkheden' komen oplossingsverzamelingen aan de orde, in het laatste hoofdstuk, dat geheel aan getalverzamelingen is gewijd, worden enige veel gebruikte getalverzamelingen behandeld terwijl enige theorie over restklassen er hier toe kan bijdragen, dat de wiskundige horizon van onze jonge leerlingen wezenlijk wordt verruimd.
De zorgvuldigheid van behandeling komt onder meer tot uitdrukking bij de nauwgezette onderscheiding van drie soorten mintekens en van drie soorten plustekens. De commutatieve, associatieve en distributieve wetten worden opgesomd en met alkwantoren geformuleerd zonder dat ze tot enige deductieve behandeling van de theorie aanleiding geven. De 'tekenregels' van de vermenigvuldiging van negatieve en positieve getallen worden niet gedecreteerd, ook niet gededuceerd; de leerlingen krijgen gelegenheid aan de hand van enige suggestieve opgaven deze regels zelf te ontdekken. Hiermee komen we tot een eigenschap van Van Dormolens boek waardoor dit in onze schoolboekenliteratuur een eigen plaats inneemt: het is geworden tot een werkboek dat de zelfwerkzaamheid van de leerlingen op efficiënte wijze tot zijn recht kan laten komen en waarin de vraagstukkenverzameling een wezenlijke functie heeft in de opbouw van een verantwoorde theorie.
Het voorwoord vermeldt nog, dat een gedetailleerde verantwoording van de inhoud van het het boek, tevens antwoordenlijst, voor leraren beschikbaar is.
Gaarne bevelen we dit goed verzorgde boek in de belangstelling van alle wiskunde-docenten bij het h.a.v.o. en het v.w.o. aan.

Joh. H. Wansink.

Le Axiome de Paralleles de Euclides a Hilbert. Un Probleme cardinal in le evolution del geometrie. Introduction e commentarie de C.E. Sjöstedt. Interlingue-Fundation, Uppsala 1968.

In dit omvangrijke, prachtig uitgevoerde boekwerk zijn 22 geschriften, soms volledig, soms deeltelijk, bijeengebracht die betrekking hebben op de geschiedenis der niet-euclidische meetkunde. De verzamelaar heeft ze van een inleiding en van enkele noten voorzien. De collectie begint met het eerste boek der Elementen van Euclides (tot aan propositie 33) vervolgt met diens commentator Proklos en eindigt tenslotte met Einsteins voordracht over 'Geometrie und Erfahrung' van 1921. Daartussen vinden wij alle beroemde namen die in de ontdekking en ontwikkeling der niet-euclidische meetkunde een rol hebben gespeeld. Elke bijdrage is afgedrukt als fotografische reproductie van de eerste publikatie (voorzover mogelijk) en voorzien van een portret van de schrijver. Daardoor ontstond een curieuze en zeer lezenswaardige verzameling; al valt het te betreuren dat soms de beslissing over het al of niet volledig reproduceren

van een bepaalde bijdrage wat willekeurig is uitgevallen. Direct naast de oorspronkelijke bijdrage is de vertaling ervan geplaatst in *Interlingue*; een internationale kunsttaal waaraan de beide Appendices van het boek gewijd zijn. De tweede appendice geeft een oriënterende woordenlijst; in de eerste vindt men de beginselen waarop deze taal berust. In onze (westerse) cultuurtalen komen ongeveer 7000 'internationale' woorden voor: meestal van wetenschappelijke en technische aard, waarvan men in elk geval direct de stam herkent. Het boek wil nu aantonen hoe deze taal voor ieder direct toegankelijk is. Inderdaad kan men de diverse opstellen zonder moeite in Interlingue lezen; al valt het te bewijfelen of deze kunsttaal ook buiten de westerse cultuurkring enige zin behoudt. Is dat niet het geval dan schijnt mij het praktisch nut beperkt.
Om een proeve van deze taal te geven, nemen wij de omschrijving van het doel van dit werk over.
'Le ovre present have un triplic intention. Il intente dar un orientation historic super le evolution del geometrie along un linea principal. In connexion a cel orientation, quelc interpretationes epistemologic concernent le resultates del geometrie es discusset. E finalmente il es intentet demonstrar le possibilité utilisar, in le scientie, un lingue inernational auxiliari.'

P. van der Hoeven

Dr. W. A. M. Burgers en drs. B. J. Westerhof, *Nieuwe wiskunde opgaven voor l.o., v.h.m.o., v.w.o.*, 95 blz., prijs f 6,75. Uitgeverij Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

In dit boek zijn, naast een serie uitstekende nieuwe opgaven, examenvraagstukken bijeengebracht van het eindexamen v.h.m.o. en van de examens wiskunde l.o.
Het doorwerken van deze soms pittige problemen geeft de student, zowel l.o.-kandidaat als middelbare scholier een prima training en verdiept inzicht in de theorie.
De leraar kan een indruk krijgen van de aard van de moeilijkheden die in de toekomst bij een eindexamen een rol kunnen gaan spelen.
In de bundel zijn opgenomen:
125 opgaven algebra en analyse
40 opgaven analytische meetkunde (tweedimensionaal)
40 opgaven stereometrie
25 opgaven planimetrie (voor wiskunde l.o.)
40 opgaven vectormeetkunde
de opgaven van de experimentele examens en de examenopgaven l.o. en v.h.m.o. 1969.
Men treft bovendien aan: het huidige en het nieuwe examenprogramma wiskunde l.o., het examenprogramma voor experimenterende athenea en gymnasia benevens dat voor het toekomstige v.w.o.
Als aanhangsel geeft het boek tot slot een korte behandeling van permutaties en determinanten.

L. J. M. v.d. Zijden.

Béla Kerékjártó, *Les fondements de la géometrie*, Tome premier. La construction élémentaire de la géometrie Euclidienne. Akadémiai Kiodó, Budapest, 1969, 334 blz., $ 11.50.

Het gehele werk bestaat uit twee delen. Het tweede deel verscheen in Franse vertaling in 1966 (zie 42e jaargang, Euclides blz. 283). Dit eerste deel behandelt de axiomatische opzet volgens de axioma's van de 'Grundlagen' van Hilbert. De behandeling is uitermate volledig, ook de diepere zin van de axioma's wordt aangegeven. Zo ontstond een prettig leesbaar geheel. Voor hen, die belangstelling hebben voor een volledig uitgewerkte axiomatische behandeling een bijzonder aanbevelenswaardig boek.

Burgers

Dr. M. G. Kuipers, J. Siepelinga, R. Troelstra, G. Tromp, *Gemoderniseerde meetkunde op basis van afbeeldingen,* deel 2v, 126 blz., *f* 6,50, Wolters-Noordhoff n.v., Groningen, 1969.

Dit boek is het v.w.o. gerichte tweede deel van een serie, die steunt op de ervaringen opgedaan tijdens het bekende onderbouw meetkunde – experiment. Evenals in een andere serie (transformatiemeetkunde) die uit een experiment voortkwam staat de afbeeldingsmeetkunde centraal. Voor de evaluatie van het experiment bewegingsmeetkunde moge ik verwijzen naar het verslag van Prof. Dr. A. D. de Groot + medewerkers dat in no. 2 van de 45e jaargang van Euclides besproken is.
Enkele naar mijn smaak belangwekkende aspecten van het boekje gem. meetkunde zijn:
a het uitkomen van een structuur in de verzameling afbeeldingen.
b de zorgvuldige benadering van het maatbegrip bij lengte, oppervlakte en inhoud.
c het juiste gebruik van vectoren bij de afbeelding vermenigvuldiging.
d de rijke en gevarieerde verzameling opgaven.
Graag voeg ik hier nog aan toe dat de afwerking en de tekeningen uitstekend zijn en dat de drukspiegel aangenaam aandoet.

J. J. Wouters.

Dr. L. N. H. Bunt en drs. H. G. B. Broekman, *Algebra, een geprogrammeerde cursus,* samengesteld door *The School Mathematics Study Group*; Deel D; 218 blz.; ingen. *f* 8,50; Wolters-Noordhoff, Groningen; 1969.

Dit vierde deel van Bunts serie bevat de volgende hoofdstukken: wortels; oplossingsverzamelingen van voorwaarden; de grafiek van $Ax+By+C=0$; stelsels vergelijkingen. Uitwerkingen en antwoorden zijn verschenen in een afzonderlijk antwoordenboekje. Ten gerieve van de gebruikers van deze *Algebra* heeft de uitgever een toelichting op de methode gratis ter beschikking gesteld. Deze toelichting geeft een bondige informatie over de bedoelingen van de auteur met deze Nederlandse bewerking van een Amerikaanse methode, die in de schoolboekenwereld een geheel eigen plaats inneemt.
De belangrijkste kenmerken waardoor dit boek zich van andere onderscheidt, zijn de volgende:
a Bij de vragen die rechtstreeks beantwoord moeten worden is het antwoord bij de vraag vermeld; deze antwoorden staan op een grijze achtergrond en dienen bij de bestudering van de pagina door de leerlingen te worden bedekt; de auteur vertrouwt dat spiekgevaar gemakkelijk kan worden bezworen.

b Bij de meer-keuze-vragen die ook in het boek zijn opgenomen maar niet stelselmatig, behoeft men niet heen en weer te bladeren om het juiste antwoord dan wel de bespreking van een fout antwoord te vinden.

c Naast geprogrammeerde tekst zijn er gedeelten van de leerstof opgenomen die deze stof op de manier van een gewoon schoolboek behandelen; ook vindt men leerstof- overzichten.

d Men treft paragrafen met vraagstukken aan, waarvan de antwoorden achter in het boek te vinden zijn.

e Sommige gedeelten zijn voor vluggere leerlingen bestemd, die dan andere gedeelten van het boek mogen overslaan.

f Lineaire gedeelten,meer-keuze-vragen en tekstgedeelten wisselen elkaar af.

g Achter in de boeken is een register opgenomen waarin ook de voorafgaande delen zijn begrepen.

Bunts methode dient in een aantal scholen uit Utrecht en omgeving voor een didactisch experiment. Een belangrijk experiment naar het mij voorkomt. Wel heb ik de indruk dat de bewerkers het zich gemakkelijker gemaakt zouden hebben door geheel vrij van Amerikaanse experimenten in plaats van deze vertaling een eigen methode op te zetten. We hopen dat het *Didac-*

tisch Instituut van de Utrechtse universiteit dat achter dit experiment staat ter zijner tijd een evaluatie van het Utrechtse experiment zal kunnen geven. Mocht voor zo'n evaluatie die welke De Groot heeft gegeven in zijn "evaluatie van het innovatie-experiment *Bewegingsmeetkunde*" model kunnen staan, dat zou de mathematisch-didactische literatuur hier te lande met een belangrijk stuk verrijkt kunnen worden. Voor door mij uitgeoefende detailkritiek verwijs ik naar de lerarenweekbladen (*AVMO-weekblad* van 16-8-'68; *Algemeen Weekblad* van 13-6-'69). Wolters-Noordhoff geeft Bunts serie op zeer royale wijze uit.

Joh. H. Wansink.

L. B. Rall, *Computational solution of nonlinear operator Equations*, John Wiley and sons, Inc., New York/London, 1969; 225 bldz., 140 sh.

Dit boek is bestemd voor gevorderde studenten in de numerieke analyse. Het gaat de schrijver om algemene methoden die toegepast kunnen worden bij het oplossen van b.v. gewone of partiële differentiaalvergelijkingen met rand- of beginvoorwaarden, stelsels van differentiaalvergelijkingen, integraal- of integrodifferentiaalvergelijkingen. In het eerste hoofdstuk worden allerlei noodzakelijke hulpbegrippen geïntroduceerd: (genormeerde) lineaire ruimten, Banach- en Hilbertruimten, lineaire operatoren; in hoofdstuk 3 wordt het differentiëren van operatoren in Banachruimten behandeld.
De hoofdstukken 2 en 4 vormen de kern van het boek. In hoofdstuk 2 wordt de oplossingsmethode van achtereenvolgende substituties (iteratiemethode) besproken, waarbij het onderzoek naar de convergentie van de rij van achtereenvolgende substituties centraal staat. Van de onbekende functies (operatoren) is hierbij de differentiëerbaarheid niet verondersteld. In hoofdstuk 4 is dit laatste wel gedaan; nu wordt de methode van Newton gegeneraliseerd om de oplossing van de gestelde problemen te kunnen benaderen. Ook hierbij heeft het convergentieonderzoek alle aandacht. De ontwikkelde theorie is van L. V. Kantarovic afkomstig.
De theorie wordt duidelijk en in het algemeen streng uiteengezet (de slipper op bladz. 175 dat de integratievolgorde op grond van figuur 25.1 verwisseld kan worden is een uitzondering). Een aantal instructieve voorbeelden is ingelast; in het bijzonder is de behandeling van de aan de moderne theorie van het stralingstransport ontleende niet-lineaire integraalvergelijking in §13 interessant. Bij de bespreking van de methode van Newton wordt uitvoerig aandacht besteed aan de programmering teneinde praktische behandeling door de rekenmachine mogelijk te maken. Een groot aantal opgaven tussen de tekst stimuleren de lezer tot zelfstandige verwerking van de theorie.
Samenvattend: een goede gids voor hen die zich willen verdiepen in de methoden van de numerieke analyse.

W. J. Claas

Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen, Ausgewählte Referate der IMUK-Tagung in Wien, Sommer 1966, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1969, 142 blz., DM 12.50.

De laatste tien jaren zijn vele internationale congressen gehouden ter bespreking van de modernisering van het wiskunde-onderwijs. Er is een kern van prominente onderzoekers op dit gebied, waarvan men de vertegenwoordigers op de congressen telkens weer aantreft. Zo ook op dit congres. Men vindt in het verslag dan ook artikelen van Revuz (Fr.), Kristensen (Den.), Engel, Steiner, Pickert (D.), Prachar (Oost.), Servais, Papy, Holvoet (B.).
Opmerkelijk is, dat aan de statistiek steeds meer aandacht besteed wordt: van de tien referaten zijn er twee gewijd aan statistiek, namelijk die van Kristensen en van Engel. Vooral het artikel van Engel geeft belangrijke aanwijzingen met betrekking tot de methodiek en de mogelijke stofkeuze voor het onderwijs in de statistiek. Pickert behandelt een pittig stuk lineaire algebra, waarvan hij echter expliciet vaststelt, dat het bestemd is voor de herscholing van leraren.

Steiner houdt zich bezig met de algebraïsche structuren. Zijn bijdrage is de moeite van het lezen waard, maar houdt met onderwijskundige kwesties soms slechts verwijderd verband. Een groot deel van het boek wordt ingenomen door de verhandelingen van onze zuiderburen. Centraal daarbij zijn de artikelen van Papy over de topologie, deels didactisch en deels wetenschappelijk van aard. De inhoud van deze artikelen kan men terugvinden in het onlangs verschenen boek van Papy: Le premier enseignement de l'analyse. Servais bericht over het voorbereidende werk en vertelt, welke begrippen op school eerst goed bestudeerd moeten worden, voordat men aan de topologie kan beginnen. En Holvoet geeft tot slot een heldere beschouwing over continue afbeeldingen.
Wie dit boek in handen neemt, zal er stellig iets van zijn gading in vinden.

P. G. J. Vredenduin

Georges Papy, *Einfache Verknüpfungsgebilde, Gruppoide*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1969, 110 blz., DM 12.80.

Vertaald uit het Frans; oorspronkelijke titel: Groupoïdes.
Een groepoïde is een verzameling voorzien van een binaire interne operatie. In het hoofdstuk over algemene groepoïden leren we in hoofdzaak de terminologie hanteren. Interessanter is de daaropvolgende bespreking van de semigroepen, d.z. de groepoïden waarin de interne operatie de associatieve eigenschap heeft. Een bijzonder geval hiervan zijn de verzamelingen van de afbeeldingen van een verzameling E in zichzelf met als operatie de samenstelling. Daarna komen de reguliere semigroepen, d.z. de semigroepen waarvoor de schrapwet geldt, ter sprake. En ten slotte natuurlijk de uitbreiding van een reguliere commutatieve semigroep tot een groep, welke uitbreiding voor de ontwikkeling van het getalbegrip zo belangrijk is. Het boekje is erg plezierig leesbaar. Enkele aardige eigenschappen worden afgeleid. Het is uitstekend geschikt voor zelfwerkzaamheid, zowel door de omstandigheid, dat men vele resultaten uit de theorie zelf kan afleiden, als door het grote aantal opgaven, dat toegevoegd is. Warm aanbevolen voor ieder, die wat met structuren wenst te opereren.

P. G. J. Vredenduin

Bericht

PROJEKT-SCHAGEN

Verschenen is een interim-verslag van het Onderwijskundig Studiecentrum, Buitenveldertselaan 106, Amsterdam, over dit projekt: begeleiding van de Rijksscholengemeenschap-Schagen (vwo-havo-mavo) en wel voor de vakken Nederlands, wiskunde, Frans en Engels in de brugklasse.
Het in dit verslag – dat op aanvrage bij het Studiecentrum verkrijgbaar is – opgenomen werkmodel voor wiskunde, wordt door middel van observatie en vragenlijsten op zijn bruikbaarheid getoetst.
De redactie zal t.z.t gaarne plaats inruimen voor een verslag.

Kalender

vr 3 april: 18e Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen te Utrecht
ma 6 en di 7 april: 6e Nederlands Mathematisch Congres te Delft
do 28 mei t/m ma 1 juni: 10e Didacta, Europese beurs voor leermiddelen te Basel, Zwitserland
di 1 t/m do 10 sept: Internationaal Wiskundig Congres te Nice, Frankrijk.

Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften

School Science and Mathematics, 602–612; juni 1968–okt. 1969.

Th. P. Hillman, A current listing of mathematics laboratory materials;
M. F. Willerding, The uselessness of mathematics;
R. F. Graesser, Still another dodecahedron calendar.

G. B. Darnes, The science and mathematics curriculum at the junior college;
J. V. Madden, An experimental study of student achievement;
J. F. Weaver, A nontrivial issue of symbolism in multiplication;
C. B. Read, Illustrating the fact that verificating for many cases does not constitute the proof.

B. W. Benson and J. E. Howell, A programmed unit in statistics;
G. Wessel, The base *minus-ten* numeration system;
H. van Engen, Counting is not basic;
Moore and Cain, The new mathematics, and logical reasoning, and creative thinking ability;
J. Montgomery, The use of closed circuit television.

E. W. Jenkins, The packing of spheres;
D. E. Newton, The dishonesty of inquiry teaching;
D. A. Johnson, The doctorate in mathematics education;
E. H. Lehman, Ten years olds and the real number system;
G. T. O'Hearn, Science, society and the school.

LaFrenz and Kieren, Computers for all students, a new philosophy of computer use;
Stephens and Dutton, The development of time concepts by kindergarten children.

Ph. E. Miller, Education and American survival;
B. L. Boe, Group theory and the solvability of equations.

A. J. Picard, Piaget's theory of development with implications for teaching elementary school mathematics;
M. W. Beckmann, Ninth grade mathematical competence.

Mc Pherson and Cruikshank, Newton's computer program;
Freitag and Freitag, Non-terminating periodically repeating decimals.

Davidson and Gibney, Evaluation in modern mathematics program;
A. L. Buchman, The use of calculations and computers in mathematics instruction;
M. L. Schagrin, History of science.

R. E. Kohn, A mathematical programming model for air pollution control;
M. M. Svec, The coming hundredweight unit;
W. A. Miller, A unit in sentential logic for junior high school students;
L. E. Boyer, On validity and the use of truth tables.

J. R. Pribnow, Why Johnny can't 'read' word problems;
A. R. Osborne, Mathematical limitations on scientific creativity;
E. M. McFee, Education in decimal currency and the metric system.

Recreatie

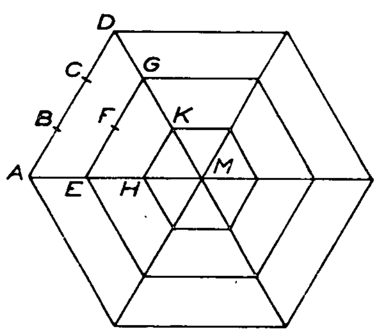
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

235 Op welke tweetallen cijfers kan de 20^e macht van een natuurlijk getal (tientallig geschreven) eindigen? (G. Cool, Goldern, Zwitserland)

236 Een boer heeft een rechthoekig stuk land. Hij wil er vier bomen op planten zo, dat de kortste afstand van twee bomen maximaal is. Hoe moet hij dit doen?

Oplossingen

233 Voor de opgave aan de tuinman zie men het vorige nummer.
Als lengteëenheid kiezen we de afstand tussen twee opvolgende bomen. Aan elke boom kennen we een getal toe, de waarde van de boom. Dit getal is de langs de weg gemeten afstand van de boom tot M. De tuinman zal telkens drie bomen nemen en die gaan planten. Hij zal daarbij een weg afleggen met lengte s en de bomen zo planten, dat de som van de waarden wordt w. We trachten nu wegen te vinden, waarbij $w—s$ maximaal is. Dit zijn wegen van het type $MADM$, waarbij de drie bomen geplant worden in A, B, C. Voor een dergelijke weg is $w = 11$ en $s = 9$. Van dit type wegen zijn er zes mogelijk.
Nu blijven nog over de bomen, die niet op de buitenste zeshoek liggen. De wegen met maximale $w—s$ zijn hierbij wegen van het type $MEGM$, waarbij de bomen geplant worden in E, F, G. Hiervoor is $w = 7$ en $s = 6$. Daarop volgen de wegen van het type $MEGM$, waarbij de bomen geplant worden in H, E, F. Hiervoor is $w = 6$ en $s = 6$. Van het eerste soort wegen zijn er drie mogelijk en van het tweede soort zes. Als we echter één weg van de eerste soort kiezen, dan zijn nog slechts vier wegen van de tweede soort mogelijk. Als we twee of drie wegen van de eerste soort kiezen, is het aantal wegen van de tweede soort nog slechts twee resp. nul. De wegen van de eerste soort bieden dus geen voordeel boven die van de tweede. In totaal zal de tuinman dus een afstand moeten afleggen van $6 \cdot 9 + 6 \cdot 6 = 90$ lengteëenheden. Hij behoeft echter niet in M terug te keren en zal dus ervoor zorgen, dat hem de langste terugkeer naar M bespaard blijft. Zijn laatste weg zal er dus een zijn van het type $MADM$, waarbij hij echter in C stopt. Als minimum vinden we zo 86 lengteëenheden.



234 Er wordt gevraagd en magisch kwadraat te vinden van 9 priemgetallen, waarvan het middelste 1039 is.

Een dergelijk kwadraat ziet er als volgt uit:

$1039-a$	$1039-b$	$1039+a+b$
$1039+2a+b$	1039	$1039-2a-b$
$1039-a-b$	$1039+b$	$1039+a$

Men ziet gemakkelijk in, dat alle getallen een 6-voud+1 moeten zijn.
We kunnen dus stellen

$$a = 6p \text{ en } b = 6q.$$

We gaan nu eerst de waarden van p bepalen, waarvoor zowel $1039+6p$ als $1039-6p$ priem zijn. We stellen eerst de voorwaarde, dat deze getallen geen van beide door 5 deelbaar zijn. Nu is $1039+p$ door 5 deelbaar, als $p = 1, 6, 11, \ldots$ en $1039-p$ door 5 deelbaar, als $p = 4, 9, 14, \ldots$. Deze mogelijkheden voor p vallen dus af. Daarna zeven we analoog de 7-vouden uit, enz. We houden dan uiteindelijk over als mogelijkheden voor p:

5	8	22	27	35	42	47	68	70	72	82	90	97
103	105	110	117	118	127	138	140	152	160	162	163.	

Dit zijn uiteraard ook de mogelijke waarden voor q. We moeten nu uit deze getallen er twee kiezen, p en q, zo dat ook $q+p$ en $q+2p$ ertoe behoren. Dit geeft de volgende mogelijkheden:

p	q	$q+p$	$q+2p$
35	68	103	138
35	70	105	140
35	82	117	152
42	68	110	152

De magische kwadraten worden:

829	631	1637	829	619	1669
1867	1039	211	1879	1039	199
421	1447	1249	409	1459	1249
829	547	1741	787	631	1699
1951	1039	127	1951	1039	127
337	1531	1249	379	1447	1291

Liwenagel

Abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel en het abonnementsgeld voor de 45e jaargang nog niet betaalden, wordt *dringend* verzocht dit nu zéér binnenkort te doen door *f* 5,50 over te maken op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede.
Het abonnementsgeld is intussen verhoogd tot *f* 7,—. Omdat dit zo laat is meegedeeld past de verenigingskas *voor deze jaargang* het verschil bij. Dit moge voor de abonnees een aansporing zijn om nu *direct* aan het bovenstaande (tweede) verzoek te voldoen, zodat er later geen extra aanmaningen verstuurd behoeven te worden. Dat laatste zou uw penningmeester veel extra moeite en U extra kosten bezorgen.

Inhoud