Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

BRUGKLASNUMMER

45e jaargang
1969/1970
no 6
maart 1970

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt ƒ 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Wiskunde in de mavo-brugklas[1]

L. A. G. M. MUSKENS
Schijndel

1 Inleiding

De titel 'Wiskunde in de mavo-brugklas' zou kunnen suggereren dat ik de boot gemist heb, zeker wanneer deze wordt beschouwd naast de titels van de beide volgende voordrachten 'Wiskunde in de meer homogene mavo-havo-vwo-brugklas' en 'Wiskunde in de heterogene mavo-havo-vwo-brugklas'.
Ik zou daarom vooraf willen stellen, dat ik geenszins wil pleiten voor de categoriale mavo-school en dat ik de samentrekking van 'mavo' en 'brugklas' tot 'mavo-brugklas' zie als een tegenspraak-in-zich.
De problemen van het wiskundeonderwijs in het mavo zijn niet los te maken van die van het havo en het vwo en hebben zeker ook te maken met die van het beroepsonderwijs. Het is dan ook jammer te moeten constateren, dat laatstgenoemde categorie nog steeds te weinig in onze beschouwingen betrokken wordt. Is het contact tussen ex-ulo-leraren en ex-vhmo-leraren sterk groeiende, worden de contacten met wetenschappelijk onderwijs en basisonderwijs steeds inniger, de toenadering van genoemde groepen en het beroepsonderwijs komt niet of slechts moeizaam op gang.
De stormachtige ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs hebben bovendien nauwe relatie met algemene onderwijsontwikkelingen in orkaankracht. Het denken over inhoudelijke en didaktische vernieuwingen, waarin met name doel en niveaus een grote rol spelen, stuwt velen steeds sterker in de richting van verlengde brugperiode, middenschool en brede scholengemeenschappen. Wetend, dat ik mij niet behoor te begeven op het terrein van de volgende sprekers, beperk ik mij in deze tot het uitspreken van een stelling: Terecht stelt de maatschappij aan het onderwijs de eis tot samenwerking van leraren, van leerlingen en van leraren en leerlingen.
Als het vervolg van mijn voordracht u wat fragmentarisch voorkomt, dan hoop ik dat u deze eis tot samenwerken als rode draad kunt herkennen.

[1]) Voordracht op 13 december 1969 voor de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (Weekendconferentie).

2 Aktiviteiten voor het mavo

Ook al heeft het mavo zich plotseling moeten omschakelen op moderne wiskunde, toch hebben enkele aktiviteiten enige voorbereiding gegeven. Ik noem hiervan de heroriënteringscursussen van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, het werken met een experimentele methode ook aan enkele mavo- en uloscholen vanaf 1 augustus 1966 en de start van het experiment 'Moderne Wiskunde' van de drie pedagogische centra aan een tiental mavoscholen vanaf 1 augustus 1967. Naar mijn mening zijn hierbij zeker aanvankelijk ernstige communicatietekorten opgetreden. Veel mavoleraren zagen niet het verband tussen de cursussen en het komend onderwijs en misten de didaktische benadering van de problemen. Het experiment vanaf 1966 had niet als doel de leraren te informeren en van het experiment van de drie centra is een summier verslag voor vele leraren aan de late kant verschenen. Ik zie hierin geen enkele schuldvraag opkomen, wel verklaart het enigszins, dat de mavoleraren zich in de mist gezet voelden en niet allen even enthousiast de modernisering konden begroeten. Gelukkig kan mijn onvriendelijke opmerking in vorige zinnen dadelijk gecompenseerd worden. De heroriënteringscursussen van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde schenken in het lopende jaar beslist wel enige aandacht aan de didaktische aspecten van de transformatiemeetkunde en de vectoren. Het interne experiment vanaf 1966 heeft geleid tot een duidelijk verbeterde methode, die nu aan een grote meerderheid van de mavoscholen wordt gebruikt. Het experiment van de drie centra heeft een tweede jaarverslag opgeleverd dat duidelijk wint ten opzichte van het eerste.

In het eerste mammoetcursusjaar hebben zich veel vormen van samenwerking gemanifesteerd, die geleid hebben en kunnen leiden tot intensievere samenwerking van leraren en leerlingen.

Mede op aandringen van het Mulo-verband is de Centrale Commissie Begeleiding Mavo-Wiskunde in het leven geroepen, die in het afgelopen cursusjaar ruim 1500 mavowiskundeleraren heeft samengebracht in 90 gespreksgroepen, waarin onder leiding van meestal vwo-docenten de onderwijsproblemen van het mavo over tafel kwamen. Ik heb dan ook dankbaar gebruik gemaakt van diverse opmerkingen uit de drie samenvattende verslagen. Ook in de komende vier jaren zullen dergelijke gespreksgroepen driemaal per jaar bijeen komen. Hoewel buiten de eigenlijke taak van de Centrale Commissie Begeleiding Mavo-Wiskunde vallend, kan incidentele deelneming van vwo- havo-, en lbo-leraren toch sterk bevruchtend werken.

In deze gespreksgroepen is duidelijk gebleken dat de toetsingsproblemen voor het mavo niet gering zijn. Op zich is dit een verheugend verschijnsel: er treedt kennelijk bezinning op over vragen als: wat wil ik toetsen?, hoe kan ik dat toetsen? en toets ik inderdaad wat ik wil toetsen? In dit verband kan gewezen worden op de activiteiten van een havo-mavo-werkgroep binnen de drie centra, waarvan over ongeveer een maand een verzameling examenopgaven voor mavo-III, mavo-IV en havo zal worden gepubliceerd. Bovendien verschijnt bij de aanvang

van het volgend schooljaar een drietal brugklastoetsen voor de twee meest gebruikte methoden en de overige methoden, als aktiviteit van het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie. Allerlei wegen tot communicatieverbetering tussen de nog onderscheiden schooltypen komen tot stand: de samenwerking binnen de Inspectie lijkt mij intensief, het aantal leden uit het mavo bij de Wiskunde-werkgroep van de W. V. O. is de laatste jaren stijgend, Wimecos heeft zich gereorganiseerd tot de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en daarmee open gesteld voor alle wiskundeleraren. Het tijdschrift Euclides houdt zich ook duidelijk bezig met mavoproblemen.
Het kan niet anders of dit alles moet tot een onderwijsverbetering – ook in het mavo – leiden.

3 Leerboeken

Waarschijnlijk omstreeks 90% van de brugklasleerlingen die mavo-onderwijs gaan volgen maken gebruik van één van de methoden Moderne Wiskunde of Van A tot Z. Ook hierin zie ik enkele gunstige facetten, afgezien van de kwaliteiten van beide methoden.
In de eerste plaats hebben de mavo-leraren kennelijk geopteerd voor methoden, die samenwerking met scholen voor havo en vwo mogelijk maken. Bovendien is hierdoor de vroegere toestand van een honderdtal ulomethoden overwonnen. Het lijkt in de huidige ontwikkeling de enige mogelijkheid, dat een team van auteurs zich bezighoudt met het schrijven van methoden.
Deze breedheid in de opzet van methoden is daarom zo gewenst, omdat de ervaring leert, dat veel mavoleraren zich bij hun lessen angstvallig houden aan de methode. Iemand heeft dit wel eens aforistisch uitgedrukt als ‘ze behandelen het boek en niet de wiskunde’.
In dit verband klemt te meer het probleem, dat het schrijven van methoden nog steeds beschouwd wordt als iets wat ‘in de vrije tijd’ moet gebeuren. Het komt mij voor, dat er veel auteurs zijn die tot aan of over hun nek in het werk zitten. Beslist geen ideale omstandigheid om een zo belangrijke functie in het onderwijs te vervullen.

4 Differentiatie

Veel mavoleraren hebben te kampen met tempoproblemen. Het is zinvol zich af te vragen waar hiervan de oorzaken liggen. Het feit dat deze moeilijkheden zich vooral voordoen bij één methode zegt in dit opzicht niet voldoende. Bij een andere methode dreigen dergelijke moeilijkheden in het tweede leerjaar. Men zou de verantwoordelijkheid van het leerplan kunnen afwentelen door op te merken, dat het bij Van A tot Z kennelijk wel kan.
Naar mijn smaak is het toch juist de didactische verwerking van het brugklas-

leerplan die de moeilijkheden oplevert. Vandaar de vraag: is er bij het opstellen van het leerplan voor het brugjaar voldoende aandacht besteed aan de volgende drie aspecten?

(a) de leerstof dient basisstof te zijn voor volgende leerjaren,
(b) er moet een goede coördinatie bestaan tussen de verschillende brugklastypen en
(c) de leerstof moet een verantwoorde didactische verwerking mogelijk maken.

Er is in de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde misschien wel wat te veel huiver geweest voor staatsdidaktiek. Bovendien: een leerplan is niet primair een stuk dat de leerstof inhoudelijk vastlegt, maar dient zeker ook aandacht te schenken aan de vraag hoe deze leerstof gepresenteerd kan worden.
Het tempoprobleem klemt de mavoleraar des te meer, daar hij gewend is al zijn leerlingen mee te slepen: 'onder' het ulo was er immers geen algemeen vormend alternatief. Mogelijk ligt hier een oorzaak voor de vraag, om meer oefenstof! Oorzaak is zeker ook de neiging bij veel mavoleraren tot drillen voor het examen. Daar de leraar nog te weinig op de hoogte is van de leerstof die nog volgen moet en gewerkt wordt volgens principes als concentriciteit en telescoped reteaching, weet hij niet wat hij kan overslaan of luchtiger kan presenteren.
De mavoleraren kunnen in dit probleem zeker geholpen worden door hun havo- en vwo-collega's. Samen zouden zij zich kunnen bezinnen over wat nu eigenlijk basisleerstof in de methode is en wat verrijkende leerstof.
Overigens komt dit niet alleen het momentele onderwijs ten goede. Wanneer in scholengemeenschappen gedifferentieerd moet worden is immers de vraag van wat basisleerstof is van groot belang om de stof in niveaus aan te kunnen bieden.

5 Doelstellingen

In eerdere weekeindeconferenties van deze groep is al eens naar voren gekomen het bevorderen van het flexibel denken. Dit is beslist in strijd met de traditie in de ulo-opleiding, die voornamelijk aandacht besteedde aan het denken in vaste patronen, aan schabloondenken. De komende maatschappij vraagt anders, maar het is een moeilijke zaak hierin verandering aan te brengen, temeer daar de vooropleiding van vele leraren hier niet op gericht is.
Voor uloleraren gold het eindexamen misschien niet als het enige, maar toch wel als het belangrijkste onderwijsdoel. Nu het eindexamen voor mavo een nog onbekende zaak is, ook al is in 1969 het eerste moderne mavo-III-examen afgenomen, missen deze mensen het zicht op een doel. Dat werkt beslist frustrerend. Evenwel: wie een goede wiskundige vorming geeft, bereikt daarmee een resultaat dat in overeenstemming is met het onderwijsdoel. Een examen

zal slechts waarde hebben en een goed examen zijn, wanneer het dit resultaat toetst.
Sprekend over examens ontstaat er een ernstige zorg bij velen: veel vervolgonderwijs eist wiskunde in het examenpakket, dus moet veel leerlingen aangeraden worden wiskunde-examen te doen. Echter dient het examen een voldoend niveau te hebben. Hier treedt duidelijk een spanningsveld op. In dit verband speelt het probleem mavo-III. De huidige praktijk dreigt te gaan in de richting van een lager niveau; hopelijk is de verwachting niet ongerechtvaardigd, dat over enkele jaren ingezien wordt dat dit onjuist is. Wanneer het examen niet voldoende niveau garandeert zal de maatschappij het mavo-III-diploma niet accepteren. Voor wiskunde kan sterk pragmatisch geredeneerd worden: mavo-III en theoriestream van de lts bereiden beide voor op de mts.

6 Didaktische problemen

Men kan zich afvragen of de mavoleraar in het algemeen al voldoende is aangepast aan de nieuwe situatie. Voor wat de leerstof betreft wordt hij bijgespijkerd in de heroriënteringscursussen. De gespreksgroepen kunnen hem didaktische mogelijkheden bieden. Dit alles heeft ten doel: de leraar te laten denken in structuren en hem in staat te stellen de leerlingen in die zin te begeleiden.
In gesprekken met mavoleraren blijkt mij vaak een gebrek aan vertrouwen in de capaciteiten van hun leerlingen. Extreem gesteld komt hun mening hierop neer: onze leerlingen kunnen door veel oefening bepaalde vaardigheden leren beheersen, maar hun inzicht is miniem. Hier tegenover wil ik enkele gedachten stellen:
Wat wij niet van onze leerlingen verwachten, daaraan zullen zij beslist niet voldoen.
De structuur van bijvoorbeeld de klassieke schoolmeetkunde was inderdaad moeilijk te doorzien. In de nieuwe situatie wordt door grotere eenheid in terminologie (afbeeldingen) en door doelgerichter werken naar structureel inzicht meer mogelijkheid geboden. We hechten nu niet meer zo'n grote waarde aan een deductieve opbouw.
Door de leerlingen huiswerk vooraf op te geven inplaats van na het bespreken van de leerstof ontstaat de mogelijkheid, dat ze ontdekken wat ze zelf kunnen doen. Voorwaarde hiervoor is een verstaanbare taal in de leerboeken.
De verandering voor de leraar bestaat nu vooral hierin, dat hij niet meer van te voren alle moeilijkheden voor de leerlingen ontleedt en hen daarover inlicht, maar dat hij met de leerlingen gaat bespreken wat hun moeilijkheden waren. Niet de leraar moet de problemen oplossen zodat de leerling ze kan nadoen, maar de leerling moet trachten te ontdekken, waarbij de leraar hem bij gebleken moeilijkheden kan helpen. Hierdoor wijzigt zich de rol van de leraar van studieleider tot studiebegeleider: leraar en leerling werken samen aan een stuk wiskundige vorming.

Aan de hulp van de leraar kan nog iets voorafgaan: er bestaan geen betere leraren dan de leerlingen. Hen samen te laten werken in groepjes geeft hen behalve wiskundige vorming ook een onmiskenbaar stuk sociale vorming. Waarmee ik weer terug gekomen ben bij mijn eerste stelling: Terecht stelt de maatschappij de eis tot samenwerken van leraren, van leerlingen en van leraren en leerlingen.

Ten behoeve van de discussiegroepen waren door de heer Muskens de volgende vragen opgesteld:

1 Terecht stelt de maatschappij aan het onderwijs de eis tot samenwerken van

- leraren onderling
- leerlingen onderling
- leraren en leerlingen

Wat kan dit in concreto betekenen voor het wiskundeonderwijs?

2 Leraren kunnen worden onderscheiden naar

- schooltype (vwo, havo, mavo, beroepsonderwijs)
- opleiding (wetenschappelijk, middelbaar, lager, onderwijzer)

In hun taak kunnen zich problemen voordoen ten aanzien van

- vakkennis (nieuwe benadering van de wiskunde)
- algemene onderwijszaken (geïntegreerd onderwijs)
- didaktiek en methodiek (niveaus, differentiatie, lesvormen)

Hoe en in hoeverre kunnen leraren elkaar hierbij helpen?

3 Bij het opstellen van een leerplan voor de brugklas moet gelet worden op

- basisleerstof voor volgende leerjaren
- coördinatie tussen verschillende brugklastypen
- didaktische verwerking van de voorgestelde leerstof

Is aan deze aspecten voldoende aandacht besteed in het huidige brugklasleerplan?
Hoe en inhoeverre kan hierin verbetering komen?

Wiskunde in de brugklasse[1]

W. J. KNIEP
Aalsmeer

Mijn voordracht heb ik in drie onderwerpen verdeeld:

A Ik zal spreken over de wijze waarop de leerlingen die in de brugklasse van de Osdorper Scholengemeenschap (OSG) komen worden ingedeeld en over de organisatie van het wiskundeonderwijs in die brugklasse.

B Ik zal iets vertellen over de principes van methodiek en didaktiek, die ik in gesprekken met de collega's hoop over te brengen.

C Tenslotte zal ik u het een en ander vertellen over de schoolcarrières van een groep leerlingen, die wij drie jaar geleden in onze brugklassen les gaven en die nu de vierde klasse bereikt hebben.

A In Amsterdam worden op de basisschool toetsen afgenomen aan de hand waarvan men hoopt iets te kunnen zeggen over de mogelijkheden van de leerlingen in het voortgezet onderwijs. Er is een codering gemaakt voor die mogelijkheden, lopend van 1 tot en met 7, waarbij dan ruwweg bij 1 aan vwo, bij 3 aan havo, bij 5 aan mavo en bij 7 aan andersoortig onderwijs gedacht moet worden. De tussenliggende getallen kunnen gebruikt worden voor twijfel tussen de voorgaande en volgende categorie. Tot verleden jaar werden de leerlingen ingedeeld aan de hand van deze codering, waarbij er van uitgegaan werd, dat elke klas zo homogeen mogelijk moest zijn. Aan die homogeniteit werd in de loop van het cursusjaar nog het één en ander gedaan door een aantal overplaatsingen, vooral in november. Dit jaar is er een verandering gebracht in deze procedure. In overleg met Prof. van Parreren, curator van onze school, is er een formulier ontworpen, waarop aan de leerkrachten van de basisschool vragen gesteld worden over een aantal capaciteiten en eigenschappen van de leerlingen die bij ons in de brugklasse komen.
Er wordt gevraagd:

1 Hoe is het werktempo van de leerling?
2 Kan de leerling goed ontleden?
3 Kan de leerling goed redeneersommen maken?

[1]) Voordracht op 13 december 1969 voor de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (weekend-conferentie).

4 Hoe is zijn spelling?
5 Hoe staat het met de fantasie van de leerling?
6 Hoe staat het met de rijpheid van de leerling?
7 En met zijn concentratie?

De punten 2 en 3 vertoonden in de waardering veel overeenkomst. Deze waarderingen zijn ook weer gecodeerd met getallen van 1 tot en met 6.
Bij de indeling van de leerlingen in de brugklassen wordt nu met de volgende punten rekening gehouden:

1 de waardering verkregen door de schooltests
2 zoveel mogelijk homogeniteit t.a.v. spelling, tempo en ontleden
3 t.a.v. fantasie, rijpheid, concentratie wordt bewust naar zoveel mogelijk spreiding gestreefd.

We hebben nu 16 brugklassen waarin leerlingen zijn opgenomen van de categorieën 1 tot en met 6 volgens de toets op de basisschool.
In alle klassen wordt met hetzelfde boek, MODERNE WISKUNDE, gewerkt. Aan het begin van het lesjaar krijgen de docenten een schema voor het doorwerken van deel 1 met daarbij aangegeven drie verschillende tempi, waarin de eenheden kunnen worden doorgenomen. De leraar is vrij in de keuze van zijn tempo. Op een lijst in de docentenkamer tekent de docent af, wanneer hij met een bepaalde eenheid klaar gekomen is. Iedere docent kan dan van zijn collega's zien hoever ze zijn. De ervaring heeft geleerd dat dat een gelijkrichtend effect heeft. De drie tempi zijn zo opgesteld dat aan het eind van het cursusjaar de langzaamste klas hoogstens twee maanden achter ligt op de snelste.
Het is gebleken dat een ervaren docent die een goede en een wat zwakkere brugklasse lesgeeft de neiging heeft deze klassen in tempo weinig te laten verschillen. Dat is mogelijk door in de zwakkere klas minder diep op de materie in te gaan.
Na ongeveer twee maanden wordt een gemeenschappelijk proefwerk afgenomen aan alle leerlingen van de 16 brugklassen. De normering wordt vooraf vastgesteld en de resultaten worden centraal ingeleverd. Deze worden vervolgens in percentiel-scores uitgedrukt. Met nog een tweetal andere vakken wordt dezelfde procedure gevolgd. De scores van de leerlingen van een klas over die drie vakken worden op een lijst verzameld, vaak nog geïllustreerd met grafieken. Dit werk wordt voor een groot gedeelte gedaan door de administratrice.
Als deel 1 van de methode uit is krijgen alle leerlingen dezelfde multiple-choice test over dat deel te maken. De resultaten hiervan worden op dezelfde wijze verwerkt.
Ik geef mijn collega's het advies de scores behaald bij deze proefwerken maar zeer bescheiden te laten meetellen bij de bepaling van het rapportcijfer. Dat kan veel beter gedaan worden aan de hand van de proefwerken, die afgestemd zijn op het niveau van de klas.

B In de gesprekken met mijn collega's wijs ik altijd weer op de noodzaak binnen de klas te differentiëren. Hoewel er naar homogeniteit gestreefd is zijn

de verschillen binnen een klas vaak toch aanzienlijk. Men moet niet van elk kind hetzelfde verlangen. Het geven van onvoldoendes moet zoveel mogelijk vermeden worden.
Verschillende collega's hebben daar bezwaar tegen omdat ze vrezen dat dan vele leerlingen te hoog zullen worden aangeslagen wat betreft hun mogelijkheden in de hogere klassen. Ik wijs ze er dan op dat door de gemeenschappelijke proefwerken zoveel informatie binnenkomt, dat de kans op het maken van ernstige vergissingen niet zo erg groot is. Zeker niet wat betreft een te hoog aanslaan van de kansen van een leerling. De kans is veel groter dat we zijn mogelijkheden te laag aanslaan. Het lesgeven in de brugklasse is moeilijk. Men moet bij jonge kinderen belangstelling wekken en er voor zorgen dat niet door een te grondige confrontatie met nog te moeilijke begrippen en technieken een antipathie tegen het vak gewekt wordt, die naderhand moeilijk meer overwonnen kan worden.
Het oude lesschema – theorie behandelen – voorbeelden geven – huiswerk opgeven over soortgelijke opgaven – moet doorbroken worden. De leerlingen moeten in de gelegenheid worden gesteld zelf wat te ontdekken. Aan de hand van vragen van leerlingen over ondervonden moeilijkheden kan de docent de helpende hand bieden. Dit systeem is in een klas met goede leerlingen heel goed toe te passen, maar van zwakker begaafde leerlingen moet men natuurlijk minder verwachten wat betreft hun vermogen om zelfstandig tot de oplossing van een probleem te komen. Men moet daarmee rekening houden bij de keuze van de problemen die men de leerlingen zelf laat oplossen.
Aan zwakke leerlingen moet meer steun geboden worden. Ik geloof echter dat het niet veel zin heeft door uitvoerig voordoen de leerling zo ver te brengen dat hij tenslotte in staat is een zeer bepaald type opgave zelf te vinden.
De lessen kunnen aantrekkelijker gemaakt worden door de gang van zaken tijdens de lessen van tijd tot tijd eens te wijzigen.
Men kan de leerlingen in groepjes van 3 of 4 samen laten werken. Het zal wat rumoeriger in de klas worden maar u zult merken dat in de meeste klassen de leerlingen zich druk met de wiskunde bezighouden. Men probeert elkaar de zaken uit te leggen of elkaar te overtuigen van het ongelijk van de ander.
Het gebruik van modellen, vooral bij het meetkunde-onderwijs maakt de les duidelijk aantrekkelijker en vele leerlingen komen gemakkelijker tot begrip van meetkundige eigenschappen als ze de realiteit ervan kunnen controleren. Aan de hand van modellen kan ook soms gemakkelijk een algemene diskussie over een bepaald onderwerp georganiseerd worden.
De leerlingen kan men ook zelf modellen laten maken. Wij organiseren elk jaar een wedstrijd, waarbij de leerlingen uitgenodigd worden modellen te maken van allerlei materiaal, waarin de vormen van kubus, balk, piramide en cilinder voorkomen. Prachtige werkstukken krijgen we op die manier binnen, die zich vaak weer uitstekend lenen voor demonstratiemateriaal. Het is grappig om te zien hoe bij deze modellen de kleuren soms zeer funktioneel worden toegepast. Het belangrijkste devies luidt: houd de wiskunde zo aantrekkelijk mogelijk.

Probeer belangstelling te wekken. Dood niet door een te uitvoerige beoefening van technieken elk plezier in het vak. Er komt nog gelegenheid genoeg om de vaardigheid in de meest noodzakelijke technieken bij hen die later wat met wiskunde gaan doen in de komende jaren op te voeren.

C Tenslotte nog iets over de groep leerlingen die drie jaar geleden bij ons in de brugklas kwamen.
We hadden toen 18 brugklassen, die te samen 511 leerlingen bevatten. We werkten toen met een team van 8 docenten in die brugklassen. Er werd goed samengewerkt tussen alle docenten, die zowel van uit de hbs- als uit de mulo-sector kwamen. In dat jaar zijn we begonnen met het maken van multiple-choice tests, die we in de loop van de jaren door zorgvuldige analyses steeds meer verbeterd hebben. Thans zijn wij zover dat die samenwerking interscholair is geworden. Met een aantal collega's van andere scholen hebben we nu tests voor de brugklas gemaakt die op vele scholen met zeer uiteenlopende niveaus zijn afgenomen. De resultaten zijn onderling vergeleken en helpen een idee te krijgen welke problemen onze brugklasleerlingen aan kunnen en welke niet. Aan onze school heb ik de afname van tests over de hogere delen tot en met deel 5 met grote medewerking van enige collega's weten door te voeren. De resultaten worden door mij zorgvuldig verzameld. Als voor de leerling het moment van de keuze al of niet wiskunde-bovenbouw komt, beschikken we over behoorlijk wat informaties aangaande zijn wiskundige prestaties in de voorafgaande jaren.
Aan het einde van het cursusjaar 1966/67 werden de leerlingen gericht bevorderd naar de tweede klas gymnasium – atheneum – havo – mavo 4 j – mavo 3 j en een gedeelte werd naar lager beroepsonderwijs verwezen.
De verdeling was als volgt:

21 ll of 4 % gymnasium
73 ll of 14 % atheneum
150 ll of 29 % havo
168 ll of 33 % mavo-4j
70 ll of 14 % mavo-3j

Nu twee jaar later, bevinden zich van die brugklas leerlingen 233 of bijna 46 % in de vierde klas van onze school.

In onderstaande tabel vindt u wat meer gedetailleerde gegevens.

	4e klas	met wiskunde	(zonder) wiskunde
Gymnasium	86 %	62 % (β)	24 % (α)
Atheneum	69 %	42 % (B)	27 % (A)
Havo	47 %	16 %	31 %
Mavo-4j.	57 %	15 %	42 %

De overige leerlingen zijn in de tweede of derde klas blijven zitten of hebben de school verlaten. Van de leerlingen die naar het 3j-mavo zijn gegaan heeft er tot nu toe geen een het eindexamen afgelegd.
In de brugklassen 1966/67 hebben we twee multiple-choice tests afgenomen van tezamen 58 items.
De scores van de leerlingen, die nu in de vierde klas zitten en wiskunde gekozen hebben in hun pakket, resp. in de β of B afdeling zitten zijn de volgende:

Scores in percentages over 58 items	1.00—0.97	0.96—0.93	0.92—0.89	0.88—0.85	0.84—0.81	0.80—0.77	0.76—0.73	0.72—0.69	0.68—0.65	0.64—0.61	0.60—0.57
gym β + ath β 47 ll	4	5	9	13	3	9	1	3			
havo 24 ll		2	2	4	6	2	6	2			
mavo 24 ll					3	3	7	3	3	2	3

Van deze leerlingen heb ik er nu 14 in mijn atheneum – **B** – klas en 15 in mijn havo klas. Het verschil in niveau tussen de leerlingen van deze klassen is veel groter dan op grond van deze tabel verwacht zou mogen worden.
De gedachte komt bij mij op, dat wanneer deze leerlingen in de tweede en derde klasse gemeenschappelijk wiskundeles gehad zouden hebben, de niveauverschillen tussen deze atheneum en havo leerlingen misschien minder groot geweest zouden zijn. Problemen zijn er om onderzocht te worden. Voor vwo – havo hebben we nu gemeenschappelijke leerjaren tot en met de derde klas. Of dit een verbetering zal betekenen, zal de toekomst moeten leren.

Wiskundeonderwijs in de heterogene brugklasse? [1]

H. N. SCHURING
Voorburg

Het vraagteken achter de titel is niet bedoeld om een twijfel uit te drukken of het hierna geschetste wiskundeonderwijs wel in heterogene brugklassen moet worden gegeven, maar het bedoelt een twijfel uit te drukken of de brugperiode wel aan het eind van de eerste klas behoort te eindigen. Ik geloof dat er meer kinderen op de voor hen juiste afdeling terecht kunnen komen als we ze zolang mogelijk stof kunnen aanbieden die ze min of meer vrijblijvend kunnen verwerken en waardoor zij zichzelf differentiëren.
Hoe dit in de praktijk te realiseren is, hoop ik u te laten zien door mijn ervaringen in de afgelopen anderhalf jaar te schetsen, in een scholengemeenschap van mavo-havo-vwo met heterogene eerste- en tweede klassen. Beide leerjaren hebben ongeveer 350 à 400 leerlingen. Voor het eerste leerjaar het volgende:

a. **Leerstof**

We hebben het ons ter beschikking staande materiaal gesplitst in vier onderdelen:

1 *Minimale leerstof voor mavo*. Iedere leerling in de eerste klas is verplicht dit te verwerken en moet er ook voor zorgen deze stof voldoende te beheersen. Dit laatste is voor vrijwel alle leerlingen mogelijk gebleken, omdat de zwakkere leerlingen gebruik kunnen maken van het volgende onderdeel.

2 *Extra oefenstof*. Deze opgaven, die tijdens de lessen worden overgeslagen, worden verplicht gesteld voor een aantal leerlingen met onvoldoende resultaten, tijdens steunuren die in het rooster ingebouwd zijn. Mocht een individuele leerling bij een bepaald onderwerp meer oefening nodig hebben dan kan zijn eigen leraar hem min of meer vrijblijvend extra opgaven laten maken.
De steunuren worden in het algemeen niet gegeven door de eigen leraar wat het voordeel heeft dat de leerlingen het nog eens op een iets andere manier kunnen horen.

3 *Determinatiestof*. Iedere leerling heeft naast het boek dat de minimale stof bevat ook de beschikking over een boek dat ongeveer dezelfde titels en nummering van de hoofdstukken heeft en een uitbreiding en verdieping van

[1]) Voordracht op 14 december 1969 voor de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (Weekend-conferentie).

de stof geeft. Het grootste deel van deze hoofdstukken wordt voor alle leerlingen verplicht gesteld om te verwerken, maar het wordt hun niet kwalijk genomen als het niet lukt. Er wordt uit dit deel wel les gegeven en het huiswerk daaruit wordt besproken, maar het grootste gedeelte moeten de leerlingen zelf ontdekken en verwerken. Natuurlijk is de leraar altijd bereid en in staat om te helpen de leerlingen zover mogelijk te laten komen. Er zijn leerlingen die toch nog weinig werk hebben en heel weinig moeite hebben met deze stof. Voor hen hebben we nog:

4 *Keuzestof.* Het determinatiedeel bevat ook enkele hoofdstukken, of opgaven in sommige hoofdstukken, die buiten het programma vallen. Deze worden tijdens de lessen niet aan de orde gesteld maar de leerlingen die hiertoe in staat zijn en er ook zin in hebben kunnen deze opdrachten geheel vrijblijvend proberen. Hierdoor wordt voorkomen dat sommige leerlingen te ver voor raken op het programma en zij zich op een gegeven moment gaan vervelen.

b. **Leerling**

Toen we bovenstaande leerstofplanning gemaakt hadden zijn wij, de leden van wiskundesektie, toch met gemengde gevoelens aan het begin van het vorig cursusjaar de heterogene brugklas ingestapt. Op papier stond het er allemaal zo mooi, maar de praktijk moest uitwijzen of het inderdaad op de door ons uitgewerkte wijze uitvoerbaar zou blijken te zijn.
Na één jaar brugklas heeft het resultaat onze stoutste verwachtingen verre overtroffen. Nog nooit, in onze al dan niet lange ervaring in eerste klassen, hebben de leerlingen zo enthousiast en hard aan de wiskunde gewerkt als in het afgelopen jaar. Dit is de unanieme mening van al onze vakcollega's. De leerlingen werden door het vrijblijvende werken aan de determinatiestof uitgedaagd om zo ver mogelijk te komen. Iedereen, dus ook de toekomstige mavokandidaat heeft meer gedaan dan de minimale leerstof. Toch heeft dit geen ongezonde rivaliteit tot gevolg gehad, want de leerlingen werden niet uitgedaagd door hun klasgenoten, maar door de methode. Overigens was het voor de leerlingen niet erg gemakkelijk om zich aan een ander te spiegelen door onze wijze van beoordelen (zie punt d). Het is ons gebleken dat het niet erg is, als een leerling een bepaald onderwerp niet direct kan beheersen, omdat het in een iets later stadium weer terugkomt, hetzij in de steunuren, hetzij in een volgend hoofdstuk, dankzij de methode van telescoped reteaching. Dit leek ons beter dan te proberen door een of andere vorm van dril het de kinderen aan te leren.
U zult wel begrepen hebben dat het in onze ogen onmogelijk is zonder een grote mate van zelfwerkzaamheid in de wiskundelessen zinvol bezig te zijn in de heterogene klas. Omdat de klassebezetting nogal groot is (± 30 ll) proberen we als de kinderen met hun eigen werk bezig zijn het aantal te verlagen door die kinderen die weinig te vragen hebben en bewezen hebben zelfstandig te kunnen werken, gelegenheid te geven op de gang te gaan werken, waar enige tafeltjes en stoeltjes staan. Het uitsturen op de gang is bij ons dus een gunst. Zo nu en dan schakelen

we de betere leerlingen in om de wat zwakkere klasgenoten te helpen. Het is vaak verrassend te merken hoe goed de leerlingen van elkaar iets kunnen leren. Ik geloof niet dat de potentiële vwo-kandidaat in dit systeem te kort wordt gedaan. Immers hij kan voorzichzelf doorwerken aan moeilijker opgaven en bovendien kan hij gevraagd worden iets uit te leggen, wat voor hen zelf ook een vorm van leren betekent.

c. **Leraar**

Op dit punt kan ik betrekkelijk kort zijn. Om het wiskundeonderwijs zo efficiënt mogelijk te laten verlopen, is het beslist noodzakelijk dat de vakcollega's kunnen werken in teamverband. Het is ons streven dat elke klas op ieder moment even ver is. Dit trachten we te bereiken door eenmaal per 14 dagen een vaksektieberaad te houden, waarin we de leerstofplanning van de komende periode vaststellen. Wij geven ook gemeenschappelijke proefwerken, wat geen taakverzwaring voor de docent inhoudt, want de opgaven worden op toerbeurt gemaakt. Op de sektievergaderingen kunnen verder allerlei problemen aan de orde komen van de individuele docent. Niemand van ons voelt dit als een extra last, veel eerder een verlichting van zijn taak. Ik moet zeggen dat het teamwerk in onze sektie dan ook uitstekend loopt.

d. **Beoordeling**

U zult zich misschien afvragen hoe we nu met deze aanpak de leerlingen beoordelen. Per slot van rekening moeten wij de ouders toch op gezette tijden op de hoogte brengen van de vorderingen van hun kind. Bovendien moeten wij toch ook een advies uitbrengen welke opleiding mavo, havo of vwo het kind het best zou kunnen volgen, al hoeft dit advies misschien niet aan het eind van de eerste klas gegeven te worden.
Wij komen aan onze gegevens, zoals hierboven al vermeld is, door middel van gemeenschappelijke proefwerken, die op hetzelfde tijdstip gegeven worden aan alle klassen van een bepaald leerjaar. Dit hoeft geen roosterproblemen met zich mee te brengen, want op een bepaalde dag en op een vastgesteld uur deelt iedere docent die dan toevallig op dat uur les moet geven in die klas de wiskunde opgaven uit. Dit zal dan vaak door collega's van andere vakken gebeuren ,wat geen bezwaar is, want op een ander tijdstip volgt een proefwerk van een ander vak juist in het wiskunde uur.
De beoordeling van zo'n proefwerk wordt gegeven door het aantal punten te noteren dat de leerling scoort. De puntenwaardering van elk gegeven vraagstuk wordt van te voren in de vaksektie vastgesteld. Het totaal aantal te behalen punten behoeft beslist geen 10 te zijn. In het begin van de eerste klas komt er naast de puntenscore ook een letterbeoordeling, bestaande uit een van de letters B, D of F. De betekenis van deze letters is:

B: Voldoet aan de minimum eisen.
D: Voldoet nog niet aan de minimum eisen.
F: Voldoet niet aan de minimum eisen.

Wie de mavo stof beheerst krijgt een B.
Na enige tijd als we verder gevorderd zijn met het determinatiedeel vallen onze proefwerken in twee delen uiteen. Natuurlijk eerst een aantal vragen over de minimumstof, die beoordeeld worden met B, D of F en bovendien een aantal vragen over de determinatiestof, waardoor de beoordeling alleen maar verhoogd kan worden. Als de leerlingen voor het laatste deel voldoende punten gescoord hebben kan een F tot D of B worden en D tot B. De B zelf kan A worden wat betekent dat de leerling meer kan dan alleen maar de minimum stof. Op het rapport komt dan ook alleen maar één van de vier letters A, B, D of F voor. Voor het bepalen van de letter op het rapport worden in de vaksektie richtlijnen opgesteld, maar het is de bedoeling dat de leraar zeker rekening houdt met zijn individuele kijk op de leerling, die gevormd kan worden door schriftelijke overhoringen e.d. Het is beslist niet de bedoeling dat wij automaten worden in een min of meer goed geolied systeem. Aan het eind van het eerste leerjaar maken wij voor iedere leerling de balans op. Heeft iemand overwegend F gescoord, dan kan hij, afhankelijk van de andere vakken, misschien toch wel zinvol meedraaien in de tweede klas, dank zij telescoped reteaching. Is het resultaat ook voor andere vakken te laag dan kan de leerling andersoortig onderwijs kiezen of de eerste klas doubleren.
De andere leerlingen kunnen in de tweede klas geplaatst worden.

Het tweede leerjaar. Op grond van de determinatieprestaties, wordt de leerling geplaatst in één van de twee niveaus voor de wiskunde. In het eerste niveau komen de leerlingen met de A-beoordeling en met de B-beoordeling met een voldoend aantal determinatiepunten. De overige leerlingen komen in het tweede wiskunde niveau.

Het is beslist niet de bedoeling dat de eerste niveauleerling een toekomstig havo- of vwo-kandidaat is en die tweede niveauleerling een toekomstig mavo-havo-kandidaat, want in de tweede klas is nog van alles mogelijk.
De tweede niveauleerling werkt weer met minimale stof voor mavo met een determinatiedeel van havo-vwo op dezelfde wijze als in de eerste klas. De eerste niveauleerling werkt direct met moeilijker stof; er is dus geen determinatieboek meer. Nu lopen beide methoden geheel parallel, zodat we voor beide niveaus ook dezelfde gemeenschappelijke proefwerken geven, natuurlijk ook weer met determinatievragen. Iedere leerling krijgt, onafhankelijk van het niveau waarin hij zit, twee beoordelingen voor zijn werk, een geldig voor het eerste niveau en een geldig voor het tweede niveau. Mocht na enige tijd blijken dat een leerling ten onrechte in een bepaald niveau geplaatst is, dan kan hij op ieder gewenst moment in het andere niveau plaats nemen.
Hoewel wij, als wiskundedocenten, dit jaar per niveau lesgeven onderzoeken wij nu de mogelijkheid om volgend jaar in een volledig heterogene tweede klas, dus met beide niveaus in één groep te gaan werken. Dit lijkt ons de aangewezen weg voor de toekomst.

Tot slot wil ik u nog de door ons gebruikte methode noemen: Het zijn de werkboeken der wiskunde 'Van A tot Z' geschreven wat betreft de mavo-delen door Drs Chr. Boermeester, B. Burger, Dr P. M. van Hiele en wat betreft de havo-vwo-delen door Dr P. M. van Hiele, Ir K. Kok en ondergetekende.

Ten behoeve van de discussiegroepen gaf de heer Schuring de volgende vragen.

1 Wat denkt u van een brugperiode van twee jaar?

2 Wat is uw mening over het wiskundeonderwijs in heterogene- of homogene groepen in de brugperiode?

3 Hoe differentieert u de leerlingen van de verschillende opleidingen, t.w. mavo-havo-vwo?

4 Voelt u het als een nadeel dat de individuele docent beknot wordt in zijn vrijheid doordat hij steeds meer moet samenwerken met collega's?

5 Wat is uw mening over de tegenstelling doceren-vrijwerken?

Uit de discussies

Tijdens de weekendconferentie van de Wiskunde Werkgroep werd in groepen gediscussieerd, meest over de door de inleiders opgestelde vragen.[1] Het spreekt vanzelf dat dikwijls de gesprekken een andere kant opgingen, dan de inleiders hadden bedoeld.
Een goed lopend verslag van de discussies is niet gemakkelijk te geven. We verzamelden een aantal hoofdpunten en brachten die in rubrieken bijeen.

1 mavo

moderne stof zal op den duur op de mavo-scholen wel beter tot zijn recht komen dan nu

een van de moeilijkheden is, dat de leraren de einddoelen nog niet zien

daar zal wel verbetering in komen als ze de toelichting op het leerplan bestuderen en de examenopgaven zien, die zijn opgesteld door een commissie van de drie pedagogische centra

in '65 werd al begonnen met de heroriënteringscursussen voor mavoleraren

ja, maar ze waren teveel op de stof en te weinig op de didaktiek gericht

nu ik beter op de hoogte ben van de moderne stof, doen mijn leerlingen het ook beter

ik moet zeggen, dat de mavoleerlingen mij bijzonder meegevallen zijn

de moeilijkheid voor veel mavoleraren is, dat ze niet alleen wiskunde, maar ook verschillende andere vakken geven, waarvoor ze herscholingscursussen moeten volgen

we zullen in het mavo ook naar het vakleraarschap moeten streven

de leraren vragen dikwijls om een uitvoerige toelichting op de boeken die ze gebruiken

is het wel juist dat ze zo afhankelijk zijn van toelichtingen?

voor alle leraren zal een voortdurende bij- en herscholing nodig blijven

misschien wel in de vorm van een 'sabbathical year'

leidt dat niet tot staatsdidaktiek?

daar moeten we niet zo bang voor zijn

---

[1]) De inleidingen vindt men op pag. 201, 207 en 212 e.v.

2 leerplan

laten we niet vergeten dat het leerplan voor de rijksscholen vrijblijvend is

ik vind dat het te haastig is ingevoerd, allerlei experimenten waren nog gaande toen er al leerboeken moesten verschijnen

vergelijk dat eens met de ontwikkeling van het WISKOBAS-projekt; wordt dat niet beter voorbereid in een soort tienjarenplan?

de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde is vroeg genoeg begonnen, maar nu zien we dat we allerlei dingen anders hadden moeten doen

de leraren moeten niet vergeten dat het leerplan hen niet van boven af wordt opgelegd, ze kunnen er zelf heel veel aan doen

ze zouden bijvoorbeeld discussiegroepen kunnen vormen, waarin ze onderdelen van het leerplan bespreken, niet alleen wat de stof betreft, maar ook wat de didaktiek daarvan aangaat

het leerplan is slechter dan het zou kunnen zijn, inbreng van anderen dan de commissies, die het opgesteld hebben, is hoogst noodzakelijk

je zou het ook anders moeten opstellen, bijvoorbeeld door het formuleren van einddoelen in een operationele vorm (zie het artikel hierover op blz. 221 in dit nummer van Euclides)

na enkele jaren zal het voorlopige leerplan door een ander vervangen moeten worden; o.a. door de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in de basisschool

er zal een 'curriculumplanning' moeten komen van de kleuterschool tot het universitaire onderwijs

er zijn onderwerpen, waarvan we ons nu afvragen of ze in de eerste of tweede klas van het voortgezet onderwijs thuishoren en die over enkele jaren in de basisschool behandeld zullen worden

3 tempo

tempoverschillen in het brugjaar zouden niet mogen voorkomen

leerlingen die meer en vlugger kunnen dan anderen moet dan materiaal aangeboden worden waardoor ze dezelfde stof meer verdiept doorwerken

het is ook mogelijk de betere leerlingen in te schakelen bij het helpen van de zwakkeren; dit kan in het bijzonder gebeuren in discussiegroepen

snelle leerlingen zijn dikwijls goede leerlingen, maar langzamere zijn niet altijd de slechtere

moet niet de mogelijkheid geschapen worden voor de beste leerlingen om in een zo snel tempo de school te doorlopen, dat ze in drie in plaats van in vijf of zes jaar klaar zijn?

iemand die snel is in wiskunde, kan wel langzaam zijn in andere vakken

waarom wil je die leerlingen zo snel klaar hebben?
als ze erg jong eindexamen doen zijn ze meestal nog niet rijp voor de maatschappij of voor universitaire studie

leerlingen zouden examen moeten kunnen doen op verschillende niveaus

4 boek

acht men het mogelijk dat alle leerlingen hetzelfde boek gebruiken?

ja, indien het boek voldoende gelegenheid geeft tot differentiatie

het zou voor alle leerlingen in de eenvoudigst mogelijke taal geschreven moeten zijn

de betere leerlingen moeten de mogelijkheid hebben gemakkelijke gedeelten over te slaan, verder moeten ze de gelegenheid krijgen sommige onderdelen exacter te behandelen

denken we niet te veel aan het traditionele leerboek?
moet dat niet vervangen worden door bijvoorbeeld een leerstofpakket verwerkt in kaarten?

het vervaardigen van een dergelijk pakket kost ontzettend veel tijd en werk; er zou een groot team aan moeten werken

in Lyon heeft een équipe van 39 man een dergelijk pakket kaarten vervaardigd (ze werken samen onder de naam E. Galion)

5 samenwerking

samenwerking tussen leraren blijkt in scholengemeenschappen het best te slagen

leraren zouden het moeten aandurven in elkaars lessen te komen en dan de lessen in een nabespreking te kritiseren

maar niemand kan eigenlijk zeggen waarom een bepaalde les bij hem wel lukt en bij een ander niet

samenwerking tussen leerlingen moet gestimuleerd worden

we moeten proberen los te komen van het traditionele klassikale onderwijs en dat vervangen door groepswerk, waar dat maar mogelijk is

6 homogeen of heterogeen

is het mogelijk met heterogene brugklassen te werken?
ja, als de betere leerlingen maar aan hun trekken komen

je moet niet vergeten dat klassen homogeen of heterogeen kunnen zijn ten opzichte van andere aspecten dan alleen de intelligentie; ze zouden bijvoorbeeld homogeen kunnen zijn ten opzichte van de motivatie

als in één klas op twee verschillende niveaus gewerkt kan worden, dan is het belangrijk dat de leerlingen voortdurend van het ene niveau naar het andere kunnen 'switchen'

proefwerken moeten dan ook op twee niveaus gemaakt kunnen worden

als je de goede leerlingen van de zwakke afzondert, wat gebeurt er dan met de zwakkere?

als je ze bij mekaar laat trekken de betere de zwakkere op

een te vroegtijdige 'setting' werkt bij de leerlingen van het lagere niveau gemakzucht in de hand: wij behoren tot de zwakkeren en hoeven ons dus niet zo in te spannen

is het dan wel juist een éénjarige brugperiode te handhaven?

eigenlijk weten we nog te weinig van de invloeden van een één- of meerjarige brugperiode; research op dit terrein is hoogst noodzakelijk

denken we bij deze vragen nog niet teveel in de traditionele opbouw van de school?

moeten we niet bijvoorbeeld denken aan bevordering per vak?

we zullen onze scholen moeten aanpassen aan de veranderde omstandigheden en bijvoorbeeld ook aandacht moeten geven aan de tegenstelling: doceren-vrijwerken

Doelstellingen

G. KROOSHOF
Groningen

In de Engelse didaktische literatuur wordt verschil gemaakt tussen 'goals' en 'objectives'.
Het tweede hoofdstuk van het uitstekende boek *Guidelines for Teaching Mathematics*[1] heet dan ook: The goals and objectives of mathematics education.
Het woordenboek geeft voor *goal* o.a. *bestemming* en voor *objective* o.a. (*operatie*) *doel.*
Geen van beide vinden we in onze leerplannen rechtstreeks terug. In het genoemde hoofdstuk worden een aantal 'goals' genoemd die inderdaad te maken hebben met de bestemming van de leerlingen. We lezen bijvoorbeeld:

Bij het vaststellen van de doelen voor het wiskundeonderwijs moeten we niet alleen rekening houden met de eisen van de maatschappij, maar ook met de wiskundige behoeften van de leerlingen. Bijna iedere commissie die gewerkt heeft aan de herziening van de wiskundeleerplannen heeft een aantal van deze fundamentele wiskundige behoeften opgesomd. Hier volgt een lijst met voorbeelden:
1 De leerling dient te weten hoe wiskunde bijdraagt tot het begrijpen van natuurverschijnselen.
2 Hij dient te begrijpen hoe hij wiskundige methoden kan gebruiken bij het onderzoeken en verklaren van en het nemen van beslissingen in maatschappelijke situaties.
3 Hij dient te begrijpen hoe de wiskunde als een kunst en een kunde bijdraagt tot onze culturele erfenis.
4 Hij dient zich klaar te maken voor een beroep, waarin hij wiskunde gebruikt als producent of consument van produkten, diensten of schone kunsten.
5 Hij dient te leren hoe hij wiskundige begrippen correct en begrijpelijk met anderen kan bespreken. Overleg en gesprek zijn in alle beschavingen fundamentele hulpmiddelen.

Het spreekt vanzelf dat overwegingen als deze bij het opstellen van een leerplan een rol spelen, maar dat ze er niet expliciet in terug te vinden zijn. Ze vormen de

[1]) Donovan A. Johnson, Gerald R. Rising, Guidelines for Teaching Mathematics, Wadsworth Publ. Comp. Inc., Delmont, California.

achtergrond van het onderwijs, van de communicatie tussen leraar en leerling en tussen de leerlingen onderling.
We vinden er iets van in de toelichtingen die op de rijksleerplannen verschenen zijn. De leerplannen zelf geven een dorre opsomming van onderwerpen:

Eerste leerjaar:

Verzamelingen

De verzameling van de natuurlijke getallen; de verzameling van de gehele getallen; de verzameling van de rationale getallen; getallenlijn, ordening.
In elk van de genoemde verzamelingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen met gehele positieve exponenten; lineaire vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
Enz.

Een opsomming als deze geeft zo weinig houvast dat menig leraar zijn zekerheid zoekt door zich krampachtig te houden aan de inhoud van een leerboek, dat naar aanleiding van het leerplan is geschreven. Alsof de auteurs van leerboeken zo deskundig waren, dat zij de weg kunnen wijzen. De vrijheid die dit leerplan in zekere zin aan de docent geeft, verkeert dikwijls in onzekerheid, die doet roepen om meer toelichting. Menig leraar beseft nog te weinig dat het wiskundeonderwijs niet een zaak moet zijn van officiële voorschriften en richtlijnen, maar dat deze richtlijnen van onderaf moeten komen uit discussies en experimenten. Nog veel te weinig gaan leraren van één school (scholengemeenschap) of één gemeente bij elkaar zitten om in onderling overleg een interpretatie van het leerplan op te stellen.
De gecoördineerde proefwerken, die de laatste tijd worden gegeven, verschaffen een goede gelegenheid om deze interpretatie van het leerplan te doordenken. Wie een goed proefwerk wil geven moet zich bij elke opgave afvragen welk doel de leerling bereikt moet hebben om deze opgave te kunnen maken. Beter gezegd: men moet het eerst eens zijn over de doelen die de leerlingen moeten bereiken eer men proefwerkopgaven kan opstellen.
Wanneer men deze doelen zo duidelijk mogelijk kan vaststellen dan betekent dat:

a dat de leerlingen weten waar ze naartoe werken,
b dat de beoordelingsnorm van het proefwerk gemakkelijker is vast te stellen.

Het duidelijk vaststellen van de doelen betekent vooral, dat de leerling eruit afleest wat hij moet kunnen *doen*. De doelstellingen moeten gegeven worden in een *operationele vorm*. In deze zin spreekt het boek van Johnson en Rising over objectives. Enkele voorbeelden:

1 de leerling herkent figuren aan hun eigenschappen: *Welke van de volgende figuren is een rechthoek?*
2 hij kan met name genoemde figuren tekenen: *teken een ruit*

3 hij kan het verschil opschrijven tussen met name genoemde figuren: *wat is het verschil tussen een vierkant en een willekeurige rechthoek?*
4 hij kan de oppervlakte van een rechthoek berekenen: *hoe groot is de oppervlakte van een rechthoek, waarvan de lengte 5 en de breedte 3 is?*
5 hij kan de oppervlakte van een gegeven parallellogram afleiden uit die van een even grote rechthoek: *teken een rechthoek waarvan de oppervlakte even groot is als die van het gegeven parallellogram ABCD.*
6 hij kan met behulp van de distributieve eigenschap het produkt van twee tweetermen berekenen: *bereken* $(a+2)(a+3)$
7 hij kan door raden of proberen een eenvoudige eerstegraadsvergelijking oplossen: *schrijf de oplossingsverzameling op van de vergelijking* $2x+7 = 13$ $(x \in \mathbf{N})$

De genoemde voorbeelden hebben alle betrekking op eenvoudige problemen uit de wiskunde van de brugklas. De redactie nodigt de lezers uit voorbeelden te zenden van doelen in operationele vorm uit verschillende delen van de wiskunde. Ook proefwerken, opgesteld naar aanleiding van zulke doelen, zullen we graag publiceren.

Het eindexamenprogramma wiskunde I van het v.w.o.

In het 'Voorstel programma eindexamen v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.' staat onder wiskunde I vermeld:
Een nog nader vast te stellen toepassing van de wiskunde. Door de Programmacommissie is in overeenstemming met de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde de Staatssecretaris geadviseerd deze toepassing te doen zijn:
Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en tot de mathematische statistiek.
Een toelichting op de programma's wiskunde bovenbouw h.a.v.o. en wiskunde I en II bovenbouw v.w.o. is in voorbereiding. Daarin zal ook een toelichting op het onderwerp waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek opgenomen worden. Om de leraren zo snel mogelijk inzicht te verschaffen in strekking en omvang van dit nieuwe onderwerp zal de toelichting erop, zodra deze gereed is, in Euclides afgedrukt worden.

De determinerende en vormende functie van de wiskunde in de brugklas

C. VAN SCHAGEN

Amersfoort

Teneinde de bedoeling van dit artikel duidelijk te laten blijken is het nodig eerst een redelijk stuk van de achtergrond te tonen. Zo zal als doel van alle onderwijs wel zo ongeveer gelden moeten: het zo efficiënt mogelijk aan iedereen verschaffen van passend onderwijs overeenkomstig de individuele aanleg, waarbij onder onderwijs wordt verstaan de systematische activiteit gericht op de ontwikkeling van de persoonlijkheid, en men als aanleg beschouwt de toestand op ongeveer vierjarige leeftijd, d.w.z. de leeftijd waarop voor de meesten het onderwijs begint. Dit komt in wezen hierop neer, dat het maximale niveau waarop het algemeen voortgezet en voorbereidend wetenschappelijke onderwijs kan worden afgesloten in principe op dat moment al grotendeels vaststaat. Het hangt van de efficiëntie van het onderwijs af, of dit maximum ook werkelijk wordt bereikt. Van meet af aan dient het onderwijs dan ook zowel determinerend als vormend te zijn. Dat wil zeggen: determinerend ten aanzien van hetgeen het onderwijs in elk individueel geval zal kunnen bereiken (het peilen van de aanleg) en vormend ten aanzien van hetgeen het onderwijs in elk individueel geval zal moeten doen (het verschaffen van het passende).

Dit is in het kort de hele probleemstelling, en zo te zien een schijnbaar onoplosbaar probleem: het zich voortbewegen door een onbekend gebied vanuit een onbekend uitgangspunt naar een onbekend eindpunt toe.
Het wordt nog ingewikkelder. Het proces, dat in de kleuterschool begint en in een of andere beroepsopleiding uitmondt, is niet continu. Globaal gezien is de hele periode leertheoretisch in vier episoden te verdelen, met wisselpunten in het zevende, elfde, vijftiende levensjaar. In elke periode heeft de leerling een instelling ten aanzien van de leersituaties, die karakteristiek voor die episode is. Als gevolg daarvan dient het kleuteronderwijs, basisonderwijs, middelbaar-onderbouwonderwijs en middelbaar-bovenbouw-onderwijs verschillend te zijn gericht. En dit ook weer in tweeërlei opzicht. Ten eerste met het oog op de karakteristieke instelling in de episode zelf, maar ten tweede met het oog op de te bereiken instelling van de volgende episode. Dit laatste is zeer belangrijk, omdat

fouten hierin de voornaamste oorzaken zijn van het op een lager niveau terecht komen, dan overeenkomstig de aanleg mogelijk zou zijn.
Dit zijn een paar zeer algemeen gestelde gezichtspunten, die echter bij goed overdenken voldoende uitgangspunten bevatten om tot de conclusie te komen, dat de oplossing van het doubleervrije onderwijs, waar we zeker naar toe moeten, minder gezocht moet worden in termen van organisatie, maar meer in termen van het psychologisch-didactische.
Om een idee te geven in welke richting gezocht moet worden volgt hier een voorbeeld uit het leertheoretisch onderzoek met dieren.
Men heeft gevonden, dat slechts een deel van de volwassen zang van de boekvink instinctief bepaald is. Typische motiefjes zijn kennelijk aangeleerd, wat na te gaan is door de jonge vogels op verschillende leeftijden uit hun milieu weg te halen. Nu is gebleken, dat de aangeleerde verrijking van de zang niet door nazingen geschiedt, want de verrijking komt ook al voor bij jongen die uit hun milieu gehaald zijn ver voordat ze zelf zijn begonnen met zingen. Dit is natuurlijk maar een specifiek geval maar het is zeer onwaarschijnlijk, dat bij het zoveel ingewikkelder menselijk leren dergelijke effecten niet zouden optreden.
In verband met bovenstaande achtergrond vestigen we onze aandacht speciaal op het wiskundeonderwijs in de brugklas. Wat leeftijd betreft is dit eigenlijk een jaar te laat om met de wiskunde te beginnen, althans met die wijze van wiskunde, die voor deze episode passend is. Het wiskunde-onderwijs moet eigenlijk al op de kleuterschool beginnen. b.v. op de manier zoals door prof. dr. Z. P. Dienes is aangegeven, want dat zal het mogelijk maken later het niveau aanmerkelijk te verhogen, maar van het elfde jaar af dient dusdanig materiaal te worden aangeboden, dat zoveel mogelijk leerlingen het niveau halen dat met hun aanleg overeenkomt. Op welke wijze dat dient te geschieden vereist nog veel onderzoek. Ten eerste moet onderzocht worden wat de karakteristieke ideale bekwaamheden zijn, die leerlingen in de bovenbouw in staat stellen tamelijk complexe theorieën te begrijpen en tamelijk complexe problemen op te lossen. Ten tweede moet onderzocht worden welke de in het basisonderwijs verkregen bekwaamheden zijn, die het mogelijk maken dat eerst genoemde bekwaamheden zich kunnen ontwikkelen. Ten derde moet onderzocht worden welke situaties in de brugklas aangeboden moeten worden, zodat de gewenste ontwikkeling inderdaad plaats vindt. Op grond van de opmerking aan het eind van de inleiding, komt men bedrogen uit, als men alleen maar onderzoekt welk onderwijs in de brugklas zelf tot de beste resultaten leidt. Overigens gaat dit uitstekend, en dat is juist zo verraderlijk. Het is namelijk zeer goed mogelijk, de praktijk heeft het bewezen, de leerstof zodanig te presenteren, dat het met de instelling, die hoort bij de leeftijd van zeven tot elf jaar, beheerst kan worden. Het is zelfs mogelijk met deze methode leerlingen door een v.w.o. eindexamen te krijgen, maar het gaat dan wel gepaard met een enorme overbelasting, hoofdoorzaak van het vele zitten blijven. Men kan dan wel, opstaande tegen het zittenblijven, die overbelasting bestrijden met organisatorische middelen,

maar op grond van bovenstaande overwegingen moet meer succes verwacht worden van psychologisch-didactische vernieuwingen. Hierbij is het niet nodig de beslissing ten aanzien van de keuze: mavo-havo-vwo, aan het eind van de brugklas te laten vallen, integendeel, deze zou beter op vijftienjarige leeftijd kunnen geschieden, maar dan dient het onderwijs in de onderbouwperiode erop gericht te zijn voor alle leerlingen het bereiken van hun maximale niveau mogelijk te maken, d.w.z. het onderwijs in deze periode moet een voortdurende determinerende en vormende functie hebben.

Vervolgens hier drie voorbeelden van karakteristieke bekwaamheden, die zo vroeg mogelijk in allerlei mogelijke situaties kunnen worden voorbereid. Het eerste voorbeeld wordt geformuleerd in de taal van de verzamelingen en functies, maar het toepassingsgebied is veel ruimer.

$$F \equiv G \Rightarrow F(H(x)) = G(H(x)) \quad \text{en} \quad F \equiv G \Rightarrow H(F(x)) = H(G(x))$$

Dit zijn voor een wiskundige natuurlijk oerevidenties, logische axioma's zo men wil, maar voor brugklasleerlingen zijn het onbegrijpelijkheden. Erger zelfs, het is niet uit te leggen. Dit moet aan de hand van concrete situaties, steeds maar weer, gedemonstreerd worden, totdat het 'aha' eindelijk doorbreekt.

Het tweede voorbeeld betreft de mogelijkheid met het kenmerk te opereren in plaats van met het object zelf. Ook dit is niet uit te leggen. De taal waarin dit te formuleren is, is al van een te hoog niveau. Elke situatie waaraan dit te demonstreren is, moet met dit doel aangegrepen worden. B.v. moet men niet eerder met de regels voor het werken met wortels aankomen, voordat $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ aan de hand van talloze voorbeelden duidelijk is geworden.

Het derde voorbeeld betreft de overtuigingskracht van een redenering. Indien moet worden aangetoond, dat alle elementen van een verzameling een bepaalde eigenschap hebben, dan laten we zien, dat één element van die verzameling de eigenschap heeft, en bovendien, dat bij die redenering geen gebruik gemaakt wordt van eigenschappen van dat ene element, die niet voor alle elementen van die verzameling gelden. Er zou geen redenering gedemonstreerd mogen worden zonder dat hier de aandacht op wordt gevestigd.

Tenslotte een verzoek. Het komt nogal eens voor, dat in de leraarskamer klachten geuit worden ten aanzien van tekortkomingen van leerlingen uit de hoogste klassen. B.v. in de trant van: De behandelde vraagstukken leren ze braaf, maar inventiviteit bij nieuwe typen zie je tegenwoordig niet meer. De schrijver van dit artikel zou graag een verzameling van dergelijke uitspraken aanleggen, en speciaal die, waarvoor men geen verklaring heeft. Ze behoeven niet alleen de wiskunde te betreffen.

In een volgend artikel hoop ik nader in te gaan op de mogelijkheden van het door mij genoemde onderzoek.

Studietoetsen wiskunde voor de brugklas

J. TIMMER

Amsterdam

Wat is een studietoets?

Prof. Dr. A. D. de Groot omschrijft een studietoets als volgt:

> Ieder proefwerk, tentamen, ieder hulpmiddel voor schriftelijke toetsing van door onderwijs en studie verworven kennis, inzicht of vaardigheid op een of ander vakgebied, mits de bepaling van de score, die een (proef) persoon behaald heeft, geheel objectief kan geschieden, is een studietoets.*

'De score' is het totale aantal punten dat de (proef)persoon of leerling behaald heeft.
'Objectief' betekent dat na beantwoording van de vragen door de leerling zijn score zonder tussenkomst van vak-deskundige beoordelaars – die het oneens kunnen zijn – kan worden vastgesteld. Deze objectiviteit wordt meestal bereikt door de studietoets uit vier-keuze vragen te laten bestaan. Dit zijn vragen waarbij vier antwoordmogelijkheden zijn gegeven. De leerling moet hieruit het juiste antwoord kiezen. Een voorbeeld van een dergelijke vier-keuze vraag is de volgende:

Gegeven zijn de getallen $0, \frac{1}{4}, -1, -8$
Welk getal is het kleinste?

A. 0
B. $\frac{1}{4}$
C. -1
D. -8

Keuzemogelijkheid D. geeft hier het juiste antwoord.

---

* A. D. de Groot en R. F. van Naerssen: studietoetsen; Mouton Den Haag 1969. In dit boek geeft hoofdstuk 1 informatie over een vergelijking tussen vier-keuze vragen en de gebruikelijke vorm van vragen; de hoofdstukken 2 en 3 geven een toelichting op de definitie en op het nut en gebruik van studietoetsen; hoofdstuk 10 geeft enkele aanwijzingen voor het schrijven van vier-keuzevragen voor de wiskunde.

Het nut van studietoetsen

Studietoetsen hebben vergeleken met de gangbare proefwerken de volgende voordelen * voor **gebruik in de klas**:

De correctie is uiterst eenvoudig en *de scores kunnen snel worden bepaald.* Bij de correctie is geen leraar meer nodig, die in twijfelgevallen beslist tussen goed of fout. Om deze reden is het mogelijk de leerlingen eventueel aan het einde van het lesuur zelf hun werk te laten nakijken, waardoor een onmiddellijke '*feed back*' tot stand komt.

Doordat de studietoetsen veel kleine vragen bevatten is *de representativiteit t.o.v. de leerstof groter.*

Nauw samenhangend met het vorige punt is het feit dat de '*meetbetrouwbaarheid*' hoger is. Dit betekent o.a. dat allerlei faktoren zoals 'pech en geluk' bij studietoetsen een minder grote invloed hebben op de behaalde score. Men kan *meer op de scores vertrouwen.*

Studietoetsen lenen zich zeer goed voor allerlei eenvoudige vormen van statistische analyse (bijvoorbeeld het bepalen van de moeilijkheidsgraad van de vragen).
Bij toetsen die uit vier-keuze vragen bestaan, is het mogelijk zeer snel een *systematische foutenanalyse* uit te voeren.

Bij toepassing op grote schaal, kan alles gemakkelijker worden geautomatiseerd. Dit maakt het mogelijk de toetsen te ijken (d.w.z. af te nemen op een grote steekproef van scholen). Via deze ijking wordt het *voor iedere docent mogelijk de resultaten in zijn klas te vergelijken met landelijke resultaten.*

Voor **gebruik als examen** hebben studietoetsen bovendien nog andere belangrijke voordelen. Ook zijn studietoetsen belangrijke hulpmiddelen ten dienste van de **onderwijsresearch.****

Het gebruik van studietoetsen in de klas.

Studietoetsen zijn zeer geschikt voor het meten van leerprestaties. Wat dit betreft kan worden nagegaan in hoeverre de *basisdoelstellingen* van het gegeven onderwijs bereikt zijn. Studietoetsen zijn een belangrijk controle- en hulpmiddel bij het leerproces. Via de toetsen wordt informatie verkregen over dat deel van de leerstof dat wel beheerst wordt, en dat wat niet beheerst wordt. *Studietoetsen dienen voor de evaluatie van onderwijsresultaten, met als einddoel het onderwijs te verbeteren en bij te sturen.* Daarbij kan men denken aan:

---

* Volledigheidshalve dient vermeld te worden dat studietoetsen met vier-keuze vragen ook bepaalde nadelen hebben, zodat het gewenst is dat beide vormen naast elkaar in de klas gebruikt worden.

** A. D. de Groot en R. F. van Naerssen: studietoetsen; Mouton Den Haag 1969.

de individuele leerling (waar liggen zijn zwakke punten?)
de gehele klas (hoe is mijn onderwijs aangekomen?)
de gehele school (hoe is het niveau van ons onderwijs in vergelijking met dat op andere scholen en in vergelijking met het landelijke niveau?).

Verzamelingen vier-keuze vragen

Het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie aan de Universiteit van Amsterdam (R.I.T.P.) is op het ogenblik bezig met het projekt: ontwikkeling van studietoetsen voor de wiskunde.
Dit projekt wordt uitgevoerd met subsidie van de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs in den Haag (S.V.O.) De supervisie van dit projekt is in handen van Prof. Dr. A. D. de Groot.
Het doel van dit projekt is de constructie van studietoetsen voor de wiskunde voor te bereiden. Hiertoe worden door het R.I.T.P. verzamelingen vier-keuze vragen samengesteld. Het is de bedoeling deze verzamelingen te publiceren en aan het onderwijs ter beschikking te stellen. Op deze wijze kan elke docent met behulp van deze verzamelingen, afhankelijk van de stof die hij behandeld heeft, zijn eigen studietoetsen samenstellen. Daarnaast zal er naar gestreefd worden, zoveel mogelijk te komen tot de constructie van geijkte (op een landelijke steekproef afgenomen) studietoetsen.
Diverse werkgroepen wiskundeleraren hebben zich met de constructie van de vier-keuze vragen bezig gehouden. Zoveel mogelijk zijn de vragen samengesteld volgens de richtlijnen, die de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde voor het nieuwe wiskundeprogramma gegeven heeft. De verzamelingen zijn bedoeld voor de onderbouw van het Algemeen Voortgezet Onderwijs.

Studietoetsen wiskunde voor de brugklas

Omdat het nodig is de gemaakte vier-keuze vragen zoveel mogelijk in de praktijk te proberen, zijn in februari 1969 uit de reeds samengestelde verzamelingen die vragen gehaald, die in de brugklas gebruikt kunnen worden. In mei 1969 zijn deze vragen in de brugklassen van 53 scholen beproefd.* In november 1969 hebben drie verschillende commissies uit de verzameling bruikbare vragen de volgende studietoetsen samengesteld:

1 Een studietoets behorende bij de methode 'Moderne Wiskunde'
2 Een studietoets behorende bij de methode 'Van A tot Z'
3 Een algemene studietoets bestemd voor gebruikers van andere methodes dan de bovengenoemden.

De commissieleden waren de schrijvers van de diverse methodes. De studietoetsen zijn bedoeld voor het einde van het brugjaar. Zij zijn voor wiskundeleraren en scholen vanaf mei 1970 verkrijgbaar.** De toetsen worden aange-

* R.I.T.P.-rapport: Het testen van een verzameling vier-keuze vragen voor de wiskunde.
** Deze studietoetsen worden uitgegeven door Wolters-Noordhoff en J. Muusses.

boden op coöperatieve basis. In tegenstelling tot de 'geheime toetsen' (bijvoorbeeld examens) betekent dit dat de verantwoordelijkheid voor de geheimhouding van de opgaven tegenover de leerlingen in handen is van de toetsconstructeurs en de wiskunde-docenten van de scholen gezamenlijk. Wanneer de school de toetsboekjes direct na gebruik in de klassen weer ophaalt en opbergt, zijn de toetsen meerdere jaren achter elkaar te gebruiken. In verband met de steeds verdergaande modernisering van het wiskundeonderwijs wordt verwacht dat de toetsen drie tot vijf jaar bruikbaar zullen zijn. Deze studietoetsen zullen in mei 1970 definitief worden geijkt (worden afgenomen in de brugklassen van een omvangrijke steekproef van scholen).

In aanvulling op dat wat hierboven gezegd is over het gebruik van studietoetsen in de klas in het algemeen, dient over deze brugklastoetsen in het bijzonder nog het volgende vermeld te worden:

Via de ijkingsgegevens kan elke docent de resultaten in zijn klas telkens vergelijken met de landelijke resultaten van mei 1970.

Ook kan de docent de resultaten in zijn brugklas vergelijken met de resultaten in andere brugklassen en met de resultaten van brugklassen die hij in vorige jaren les heeft tegeven.

Omdat van elke toets twee verschillende versies A en B uitkomen met verschillende opgaven die betrekking hebben op dezelfde vaardigheden, is het mogelijk via de A-toets te constateren waar eventuele onderwijsdefecten liggen. Nadat bepaalde onderdelen van de stof nog eens opnieuw behandeld en uitgelegd zijn, is het mogelijk bijvoorbeeld 3 weken later met behulp van de B-toets na te gaan of alles nu wel begrepen is.

Evaluatie van het wiskundeonderwijs in de brugklas.

Een belangrijk onderdeel bij de evaluatie van het wiskundeonderwijs in de brugklas is het meten van leerprestaties. Deze metingen kunnen worden uitgevoerd met behulp van studietoetsen en verzamelingen vier-keuze vragen. Bij de in mei uit te voeren ijking van studietoetsen en verzamelingen vier-keuze vragen wordt dus tegelijkertijd een grote bijdrage geleverd tot de evaluatie van het wiskundeonderwijs in de brugklassen. Naast de vierkeuze vragen is het R.I.T.P. van plan op beperkte schaal gebruik te maken van vragenlijsten voor de leerlingen en enquêtes onder de docenten. Bij de opzet van het experiment wordt een drie-deling ingevoerd naar *gebruikte methode*. Hetzelfde wordt ook gedaan met het *type brugklas*. De brugklassen worden verdeeld in MAVO, HAVO- of VWO-brugklassen en ongesplitste brugklassen. In de ongesplitste brugklassen zitten toekomstige MAVO-, HAVO- en VWO-leerlingen ook aan het eind van het brugjaar door elkaar in een klas. Op deze wijze ontstaat een verdeling in 9 cellen, zoals die in de volgende figuur is weergegeven.

	MAVO	HAVO/VWO	ONGESPLITST
'Schotse Methode'			
'A tot Z'			
'Andere methodes'			

De te trekken steekproef van scholen zal op deze wijze worden geklassificeerd. Om zoveel mogelijk vier-keuze vragen te kunnen ijken krijgt iedere leerling uit een klas in principe een andere versie met andere opgaven. De docenten in de klassen zal gevraagd worden de diverse opgavenboekjes aselect (op de rij af) in de klas uit te delen. De opgavenboekjes zullen in twee groepen uiteenvallen. De eerste groep bevat methode-gebonden vier-keuze vragen (hieronder vallen ook de te ijken studietoetsen) en de tweede groep bevat vier-keuze vragen die voor iedere cel hetzelfde zijn (het centrale deel van de vier-keuze vragen). Via de eerste groep is het de bedoeling na te gaan in hoeverre de doelstellingen van het brugklasonderwijs bereikt zijn. Via het centrale deel zullen hypotheses omtrent verschillen in de diverse cellen getoetst worden. Er zal naar worden gestreefd nog voor het einde van 1970 de resultaten van het experiment aan het onderwijs te rapporteren.

Het projekt Ontwikkeling van studietoetsen voor de wiskunde.

Alle hierboven beschreven werkzaamheden voor de brugklas vinden plaats in het kader van het projekt ontwikkeling van studietoetsen voor de wiskunde.* Behalve toetsen en verzamelingen vier-keuze vragen voor de brugklas, worden in het kader van dit projekt ook toetsen en opgaven-verzamelingen voor de tweede en derde klassen voorbereid. In samenwerking met het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (C.I.T.O.) zullen vanaf mei 1970 verzamelingen vier-keuze vragen voor tweede en derde klassen gepubliceerd worden. In mei 1971 zullen deze vragen in de derde klassen van scholen voor het A.V.O. systematisch (op dezelfde wijze als in 1969 met de brugklasvragen is gebeurd) op hun bruikbaarheid worden beproefd. Analoog met de gevolgde brugklasprocedure zullen in mei 1972 geijkte toetsen en verzamelingen vier-keuze vragen worden gepubliceerd. Op dezelfde wijze als in mei 1970 voor de brugklas plaatsvindt, zal dan een bijdrage geleverd worden tot de evaluatie van het wiskundeonderwijs over de gehele onderbouw van het Algemeen Voortgezet Onderwijs.

* Nadere informatie omtrent dit projekt is te verkrijgen op het R.I.T.P. Herengracht 510 Amsterdam.

Korrel CLVII

$P \subset R$ of $R \subset P$?

Aangezien korrels klein zijn, durf ik het aan een niet al te omvangrijk probleem aan u voor te leggen. Het probleem deed zich voor op een cursus, waar ik het een en ander van verzamelingen had verteld. Volgens de regels der kunst waren de lege verzameling, deelverzamelingen, doorsneden en verenigingen aan de orde gekomen. De cursisten wisten al wat meer van wiskunde dan onze brugklasleerlingen, zodat ik zonder enige aarzeling over parallellogrammen, ruiten e.d. kon spreken en deze bijzondere vierhoeken in mijn voorbeelden kon betrekken.
Dat de verzameling ruiten een deelverzameling van die der parallellogrammen is, bleek tot mijn niet geringe verbazing bij een der cursisten op onoverkomelijke moeilijkheden te stuiten. Aanvankelijk dacht ik hem te kunnen overtuigen door nog eens met nadruk op de definitie van deelverzameling te wijzen, maar dat hielp niet. Ook toen ik hem een analoog geval (de verzameling vrouwen is een deelverzameling van de verzameling mensen) onder de aandacht bracht, was hij niet overtuigd. Wat doe je dan in zo'n geval? Na wat heen en weer gepraat, was ik al bijna van plan een schouderophalende beweging te maken en op beleefde wijze op te merken, dat mijn uitlegkunde blijkbaar onvoldoende was om het ontstane probleem tot volle tevredenheid op te lossen, toen ik eindelijk doorkreeg waar de moeilijkheid zat.
De cursist redeneerde als volgt: elke eigenschap, die een parallellogram bezit, tref ik ook in een ruit aan, dus is de verzameling der parallellogrammen een deelverzameling van de verzameling ruiten.
Bij nauwkeurige bestudering van hetgeen bovengenoemde cursist opmerkte, zal het u waarschijnlijk gelukken te ontdekken waar de gedachtenfout zit. Bekijkt u eens onderstaande vraagstukjes.

1 P is de verzameling der parallellogrammen, R is de verzameling der ruiten. Toon aan dat $R \subset P$.

2 P is de verzameling van de eigenschappen van parallellogrammen, R is de verzameling van de eigenschappen der ruiten. Toon aan dat $P \subset R$.

E. Buissant des Amorie

Amstelveen

Modellenbouw in de brugklas

J. H. G. VAESSENS
Maastricht

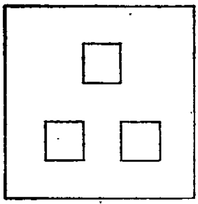
Kan men met brugklasleerlingen, door mathematisering van situaties, komen tot een operationeel model voor de groepsstructuur?
Het milieu waarin een experiment ter beantwoording van deze vraag kon worden opgezet vond ik bij de 'werkgroepen' die in de brugklasstudieuren gevormd worden. Het onderwerp werd doorgenomen met twee groepen brugklasleerlingen (telkens van ongeveer 15 jongens) die bestemd waren voor 2HAVO en 2VWO. De eerste groep volgde 10 lessen in de tweede (schooljaar-) periode, de tweede 12 lessen in de derde periode van ongeveer zes weken. Eis voor deelname was: niet geplaatst zijn in een 'bijwerkgroep' en geen onvoldoende voor wiskunde. De evaluatie van het experiment voerde tot de volgende conclusies:

De periode van zes weken is te lang om aller aandacht gericht te houden op permutaties van drie schaakstukken, de leerlingen vragen zich af of dit nu wel zoveel aandacht verdient. Het bezwaar kan opgevangen worden door huiswerkopgaven. Bij de eerste lessen bestaat het huiswerk uit een opdracht over eenvoudige combinatoriek, daarna worden 'schaduwvragen' opgegeven.
Bij de lessen moet worden vermeden voorbeelden te ontlenen aan rekentechnieken die gebaseerd zijn op de voort te brengen structuur.
Men dient voorzichtig om te springen met de verschillende begripsaanduidingen. Zo bleek het woord 'transformatie' voor 'verzameling van commandorijtjes met hetzelfde effect' het niet te doen! 'Associatief' en 'commutatief' zijn moeilijke woorden – wie vindt er andere voor? –, de door deze woorden aangeduide begrippen staan de leerlingen helder voor de geest.
Er was geen reden om de lessen af te sluiten met een definitie van 'groep'. Bij de eerste groep leerlingen heb ik dat wel gedaan: ofschoon de leerlingen telkens ijverig op zoek gingen naar groepskenmerken maakte de definitie weinig indruk.

Wanneer ik in de vraagstelling het accent leg op het woord 'operationeel', kan ik het experiment als geslaagd beschouwen; in mijn klas fungeert het onderwerp dit jaar als voorbereiding op Algebra en op Transformatiemeetkunde.

A Een situatie

We nemen drie schaakstukken ♚, ♜ en ♞ en gaan onderzoeken op hoeveel manieren deze stukken in drie velden:



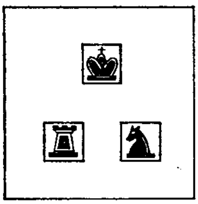
geplaatst kunnen worden.

Telkens wanneer de stukken in de velden zijn geplaatst vormen ze een *formatie*. Er zijn zes mogelijke formaties.
We gaan uit van een bepaalde formatie en geven het *commando* 'draai', dit betekent dat de drie stukken in de tegenklokrichting draaien en daarbij één plaats opschuiven. Als we een aantal malen achter elkaar draaien, kunnen dan alle formaties ontstaan?
We nemen er nu nog een commando bij: 'wissel', dit betekent dat de twee onderste stukken van plaats verwisselen en het bovenste blijft staan. We geven *commandorijtjes* tengevolge waarvan uit een zekere formatie telkens andere formaties ontstaan. Als we zeggen: ,'wissel draai, draai', kunnen we deze commando's stuk voor stuk achter elkaar uitvoeren, we kunnen misschien ook in één keer de uiteindelijke formatie in de velden zetten. Kunnen nu alle formaties ontstaan?

B Symbolen

Om de gedane waarnemingen te kunnen ordenen en de gerezen vragen te kunnen beantwoorden gaan we nauwkeurig opschrijven wat bij het uitvoeren van de commando's precies gebeurt, dit gaat gemakkelijk als we gebruik maken van een symbolentaal.

1 Een formatie, bijvoorbeeld:



wordt eenvoudiger genoteerd: $\begin{pmatrix} & K & \\ T & & P \end{pmatrix}$

2 Wanneer we op een formatie, bijv. $\begin{pmatrix} & K & \\ T & & P \end{pmatrix}$ het commando 'draai' willen toepassen schrijven we: $a \begin{pmatrix} & K & \\ T & & P \end{pmatrix}$,
de letter a betekent dan gewoon 'draai', zo is b de afkorting voor 'wissel'.

3 Als we willen aangeven dat de formatie $\begin{pmatrix} & K & \\ T & & P \end{pmatrix}$ door het commando 'wissel' overgaat in $\begin{pmatrix} & K & \\ P & & T \end{pmatrix}$ schrijven we op:

$$b\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{P} & & \mathrm{T}\end{pmatrix}.$$

4 Als we willen opschrijven dat we op een formatie, bijv. $\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix}$, eerst het commando 'draai' en vervolgens op de ontstane formatie het commando 'wissel' willen toepassen schrijven we:

$$b{*}a\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix}.$$

5 Blijkbaar is nu:

$$b{*}a\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{K} & & \mathrm{T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{K}\end{pmatrix} \text{ en}$$

$$a{*}b\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{P} & & \mathrm{T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{T} & \\ \mathrm{K} & & \mathrm{P}\end{pmatrix}.$$

C **Ordening van de waarnemingen**

1 $b{*}b\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{K} & & \mathrm{T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix}$, zo ook bijvoorbeeld:

$$b{*}b\begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{K}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{K}\end{pmatrix},$$

Het commandorijtje $b{*}b$ verandert de formaties niet. Een dergelijk commandorijtje, dat in de formaties geen verandering aanbrengt noemen we een *neutraal rijtje.*

$a{*}a{*}a$, $b{*}b$, $a{*}b{*}a{*}b$ (en nog andere) zijn neutrale rijtjes.

2 Sommige commandorijtjes hebben eenzelfde effect:

$$a{*}a{*}b\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = a{*}a\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{P} & & \mathrm{T}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} & \mathrm{T} & \\ \mathrm{K} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{K}\end{pmatrix},$$

$$b{*}a\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{K} & & \mathrm{T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \mathrm{P} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{K}\end{pmatrix}.$$

Hieruit blijkt dat de rijtjes $a{*}a{*}b$ en $b{*}a$ op $\begin{pmatrix} & \mathrm{K} & \\ \mathrm{T} & & \mathrm{P}\end{pmatrix}$ hetzelfde effect hebben, maar ook op alle andere formaties is dit het geval: je moet de stukken in de velden 'boven' en 'rechts beneden' verwisselen en het derde stuk laten staan. Als we nu voor '*heeft hetzelfde effect als*' *het symbool* $\sim$ gebruiken, dan kunnen we schrijven:

$\boxed{a{*}a{*}b \sim b{*}a}$, maar ook:
$b{*}a{*}a \sim a{*}b$ en
$a{*}a{*}a \sim b{*}b$, daarentegen:
$a{*}b \not\sim b{*}a$.

D Oplossing van de problemen

1 We lossen nu het vraagstuk van de “lange rijtjes-magie” op, we kunnen immers een lang commandorijtje wel eens vervangen door een korter met hetzelfde effect.

(Hier volgen vereenvoudigingsvraagstukken zoals:

	$a*a*b*a*a*a*b*b*a*a*b*a*b*a*a*a$
$a*a*a$ neutraal	$a*a*b*a*a*a*b*b*a*a*b*a*b$
$a*a*a$ neutraal	$a*a*b*b*b*a*a*b*a*b$
$b*b$ neutraal	$a*a*b*a*a*b*a*b$
$a*a*b \sim b*a$	$a*a*b*b*a*a*b$
$b*b$ neutraal	$a*a*a*a*b$
$a*a*a$ neutraal	$a*b$

Bij het vereenvoudigen van zo’n rijtje wordt het verband met de werking op formaties niet uit het oog verloren, al gauw ontwikkelt zich bij de leerlingen een schrapwet en toepassing van de associativiteit van $*$.)

2 Hoe komt het dat elk rijtje na vereenvoudiging hoogstens twee commando’s bevat?

2.1 Er zijn zes rijtjes, van twee of minder commando’s, met verschillend effect:

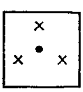
a, b, $a*a$, $a*b$, $b*a$, $b*b$.

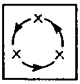
2.2 Elk rijtje van drie commando’s kan tot een van deze rijtjes vereenvoudigd worden:

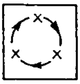
$a*a*a \sim b*b$	$b*a*a \sim a*b$
$a*a*b \sim b*a$	$b*a*b \sim a*a$
$a*b*a \sim b$	$b*b*a \sim a$
$a*b*b \sim a$	$b*b*b \sim b$

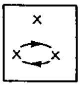
2.3 Bij een rijtje van meer dan drie commando’s verdelen we dat rijtje in stukjes van drie commando’s, elk stukje wordt vereenvoudigd en daarna beginnen we opnieuw – met het kortere rijtje –; het proces breekt af als het rijtje twee of minder commando’s bevat.

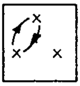
3 We kunnen alle commandorijtjes indelen in zes soorten: we vormen zes verzamelingen van rijtjes met eenzelfde effect.

θ  De verzameling θ van alle neutrale rijtjes; hiervan zijn bijv. $a*a*a$ en $b*b$ elementen.

A  De verzameling A van alle rijtjes met hetzelfde effect als het commando 'draai', enkele elementen van A zijn: a, $b*b*a$ en $a*a*a*a$.

$\bar{A}$  De verzameling $\bar{A}$ van alle rijtjes met hetzelfde effect als het commando 'draai, draai'; enkele elementen van $\bar{A}$ zijn: $a*a$ en $b*a*b$.

B  De verzameling B van alle rijtjes met het effect van 'wissel'; hiertoe behoren o.a. b en $a*b*a$.

C  De verzameling C van alle rijtjes met hetzelfde effect als $a*b$ ('wissel, draai'); behalve $a*b$ behoort hiertoe bijv. $b*a*a$.

D  De verzameling D van alle rijtjes met hetzelfde effect als $b*a$ ('draai, wissel') hiertoe behoort bijvoorbeeld $a*a*b$.

De rijtjes van θ laten alle stukken op hun plaats, de elementen (rijtjes) van A draaien alle stukken één plaats tegen de klok in, de elementen van $\bar{A}$ draaien alle stukken één plaats met de klok mee, de elementen van B laten het bovenste stuk staan (en verwisselen de andere), de elementen van C laten het rechterstuk staan, de elementen van D laten het linkerstuk staan.

Het moeilijke punt!

4 We kunnen nu de volgende tabel wel lezen:

$*$	θ	A	$\bar{A}$	B	C	D
θ	θ	A	$\bar{A}$	B	C	D
A	A	$\bar{A}$	θ	C	D	B
$\bar{A}$	$\bar{A}$	θ	A	D	B	C
B	B	D	C	θ	$\bar{A}$	A
C	C	B	D	A	θ	$\bar{A}$
D	D	C	B	$\bar{A}$	A	θ

4.1 In het gearceerde vakje (vakje $C*A$) kun je lezen:
Als je een rijtje uit C 'schakelt' vóór een rijtje uit A, ontstaat een rijtje uit B, of: Als je eerst alle stukken tegen de klok in draait en daarna het rechterstuk laat staan, dan is het effect hetzelfde als wanneer je het bovenste stuk laat staan.

4.2 Een element van A neutraliseert een element van $\bar{A}$ en omgekeerd (vakjes $A*\bar{A}$ en $\bar{A}*A$). De elementen van B neutraliseren elkaar (vakje $B*B$), dit is ook het geval met de elementen van C en met de elementen van D (vakje $C*C$, resp. vakje $D*D$).

4.3 $a*b\begin{pmatrix} & K & \\ P & & T\end{pmatrix}$ betekende dat op de formatie $\begin{pmatrix} & K & \\ P & & T\end{pmatrix}$ het commando b wordt uitgevoerd en op het resultaat het commando a; $*$ is hier een teken voor het achter elkaar uitvoeren van commando's. In de tabel betekent de $*$ bij $A*B$ dat een commandorijtje uit A vóór een commandorijtje uit B geschakeld wordt (het resultaat is dan een commandorijtje uit C); $*$ is hier een teken voor het schakelen van commandorijtjes.

Wat zou iemand uit deze tabel kunnen aflezen, die haar voorgeschiedenis niet kent?

E Model

5.1 $V = \{\theta, A, \bar{A}, B, C, D\}$ is een verzameling.
Door $*$ worden de elementen van V twee aan twee aan elkaar geschakeld, het resultaat van zo'n schakeling is altijd een element van V, bijvoorbeeld: $C*A$ wordt B en $A*\theta$ wordt A.
Omdat door schakeling geen nieuwe elementen kunnen ontstaan zeggen we:

V is gesloten onder de schakeling $*$.

5.2 θ is een bijzonder element van V, als je aan θ een of ander element van V schakelt wordt het resultaat steeds dat andere element. (regel 1 en kolom 1 van de tabel.)

We noemen θ *het neutraal element van V.*

5.3 Bij elk element van V behoort een element van V dat het eerste neutraliseert.
(Op elke regel en in elke kolom komt θ één keer voor.)

5.4 De tabel geeft geen voorschriften voor het schakelen van meer dan twee elementen van V, toch kunnen we met drie elementen van V twee schakelingen maken:

$$A*(B*C) \sim A*\bar{A} \sim \theta \text{ en}$$
$$(A*B)*C \sim C*C \sim \theta.$$

Hierin moet je voor $\sim$ lezen: 'wordt vervangen door', de haakjes geven aan welke vervanging het eerst plaats moet hebben.
Blijkbaar hebben beide schakelingen van A, B en C hetzelfde resultaat: θ, ook de twee schakelingen van B, C en D hebben hetzelfde resultaat:

$$B*(C*D) \sim B*\bar{A} \sim C \text{ en:}$$
$$(B*C)*D \sim \bar{A}*D \sim C$$

We vinden: $A*(B*C) \sim (A*B)*C$ en

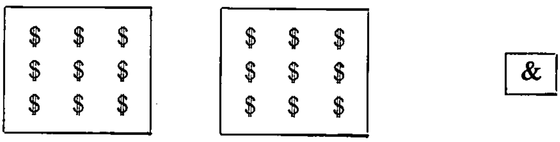
$$B*(C*D) \sim (B*C)*D.$$

Omdat wij de voorgeschiedenis van de tabel kennen is het voor ons duidelijk dat de twee mogelijke schakelingen van drie elementen altijd hetzelfde element opleveren! Deze eigenschap van de schakeling $*$ in V noemen we:
de associatieve wet van $*$ *in* V.

Iemand die aan de hand van de tabel wil nagaan of deze wet wel geldt moet bedenken dat men met drie elementen die in een bepaalde volgorde zijn opgeschreven twee schakelingen kan maken, hij kan dan $2 \times 6 \times 6 \times 6$ schakelingen van drie elementen – met haakjes – opschrijven en aan de hand van de tabel nagaan of die schakelingen twee aan twee hetzelfde element opleveren.

F Voorbeelden van huiswerkopgaven

6.4 Een kapitein commandeert een formatie van twee stilstaande soldatenpelotons:



1e pel. 2e pel.

De kapitein geeft rijtjes van de volgende commando's:

p, dit betekent: 'eerste peloton rechtsomkeert'
q, dit betekent: 'tweede peloton rechtsomkeert'
r, dit betekent: 'beide pelotons rechtsomkeert'

Vragen:

1 Kan de kapitein het rijtje $r*p$ door een korter commando vervangen?
2 Bedenk commandorijtjes die het effect hebben van een neutraal commando.

De majoor heeft aan de kapitein opdracht gegeven om niet meer dan twee commando's in een rijtje op te nemen. (Anders kunnen de soldaten het niet meer volgen!)

Vragen:

3 Bepaal de verzameling P van alle rijtjes die hetzelfde effect hebben als het commando p. (Alle elementen opschrijven.)

4 Bepaal de verzameling Q van alle rijtjes die hetzelfde effect hebben als het commando q.

5 Bepaal de verzameling R van alle rijtjes die hetzelfde effect hebben als het commando r.

6 Bepaal de verzameling S van alle neutrale rijtjes.

6.7 We gaan uit van de tabel voor de verzameling V (par. 5).

1 Als je het goede element van V invult worden de volgende beweringen ware beweringen, doe dit:

$$A*B \sim \ldots,\ A*\ldots \sim D,\ \ldots*B \sim \theta.$$

2 Wat is het neutraliserend element van C, van $A*B$, van $A*(C*B)$?

3 Vereenvoudig: $A*(B*D)$
$(A*B)*(C*D)$
$A*((B*C)*D)$
$((A*B)*C)*D$

4 $\bar{A}$ is het neutraliserend element van A, we zouden het neutraliserend element van B kunnen voorstellen door het symbool $\bar{B}$ en dat van $A*C$ door $\overline{A*C}$, $\bar{B} \sim B$ is dan een ware bewering.
Als je het goede element van V invult worden de volgende beweringen ware beweringen:

$$\bar{D} \sim \ldots,\ \overline{A*C} \sim \ldots,\ \bar{\bar{A}} \sim \ldots, \text{ doe dit.}$$

Is $\overline{A*B} \sim \bar{B}*\bar{A}$ een ware bewering?
En $\overline{A*B} \sim \bar{A}*\bar{B}$?

6.11

+	0	1	2	3
0	0	1	2	
1	1	2	3	
2	2	3	4	
3	3			

Hierboven staat het begin van een schakeltabel voor de verzameling N van de natuurlijke getallen. Schakelen is nu optellen.

1 Is N gesloten onder het optellen?

2 Bezit N voor het optellen een neutraal element?

3 Behoort bij elk natuurlijk getal t.o.v. de optelling een neutraliserend element?

4 Waarom staat er geen pijl in de linkerbovenhoek van de tabel?

5 Geldt in N de associatieve wet voor de optelling?

G Literatuur:

André Revuz, Mathématique moderne, Mathématique vivante (Paris 1965).

André Roumanet, Une expérience d'enseignement de mathématique avec des enfants de 11 á 13 ans. (Educational studies in Mathematics I, 222.)

Didactische Literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität; XV, 2; XVI 1 en 2; 1968 en 1969.

H.-G. Steiner, Heinrich Behnke 70 Jahre;
M. Orte, Über den Bildungswert des mathematischen Unterrichts;
G. Pickert, Warum verwendet man in der ebenen Geometriek eine vektorielle Multiplikation?;
D. Laugwitz, Winkel und Winkelmass in analytischer Geometrie und Analysis;
J. Dzewas, Konstruktion der Winkelfunktionen mittels der Theorie der topologischen Gruppen;
W. Ludwig, Struktur des festen Körpers;
H. Bauer, Die besonderen Punkte des sphärischen Dreiecks;
H. Behnke, Paul Sengenhorst, 1894–1968.

H. J. Stetter, Numerische Mathematik im Schulunterricht;
B. Döring, Über das Newtonsche Näherungsverfahren;
A. Kirsch, Eine Analyse der sogenannten Schluszrechnung;
H. Griesel, Algebra und Analyse der Gröszensysteme;
Löttgen und Wagner, Über eine einheitliche Methode in der Infinitesimalrechnung;
E. Beck, Über die Differenz zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von n Zahlen.

H. Behnke, Kuno Fladt zum 80. Geburtstag;
Fr. Raith, Grusz an den Didaktiker Kuno Fladt;
J. E. Hofmann, Geschichtliches zur Lehre von den Winkelschnitte;
Niethammer und Veenker, Maschinen und mathematische Beweise;
W. V. Vogel, Geometrie der Anschauung.

Boekbespreking

Dr. A. van Dop, e.a.: *Afbeeldingsmeetkunde voor mavo*, Deel 1, 108 blz. f6,75, Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen.

Door de invoering van de Wet op het voortgezet onderwijs zijn reeds vele scholengemeenschappen opgericht, die zowel vwo als havo en mavo omvatten. Ook zijn er gemeenschappen of associaties van scholen ontstaan, waarbij mavoscholen samenwerken met scholen voor vwo en havo. Deze samenwerking vraagt een zekere eenvormigheid in de te gebruiken methoden, althans zeker voor de brugklassen van de scholen voor vwo, havo en mavo. Naast *Afbeeldingsmeetkunde* voor vwo en havo is nu ook dit boekje voor het mavo op de markt verschenen. Hierin worden, om de doorstroming van het ene schooltype naar het andere te bevorderen, dezelfde onderwerpen behandeld als in het deel voor vwo en havo. Er is echter een andere volgorde aangehouden. Na een ruimtelijke inleiding volgt een behandeling van: coördinaten, vliegers, transformaties, radialen en met behulp hiervan de voornaamste begrippen en eigenschappen van vlakke figuren. Deze omwerking heeft wel de voordelen van de doorstroming, maar stelt aan de leerling van de brugklas mavo nogal hoge eisen.

J. F. Christophe.

C. J. Alders, K. Rogier, *Wiskunde voor VWO*, 2 *V*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1969, 1e druk, 86 blz., *f* 6,75.

Besproken worden: breuken, vergelijkingen, lengte, oppervlakte, inhoud, wortelvormen, de stellingen van de rechthoekige driehoek, relaties, functies, grafieken, het samenstellen van transformaties, coördinaten en vierkantsvergelijkingen.
De uiterst beknopte behandeling roept ook wel eens vragen op, b.v. op blz. 39: Kan men dan geen wortels verliezen? Dan helpt geen controle.
Het bewijs op blz. 60 is onjuist. Uit het feit dat $OA = OA''$ mag geen toch niet concluderen, dat de samenstelling van de twee spiegelingen een rotatie is! Men dient in ieder geval aan te tonen, dat $\angle(OA, OA'')$ onafhankelijk is van de keuze van A. Dit 'bovendien' op blz. 61 is dus misplaatst. Maar het voordeel van dit boekje is wel, dat er ook nog enig initiatief is overgelaten aan de docent.

Burgers

M. Kindt, A. J. Th. Maassen, C. P. S. van Oosten, *Moderne algebracursus*, deel 2 van het v. w. o., L. G. C. Malmberg, s'Hertogenbosch, 1969, 104 blz, f 5,25.

Het boekje is bedoeld voor leerlingen van het tweede leerjaar. Bijzondere aandacht wordt besteed aan de symbolische notaties en het exact weergeven van deze notaties.
Behandeld worden uitspraakvormen en verzamelingen, vergelijkingen en ongelijkheden in **Q**, relaties en lineaire relaties in $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ en enkele voorbeelden van lineaire programmering. Van de transformaties: de translatie in $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$: T_{pq} ('*p* naar rechts en *q* naar boven'), spiegelingen in $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ t.o.v. de beide getallenlijnen (S_1 en S_2), t.o.v. O (0,0) (S_0), t.o.v. $y = x$ (S_B) en dilataties (D_z) (ax, ay) van $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
In 'ten geleide' leert men cursief 'irrationele getallen' en zeven regels verder(irrationale getallen'. Dit laatste lijkt me juister. Het is m.i. gewenst dat de auteurs een index opnemen met een korte verklaring van de ingevoerde symbolen. De uitvoering is zeer verzorgd.

Burgers

Drs. Jansen, *Algebra voor de tweede klas van het* v. w. o., L. C. G. Malmberg, s'Hertogenbosch, 1969, 87 blz, f 4,75.

In dit tweede deel worden behandeld: reële getallen, verzamelingen, vergelijkingen en relaties. De tekst is eenvoudig gehouden en het redelijk gebruik van moderne notaties heeft het voordeel dat de leerlingen niet al te zeer zullen schrikken.
De juistheid van b.v. de eigenschappen van worteltrekken wordt afgeleid uit een enkel voorbeeld. Misschien was hier iets meer exactheid op zijn plaats geweest.
De onnodige inconsequentie die ontstaat door de invoering van 'de oplosbaarheid van een stelsel' had nu beter vermeden kunnen worden.

Burgers

dr. P. M. Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring, *Van A tot Z, Werkboek der Wiskunde*, deel HV-2a, J. Muusses, Purmerend, 1969, XII+188 blz., f12,15.

Dit boek voor het eerste halfjaar Havo-Vwo behandelt de stof (in afwijking van de eerste drie delen) in twee afdelingen: een '*Systematische cursus*' (S; 104 blz.) en een '*herhaling* en *uitbreiding*' H; 56 blz.), die naast oefenmateriaal voor iedere leerling ook de gelegenheid biedt tot verdieping van de aangeboden leerstof, vooral voor die leerlingen die aspiraties hebben in de richting van het Vwo.
In beide afdelingen worden in tien hoofdstukken achtereenvolgens behandeld: *Translatie* (parallellogram), *verzamelingen* en *vergelijkingen, distributieve eigenschap* (merkwaardige produkten), *herhaling eigenschappen vierhoeken* (equivalente uitspraken), *vierkantsvergelijkingen* (irrationale getallen; kwadraten en wortels op de rekenliniaal), *puntsymmetrie* (samenstelling van twee functies en van twee afbeeldingen; rotatie; translatie), *logica* en *verzameling* (o.a. $\cap$ en $\wedge$; $\cup$ en $\vee$; $\Leftrightarrow$ en $=$), *getallenverzamelingen* ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$) $x \to x$, $x \to x^2$ en $x \to 1/x$) relaties) bijectie), *oppervlakken gegeven door coördinaten, vectoren* (richtings-, nul- en nevenvector), *Stelling van Pythagoras* (uit opeenvolging van vectoren, oppervlakteberekening in platte vlak en ruimte).
Hierna volgen 15 bladzijden '*Regels der Wiskunde*' (55 definities en 111 stellingen), die nu pas 'verwoord' naar voren komen, nadat ze in de opgaven van de afdelingen S en H 'verwerkt' zijn.
Als slot volgen dan 13 bladzijden '*Vragen over de regels*', waarin opgaven staan, die met behulp van de geformuleerde stellingen opgelost kunnen (moeten?) worden.
Begrippen uit de 'moderne' algebra vinden meteen in de 'moderne' meetkunde hun toepassing. De geheel eigen aanpak getuigt van groot vakmanschap. Toch kan ik me niet aan de indruk onttrekken dat men zich, wegens eigen ervaring, hier en daar meteen wat kritisch opstelt; didactisch en methodisch mag dat.
Meerdere opgaven bieden de leerlingen de gelegenheid tot zelfstandig doordenken van de aangeboden stof, al zal voor de gemiddelde doordenker toch wel eens een bespreking-vooraf nodig blijken te zijn.
Als recensent en als praktijkmens slaak je wel de zucht: 'Wanneer eens eindelijk een uniformering in het gebruik van de symbolen?': getallenverzameling N, aanduiding van vectoren?
Enkele minder fraaie benamingen zullen bij een volgende druk (als de druk van het drukpersklaar-zijn wegvalt) zeker weggezuiverd zijn. Zijn bijv. voor $a \in \mathbf{Q}$ opgaven als $(-a)^2$ en $(-2a^2)$ $(-4a^{13})$ onder te brengen bij de regels 'voor het vermenigvuldigen met negatieve vormen'?
Iedere leraar die openstaat voor de vernieuwing in deze tak van het onderwijs zal zeker weer zijn voordeel kunnen doen met het verschijnen van dit boek; een gebruiker met ervaring zal zeker graag aan de wens van de schrijvers 'Voor opbouwende kritiek houden we ons ten zeerste aanbevolen' gehoor geven.

W. Th. Camps

Drs. H. van Praag, *Formele vorming in de brugklas*; 92 blz., ingen. *f* 5,60; Wolters-Noordhoff, Groningen, 1968.

Wat de titel van het boekje aangaat: de vlag dekt de lading slechts ten dele. De meeste bladzijden handelen niet over de formele vorming van de leerlingen in de brugklas, maar over de wetenschappelijke vorming van de docent ten aanzien van de logica, nog te vaak een verwaarloosd onderdeel in de beroepsopleiding.
De opbouw van het boekje is als volgt: in de eerste 20 bladzijden worden logische, kwantitatieve, linguistische en technische formalismen behandeld. Elk van deze onderdelen valt uiteen in een algemene inleiding en in de toepassing ervan in de klas. Op deze hoofdmoot volgt dan een bijvoegsel van dubbele omvang. In ruim 40 bladzijden worden 'enige elementaire inzichten over de moderne logica' gegeven. We citeren de titels der paragrafen: logica of logica's; paradoxen; hoe waardig is de logica?; de tweewaardige logica's; booleaanse logica; binaire calculies en tweewaardige logica; computerlogica; variabelen, constanten, functoren en argumenten; meerwaardige logica's; het tijdsbegrip in de logica. Daarna volgen in de afdeling 'suggesties voor de studie-uren' een 25-tal lesschetsen.
De auteur haalt in het boekje te veel overhoop om er veel heil van voor het onderwijs te mogen verwachten. Naast waardevolle details bevat het te veel bijzonderheden die met het onderwijs in de brugklas niet in het minst te maken hebben. Als de docent het voorbeeld van de auteur zou volgen dreigt verbalisme.
Ik noem een aantal begrippen die in de tekst naar voren komen: didaktische majeutica, kategoriale ordeningsschema's, polariteit tussen energie en informatie, poly-interpretable formalismen, relatie tussen extensiteit en intensiteit.
Ik vind het jammer, dat de auteur voor de niet-lege verzameling een symbool toelaat, dat overeenstemt met het gangbare symbool voor de lege verzameling zelf. Ook, dat hij verzuimt een symbool in te voeren voor verzamelingen, waardoor verwarring tussen het lidmaatschapssymbool en het inclusieteken dreigt. Ik acht het niet gewenst de analyse van het syllogisme in de brugklas zo ver door te zetten, dat de a-, e-, i- en o-constructies de revue passeren. Ik acht het problematisch of inzichten die aan Einsteins relativiteitstheorie te danken zijn aan zeer jonge kinderen duidelijk gemaakt kunnen worden. Ik acht het ongewenst het begrip logisch produkt in te voeren vóór het begrip doorsnede van verzamelingen.
Ik prefereer het wiskundige begrippen als evenredig, omgekeerd evenredig, functie, afbeelding op het geëigende moment in de wiskunde-les zelf aan de orde te stellen boven een premature behandeling ervan in afzonderlijke lessen uit de brugklas.
Jerome S. Bruner heeft een befaamde didactische hypothese uitgesproken: 'any subject can be taught effectively in some intellectual honest form to any child at any age of development'. Deze slogan kan een machtige stimulans betekenen voor onderwijsvernieuwers die een bepaalde leerstof op aanmerkelijk jeugdiger leeftijd van de leerlingen aan deze leerlingen zouden willen brengen dat te doen gebruikelijk is. Deze leuze kan een te waarderen wapen worden in de strijd tegen een didactisch conservatisme.
Naar het mij voorkomt zal men echter Van Praags 'Formele vorming in de brugklas' bezwaarlijk als een geslaagde poging tot didactische vernieuwing in Bruners geest kunnen beschouwen.

Joh. H. Wansink.

Drs. E. J. Wijdeveld: *Nieuwe Wiskunde II*, Uitg. Wolters-Noordhoff, 235 blz. Prijs *f* 22,75.

Dit deel heeft evenals het eerste tot doel inzicht te geven in inhoud en betekenis van de moderne wiskunde. Als zodanig is het een goede handleiding voor in ouderwetse zin opgeleide leraren, die zich wensen te heroriënteren.
Een kort overzicht van de inhoud moge aangeven op welke wijze dit boek ingaat op het aspect van de structuren.
In het eerste hoofdstuk worden natuurlijke getallen gedefinieerd als kardinaalgetallen van eindige verzamelingen. Som en produkt worden bepaald met behulp van vereniging en doorsnede van verzamelingen.

De groepsstructuur wordt hier al voorbereid.
Door middel van klassen getallenparen ontstaat de uitbreiding van **N** tot **Z** en van **Z** tot **Q**.
Door het vormen van klassen convergente rijen komt men tot **R**.
Nu volgt de systematische behandeling van groepen, ringen en lichamen. Met tal van duidelijke voorbeelden worden de eenvoudigste eigenschappen besproken. Symmetrieën en permutaties worden gebruikt om ondergroepen en nevenklassen te zoeken. Een korte bespreking van restklassenring, veeltermring en quotiëntenlichaam besluit dit hoofdstuk.
In het licht van de groepentheorie beziet het boek tot slot congruenties, gelijkvormigheidstransformaties en affiniteiten.
Het moet mij van het hart, dat de laatste twee hoofdstukken mij beter bevallen dan het eerste, dat op de lezer, die zich voor het eerst met de moderne wiskunde bezighoudt een gekunstelde indruk moet maken.
De tekst na def. 5.5 is m.i. fout. Ondanks deze kritiek geloof ik echter, dat, mede gezien de vele vraagstukken, dit werk voor vele leraren een steun kan zijn bij de uitvoering van het nieuwe wiskundeleerplan.

L. J. M. v.d. Zijden.

A. R. Jonker, H. J. Zijderveld, A. W. G. Schrier, *Linea recta,* meetkunde voor mavo-scholen en andere scholen van voortgezet onderwijs.
Wolters-Noordhoff, N.V., Groningen 1969, deel M1, 105 blz., *f* 6,90. Aanwijzingen en antwoorden, *f* 3,25.

Dit deeltje is bestemd voor de brugklas en maakt gebruik van roosters. Het is een opeenvolging van handelingsvoorschriften, die de leerling vertrouwd moeten maken met elementaire wiskundige begrippen. Of een docent nog nodig is betwijfel ik.
Enkele opmerkingen. Op blz. 7: 'Omdat er veel punten in een rooster liggen duiden we ze aan met hoofdletters'. De logica ontgaat me. Het is ook niet duidelijk of de auteurs alleen roosterpunten, punten noemen.
Hoeken worden gemeten tegen draaiingsrichting van de wijzers van de klok in.Gaat men de figuren na, dan staan ook hier de letters zo geplaatst. De opmaak op blz. 73 doet daarom inconsequent aan.
Op blz. 79: 'Alle transformaties, dus spiegeling, translatie, puntspiegeling en rotatie leveren congruente figuren op'. En dit onjuiste *dus* wordt versterkt op blz. 80: 'We noemen figuren congruent als ze door middel van transformaties op elkaar kunnen worden afgebeeld'.
Beide uitspraken dienen gewijzigd te worden.
De uitvoering is degelijk en verzorgd.

Burgers

Drs. J. van Dormolen, *Analyse, deel I;* 148 blz.; ingen. f 9,50; Van Goor Zonen, Den Haag; 1969.

Steeds duidelijker blijkt, dat het tot stand komen van verantwoorde schooluitgaven niet langer opgevat mag worden als eenmanswerk, maar het resultaat dient te zijn van planmatige samenwerking van velen. De omstandigheid dat deze Analyse I slechts de naam draagt van één auteur betekent echter geenszins, dat het hier aan de bedoelde samenwerking van velen zou hebben ontbroken. Over de totstandkoming van dit leerboek dient in dit verband te worden vermeld, dat het de neerslag betekent van een experiment dat door een werkgroep onder auspiciën van de *Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde* werd uitgevoerd met de bedoeling de doelstellingen van het programma voor *Wiskunde I* voor analyse te realiseren. Dit leerboek is daarom te beschouwen als vrucht van de samenwerking van de leraren-leden van de genoemde werkgroep en van de hoogleraren die het experiment hebben begeleid. Hierin

moge voor alle wiskundedocenten bij het v. w. o. voldoende aanleiding gevonden worden om van deze nieuwe uitgave ernstig kennis te nemen.
Het eerste inleidende hoofdstuk bevat een waardevol overzicht van die onderdelen van de algebra uit de onderbouw, die voor het onderwijs in de analyse van fundamentele betekenis mogen worden geacht. Het functiebegrip treedt erin op de voorgrond en tal van begrippen zoals relatie, grafiek van een functie, verzameling oplossingen van $y = f(x)$, niveaulijnen, universele kwantor, doorsnede van verzamelingen, komen erin ter sprake. Dit eerste hoofdstuk kan in het bijzonder van betekenis blijken voor leerlingen die in onderbouw nog het oude programma hebben gevolgd en daardoor moeilijkheden kunnen hebben met tal van begrippen die in het programma van de bovenbouw volgens het nieuwe programma van belang zijn.
Indringende beschouwingen over continuïteit en limieten gaan aan de behandeling van de differentiaalrekening vooraf. De limieten verschijnen daarbij als continu-makende waarden van de functie.
Bij de differentiaalrekening wordt de theoretische fundering nauwgezet verzorgd. Aan de term afgeleide wordt de voorkeur gegeven boven de term differentiaalquotiënt. Deze laatste term komt eerst tot zijn recht als de differentialen behandeld zijn, waardoor gelegenheid ontstaat de afgeleide als een quotiënt van twee differentialen op te vatten. De bespreking van het begrip differentiaal is van betekenis in verband met de differentiaalvergelijkingen die in het tweede deel aan de orde zullen worden gesteld. Dit deel mag in de eerste helft van 1970 worden verwacht.
Vermelding verdient nog dat bij de integraalrekening gekozen moest worden tussen de bepaalde integraal als aangroeiing van een primitieve functie van de integrand over zeker interval en de integraal als limiet van een zekere som. De auteur gaf aan de eerste methode de voorkeur en kan zodoende de moeizame behandeling van benedensommen en bovensommen die bij de Rieman-integraal plegen op te treden, vermijden. In tweede instantie komt deze methode wel aan de orde en geeft daarbij aanleiding op de betekenis van numerieke analyse te wijzen.
De auteur geeft het gehele boek door blijk een open oog te hebben voor de didactische moeilijkheden die er voor de leraar en de leerling in dit stuk leerstof verborgen liggen. Hij gaat daarbij steeds uit van een intuïtieve aanpak van de problemen om successievelijk tot een verantwoorde strenge begripsbepaling te geraken. Hierbij spelen de opgenomen vraagstukken een essentiële rol. Een en ander maakt dat we dit boek als een waardevolle uitbreiding van onze schoolboekenvoorraad mogen beschouwen.
In het antwoordenboekje dat bij het leerboek behoort, heeft de auteur enig didactisch commentaar voor de docent laten opnemen.

Joh. H. Wansink.

Dr. M. G. Kuipers e.a. bewerkt door C. J. Klesser en C. Rijnders. *Gemoderniseerde Meetkunde op basis van afbeeldingen*, deel 2 voor MAVO, uitg. Wolters-Noordhoff n.v., Groningen, 1969, 68 blz. *f* 5,—.
Bestemd voor het tweede leerjaar.

Dit deel bouwt voort op de principes, die worden voorgestaan door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.
Aan de reeds geleerde begrippen en notaties bij de verzamelingen wordt meer inhoud gegeven en de leerlingen vertrouwd gemaakt met de eigenschappen van meetkundige figuren.
Alvorens de puntverzamelingen (cirkel, middellijn en deellijn) aan de orde komen, wordt een gedegen behandeling gegeven van het maatbegrip.
Na een kort hoofdstuk over de coördinaten van punten in een vlak, wordt besloten met de oppervlakten van bijzondere vlakdelen en de plaatsbepaling van punten in de ruimte.
De tekst is eenvoudig gehouden en er worden duidelijke figuren gegeven.

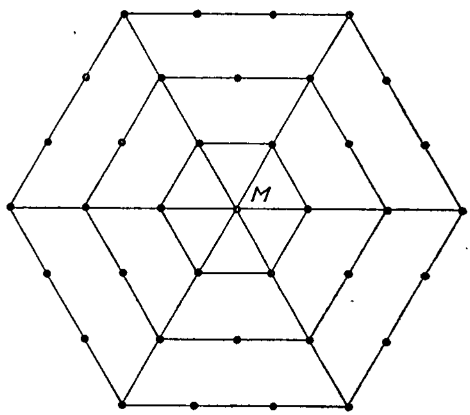
Elk hoofdstuk sluit met een paragraaf 'Extra opgaven', waarin aandacht besteed is aan herhaling der stof. Ook pientere leerlingen komen aan hun trekken, daar er nog al wat 'ster'-opgaven zijn opgenomen.
De delen 1 en 2 bieden de stof, die volgens het basisplan minimaal gegeven moet worden aan leerlingen, die wiskunde niet als keuzevak kiezen.
Leraren, die aparte boeken voor algebra en meetkunde willen gebruiken, moeten zeker met dit boek kennismaken.

J. Christophe

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

233 Een tuinman moet bomen planten in de punten, die in de onderstaande figuur zijn aangegeven met een stip. Het benodigde aantal bomen wordt daartoe in M neergelegd. De tuinman kan slechts drie bomen tegelijk dragen en mag alleen lopen langs de in de figuur door een lijn aangeduide wegen. Hoe moet hij dit doen, als hij in totaal een zo kort mogelijke afstand daarbij wil afleggen? (Er wordt geen verschil gemaakt tussen wegen, die afgelegd worden, terwijl de tuinman bomen draagt, en wegen waarbij dit niet het geval is.) De afstanden tussen twee opvolgende bomen zijn alle even groot.



234 Nu eens een puzzel voor gepensioneerden. Vind een magisch kwadraat van 9 getallen, waarvan het middelste 1039 is en waarvan alle 9 getallen priem zijn. (B. Kootstra)

Oplossingen

231 Uit een groep van n voorwerpen kan men op $2^n - 1$ manieren een positief aantal kiezen. Onderstel, dat er vijf groepen zijn met resp. n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 voorwerpen. Als er, zoals gegeven, 197 keuzemogelijkheden zijn, dan zou dus

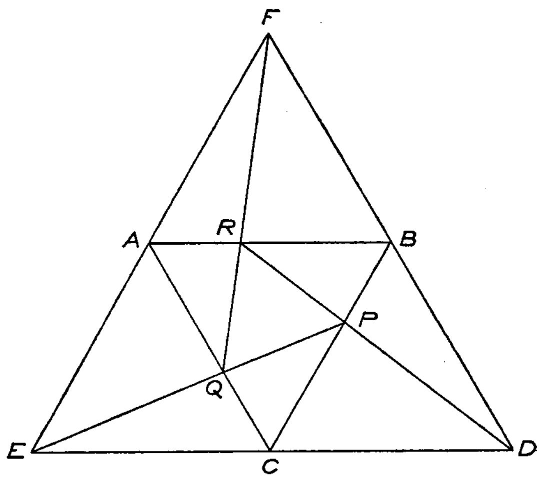
$$197+5 = 2^{n_1}+2^{n_2}+2^{n_3}+2^{n_4}+2^{n_5}$$

moeten zijn. D.w.z. dan zou 202 in het tweetallig stelsel geschreven moeten worden met vijf 1'en en bovendien moet op de laatste plaats een 0 komen (omdat $n_t = 0$ uitgesloten) is. Het aantal groepen is in ons geval dus oneven. We gaan nu proberen:

$$197+3 = 11001000 \text{ (tweetallig)}$$
$$197+5 = 11001010$$
$$197+7 = 11001100$$
$$197+9 = 11001110$$

In het eerste geval is het aantal 1'en wel 3, in het tweede geval geen 5, in het derde geen 7, in het vierde geen 9. Verder proberen is overbodig. Er zijn dus drie groepen met 7, 6 en 3 voorwerpen.

232 Construeer de onderstaande figuur, waarin de driehoeken ABC, DEF en PQR gelijkzijdig zijn.



Omdat $\triangle PCD \sim \triangle PBR$, geldt

$$PB : PC = BR : CD.$$

Verder is $PC = BR$ (want als b.v. $PC < BR$, dan is $CQ < BP$ en dus $PQ < PR$) en $CD = BC$. We behoeven dus slechts BC in uiterste en middelste reden te verdelen om punt P te vinden.

Inhoud