Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no. 5
februari 1970

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Een experiment op de basisschool in België

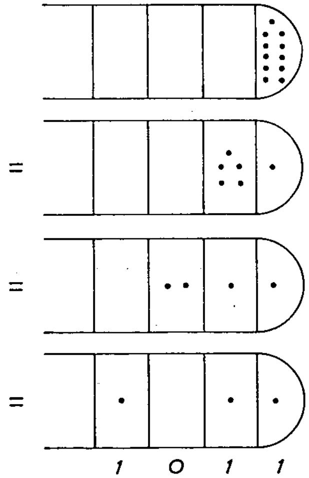
P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

Door Frédérique Papy en haar leerling Danielle Incolle is aan hun school een experiment op touw gezet met vernieuwd onderwijs in de eerste klas van de Belgische basisschool, dus voor leerlingen van 6–7 jaar. Van regeringswege is goedgevonden, dat ook andere scholen aan dit experiment deelnemen.
In een tweetal boeken vindt men een verslag van een deel van het experiment, nl. in

1 Papy, Minicomputor,

2 Frédérique et Papy, L'enfant et ses graphes.

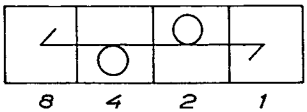
1 Om met de minicomputer te kunnen werken, moeten de kinderen op de hoogte zijn van de tientallige schrijfwijze van de getallen en ook, zij het op beperkte schaal, van de tweetallige. In figuur 1 ziet men weergegeven op welke



FIGUUR 1

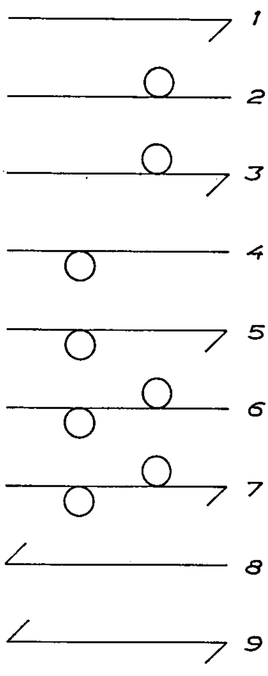
wijze de binaire schrijfwijze van een getal, i.c. het getal elf, geëxpliceerd wordt. Daaraan is voorafgegaan een analoge uiteenzetting over de tientallige schrijfwijze.

Papy is bij het ontwerpen van zijn minicomputer geïnspireerd door de gedachten van Monseigneur Lemaitre aangaande de schrijfwijze van de getallen. Lemaitre wil de getallen gewoon decimaal schrijven, maar wil de cijfers additief tweetallig vormen. In figuur 2 ziet men, hoe Lemaitre de cijfers 1, 2, 4 en 8 vormt. De

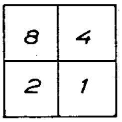


FIGUUR 2

horizontale balk wordt in elk geval getekend. Een streepje aan het begin naar beneden geeft het cijfer 1, het kringetje aan de bovenzijde op éénderde van rechts het cijfer 2, het kringetje aan de onderzijde op tweederde van rechts het cijfer 4 en het streepje aan het linkeruiteinde naar boven het cijfer 8. In figuur 3 ziet men, hoe volgens dit procédé de cijfers 1 tot en met 9 geschreven worden. Papy hergroepeert de vierkantjes uit figuur 2 zo, dat figuur 4 ontstaat. In plaats

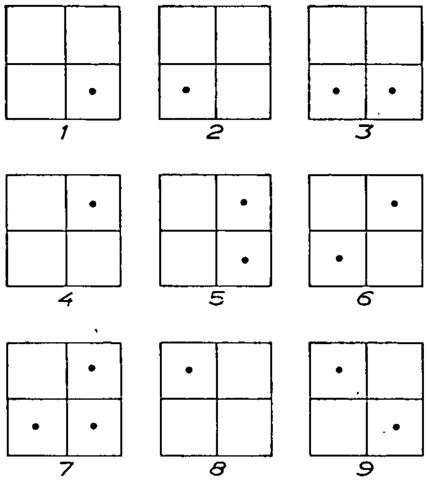


FIGUUR 3



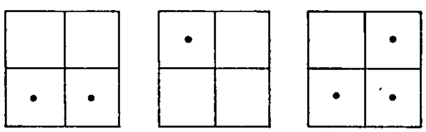
FIGUUR 4

van streepjes en kringetjes gebruikt hij stippen. In figuur 5 ziet men, hoe hij de cijfers 1 tot en met 9 schrijft. Een getal wordt decimaal geschreven door enige



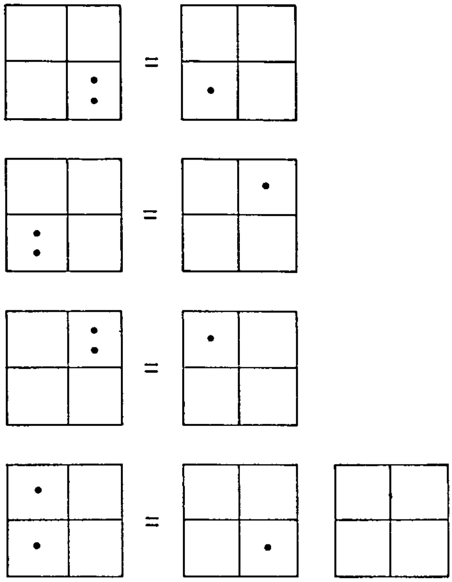
FIGUUR 5

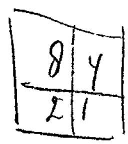
Papy-cijfers naast elkaar te plaatsen. Bij wijze van voorbeeld is in figuur 6 het getal 387 weergegeven.



FIGUUR 6

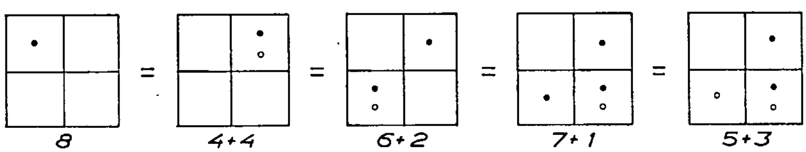
De minicomputer bestaat uit een aantal borden met vier vakken (dus uit 'blanco' Papy-cijfers). Verder heeft men pionnen tot zijn beschikking, die men op de vakken kan plaatsen. De pionnen nemen dus de rol van de stippen over. De borden worden naast elkaar geplaatst en dienen om de eenheden, tientallen, enz. te vormen. In de vakken zet men pionnen, waarbij men echter in elk vak zoveel pionnen kan zetten als men wil. Zo kan men op het bord eenheden in het vak rechtsonder (dus het vak 1) twee pionnen zetten. Deze zijn dan samen 2 waard. Ze kunnen dus vervangen worden door één pion in het vak linksonder (het vak 2). In figuur 7 ziet men de omvormingsregels (spelregels), volgens welke men pionnen door andere mag vervangen. Het werken met de minicomputer is een spel, dat als doel heeft rekenen te leren.
De optelling. De opteltabel voor de getallen 1 tot en met 9 wordt met behulp van de minicomputer geconstrueerd. Daarbij wordt niet de gewone manier gevolgd twee getallen te kiezen en daarna hun som te bepalen. Men begint omgekeerd met b.v. het getal 8 en vraagt op welke manieren 8 omgevormd kan worden tot een som van twee getallen. Er blijkt dan, dat 8 gelijk is aan 4+4, aan





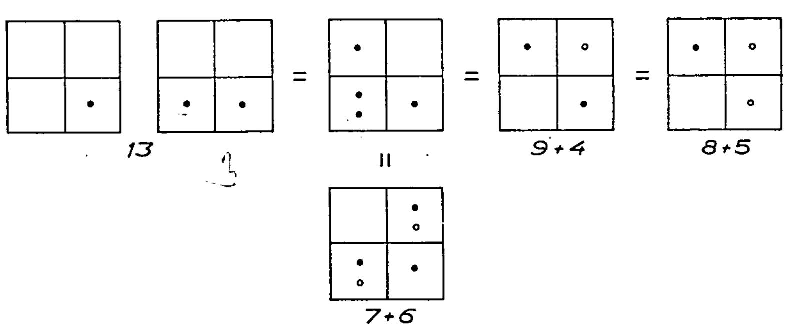
FIGUUR 7

6+2, aan 7+1 en aan 5+3 (figuur 8). Op deze wijze vindt men alle sommen vanaf 2 = 1+1 tot en met 9 = 8+1 = 7+2 = 6+3 = 5+4. Hoe de overblij-



FIGUUR 8

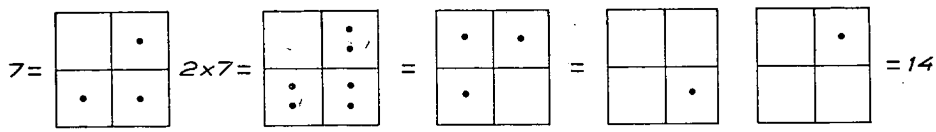
vende sommen gevonden worden, ziet men in figuur 9. Hier wordt 13 ontleed in twee bestanddelen, die beide kleiner dan 10 zijn.
De lezer kan zich zonder figuur wel voorstellen, hoe willekeurige optellingen gemaakt worden. Wil men b.v. 387+152 uitrekenen, dan zet men met groene



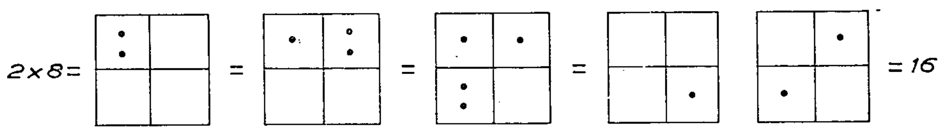
FIGUUR 9

pionnen 387 op de kaarten en daarna 152 met rode pionnen. Op de kaart eenheden staat nu $7 = 4+2+1$ en 2, op de kaart tientallen 8 en $4+1$ en op de kaart honderdtallen $2+1$ en 1. En nu maar spelen. Men vindt dan beslist 539.

Vermenigvuldigen. Vermenigvuldigen wordt gereduceerd tot optellen. Een getal wordt met 2 vermenigvuldigd door het bij zichzelf op te tellen. In figuur 10 is 2×7 uitgerekend en in figuur 11 ziet men 2×8 ontstaan.



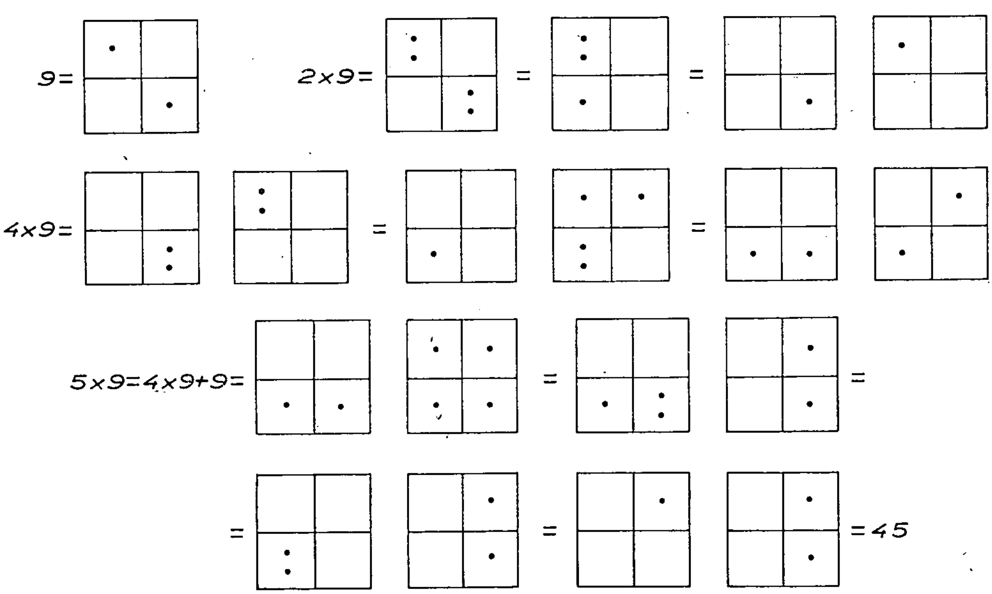
FIGUUR 10



FIGUUR 11

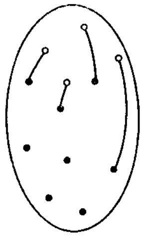
Men vermenigvuldigt een getal met 4 door het twee keer te verdubbelen. Men krijgt 5 maal een getal door 4 maal en 1 maal dat getal bij elkaar op te tellen, enz. In figuur 12 is afgeleid, dat $5 \times 9 = 45$. Zo voortgaande wordt de vermenigvuldigingstabel voor de getallen 1 tot en met 9 geconstrueerd.

Positieve en negatieve getallen. Op dezelfde manier als in Mathématique Moderne 1 gebeurd is, worden de negatieve getallen ingevoerd. Twee personen



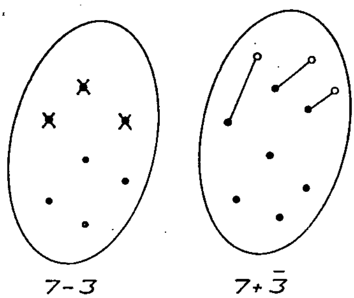
FIGUUR 12

spelen met elkaar. De keren dat de een wint, zetten we een rode stip, en de keren dat de ander wint, een blauwe. Om na te gaan, wie het meeste keren gewonnen heeft, schrappen we telkens een paar stippen, waarvan de een rood en de ander blauw is. We houden dan b.v. 3 rode of 3 blauwe stippen over. Nu spreken we af, dat we het resultaat 3-rood zullen schrijven: 3, en het resultaat 3-blauw: $\bar{3}$. In figuur 13 is het resultaat 4-rood, waarbij als conventie aanvaard is de rode stippen dicht en de blauwe stippen open te tekenen.



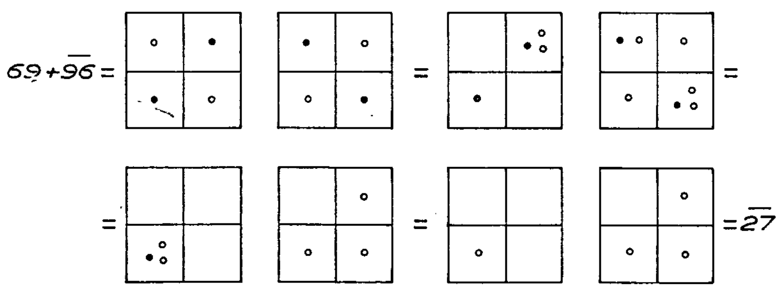
FIGUUR 13

Aftrekking. In figuur 14 links is $7-3$ uitgerekend. Eerst zijn 7 rode stippen getekend en daarna zijn er 3 weggekruist. Er blijven er 4 over. Hetzelfde resultaat krijgt men door aan de 7 rode stippen 3 blauwe toe te voegen, zoals in figuur 14 rechts gedaan is. Zo ziet men, dat $7-3 = 7+\bar{3}$.



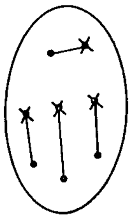
FIGUUR 14

In figuur 15 is een willekeurige aftrekking uitgevoerd. Men ziet hier, dat $69-96 = 69+\overline{96} = \overline{27}$.



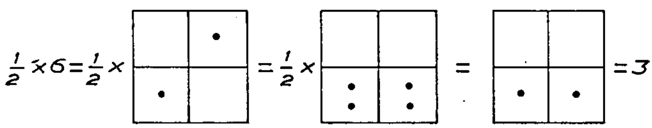
FIGUUR 15

Deling. In figuur 16 zijn 8 stippen getekend. Deze zijn twee aan twee tot paren verenigd. Van elk paar is daarna één stip geschrapt. Zo ziet men, dat de helft van 8 gelijk is aan 4.

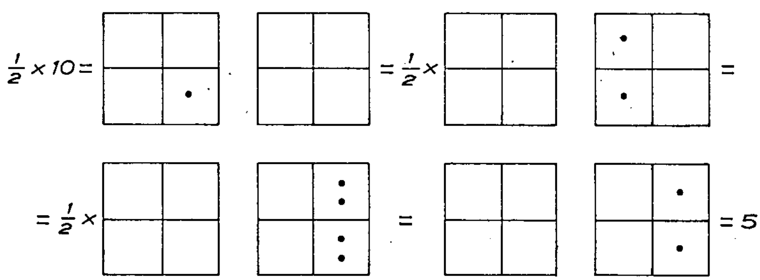


FIGUUR 16

Met de minicomputer gaat het net zo. In figuur 17 is uitgerekend, dat de helft van 6 gelijk is aan 3. In figuur 18 is gedemonstreerd, dat de helft van 10 gelijk is aan 5. Maar wat nu te doen, als men de helft van 1 wil hebben? 'Ik heb een

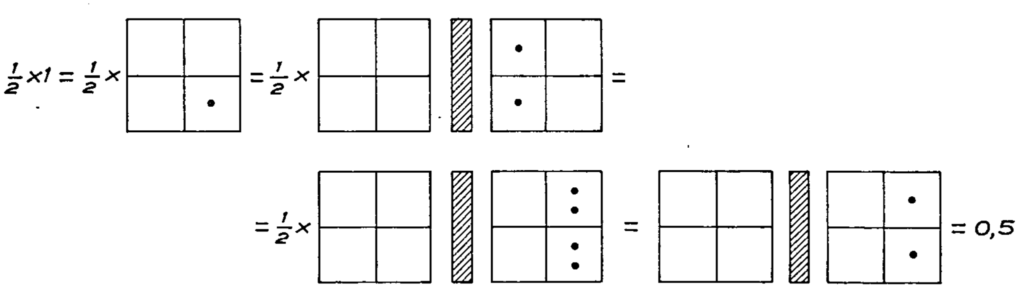


FIGUUR 17



FIGUUR 18

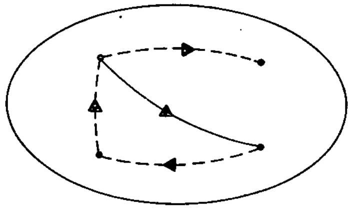
nieuwe kaart nodig', was de conclusie van een van de kinderen. En dan volgt al gauw, dat $\frac{1}{2} \times 1 = 0{,}5$ (figuur 19). De decimale breuken doen zo op een natuurlijke manier hun intrede.



FIGUUR 19

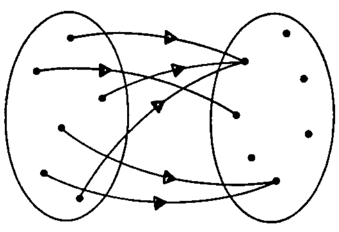
Men kan nu nog door herhaald halveren delen door 4, door 8. Maar daarmee is wel zo ongeveer de grens bereikt van wat men in het elementaire stadium met de minicomputer zou kunnen doen.

2 In L'enfant et ses graphes zijn de eerste tien lessen beschreven, die Frédérique gegeven heeft over relaties. Eigenlijk kan men zich hiervan alleen maar een goed denkbeeld vormen door het boek zelf ter hand te nemen. Ik wil wel proberen in het kort weer te geven, wat in deze tien lessen behandeld is, maar ben mij bewust een tamelijk bloedloos uittreksel uit de realiteit te geven.
Van meet af aan wordt een verzameling dingen voorgesteld door een soort venn-diagram. Een verzameling van 15 kinderen wordt voorgesteld door 15 stippen met een ovaal erom. Deze abstractie blijkt reeds op de leeftijd van 6 jaar geen speciale moeilijkheden op te leveren.
In de eerste twee lessen wordt uitgegaan van een verzameling van 15 kinderen. Elk kind wijst zijn zusters aan (voorzover aanwezig). Een rode pijl wordt gezet van het kind naar de zuster. Daarna wijzen de kinderen hun broers aan; een groene pijl loopt van het kind naar de broer. De leerlingen kunnen nu zelf dergelijke diagrammen ontwerpen met b.v. slechts 3 of 4 kinderen (stippen). Dit gebeurt in les 4. In les 6 en les 8 vindt men de kinderen weer. Daar zijn b.v. 4 kinderen getekend met enkele rode en groene pijlen. Gevraagd wordt dan: wie zijn de meisjes, wie de jongens, zet de overige pijlen (zie figuur 20; de groene pijlen zijn gestippeld, de rode getrokken).



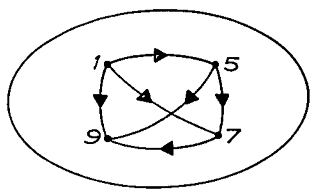
FIGUUR 20

Les 5 gaat over afbeeldingen. Van 7 kinderen zijn er 3 jarig. De postbode bezorgt voor de jarigen 6 kaarten. De 3 jarige kinderen krijgen resp. 3, 2, 1 kaart. De situatie is geschetst in figuur 21. In les 7 wordt gevraagd 7 bonbons te distri-



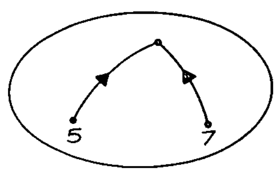
FIGUUR 21

bueren over 5 kinderen. Daarbij kunnen bepaalde voorwaarden gesteld worden, b.v. één kind krijgt 3 bonbons of twee kinderen zijn stout geweest en krijgen niets. Dan worden 5 bonbons gedistribueerd over 6 kinderen met de voorwaarde: geen kind krijgt meer dan één bonbon. Het blijkt dat 5 kinderen een bonbon krijgen en de zesde er over schiet. Conclusie: 5 < 6. De distributie van 8 bonbons over 8 kinderen gelukt op deze manier goed: ieder krijgt precies één bonbon. Er zijn evenveel bonbons als kinderen. De bijectie is zo officieus tot stand gekomen.
In les 8 vindt men een synthese van hetgeen in vorige hoofdstukken geleerd is. Hier wordt een verzameling natuurlijke getallen door stippen voorgesteld en als relatie gekozen: kleiner. Zo zijn in figuur 22 getekend vier stippen, die de



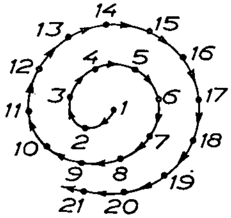
FIGUUR 22

getallen 1, 5, 7, 9 voorstellen. Nu wijst 1 naar 5 en zegt: ik ben kleiner dan jij. Vandaar, dat er een pijl van 1 naar 5 is getrokken. In les 9 en les 10 wordt hier nader op ingegaan. In les 9 vindt men opgaven van het type, dat in figuur 23



FIGUUR 23

is weergegeven: zet bij de derde stip een getal. In les 10 vindt men de natuurlijke getallen naar hun grootte gerangschikt in de vorm van een ribambelle (sliert). In figuur 24 is dit weergegeven.



FIGUUR 24

En mocht iemand nu erg nieuwsgierig zijn en zich afvragen, wat er wel in les 3 gestaan heeft, dan wil ik zijn nieuwsgierigheid wel bevredigen. Deze les ging over linker- en rechterschoenen.

Elke les moesten de kinderen zelf diagrammen tekenen. Van verscheidene van deze diagrammen en vooral ook van geheel of deels foute vindt men in het boek een getrouwe kopie. Vandaar, dat men geen goed inzicht kan krijgen in het wezenlijke van de lessen zonder het boek zelf ter hand te nemen.

Conclusie. De minicomputer is een interessant spel. Men kan het laten spelen en zo de kinderen rekenen leren. Men kan het ook anders doen. Aantrekkelijk is het spel zeker, maar onmisbaar niet. De wijze, waarop de relaties en afbeeldingen door Frédérique behandeld zijn, lijkt mij van fundamenteel belang. Dergelijke beschouwingen zullen stellig een plaats krijgen in het toekomstige basisonderwijs.

N.I.A.M.

Met ingang van 1 januari 1970 zal de *Stichting Nederlandse Onderwijs Film* haar werkzaamheden voortzetten onder de nieuwe naam:

'STICHTING NEDERLANDS INSTITUUT VOOR AUDIO-VISUELE MEDIA VOOR HET ONDERWIJS' (N.I.A.M.)

Het bestuur van de stichting heeft enige tijd geleden besloten tot deze naams- en daarmee gepaard gaande statutenwijziging over te gaan, teneinde deze meer aan te passen aan de aktiviteiten die de N.O.F. in het nabije verleden meer en meer in de praktijk is gaan ontwikkelen. Tot voor vijf jaar was het werkterrein van de Stichting N.O.F. beperkt tot de produktie en/of bewerking van, de distributie van en de onderwijskundige voorlichting over het gebruik van 16 mm geluids- en stomme onderwijsfilms en filmstroken of diaseries.

In de loop van de laatste vijf jaar heeft de N.O.F. zich niet alleen beziggehouden met de produktie en verspreiding van geluidsbanden, grammofoonplaten, geluidsdiaseries, televisieprogramma's e.d., maar ook werden er vooral met betrekking tot de voorlichting aan de scholen over het talenprakticum, de 8 mm film, de overheadprojector en praktisch alle andere momenteel voorhanden zijnde hard- en software grote aktiviteiten ontwikkeld.
De stichting heeft daartoe de beschikking over een uitgebreide dokumentatie over de bestaande hardware, zij adviseert mede internationale organisaties, alsmede de industrie op het terrein van de ontwikkeling van nieuwe apparatuur; zij beschikt over een kennis van zaken met betrekking tot de hanteerbaarheid en bruikbaarheid van moderne apparatuur, zowel in technische als onderwijskundige zin.

De Stichting N.I.A.M. kan voor haar voorlichtingsaktiviteiten over zowel hardware als software putten uit het internationale aanbod te dezer zake, tot stand gekomen via de International Council for Educational Media - I.C.E.M. (voorheen I.C.E.F.), Raad van Europa en de O.E.S.O.
De stichting hoopt dat door deze naams- en statutenwijziging een duidelijker beeld van wat zij in feite doet en in de toekomst tot haar taak rekent, tot stand zal komen. Ultimo februari 1970 zullen geïnteresseerden over deze materie nader worden geïnformeerd.

Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht*

B. L. van der WAERDEN
Zürich

I

Der Begriff Logarithmus wird von den Schülern im allgemeinen nur sehr schwer verstanden. Die holländischen Schüler zumindest reagieren mit Unwillen auf diesen Begriff. Das habe ich nicht nur als Schüler bei meinen Klassenkameraden beobachten können, sondern es wurde mir von erfahrenen Mathematiklehrern mehrfach bestätigt.

Der Unwille bezieht sich nicht auf das Rechnen mit Logarithmen. Gegen die Formel

$$\log a\,b = \log a + \log b \tag{1}$$

hat man gar nichts: sie ist leicht zu lernen und sehr nützlich. Aber die Lehrer wollen durchaus nicht, dass man die Formel (1) mechanisch anwendet, sondern man muss sie auch verstehen, und dafür muss man die Definition des Logarithmus kennen. Immer wieder ärgert der Lehrer seine Schüler mit Theoriefragen, und immer wieder muss er seufzend feststellen, dass einige Schüler trotz allem noch nicht verstanden haben, was $\log a$ bedeutet. Woran liegt das? Ich meine, es liegt einfach daran, dass die Schüler recht haben. Zunächst haben sie vom nüchternen, praktischen Standpunkte aus recht. Die Logarithmen sind ein Werkzeug, und Werkzeuge kann man ganz gut benutzen, ohne zu wissen, wie sie gemacht werden.

Hier halte ich einen Augenblick inne, denn ich erwarte lebhaften Widerspruch. Die Mathematik ist nicht nur als Hilfsmittel für Ingenieure da, so wird man sagen. Der Mathematikunterricht dient vor allem dazu, die Schüler zum exakten Denken zu erziehen.

Sehr gut, ganz einverstanden. Aber gerade, wenn wir an diesem hohen Ideal festhalten, müssen wir erkennen, dass unsere Schüler mit ihrer instinktiven Abneigung recht haben, nicht nur vom praktischen, sondern erst recht vom theoretischen Standpunkte aus. Das, was die Schüler so hartnäckig nicht verstehen, nämlich die Definition des Logarithmus, *das kann man nicht verstehen, weil es nicht richtig ist.*

---

*) Met toestemming van de uitgever overgenomen uit Elemente der Mathematik, XII/1, 1957, uitg. Birkhäuser Verlag, Basel.

Die Definition lautet, wenn wir uns auf die Zehnerlogarithmen beschränken, so: $\log a$ ist die Lösung der Gleichung

$$10^x = a. \tag{2}$$

Nehmen wir für a eine ganze Zahl, die keine Zehnerpotenz ist, etwa $a = 3$. Ich behaupte: *Wenn wir uns an die Definition der Potenz halten, so wie sie in der Schule gegeben wird, so ist die Gleichung* (2) *unlösbar.*
Nämlich: 10^x ist nur definiert für den Fall $x = \pm m/n$, wo m und n gewöhnliche ganze Zahlen sind. Da in unserem Falle $a > 1$ ist, kommt nur $x = +m/n$ in Betracht. Die Gleichung (2) bedeutet dann

$$10^m = a^n. \tag{3}$$

Die linke Seite von (3) ist gerade, die rechte für $a = 3$ ungerade; also ist (3) für $a = 3$ unmöglich. Auch für $a = 2$ ist (3) unmöglich, denn die linke Seite endigt im Dezimalsystem mit der Ziffer Null und die rechte nicht. Die Gleichung (3) ist in ganzen Zahlen nur dann lösbar, wenn a der Reihe der Zehnerpotenzen $1, 10, 10^2, \ldots$ angehört. Folglich ist die Definition des Logarithmus, so wie sie in der Schule gegeben wird, unhaltbar. Ein Logarithmus im Sinne unserer Definitionen existiert nicht. Wir wollen die Schüler zum exakten Denken erziehen, aber wenn sie wirklich exakt und konsequent denken, so kommen sie darauf, dass wir etwas Unmögliches postuliert haben, nämlich die Lösung der Gleichung (2)!
Man könnte einwenden: Zugegeben, in rationalen Zahlen x ist (2) unlösbar, aber es gibt eine irrationale Lösung $x = \log a$.
Ich antworte: im Sinne der Schuldefinitionen gibt es keine irrationale Lösung, denn für irrationale x ist 10^x gar nicht definiert.
Einwand: So streng kann man in der Schule gar nicht sein. Es kommt öfters vor, dass man Begriffe nicht exakt definiert, zum Beispiel den Begriff Flächeninhalt, weil die exakte Definition fur die Schüler zu schwer ist. Es kommt auch vor, dass man Sätze nur für rationale Verhältnisse beweist und sie nachher ohne Beweis auf irrationale Verhältnisse überträgt. Ein gewisser Mangel an Strenge ist im Schulunterricht unvermeidlich.
Meine Antwort: Ich verlange gar nicht, dass alle Begriffe exakt definiert werden. Der Begriff Flächeninhalt ist ein vorwissenschaftlicher Begriff, den die Schüler auch ohne Definition erfassen und der durch die exakten Rechnungen über Flächeninhalte nur verschärft, nicht definiert wird. Man braucht auch nicht alle Sätze exakt zu beweisen. Wenn die Sätze richtig sind und dem Schüler einleuchten, wird er sie sehr gerne ohne Beweis lernen.
Aber beim Logarithmus verhält es sich ganz anders. Was der Schüler hier zu lernen hat, ist nicht von vornherein einleuchtend. Die Definition der Potenz c^x ist nicht eine Präzisierung eines anschaulich schon vorhandenen Begriffes, sondern eine willkürliche Festsetzung:

$$c^{m/n} = \sqrt[n]{c^m}. \tag{4}$$

Wenn man eine solche Definition einführt, so muss man sich auch daran halten. Unterschiebt man nachher einen anderen Begriff der Potenz, den man gar nicht definiert hat (nämlich c^x für beliebige reelle x), so ist das eine Begriffsverwechslung. Man schult das Denken nicht, sondern man verdirbt es.

Gibt es einen Ausweg aus dieser verfahrenen Situation?

Man könnte zunächst daran denken, die richtige Definition der Funktion c^x für reelle x zu geben. Man müsste x durch rationale Zahlen approximieren und so c^x als Limes erhalten. Um die Sache anschaulich zu machen, würde man die Funktion $y = c^x$ graphisch darstellen, sie zunächst für einige rationale x berechnen und durch die erhaltenen Punkte eine glatte Kurve legen.

Ich glaube, dass dieser Weg praktisch nicht gangbar ist. Diese Definition von c^x ist, auch wenn man über alle Beweise hinweggleitet, zu kompliziert. Kein Schüler wurde verstehen, wozu das alles dient. Die Abneigung gegen Potenzfunktion und Logarithmus würde nur noch grösser werden.

Ein anderer Ausweg wäre, nicht den exakten Logarithmus, sondern nur den vier- oder fünfstelligen Logarithmus zu definieren. Die Angabe

$$\log 2 = 0{,}30103$$

würde dann bedeuten

$$10^{0{,}301025} < 2 < 10^{0{,}301035}.$$

Der Logarithmus als praktisches Werkzeug könnte in dieser Weise definiert und gerechtfertigt werden, aber man müsste mit in Kauf nehmen, dass zum Beispiel die Formel (1) nicht exakt, sondern nur genähert (mit einem Fehler von höchstens 0,00001) gilt. Ich glaube nicht, dass dieser Weg den Lehrern sympatisch sein wird.

Ein dritter Weg wäre, nicht zu sagen, was ein Logarithmus ist, sondern nur die Formel (1) und ihre Folgerungen

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \tag{5}$$

$$\log a^r = r \log a \qquad \left(r = \pm\frac{m}{n}\right) \tag{6}$$

zu bringen. Man dekretiert einfach: Es gibt eine Funktion $\log x$, welche die Eigenschaften (1) und

$$\log 10 = 1 \tag{7}$$

hat. Die Mathematiker haben sie definiert, berechnet und tabuliert; die Tafel habt ihr vor euch. Die Definition braucht ihr nicht zu lernen.
Ich glaube, die meisten Schüler wären sehr zufrieden mit dieser Methode, aber die meisten Lehrer nicht. Die Methode gibt nämlich, ebenso wie die vorige, gar keine Einsicht in das Wesen der Logarithmen. Gibt es nichts Besseres? Ich meine, ja. Im zweiten Teil werde ich darauf zurückkommen.

II

Felix Klein hat einen Weg gewiesen, wie man die Logarithmen einführen kann, indem man vom natürlichen Logarithmus

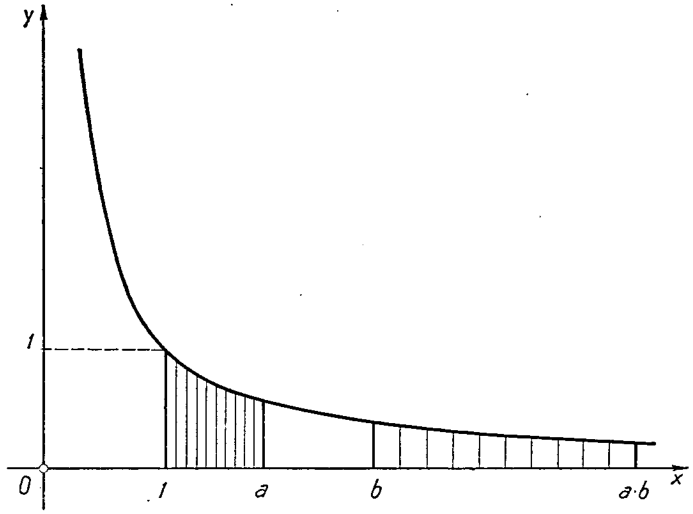
$$\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x} \tag{1}$$

ausgeht. Ich glaube, dass dieser Weg für den Schulunterricht gangbar gemacht werden kann. Die bisherigen Darstellungen, soweit sie mir bekannt sind, sind allerdings zu kompliziert und setzen zuviel voraus. Ich gebe daher im folgenden eine einfache Darstellung, mit der man den Versuch einmal machen könnte. Ich selbst habe diesen Aufbau in den letzten 5 Jahren in meiner Vorlesung für Chemiker, Biologen und andere Naturwissenschafter regelmässig vorgetragen. Der Erfolg hat meine Erwartungen übertroffen. In den Übungen und Prüfungen zeigte sich, dass die meisten Studenten die Sache gut verstanden hatten. Einige sagten mir spontan, dass die Methode ihnen besser gefiele als die Schulmethode.
In der Schule kann man natürlich nicht vom Integral ausgehen, wohl aber vom Flächeninhalt, da dieser Begriff als anschaulich klar vorausgesetzt werden kann. Wir zeichnen also die Kurve $y = 1/x$, beschränken uns auf den ersten Quadranten und definieren den *natürlichen Logarithmus* $\ln a$ als den Flächeninhalt des krummlinigen Vierecks unter der Kurve und zwischen den senkrechten Geraden $x = 1$ und $x = a$. Ist $a = 1$, so ist der Flächeninhalt Null; ist $a < 1$, so rechnen wir ihn negativ.
Jetzt wollen wir die Formel

$$\ln a b = \ln a + \ln b \tag{2}$$

beweisen. Wir führen den Beweis nur für positive Logarithmen, nehmen also $a > 1$ und $b > 1$ an.
Das eben genannte krumme Viereck nennen wir $(1, a)$. Wir dehnen es in der x-Richtung aus, indem wir die Abszissen aller Punkte mit b multiplizieren. Dann ist anschaulich klar, dass der Flächeninhalt auch mit b multipliziert wird. Jetzt pressen wir das Viereck in der y-Richtung zusammen, indem wir die Ordinaten aller Punkte durch b dividieren. Wenn die Höhen durch b dividiert werden, so wird der Flächeninhalt natürlich auch durch b dividiert. Im End-

effekt bleibt der Flächeninhalt des Vierecks $(1, a)$ bei der Dehnung und Pressung ungeändert.



Das Produkt $x\,y$ bleibt, wenn die x mit b multipliziert und die y durch b dividiert werden, ungeändert. Die Kurve $x\,y = 1$ geht also bei dieser Operation in sich über. Also geht das Viereck $(1, a)$ in das Viereck $(b, a\,b)$ unter derselben Kurve über, und beide Vierecke haben den gleichen Flächeninhalt:

$$(1, a) = (b, a\,b).$$

Nun addiert man beiderseits $(1, b)$ und erhält

$$(1, a)+(1, b) = (1, a\,b)$$

oder

$$\ln a+\ln b = \ln a\,b.$$

Damit ist (2) bewiesen.
Aus (2) folgt leicht

$$\ln a\,b\,c = \ln a+\ln b+\ln c$$

und analog für Produkte aus 4 und mehr Faktoren. Insbesondere gilt

$$\ln a^n = n \cdot \ln a. \tag{3}$$

Ersetzt man in (2) a durch a/b, so erhält man

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \tag{4}$$

insbesondere für $a = 1$ wegen $\ln 1 = 0$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b. \tag{5}$$

Der natürliche Logarithmus $\ln a$ ist nur für positive a definiert. Lässt man a anwachsen, so wächst der Logarithmus; das folgt direkt aus der Definition. Er wächst sogar über alle Grenzen; das folgt aus (3), denn die rechte Seite von (3) kann beliebig gross gemacht werden.

Für $a = 1$ ist $\ln a = 0$. Wird a grösser als 1, so wird $\ln a$ positiv. Wird a nur wenig vergrössert, so wächst $\ln a$ auch nur wenig. Der Logarithmus wächst also nicht sprunghaft, sondern allmählich an. Da er schliesslich über alle Grenzen wächst, so nimmt er jeden positiven Wert c genau einmal an. Wegen (5) nimmt er auch jeden negativen Wert $-c$ an. Da er den Wert 0 ebenfalls annimmt, so folgt: $\ln x$ *nimmt jeden reellen Wert genau einmal an.*

Auf dieser Eigenschaft beruht die Möglichkeit des 'Zurücksuchens' von Logarithmen. Wir können es an Hand der ln-Tafel einüben. Dadurch wird der Schüler mit der Umkehrung des Logarithmus so vertraut, dass sie ihm zuletzt ganz selbstverständlich erscheint.

Die ln-Tafel kann auch zum bequemen Wurzelziehen benutzt werden. Aus (3) folgt nämlich, wenn $a = b^{1/n}$ gesetzt wird,

$$\ln b^{1/n} = \frac{1}{n} \ln b. \tag{6}$$

Aus (6) folgt weiter, indem man beide Seiten mit m multipliziert,

$$\ln b^{m/n} = \frac{m}{n} \ln b. \tag{7}$$

Man sieht leicht, dass (7) auch für negative Exponenten $-m/n$ sowie für den Exponenten Null gilt. Also hat man ganz allgemein

$$\ln a^r = r \ln a \qquad \left(r = \pm\frac{m}{n}\right). \tag{8}$$

Jetzt kommt der zweite springende Punkt. Wir *definieren* für beliebige reelle Zahlen s und positive a die Potenzen a^s durch die Formel

$$\ln a^s = s \ln a. \tag{9}$$

Für die Definition (9) ist wesentlich, dass man von vornherein weiss, dass zu jedem Logarithmus eine einzige Zahl gehört. Für solche Zahlen s, die sich in der Form $\pm m/n$ schreiben lassen, ist die neue Definition in Übereinstimmung mit der alten. Die neue Definition ist aber allgemeingültig; sie gilt zum Beispiel auch für $s = \sqrt{2}$.

Damit alles auch für schwache Schüler verständlich bleibt, habe ich die Begriffe Rational und Irrational, die erfahrungsgemäss schwer sind, nicht benutzt. Ich spreche nur von 'Zahlen der Form $r = \pm m/n$' und 'anderen Zahlen, zum Beispiel $\sqrt{2}$'.

Den praktisch veranlagten Schülern wird die Definition (9) insofern sympathisch sein, als sie uns ein Mittel in die Hand gibt, eine Potenz, wie $2^{0,3}$, mit der ln-Tafel schnell zu berechnen. Die Definition (9) ist viel direkter und einfacher als die früher erwähnte, bei der die Zahl s durch rationale Zahlen r approximiert wurde.

Die Rechenregeln für Potenzen

$$a^s a^t = a^{s+t}, \tag{10}$$

$$(a\,b)^s = a^s b^s, \tag{11}$$

$$(a^s)^t = a^{st} \tag{12}$$

sind sehr leicht zu beweisen. Man bildet immer links und rechts den Logarithmus und stellt fest, dass jeweils links und rechts dasselbe herauskommt.

Wir stellen uns jetzt das Problem, die Gleichung

$$10^x = a \tag{13}$$

zu lösen. Wir bilden auf beiden Seiten von (13) den Logarithmus und finden

$$x \ln 10 = \ln a.$$

Die Lösung von (13) heisst also

$$x = \frac{\ln a}{\ln 10}. \tag{14}$$

Diese Lösung heisst *Zehnerlogarithmus von a*, kurz ${}^{10}\log a$ oder noch kürzer $\log a$. Die Definition des log heisst also

$$\log a = {}^{10}\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}. \tag{15}$$

Die Grundeigenschaften des log, nämlich

$$\log a\,b = \log a + \log b, \tag{16}$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \tag{17}$$

$$\log a^s = s \log a, \tag{18}$$

$$\log 1 = 0, \tag{19}$$

$$\log 10 = 1 \tag{20}$$

folgen unmittelbar aus der Definition (15).
Wenn man will, kann man auch Logarithmen mit beliebiger Basis einführen. Die Definition ist ganz analog:

$${}^{c}\!\log a = \frac{\ln a}{\ln c}. \tag{21}$$

Damit wäre der Stoff für die mittleren Klassen wohl erschöpft. In der höchsten Klasse kann man noch einmal an die Definition des ln erinnern und sie als

$$\ln a = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx \tag{22}$$

schreiben. Daraus folgt dann

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \tag{23}$$

eine Formel, deren Beweis in der traditionellen Differentialrechnung ziemliche Schwierigkeiten bietet.
Will man auch die Exponentialfunktion $y = e^x$ definieren und differenzieren, so muss man zunächst die Basis e einführen. Sie wird am einfachsten durch

$$\ln e = 1 \tag{24}$$

definiert (wir wissen ja, dass zu jedem ln-Wert eine einzige Zahl gehört). Als Spezialfall von (21) hat man nun

$${}^{e}\!\log a = \ln a. \tag{25}$$

Ebenso wie der Zehnerlogarithmus die Lösung der Gleichung $10^x = a$ war, so ist der natürliche Logarithmus die Lösung der Gleichung $e^x = a$. Der Beweis ist derselbe wie für den Zehnerlogarithmus.

Die Lösung der Gleichung $e^x = y$ heisst also $x = \ln y$, das heisst, die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion des Logarithmus. Als solche kann man sie auch differenzieren:

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = 1 : \frac{d\ln y}{dy} = 1 : \frac{1}{y} = y = e^x. \tag{26}$$

Auch der Beweis der Formel

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{27}$$

ist ganz leicht. Man braucht nur auf beiden Seiten von (27) den ln zu bilden und $x/n = h$ zu setzen; dann reduziert sich die Behauptung auf

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} x = x. \tag{28}$$

Nun ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$$

einfach die Ableitung des Logarithmus bei Eins, also Eins. Damit ist (28) und daher auch (27) bewiesen. Als Spezialfall von (27) für $x = 1$ folgt die bekannte Formel

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{29}$$

die manchmal als Definition von e benutzt wird.

Aber das sind Zusätze, die man auch dem Hochschulunterricht überlassen kann. Die Hauptsache ist die Definition des Logarithmus vom Flächeninhalt aus. Gerne möchte ich das Urteil der Lehrer darüber vernehmen, ob diese Definition für die Schule brauchbar erscheint.

Nachtrag. In dem Buche von W. Breidenbach, *Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht*, 3. Auflage (Verlag Brandstetter, Leipzig, 1944) sind die Logarithmen genau so eingeführt wie hier.

Het 1e Internationale Wiskundeonderwijs Congres

1 Dit congres van de Commission internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM) werd van 25 t/m 30 augustus 1969 gehouden te Lyon. Tot het organiseren van dit congres was besloten tijdens het colloquium van de CIEM te Utrecht in augustus 1967. Het congres stond onder voorzitterschap van H. Freudenthal, secretaris was M. Glaymann, terwijl het organiserende comité verder gevormd werd door L. Gillman, J. Novak, S. Sobolev, H. G. Steiner, S. Straszewicz, B. Thwaites en I. Wirszup.

2 De CIEM kan op een zeer geslaagd congres terugzien. Geslaagd in twee opzichten:

1e een groot aantal deelnemers; de officiële lijst vermeldt meer dan 650 'active members', wel ongekend veel voor een wiskundeonderwijs congres. Daarbij komen dan nog de ongeveer 100 'associate members', die de congressisten begeleidden.

2e de gevarieerdheid van de aangeboden onderwerpen.

3 Wij hadden het voorrecht het congres bij te wonen op uitnodiging van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde; in totaal namen 23 Nederlanders aan het congres deel, zeker een goede vertegenwoordiging.

4 De activiteiten gedurende het congres kunnen we onderscheiden in vijf groepen:

a grote voordrachten
b korte mededelingen
c forum-discussies
d tentoonstelling van boeken en enig ander onderwijsmateriaal
e een klas van Engelse leerlingen, die gedurende een aantal uren per dag bezig waren met verschillende opdrachten (Mathematics Workshop).

5 De grote voordrachten werden gehouden op uitnodiging van de congresleiding; in totaal waren er 20 elk van een uur. Alle werden door tolken gelijktijdig vertaald, zodat men keuze had uit Frans, Duits of Engels om ze te volgen. Wij hebben begrepen dat de teksten van alle voordrachten zullen worden gepubliceerd (in Educational Studies in Mathematics), zodat wij hier geen samenvatting zullen geven. Sommige van de lezingen waren vol idealisme over wat er zou moeten gebeuren in het wiskundeonderwijs, er waren verslagen van experimenten door leiders, die zich soms al te weinig kritisch opgesteld hadden tegenover eigen werk. Maar in 't algemeen waren ze voldoende leerzaam en het enthousiasme waarmee ze gebracht werden werkte vaak aanstekelijk. In 't bijzon-

der de voordrachten van Armitage (The relation between abstract and concrete mathematics at school), Begle (The role of research in the improvement of mathematics education), Engel (The relevance of modern fields of applied mathematics for mathematical education), Revuz (Le premier pas en analyse), Emma Castelnuovo (Différentes représentations utilisant la barycentre), Pollak (How can we teach applications of mathematics?) menen wij hier te moeten vermelden.

6 De korte mededelingen konden gehouden worden door ieder die daartoe tijdig het verlangen te kennen had gegeven. De duur was 15 minuten. Het programma vermeldde er niet minder dan 45. Tot onze spijt moesten we constateren dat er geen enkele Nederlandse bij was.
Van alle voordrachten ontving elke congressist de tekst of korte samenvatting van te voren, zodat men in staat was een keuze te maken welke men wilde bijwonen. In 15 minuten kan men niet zo heel veel zeggen, maar sommige inleiders zijn er in geslaagd – ook al door de soms uitvoerig geschreven tekst – ons veel informatie over hun probleem te geven. Problemen van allerlei aard: hoe breng je een bepaald stukje wiskunde in de klas?, verslag van experimenten, vergelijking van onderwijsmethodes, doelstelling, hulpmiddelen. Een enkele keer zelfs geïllustreerd met een groots opgezette film. Bij elkaar veel stof om nader te overdenken.

7 De Forum discussies, die niet in het oorspronkelijke programma nader waren aangekondigd, maakten een o.i. zeer belangrijk en belangwekkend deel van het programma uit. Ieder van ons is van mening dat ze bijna alle zeer praktisch en zeer reëel waren. Misschien mogen we ze wel het meeste geslaagde deel van het gehele congres noemen. De onderwerpen van de discussies waren het aanvangsonderwijs in de meetkunde, de plaats van de logica in het onderwijs, de rol van de computer in de wiskunde, het aanvankelijk onderwijs in de analyse, onderwijs in waarschijnlijkheidsrekening, didactisch materiaal, psychologie en pedagogie, geprogrammeerde instructie (met C.A.I. = computer aided instruction), internationale samenwerking.
De discussies werden druk bezocht. Ze waren in de middag geplaatst in dezelfde tijd dat de korte mededelingen uitgesproken werden. Dat daardoor die laatste weinig publiek trokken ligt voor de hand, vooral ook doordat de inhoud ervan aan de deelnemers was uitgereikt.

8 De boekenexpositie trok zeer veel belangstelling.
Er waren zeer veel inzendingen uit allerlei landen. Gelukkig was Nederland daarbij: we vonden een gevarieerd pakket van onze schoolboeken. We moesten constateren dat Nederland in vergelijking met landen als Frankrijk, Engeland en de Verenigde Staten wat het basisonderwijs betreft nog ver achterblijft. De tentoongestelde rekenmachines – die ook gedemonstreerd werden – hadden begrijpelijkerwijs nogal wat kijkers. De prijzen ervan lagen voor Nederlandse begrippen erg hoog.

9 De klas met Engelse kinderen (eind basis – begin voortgezet onderwijs) werkte in groepjes aan opdrachten van allerlei soort. Het was een genoegen te ervaren, hoe de wiskundige spelen en het andere materiaal gehanteerd werden. De Engelse markt biedt veel aan. Bovendien was er vrij veel door kinderen of leraren vervaardigd onderwijsmateriaal. Ons troffen in het bijzonder de logische spelletjes, waarvan de kinderen empirisch de strategie ontdekten; het beredeneren ervan bleek een moeilijkheid van hoger niveau.
Als we goed ingelicht zijn stond deze manifestatie onder leiding van de Association of Teachers of Mathematics, de Engelse vereniging van wiskundeleraren, die nog slechts 17 jaar bestaat, maar in die tijd een enorme activiteit ontwikkeld heeft (6500 leden).

10 Voor degenen, die na het drukke programma – elke dag van 9–18.30 u. (onderbroken door de lunchpauze) – nog behoefte hadden om iets meer te doen, waren er 's avonds nog films en voortzettingen van de discussies, soms ook discussies over gehouden inleidingen.
Het bleek dat de heer Glaymann en zijn medewerkers een zeer geavanceerde T.V.-serie 'moderne wiskunde' hebben gemaakt. De serie zou in Nederland voor belangstellende leraren en anderen beschikbaar moeten zijn.

11 Dat een dergelijk groot congres een goede organisatie vereist behoeven we niet op te merken. We kunnen slechts constateren, dat die er ook was. De excursie ter afwisseling op de woensdagmiddag en -avond naar Beaujolais (het landschap, de wijnkelders, het diner) was één van de zeer goed geslaagde programmapunten. Dat het uitstapje met meer dan 700 personen zeer plezierig verliep (goede mogelijkheden tot versteviging of het leggen van onderlinge contacten!) wijst er alleen maar op dat de organisatie inderdaad niets te wensen overliet. Op deze plaats willen wij onze waardering hier nog voor uitspreken.
Van het gehele congres menen we te mogen vaststellen dat het aan zijn doel beantwoord heeft. De leiding kan er met tevredenheid op terugzien.

november 1969.

J. van Dormolen
F. Goffree
A. M. Koldijk
G. A. Vonk
B. J. Westerhof
E. J. Wijdeveld.

Het examenprogramma voor de akte wiskunde l.o.

Voor de opleidingen voor de akten 1e, 2e en 3e graad, zoals die genoemd worden in de Wet op het Voortgezet Onderwijs zijn nog geen programma's, nog geen richtlijnen vastgesteld. Bij de behandeling van de begroting van Onderwijs in november j.l. hebben we kunnen beluisteren dat er een goede kans is dat met een aantal opleidingen bij wijze van experiment in het cursusjaar 1969–1970 kan worden begonnen.
Zolang er geen definitieve regeling is zullen de opleidingen en examens voor de oude akten nog voortgezet worden. Het is zeer verstandig dat voor de lager akte-wiskunde nog een nieuw, modern programma is vastgesteld. Wij verheugen ons hierover. Hieronder laten wij volgen de tekst van het betreffende KB (nr 313), het bijbehorende programma met toelichting, een uitgebreide toelichting namens de examencommissie met daarbij nog een opmerking van belang voor hen die in 1970 examen doen. (red)

STAATSBLAD-313

Besluit *van 1 juli 1969, houdende wijziging van het Examenbesluit lager onderwijs wiskunde.*

WIJ JULIANA, BIJ DE GRATIE GODS, KONINGIN DER NEDERLANDEN, PRINSES VAN ORANJE-NASSAU, ENZ., ENZ., ENZ.

Op de voordracht van de staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen van 14 mei 1969, nr. KBO/OBK/1-390580, Directie Kleuter- en Basisonderwijs;

Gelet op artikel 116, zesde lid, van de Overgangswet W.V.O. (*Stb.* 1967, 386);

De Onderwijsraad gehoord (advies van 28 februari 1969, nr. OR III/78713 L.O.);

De Raad van State gehoord (advies van 4 juni 1969, nr. 31);

Gezien het nader rapport van de staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen van 24 juni 1969, nr. 395081, Directie Kleuter- en Basisonderwijs;

Hebben goedgevonden en verstaan:

Artikel I
Het programma met toelichting, gehecht aan het Examenbesluit lager onderwijs wiskunde[1], wordt vervangen door het aan dit besluit gehechte programma met toelichting.

Artikel II
1 Dit besluit treedt in werking op 1 januari 1971.
2 Tot en met het jaar 1970 worden de examens afgenomen volgens het programma met toelichting, geldende op 31 december 1970, met dien verstande dat de kandidaten, die bij het in 1970 gehouden examen, al dan niet na afgelegd herexamen, zijn afgewezen en voor een of meer onderdelen een vrijstelling hebben verworven, tot en met het jaar 1972 volgens dat programma zullen worden geëxamineerd.

---

[1]) Koninklijk besluit van 5 februari 1960. *Stb.* 51, laatstelijk gewijzigd bij Koninklijk besluit van 19 november 1965, *Stb.* 522.

Onze minister van onderwijs en wetenschappen is belast met de uitvoering van dit besluit, dat in het *Staatsblad* zal worden geplaatst en waarvan afschrift zal worden gezonden aan de Raad van State en aan de Algemene Rekenkamer.

Soestdijk, 1 juli 1969.

JULIANA.

De staatssecretaris van onderwijs
en wetenschappen,

GROSHEIDE.

Uitgegeven de *tweeëntwintigste* juli 1969.
De Minister van Justitie a.i.,

H. K. J. BEERNINK.

Programma voor het examen ter verkrijging van de akte van bekwaamheid voor het geven van lager onderwijs in het vak wiskunde

a *Analyse*

Structuren.
Bewerkingen in de verzameling van de reële getallen.
Functies, de grafiek van een functie, samenstellen van functies.
Lineaire en kwadratische functies, vergelijkingen en ongelijkheden, eenvoudige lineaire programmering in R_2.
Stelsels van lineaire vergelijkingen met ten hoogste drie veranderlijken; determinanten en matrices.
De goniometrische functies sinus, cosinus en tangens; vergelijkingen en ongelijkheden.
Formules voor:
sin (a $\pm$ b), cos (a $\pm$ b), tan (a $\pm$ b),
sin 2a, cos 2a, tan 2a,
sin a $\pm$ sin b, cos a $\pm$ cos b.
Limieten.
Continuïteit en discontinuïteit van functies; grafieken. In het bijzonder rationale functies, wortelfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies. Vergelijkingen en ongelijkheden die met de genoemde functies verband houden.
Rijen en reeksen, convergentie, rekenkundige en meetkundige rijen.
Het getal e.
Differentiaalquotiënt, afgeleide functie, som-, produkt-, quotiënt- en kettingregel.
Differentiëren van rationale functies, wortelfuncties, exponentiële, logaritmische en goniometrische functies.
Raaklijn aan de grafiek van een functie, buigpunt, extremen, asymptoot; monotonie van functies.
Primitieve functie, bepaalde integraal.
Toepassingen op het berekenen van oppervlakten en inhouden.

b *Meetkunde*

Structuren.
Inleiding in de meetkunde: punt, lijn, vlak, hoek, afstand.
Onderlinge stand van lijnen, van lijnen en vlakken, van vlakken.

Eigenschappen van driehoeken en van de vierhoeken: vlieger, ruit, rechthoek, vierkant, parallellogram, koordenvierhoek.
De stelling van Pythagoras, sinus- en cosinusregel; berekening van hoeken en afstanden, oppervlakten en inhouden.
Puntverzamelingen en verzamelingen van lijnen.
Vektoren.
Meetkundige introductie: optellen en aftrekken, vermenigvuldigen met een scalar.
Opbouw van de meetkunde met behulp van vektoren en getallen.
Metriek: inwendig produkt, normaalvektor, uitwendig produkt.
Coördinaten; vergelijkingen van lijn, cirkel, parabool; vergelijkingen van vlak en bol; bepaling van snijpunten, snijlijnen, raakpunten, raaklijnen, snijvlakken en raakvlakken; punt verzamelingen.
Toepassing op berekening van hoeken, lengten, oppervlakten en inhouden.

c *Wiskundige grondbegrippen*

Structuren, mede aan de hand van eenvoudige problemen uit de analyse en de meetkunde.

d *Didaktiek en methodiek*

Doel van het wiskunde-onderwijs.
Keuze en samenhang van de leerstof; het leerplan; enige bekendheid met de achtergronden van het leerplan.
De functie van het brugjaar; aansluiting en doorstroming.
Voorbereidend wiskunde-onderwijs in de basisschool.
Begrip van inductieve en deductieve methoden; de functie van ongedefinieerde begrippen, axioma's en stellingen; bewijzen, het bewijs uit het ongerijmde, het bewijs door volledige inductie; wiskunde als model van de 'werkelijkheid'.
Fasen in het leerproces. Lesmethoden. Toetsingsproblemen.
Hulpmiddelen bij het onderwijs. Het gebruik van de rekenliniaal en van tabellen.
Kennis van een leergang voor wiskunde-onderwijs op een der scholen waarvoor de akte wiskunde l.o. onderwijsbevoegdheid geeft.

TOELICHTING

De onderdelen *a* en *b* worden schriftelijk geëxamineerd, de onderdelen *c* en *d* mondeling.
Met de structuren, vermeld onder *a*, *b* en *c* worden bedoeld:

Logica.

Proposities, logische variabelen en constanten, negatie, conjunctie, disjunctie, implicatie, equivalentie, waarheidstabellen, tautologie, kwantoren.

Verzamelingen.

Element, lege verzameling, deelverzameling, gelijkheid van twee verzamelingen, doorsnede, vereniging, complement van een verzameling, verschil van twee verzamelingen, verzameling van deelverzamelingen, partitie van een verzameling, verzamelingen en logica.
Operaties binnen een verzameling; groep, commutatieve groep, ondergroep.

Getallen.

De verzameling van de natuurlijke getallen, de verzameling van de gehele getallen, de verzameling van de rationale getallen, de verzameling van de reële getallen.
Deze getalverzamelingen als modellen van groep, ring of lichaam.

Vektoren.

Twee- en driedimensionale vektorruimten; afhankelijkheid en onafhankelijkheid van vektoren; het begrip basis, in het bijzonder orthonormale basis; coördinaten.

Relaties.
Relatie als deelverzameling van het produkt van twee verzamelingen, grafiek, inverse relatie, equivalentierelatie, equivalentieklassen, orderelatie.

Functie, afbeeldingen.
Functies; surjectie, injectie, bijectie; inverse functie.
Transformaties; spiegelingen, translatie, rotatie, vermenigvuldiging; groepen van transformaties en matrices.

In deze structuren komt de eenheid van de wiskunde naar voren; zij dienen in functionele samenhang met de in het programma genoemde onderwerpen te worden bestudeerd. Dit geldt met name ook voor de meetkunde, waar het accent valt op transformaties, vektoren en coördinaten.
Het programma voor didactiek en methodiek wil de studie richten op de belangrijke vernieuwingen die zich in het wiskunde-onderwijs voltrekken, de keuze van de leerstof, onderwijs- en toetsingsmethoden, het voorbereidend wiskunde-onderwijs in de basisschool.

Behoort bij het Koninklijk besluit van 1 juli 1969, *Stb.* 313.

Mij bekend,

De Staatssecretaris van Onderwijs
en Wetenschappen,
GROSHEIDE.

Toelichting op het examenprogramma voor de akte wiskunde l.o.

Inleiding

Sinds enige jaren voltrekken zich zodanige veranderingen in het wiskunde-onderwijs op de scholen waarvoor de akte wiskunde l.o. onderwijsbevoegdheid geeft, dat een aanpassing van het examenprogramma noodzakelijk is. De tegenwoordige situatie, dat men terstond na het behalen van de akte wiskunde l.o. een heroriënteringscursus moet gaan volgen om zich op de hoogte te stellen van de nieuwe methoden en begrippen op het gebied van het wiskunde-onderwijs, is hoogst ongewenst.
De wijziging van het examenprogramma bestaat vooral hierin, dat de voornaamste onderwerpen, die in de afgelopen jaren in de heroriënteringscursussen voor mavo-leraren vanwege de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde werden behandeld, in het programma zijn opgenomen.
Aan de wiskundeleraar met derdegraadsbevoegdheid moet ten minste de eis worden gesteld dat hij de te onderwijzen leerstof beheerst, dat hij deze stof van een hoger standpunt kan bezien dan de leerling, dat hij enig begrip heeft van de grondslagen en de ontwikkeling van de wiskunde en tenslotte dat hij enig inzicht heeft in de wijze waarop de wiskunde kan worden onderwezen.
In het algemeen kan men daarom stellen dat hij een wiskundige kennis dient te bezitten die nodig wordt geacht als basis voor een wetenschappelijke studie van de wiskunde.
Gezien de vooropleiding die de examenkandidaten in het algemeen hebben gehad en de omstandigheden waaronder voor het examen moet worden gestudeerd, zijn, om de omvang van de examenstof te beperken, niet alle onderwerpen uit het v.w.o.-leerplan in het examenprogramma opgenomen. Zo is bijvoorbeeld de statistiek geheel buiten het programma gehouden. Hoewel sommige leraren (bij het technisch onderwijs) gebaat zouden zijn met opneming in

het programma van het onderwerp complexe getallen, moest hiervan om dezelfde reden worden afgezien.
In dit verband verdient misschien het voorkomen van de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening in het programma (en reeds in het vorige programma) enige motivering. Wanneer men de studie voor de akte wiskunde l.o. (en de studie voor leraar derde graad) voor alle kandidaten zou kunnen zien als een voorbereiding op een verdere wiskundestudie, zou men deze onderwerpen wellicht beter naar het examenprogramma voor een hogere bevoegdheid kunnen verschuiven. Zeer vele aktebezitters zetten de studie echter niet voort en daarom zal gezorgd moeten worden voor een brede kijk op het vak, mede in verband met toepassingen. Herhaaldelijk is gebleken dat de bezitters van een oudere akte het ontbreken van deze onderwerpen in hun opleiding als een ernstig gemis ervaren.
Met dit examenprogramma wordt een belangrijk accent gelegd op fundamentele begrippen en op de samenhang van de verschillende onderwerpen. Daartoe wordt een aantal structuren aan de orde gesteld. De bestudering van wiskundige structuren heeft echter pas zin als men in staat is deze in vele modellen te herkennen.
Met de in het programma gevolgde indeling en formulering wordt bedoeld, dat bij het mondelinge examen de genoemde structuren aan de orde worden gesteld, mede aan de hand van eenvoudige problemen uit de analyse en de meetkunde. Bij het schriftelijke examen ligt het accent juist andersom: daar worden problemen uit de analyse en de meetkunde aan de orde gesteld, waarbij echter de structuren niet buiten beschouwing behoeven te worden gelaten.
Het nieuwe programma stelt hoge eisen aan de opleiders voor het examen wiskunde l.o. Om hierbij enigszins behulpzaam te zijn, worden hieronder enkele opmerkingen gemaakt over omvang, niveau en wijze van behandeling van de stof. Zie ook Slotopmerkingen.

Analyse

Onder dit hoofd zijn bijeengebracht onderwerpen uit de getallenleer, de algebra en de infinitesimaalrekening.
Ter aanduiding van niveau en wijze van behandeling zal soms worden verwezen naar bepaalde leerboeken. Een aanduiding (3) bijvoorbeeld verwijst naar het overeenkomstige nummer uit de literatuurlijst. Uiteraard schrijft de examencommissie geen bepaalde leerboeken voor, maar deze werkwijze biedt waarschijnlijk meer hulp dan algemene beschouwingen.
In het bijzonder wordt verwezen naar (1) en (2), geschreven ten behoeve van de cursussen voor mavo-leraren gegeven vanwege de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. De lezing van (3) wordt aanbevolen om kennis te maken met de grote lijn waarlangs een inleiding in de analyse kan worden gegeven. Dit boek bevat geen vraagstukken, maar wel een aantal uitgewerkte voorbeelden. In (2) wordt dezelfde lijn gevolgd met een meer exacte behandeling van de onderwerpen, welke behandeling o.i. te zwaar is voor dit programma. Aanbevolen wordt de studie te beginnen met de hoofdstukken Verzamelingen en Logica uit (1), waarin fundamentele begrippen en formuleringen worden behandeld.

Het examenprogramma spreekt over bewerkingen in het gebied van de reële getallen, terwijl de toelichting de getalverzamelingen ziet als modellen van de structuren groep, ring en lichaam. Nu volgen (1) en (2) verschillende wegen naar het begrip reëel getal: (1) hanteert de genetische methode, uitgaande van de natuurlijke getallen, die worden ingevoerd als kardinaalgetallen van eindige verzamelingen, en (2) volgt de axiomatische methode. Deze wordt ingeleid met een meetkundig model. De in dit model uitgevoerde constructies worden in de theorie vervangen door axiomatisch ingevoerde stellingen van het lichaam van de reële getallen. Beide methoden hebben hun eigen moeilijkheden, esthetische bekoring en didactische waarde.
Dit in aanmerking genomen, wordt in overweging gegeven volgens de eerste methode de verzameling van de rationale getallen op te bouwen zoals aangegeven in (1) 5.1 tot en met 5.4. Deze methode sluit nauw aan bij de op de scholen gevolgde weg en betekent een verdieping van de schoolwiskunde. De invoering van de reële getallen volgens deze methode is echter erg moeilijk en zal veel studietijd vergen.

De in (2) gevolgde weg geeft weer andere moeilijkheden. Vereist is een speciale meetkundige voorbereiding (affiene meetkunde), die overigens in het examenprogramma niet is voorgeschreven. Daarom wordt in overweging gegeven de in (3) aangegeven weg te volgen. Op de gebruikelijke manier beeldt men de rationale getallen op een lijn af. De optelling en de vermenigvuldiging van twee getallen worden gedefinieerd door meetkundige constructies met betrekking tot de beeldpunten van deze getallen. Aangetoond kan worden dat de aldus opgebouwde structuur $\ulcorner \mathbf{Q}, +, . \urcorner$ een lichaam is.
Bij het uitvoeren van de optelling en de vermenigvuldiging maakt men er geen gebruik van dat men met beeldpunten van rationale getallen te doen heeft. Per definitie wordt nu elk punt van de lijn als beeldpunt van een getal (reëel getal) opgevat. Som en produkt van twee reële getallen worden gedefinieerd met behulp van de voor rationale getallen gebruikte constructies. Op deze wijze is het lichaam van de reële getallen $\ulcorner \mathbf{R}, +, . \urcorner$ geconstrueerd, waarvan $\ulcorner \mathbf{Q}, +, . \urcorner$ een deellichaam is.
Bij de ontwikkeling van de analyse binnen het examenprogramma wordt steeds teruggegrepen op dit aanschouwelijk model van de reële getallen.
In dit kader kan ook de grafiek van de lineaire relatie worden behandeld.
Wil men zich nader verdiepen in een meetkundige fundering van de getallen, dan kan bijvoorbeeld worden verwezen naar de 'Streckenrechnung' in 'Grundlagen der Geometrie' van Hilbert.

Relaties en functies worden besproken in hoofdstuk 4 van (1). Een dergelijke behandeling is pas zinvol voor de kandidaten, indien zij op een lager niveau reeds met relaties en functies, zoals deze in de voorbeelden ter illustratie worden aangehaald, kennis hebben gemaakt. Een dergelijke opmerking had ook bij het onderwerp verzamelingen kunnen worden gemaakt, waar immers getallen-voorbeelden worden gegeven, terwijl eerst later de getalsoorten worden gedefinieerd.

Lineaire relaties, functies, vergelijkingen en ongelijkheden zijn reeds uit de schoolboeken bekend. De oplossing van stelsels van lineaire vergelijkingen met twee of drie veranderlijken wordt in verband gebracht met de rang van de coëfficiëntenmatrix, terwijl de oplossing met behulp van determinanten kan worden beschreven. Het belang van matrices en determinanten binnen het examenprogramma ligt echter vooral in de meetkundige toepassingen.
Als toepassing van lineaire ongelijkheden wordt eenvoudige lineaire programmering genoemd. Als voorbeeld wordt hier gewezen op (4), hoofdstuk 12, § 29.
Extremen van kwadratische functies dienen met het oog op de school ook door kwadraatafsplitsing te kunnen worden afgeleid.
Bij gebroken functies kan men zich in het algemeen beperken tot lineairgebroken functies; deze beperking is echter niet nodig bij het bepalen van nulpunten of extremen.
Bij wortelfuncties kan men zich beperken tot het type $x \rightarrow \sqrt{f(x)}$, waarbij $f(x)$ een gehele of een gebroken rationale functie is. Ook functies van x als $|x|$, $E(x)$ en $\text{sign}(x)$ behoren tot het programma.
Bijzondere aandacht verdienen functies die $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$ afbeelden: de rijen. Hoewel van een algemene behandeling geen sprake kan zijn, dient toch gewaakt te worden tegen het postvatten van de mening, dat er slechts meetkundige en rekenkundige rijen en reeksen bestaan. Dit kan worden voorkomen door ook enkele andere rijen en reeksen te bespreken.
Zo kan bijvoorbeeld met behulp van de formule voor $\sum_{1}^{n} k$ ook een formule voor $\sum_{1}^{n} k^3$ worden afgeleid. Naar aanleiding hiervan kan voor $\sum_{1}^{n} k^2$ een formule worden opgesteld en met volledige inductie bewezen.
Men doet er goed aan de konvergentie van een reeks (sommeerbaarheid van een rij) exemplarisch ook aan andere dan meetkundige reeksen te onderzoeken. Zo is gemakkelijk aan te

tonen dat de reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ divergeert maar dat de reeks $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$ konvergeert.

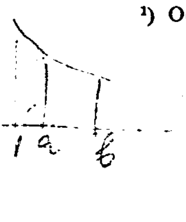
Naast de konvergentie van de machtreeks $\sum\limits_1^\infty x^n$ kan ook die van de reeks $\sum\limits_1^\infty nx^{n-1}$ worden onderzocht.
Algemene konvergentiekriteria behoren niet tot het programma. Het konvergentiekriterium voor een meetkundige reeks kan echter korrekt worden afgeleid.
De goniometrische functies worden op dit niveau, met behulp van meetkundige begrippen gedefinieerd. Door aan de punten op de eenheidscirkel getallen toe te kennen komt een afbeelding van **R** in **R** tot stand; intuïtief kan men deze toekenning van getallen beschrijven met behulp van een winding van de getallenlijn om de eenheidscirkel, waarbij de periodiciteit van de goniometrische functies voor de dag komt.

Alvorens de logaritmische en de exponentiële functies aan de orde te stellen, wordt in overweging gegeven eerst de differentiaal- en integraalrekening met betrekking tot de eerder genoemde functies te behandelen. Hiervoor kan naar verschillende schoolboeken worden verwezen, zoals (5), de hoofdstukken 1, 2 en 3. Ook nu geldt, wat in de toelichting bij het vorige examenprogramma werd vermeld: 'Een strenge opbouw van het begrip bepaalde integraal wordt niet verlangd; het is toelaatbaar dit begrip te laten steunen op een intuïtief oppervlaktebegrip. Partiële integratie wordt niet gevraagd'.
Fundamentele begrippen als limiet en continuïteit dienen met zorg te worden aangebracht. Ook discontinue functies moeten de aandacht hebben.

Hoewel het in de school gebruikelijk is de logaritmeneming als inverse bewerking van de machtsverheffing in te voeren, zijn hieraan, waar het logaritmische en exponentiële functies betreft, grote bezwaren verbonden. Zo blijft het begrip a^x voor reële x in de mist en komt het fundamentele karakter van de natuurlijke logaritme en het getal e niet tot zijn recht.
In overweging wordt gegeven een door Felix Klein aangegeven methode te volgen. In grote lijnen gaat dit als volgt.
Men heeft opgemerkt dat bij differentiatie van een rationale functie nooit $\frac{1}{x}$ wordt verkregen.
Dit kan er aanleiding toe geven de integraal $\int_1^x \frac{dt}{t}$, meetkundig geïnterpreteerd als de oppervlakte van een hyperbooltrapezium, nader te bestuderen. Deze oppervlaktefunctie noemt men de natuurlijke logaritme van x. $\ln x$
Eigenschappen als $\ln 1 = 0$ en $\ln a + \ln b = \ln ab$ worden afgeleid. De monotonie van deze functie garandeert het bestaan van een inverse functie, die de exponentiële functie wordt genoemd.
De wortel van de vergelijking $\ln x = 1$ noemt men e, dus $e = \exp 1$. Eigenschappen als $\exp 0 = 1$ en $\exp(p + q) = \exp p \cdot \exp q$ worden afgeleid.
Naar aanleiding van de eigenschap $\ln a^n = n \cdot \ln a$ voor $n \in \mathbf{N}$, wordt de functie $x^x \to a$ voor $x \in \mathbf{R}$ gedefinieerd door $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$. In het bijzonder geeft dit $e^x = \exp x$.
Het verband tussen de natuurlijke logaritme en de eerder in de algebra degefinieerde ${}^a\log b$ wordt duidelijk als men in de voorlaatste vergelijking voor x substitueert ${}^a\log b$. Dan verkrijgt men $b = \exp({}^a\log b \cdot \ln a)$ of $\ln b = {}^a\log b \cdot \ln a$ en in het bijzonder $\ln b = {}^e\log b$.
Op grond van dit laatste kan men e beschouwen als het grondtal van de natuurlijke logaritmen.
Voor een uitvoerige behandeling zie men (3).[1]

Met het oog op berekeningen in de analyse en de meetkunde moet de kandidaat met tabellen zoals een logaritmentafel en goniometrische tafels en met een rekenliniaal kunnen omgaan, waarbij hij de nauwkeurigheid van verkregen uitkomsten moet kunnen aangeven.

[1]) Ook het artikel van B. L. van der Waerden op pag. 163 van dit nummer (red.).



Meetkunde

Op het eerste gezicht lijkt de eenheid van de leerstof in het examenprogramma ver te zoeken, vooral wanneer men uitgaat van de oude verdeling van de meetkunde in onderdelen. Onderwerpen uit de vlakke meetkunde, uit de stereometrie, uit de analytische meetkunde, uit de vektormeetkunde en uit de trigonometrie schijnen hier bijeengebracht te zijn.
In de toelichting die de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft uitgegeven bij het ontwerp-voorstel leerplan wiskunde heeft men de mogelijkheid opengelaten om de meetkunde op te bouwen volgens drie methoden:

a volgens de traditionele Euclidische opbouw;
b volgens een opbouw die bekend is onder de naam transformatiemeetkunde;
c volgens een methode die vrij snel overgaat in een analytische meetkunde.

Naast deze door de Commissie Modernisering genoemde methoden blijft in principe de opbouw van de meetkunde mogelijk met behulp van vektoren.
Bij het examenprogramma wiskunde l.o. is gekozen voor de opbouw van de meetkunde met behulp van vektoren. Deze wordt tot stand gebracht in nauwe relatie met een analytisch-meetkundige uitbouw in het vlak en in de ruimte.

In een intuïtieve inleiding in de meetkunde kunnen elementaire begrippen aan de orde gesteld worden en kan de onderlinge stand van lijnen en vlakken besproken worden. In deze inleiding dienen ook transformaties behandeld te worden.
Vervolgens kunnen eigenschappen van driehoeken en van de genoemde vierhoeken met behulp van transformaties afgeleid worden.
Berekeningen van hoeken, afstanden, oppervlakten en inhouden kunnen daarna uitgevoerd worden.
Puntverzamelingen en verzamelingen van lijnen behoren eveneens tot de meetkundige inleiding.
Zodra deze basisleerstof aangebracht is, kan de structurering van de meetkunde met de axioma's van een vektorruimte tot stand gebracht worden. Daarbij dient men zich te beperken tot R_2 en R_3.
Vele eigenschappen en stellingen kunnen nu streng deductief afgeleid worden. Het is een vraag van methodisch-didactische aard of men de uitbouw volgens de analytisch-meetkundige methode simultaan moet laten verlopen met een wellicht meer abstracte opbouw van de meetkunde met vektoren. In ieder geval is het noodzakelijk zowel meetkunde met vektoren als algebraïsche meetkunde met vergelijkingen te behandelen.
Het is noodzakelijk dat de kandidaten kennis maken met een deductief systeem waarbij zij voortdurend gebruik kunnen maken van algebraïsche hulpmiddelen. Daarbij mag de vektormeetkunde niet ontaarden in goochelen met formules; de meetkundige interpretatie van de gebruikte vergelijkingen moet de kandidaten goed voor ogen staan. Zij zullen zowel met vektoren als met vergelijkingen de meetkundige problematiek te lijf moeten kunnen gaan, waarbij een gedegen kennis van planimetrische en stereometrische eigenschappen niet mag ontbreken. Aldus ontstaat een samenhangende, gestructureerde twee- en driedimensionale meetkunde. Deze meetkunde is een wiskundig model van onze 'werkelijkheid', gevat in een systeem waarbij ongedefinieerde begrippen, grondregels en stellingen de logische opbouw van het model karakteriseren. De weg tot een andere en/of meerdimensionale vektorruimte is hiermede geopend, zonder dat deze weg behoeft te worden ingeslagen, hetgeen niet betekent dat de generalisatie van een zeer elementair meetkundig grondbegrip in een meerdimensionale vektorruimte niet aan de orde gesteld zou mogen worden.
In de onderstaande uitwerking van het programma voor het onderdeel meetkunde heeft de Commissie de grenzen van de basisleerstof aangegeven. Deze basisleerstof behoort de kandidaat zich eigen te maken alvorens het examen te kunnen afleggen.
Als proeve van behandeling wordt gewezen op de in de literatuurlijst genoemde leerboeken onder 1, 6, 7, 8 (hoofdst. I t/m VI) en 9 (hoofdst. I t/m VIII).

Overzicht van de basisleerstof voor meetkunde

Inleiding

De begrippen punt, lijn en vlak; onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.
Het begrip hoek; hoekeenheid, scherp, recht, stomp, gestrekt; de hoek van twee lijnen, van lijn en vlak, van twee vlakken.
Transformaties: lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, schuifspiegeling, rotatie, vermenigvuldiging; samenstellen van transformaties.
De begrippen congruent en gelijkvormig.
Driehoeken: gelijkbenig, gelijkzijdig, rechthoekig, scherphoekig, stomphoekig; eigenschappen van driehoeken en bijzondere driehoeken.
Vierhoeken: vlieger, ruit, rechthoek, vierkant, parallellogram; eigenschappen van vierhoeken en bijzondere vierhoeken.
Lichamen: piramide, prisma, balk, kubus, doorsneden.
Puntverzamelingen in R_2 en R_3, zoals

$d(X, A) = d(X, B)$	middelloodlijn en middelloodvlak,
$d(X, a) = d(X, b)$ en $a // b$	middenparallel (loodvlak),
$d(X, a) = d(X, b)$ en a snijdt b	twee deellijnen en twee deelloodvlakken,
$d(X, A) = p$	cirkel en bol,
$d(X, a) = p$	twee afstandslijnen en cilinder,
$d(X, \alpha) = d(X, \beta)$ en $\alpha // \beta$	in R_3: middenparallelvlak,
$d(X, \alpha) = d(X, \beta)$ en α snijdt β	in R_3: twee deelvlakken,
$d(X, \alpha) = p$	in R_3: twee afstandsvlakken.

De goniometrische verhoudingen sin, cos en tan.
De stelling van Pythagoras; sinusregel en cosinusregel.
De begrippen afstand, oppervlakte en inhoud; de afstand van punten, lijnen en vlakken; de oppervlakte van driehoek, vierhoek en cirkel; de inhoud van prisma, piramide en bol.
Driehoek met hoogtelijnen, zwaartelijnen, deellijnen, middelloodlijnen; hoogtepunt en zwaartepunt.
Cirkel en bol: cirkel en hoeken, cirkel en driehoek (geen formules voor r_a enz.), cirkel en vierhoek.
Macht van een punt t.o.v. cirkel, machtlijn van twee cirkels.
Bol en viervlak.
Macht van een punt t.o.v. bol; machtvlak van twee bollen.
Bundels: lijnenbundel, cirkelbundel, vlakkenbundel, bollenbundel.
Eenvoudige lijnenverzamelingen, zoals

x door A en x snijdt a,	x door A en $\angle(x, a) = \varphi$,
x door A en $x \perp a$,	x door A en $\angle(x, \alpha) = \varphi$,
x door A en $x // \alpha$,	x door A en $d(X, B) = d$ $[d(A, B) > d]$,
x snijdt a en $x // b$,	x door A en $d(X, a) = d$ $[d(A, a) > d]$,
	x door A en $\angle(x, a) = \angle(x, b)$,
	x door A en $\angle(x, \alpha) = \angle(x, \beta)$.

Vektormeetkunde

Het begrip vektor, optellen en aftrekken, nulvektor, inverse vektor, vermenigvuldigen met een scalar.
Het begrip vektorruimte, definitie van een vektorruimte, basis van een vektorruimte, lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid van een stelsel vektoren.
Vektoren in een coördinatenstelsel, componenten van vektoren en coördinaten, midden van een lijnstuk, deelverhouding op een lijnstuk, zwaartepunt van een driehoek.
Rechte lijn: vergelijking, vektorvergelijking, richtingsvektor; lijnenbundels.

Vlak: vergelijking, vektorvergelijking; vlakkenbundel.
Inwendig produkt van twee vektoren, eigenschappen inwendig produkt.
Orthonormale basis van vlak en ruimte, eenheidsvektoren, lengte van een vektor, afstand van twee punten.
Vektoren en goniometrie, eenheidscirkel, definitie sin, cos en tan, formules voor sin $(\alpha \pm \beta)$, cos $(\alpha \pm \beta)$, sin 2α, cos 2α, sin $\alpha \pm$ sin β, cos $\alpha \pm$ cos β.
Normaalvektor van een lijn, normaalvektor van een vlak; afstand van punt tot lijn, van punt tot vlak; afstand van twee lijnen, van twee vlakken, van lijn en vlak.
Hoek van twee lijnen, hoek van twee vlakken, hoek van lijn en vlak.
Cirkel en bol; vergelijking, vektorvergelijking, cirkelbundel, bollenbundel; snijpunten, snijlijnen, snijcirkel, raaklijnen, raakvlakken van lijnen, vlakken, cirkels en bollen; macht van een punt t.o.v. cirkel en bol; machtlijn van twee cirkels, machtvlak van twee bollen.
Parabool: vergelijking, snijpunten met lijn en cirkel, raaklijn, normaal, brandpunt en richtlijn.
Verzamelingen van punten en van lijnen.
Uitwendig produkt van twee vektoren, eigenschappen uitwendig produkt; oppervlakte van parallellogram en driehoek; inhoud van blok en viervlak.
Matrices; determinanten van de tweede en de derde orde; regel van Cramer.
Transformaties: translatie; rotatie om de oorsprong O; spiegelingen t.o.v. lijn in R_2 (parallel coördinaatas of t.o.v. de lijnen $y = \pm x$) en t.o.v. vlak in R_3 (parallel coördinatenvlak); vermenigvuldiging; congruente transformaties; gelijkvormige transformaties.

Grondbegrippen

Het toevoegen van dit onderdeel aan het programma heeft ten doel de samenhang tussen voorafgaande onderwerpen aan de orde te stellen. Daartoe dienstig is allereerst het onderwerp verzamelingen waarover in de Inleiding van (1) wordt opgemerkt:
'Dè bakermat van de moderne wiskunde is de verzamelingsleer en wel omdat die in zich vrijwel alles verenigt wat wiskunde modern maakt: hij vormt het uitgangspunt van elke structuur; levert een uniforme taal voor de wiskunde en staat in zeer nauw verband met de logica'.

In de logica wordt het gebruik van een aantal uitdrukkingen nauwkeurig omschreven en worden regels voor het (wiskundig) redeneren opgesteld. Voor deze onderwerpen wordt verwezen naar (1), de hoofdstukken 2 en 3. Daarbij komt het begrip axiomastelsel aan de orde, waarvan in een Boolse algebra (1.3 en 3.9) een eenvoudig voorbeeld wordt gegeven.

De begrippen relatie en functie worden in (1) hoofdstuk 4 verzamelingstheoretisch gedefinieerd, later wordt het functiebegrip vooral in logische zin gehanteerd. In hoofdstuk 7 worden verschillende afbeeldingen (transformaties) nader behandeld, zij het in een speciaal verband.

Een begrip dat een groot aantal ogenschijnlijk verschillende onderwerpen onder één gezichtspunt brengt, is het groepsbegrip. Het al of niet gesloten zijn van een verzameling onder een bepaalde operatie heeft reeds bij de uitbreiding van het getalbegrip een belangrijke rol gespeeld, terwijl ook de begrippen neutraal element, inverse, associatief en commutatief aan de orde kwamen.
Deze begrippen behoeven echter niet beperkt te blijven tot getalverzamelingen, maar zij kunnen ook met betrekking tot vele andere verzamelingen worden gehanteerd. Naar aanleiding van een onderzoek van de groepsstructuur aan tal van modellen uit de algebra en de meetkunde worden de axioma's voor de groep opgesteld.
Bij het onderzoek van de groepsstructuur van eindige groepen van niet te grote orde kan men veel steun ondervinden van groepstabellen. In sommige modellen of tabellen kan men gemakkelijk ondergroepen herkennen; men denke bijvoorbeeld aan de spiegelingen in de draaiingen in de symmetriegroepen van de gelijkzijdige driehoek en van het vierkant. Ook de groepen van de orde vier lenen zich voor een interessant onderzoek.
Een beperkt aantal stellingen dient gekend te worden. Voor omvang en niveau wordt verwezen naar (1) hoofdstuk 6, het onderdeel 6.2. Men beperke zich tot eenvoudige opgaven die in direct verband met 6.2. kunnen worden opgelost. Zo kunnen stellingen over ondergroepen

en nevenklassen, normaaldelers, centrum van een groep, kern van een homomorfisme, ringen, lichamen en vektorruimten buiten beschouwing worden gelaten. Men vermijde probleemstellingen die, door hun diepgaande betekenis, het accent zouden verleggen naar een onderzoek van de abstracte structuur. Het is de bedoeling dat de kandidaten in vele modellen uit de algebra en de meetkunde isomorfe structuren herkennen en dan in staat zijn deze onder te brengen in een van de bestudeerde systemen.
Het ligt voor de hand de meetkundige transformaties eveneens in dit licht te beschouwen. Aan dit onderwerp is hoofdstuk 7 van (1) gewijd.
De beschrijving van eenvoudige transformaties in het platte vlak met behulp van de coëfficiëntenmatrix van de transformatievergelijkingen, zoals bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a & 0\\0 & a\end{pmatrix},$$

geeft aanleiding tot het onderzoek van de reguliere (2,2) matrices die onder de bewerking samenstelling een, in het algemeen niet-commutatieve, groep vormem. Hierbinnen kunnen verschillende ondergroepen worden aangewezen zoals de draaiingen om O met de spiegelingen in een lijn door O en de gelijkvormige transformaties. Voor de onderwerpen getallen en vektoren wordt verwezen naar hetgeen hierover bij de onderdelen analyse en meetkunde is opgemerkt.

Didaktiek en Methodiek

De laatste jaren heeft de examencommissie door het jaarlijks aan opleiders en kandidaten verstrekken van een syllabus aanwijzingen gegeven voor de bestudering van dit onderdeel om de kandidaat te noodzaken kennis te nemen van de veranderingen die zich in het wiskundeonderwijs voltrekken. Naast verplichte onderwerpen werden keuze-onderwerpen genoemd. Op deze weg kan worden voortgegaan, zij het dat het wiskundig aspekt van sommige onderwerpen nu bij een van de andere examen-onderdelen kan worden geëxamineerd.
Opnieuw wordt de studie van (4) aanbevolen, met name van de volgende hoofdstukken:
De taal van de wiskunde; logische aspecten; verzamelingsleer.
Dril en inzicht; lesmethoden.
Toetsingsproblemen.
Over inleidende cursussen tot de meetkunde.
Het inleidend algebra-onderwijs.
Het spreekt vanzelf dat de gekozen leergang voor wiskunde mede in het licht van deze onderwerpen moet worden bestudeerd.
Ook de publikaties van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde dienen te worden bestudeerd. In toenemende mate zal het voorbereidend wiskunde-onderwijs in de basisschool belangstelling vragen.
Zodra meer publikaties verschijnen zal ook de didaktiek van nieuwe onderwerpen als statistiek en computerkunde aan de orde worden gesteld.

Literatuur

1 Nieuwe Wiskunde, I, II (en III), door drs. E. J. Wijdeveld.
2 Grondslagen van de leer der reële getallen en de reële analyse, door prof. dr. J. C. H. Gerretsen.
3 Raaklijn en Oppervlakte, door prof. dr. J. C. H. Gerretsen.
4 Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren I, II (en III), door dr. Joh. H. Wansink.
5 Differentiaal- en Integraalrekening, door drs. J. C. Kok e.a.
6 Transformatiemeetkunde, door R. Troelstra e.a.
7 Stereometrie, door dr. A. van Dop en dr. A. van Haselen (inleiding), eventueel gecombineerd met
Inleiding in de stereometrie, werkschrift, door drs. I. Abram.
8 Basis voor de analytische meetkunde, door dr. J. Bijl, dr. D. Kijne en W. J. H. Salet.
9 Meetkunde met vektoren I (en II), door prof. dr. L. R. J. Westermann.

10 Analyse I (en II), door drs. J. van Dormolen.
11 Nieuwe wiskundeopgaven voor l.o., v.h.m.o. en v.w.o., door dr. W. A. M. Burgers en drs. B. J. Westerhof.

Slotopmerkingen

Bovenstaande werd geschreven ter voorbereiding van een mondelinge toelichting op het nieuwe programma door de examencommissie gegeven aan de leraren van C-cursussen voor de akte wiskunde l.o., verbonden aan de opleidingsscholen voor onderwijzers.
Met nadruk stelt de commissie dat in dit stuk geen bindende interpretaties en voorschriften voor de behandelingswijze ten aanzien van de verschillende onderwerpen worden gegeven. Soms wordt een bepaalde methode in overweging gegeven of een mogelijkheid van behandeling genoemd. Dat betekent dat het anders kan, ook al zijn geen alternatieve methoden besproken. Niettemin hoopt de commissie met de aanbieding van dit stuk de opleiders een dienst te hebben bewezen.
Na het schrijven van de toelichting zijn aan de literatuurlijst toegevoegd (10) en (11), welke later zijn verschenen.
In (10) wordt bij de invoering van de exponentiële en de logaritmische functie een andere weg gevolgd dan in de toelichting is aangegeven.

Namens de examencommissie wiskunde L.O. 1969,
drs. B. J. Westerhof

Vrijstellingsregeling bij het examen Wiskunde L.O. 1970

Het K. B. van 1 juli 1969 nr. 10 tot wijziging van het Examenbesluit l.o. wiskunde vermeldt dat kandidaten, die bij het in 1970 gehouden examen (volgens het nu geldende programma), al dan niet na afgelegd herexamen, zijn afgewezen en voor een of meer onderdelen een vrijstelling hebben verworven, tot en met het jaar 1972 volgens dat programma zullen worden geëxamineerd.
De examencommissie zal zoveel mogelijk kandidaten, die in belangrijke mate met de studie volgens het oude programma gevorderd zijn, in de gelegenheid stellen van bovengenoemde bepaling gebruik te maken.
Bij het toekennen van vrijstellingen zal de commissie in 1970 de volgende regels toepassen.

Behaalt een kandidaat op het schriftelijk examen voor enig onderdeel een *zeven* of meer, dan is hij vrijgesteld van het mondeling examen in dat onderdeel. Hij kan dan, ook indien hij van deelname aan het mondeling examen afziet, een vrijstelling voor het betreffende onderdeel doen gel-den op een door hem in 1971 en zo nodig in 1972 af te leggen examen volgens het oude programma.
Behaalt een kandidaat op het schriftelijk examen voor enig onderdeel een *zes*, dan kan hij, ook indien hij van deelname aan het mondeling examen afziet, een vrijstelling doen gelden voor het schriftelijk examen in dit onderdeel op een door hem in 1971 en zo nodig in 1972 af te leggen examen volgens het oude programma. Om te kunnen slagen moet deze kandidaat nog een mondeling examen in dit onderdeel afleggen.
Kandidaten die in 1970 worden afgewezen, doch recht hebben op een vrijstelling op grond van het bezit van een hbs- of gymnasiumdiploma, mogen ook in 1971 en zo nodig in 1972 nog examen afleggen volgens het oude programma.
Verkeert een kandidaat niet in één van deze drie gevallen, maar behaalt hij na afgelegd mondeling examen; (vijf onderdelen) voor enig onderdeel als eindcijfer een *zeven* of meer, dan verkrijgt hij voor dit onderdeel een vrijstelling voor een in 1971 en zo nodig in 1972 af te leggen examen volgens het oude programma.
Bovenstaande regeling is van toepassing op kandidaten die in 1970 in tenminste één van de onderdelen (analyse I, analyse II, meetkunde I, meetkunde II) een schriftelijk examen hebben afgelegd. Tot het mondeling examen worden slechts kandidaten toegelaten die in alle onderdelen een schriftelijk examen hebben afgelegd.

Simon Stevin

Dr. A. J. E. M. SMEUR
Breda

Dezer dagen herdenken wij, dat 350 jaar geleden een der bekendste wiskundigen uit onze vaderlandse geschiedenis overleden is, Simon Stevin. Van zijn werken kan iedereen thans gemakkelijk kennis nemen nu enige jaren geleden de, in 1955 begonnen, heruitgave ervan voltooid is. Over zijn leven is echter maar betrekkelijk weinig bekend. Hij is in Brugge geboren, in 1548. We weten, dat hij in Antwerpen werkzaam geweest is. Daarna (1577) is hij weer in Brugge geweest. In 1581 heeft hij zich te Leiden gevestigd, waar hij zich in 1583 als student heeft laten inschrijven. Hij heeft Pruisen, Polen en Noorwegen bezocht maar 't staat niet vast wanneer dat geweest zou zijn. Wat wel goed bekend is, is zijn relatie met Prins Maurits. We weten weer niet, wanneer die begonnen is maar sinds 1593 had Stevin een functie als ingenieur in het Staatse leger. Stevin heeft de Prins in verschillende takken van wetenschap onderwezen; deze lessen zijn verzameld in *Wisconstighe Ghedachtenissen*, Leiden 1605–1608. Vermaard is de zeilwagen, die hij voor Prins Maurits vervaardigd heeft. Wat zijn overlijden betreft weten we alleen maar, dat dit tussen 20 februari en 8 april in 1620 geweest is, vermoedelijk te 's-Gravenhage.

In de geschiedenis der wiskunde heeft hij zich een vaste plaats verworven als de schepper der thans gebruikelijke decimale breuknotatie. Deze wordt uiteengezet in *De Thiende*, Leiden 1585. Tot dan toe werden (positieve)getallen, kleiner dan de eenheid, geschreven als breuken met teller en noemer. Nam men voor de noemers machten van 10, wat soms wel eens te verkiezen was, dan kan van decimale breuken gesproken worden, die dan echter nog niet positioneel geschreven zijn. Simon Stevin nu gebruikte de positionele getalnotatie, bekend voor natuurlijke getallen, ook voor de breuken. In *De Thiende* is zijn notatie nog omslachtig. Zo schreef hij 364 als 364(0) en $27\frac{847}{1000}$ als 27(0)8(1)4(2)7(3). De definities, die hij erover geeft luiden:

> II. BEPALINGHE. Alle voorgestelde heel ghetal, noemen wy BEGHIN, sijn teecken is soodanich (0).
> III. BEPALINGHE. Ende elck thiendedeel vande eenheyt des BEGHINS, noemen wy EERSTE, sijn teecken is (1); Ende elck thiendedeel vande eenheyt der Eerste, noemen wy TWEEDE, sijn teecken is (2); Ende soo voort elck thiendedeel der eenheyt van sijn voorgaende, altijt in d'oirden een meer.

IIII. BEPALINGHE. De ghetalen der voorgaender tweeder ende derder bepalinghe, noemen wy int ghemeen THIENDETALEN.

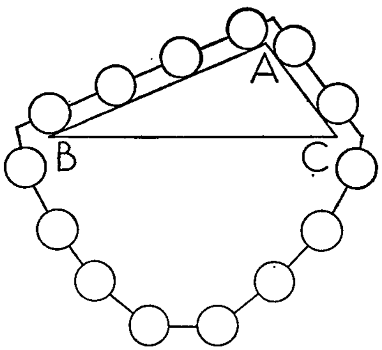
Het is duidelijk, dat in het voorbeeld 27(0)8(1)4(2)7(3) alleen (0) of alleen (3) voldoende zou zijn geweest om de juiste waarde van het getal aan te geven. In latere werken gebruikt Stevin alleen nog maar de tweede genoemde vereenvoudiging terwijl voor ons thans juist de eerste de gangbare is, waarbij dan (0) vervangen is door een komma of punt. Hoe belangrijk Stevins' vondst was voor het breukrekenen kunnen we ons gemakkelijk indenken. Hij zelf was daarmee echter niet tevreden en het is typerend voor hem, dat hij meteen op praktische toepassingen wijst. In een *Aenhangsel* bepleit hij een decimale onderverdeling van munten, maten en gewichten, voorwaar een zeer wenselijk iets in zijn dagen. Het heeft echter nog tot na 1800 moeten duren eer daar een begin mee gemaakt werd. Zijn decimale breuknotatie was echter na enkele tientallen jaren al zeer verspreid.

In 1585 verscheen nog een ander werk van Stevin, zeer uitvoerig, *l'Arithmétique*. In vergelijking met de vele rekenboeken, die destijds onder een zelfde titel verschenen als *Arithmetica*, of ook wel als *Rekenboek* of *Cijferboek*, valt het zijne op door de systematische opzet en de zeer nauwkeurige definities der gebruikte begrippen. Dat is trouwens iets wat van al zijn werken gezegd kan worden. Een gedetailleerde bespreking van *l'Arithmétique* voert te ver. Wij vermelden zijn bijdragen tot meer algemene oplossingsmethodes van vergelijkingen (de algebra werd toen nog als een der vele onderwerpen van de rekenkunde beschouwd). Negatieve en irrationale getallen aanvaardde hij, maar de imaginaire wees hij zeer beslist af. Verder geeft hij, als eerste, een algemene methode aan om de grootste gemene deler van twee veeltermen te bepalen, door namelijk de bekende algoritme van Euclides (voor de g.g.d. van twee getallen) toe te passen.

In 1594 is nog een werkje van 6 bladzijden verschenen, *Appendice Algebraique*. Er is geen exemplaar meer van bekend; de tekst komt echter voor in latere uitgaven van *l'Arithmétique*. Stevin geeft erin een methode om een wortel van een vergelijking numeriek te benaderen, door opvolgende decimalen te berekenen.

Aan de meetkunde heeft hij twee werken gewijd, *Problemata geometrica*, Antwerpen 1583 en *De Meetdaet*, Leiden 1605 (in deel II der *Wisconstighe Ghedachtenissen*). Ze geven niet de leerstof van Euclides maar vooral veel praktische toepassingen. Uitvoerig schenkt hij aandacht aan een speciaal type halfregelmatige veelvlakken, waarvan hij er enkele herontdekt heeft (ze waren namelijk al gevonden door Archimedes, wiens resultaten Stevin onbekend waren).

Van belang is zijn werk op het gebied der mechanica. Uit een originele beschouwing over het evenwicht op hellende vlakken vindt hij de regel over de verhouding der gewichten. Het snoer met bollen, de 'clootcrans', is blijkbaar in rust. Denkt men het vrijhangende deel weg, waardoor het evenwicht niet verstoord zal worden, dan blijkt welke gewichten elkaar op de hellende vlakken in evenwicht houden; ze moeten evenredig zijn met de lengten *AB* en *AC* der hellende



vlakken. De hier afgebeelde figuur, met het opschrift 'Wonder en is gheen Wonder' siert de titelpagina van zijn mechanicaboek *Beghinselen der Weeghconst,* Leiden 1586 en komt nog op verschillende andere werken voor. Bovendien gebruikte Stevin de figuur als merkteken op zijn technische constructies. Hij hechtte zelf dus blijkbaar nogal veel belang aan zijn clootcrans-bewijs. Historici der mechanica hebben er steeds de grootste bewondering voor uitgesproken. Het bewijs is geheel origineel en bovendien zo eenvoudig, dat het voor iedereen, zonder voorkennis, meteen duidelijk is.

Stevin heeft, als eerste, een volledige uiteenzetting gegeven over de krachten, die een vloeistof uitoefent op de bodem en de zijwanden van een vat, en de zogenaamde 'hydrostatische paradox' uitgesproken. Het ons bekende naar Pascal genoemde toestel is al in vrijwel gelijke vorm door Stevin aangewend ter demonstratie van genoemde paradox.

We vermelden nog, dat hij geschreven heeft over sterrenkunde, zeevaartkunde, techniek, boekhouden, bouwkunde (zowel steden- als vestingbouw), muziektheorie en logica.

Naast al zijn wetenschappelijke arbeid moeten we tenslotte nog op iets wijzen, dat alleen van specifiek Nederlands belang is, namelijk zijn ijveren voor de zuiverheid van de taal en het invoeren van thans algemeen gebruikelijke typisch Nederlandse woorden. Voor Stevin was dit niet alleen maar een praktische aangelegenheid maar het kwam voort uit zijn overtuiging, dat de 'Duytsche Tael' boven alle andere te verkiezen is, speciaal voor de wetenschap. Waar mogelijk heeft hij het gebruik van reeds gevormde woorden zo zeer benadrukt, dat ze dank zij hem ingeburgerd zijn. Bestond er voor een vreemd woord nog geen goed Nederlands dan vormde hij er zelf een. Van deze laatste soort noemen we, speciaal voor de wiskunde, als mooiste vondst: evenredigheid (proportio), dus gelijkheid van redens, verhoudingen; verder eenheid (unitas), noemer (nominator), worteltrekking (radicum extractio), stelkunde (algebra), meetkunde (geometria), omtrek (periferia), schuine zijde (hypotenusa), veelhoek (polygonus), kegelsnede (conisectio) [1]. Van de woorden der eerste soort, dus

[1] We schrijven volgens tegenwoordige spelling en gebruik; Stevin heeft, bijv., everedenheyt, meetconst, stelreghel.

reeds gevormde maar waarvan we het gebruik toch in feite aan Stevin danken, noemen we als mooiste: evenwijdig (parallel); verder wiskunde (ars mathematica), driehoek (triangulus), vierkant (quadratum), middellijn (diameter), gegeven (datum) en buiten de wiskunde nog (grond-)beginsel (principium), (eerste) beginselen (elementa), geweten (conscientia), bepaling (definitio), bewijs (demonstratio), ontkenning (negatio), besluit (conclusio). Niet steeds is zijn ijveren met succes bekroond en er zijn ook door Stevin nieuwgevormde woorden te noemen, die, helaas mag men misschien wel zeggen, geen ingang gevonden hebben zoals voor de wiskunde: rond (circulus), langrond (ellips), brandsnede (parabola), wassende snede (hyperbola), uitbreng (productum) en werf (quotient).

Korrel CLV

Benadering van logaritmen

Velen van ons zullen het getal $\sqrt{3}$ invoeren aan de hand van de vergelijking $x^2 = 3$. De methode van insluiting van de positieve oplossing van deze vergelijking tussen twee rijen rationale getallen is algemeen bekend.
Bij de invoering van logaritmen lijkt dat wat minder gemakkelijk te gaan. Weliswaar is het duidelijk dat de oplossing van de vergelijking $2^x = 3$ in het interval (1, 2) ligt, maar een verfijning van dit interval op een manier zoals die bij $\sqrt{3}$ geconstrueerd werd, lijkt hier lastiger en meer tijdrovend.
Toch kan het heel eenvoudig met behulp van onderstaande tabel.

n	2^n	3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	
9	512	
10	1024	
11	2048	

$$\begin{array}{llll} 2^x = 3, \text{ dus} & & & 1 < x < 2 \\ 2^{2x} = 9, \text{ dus} & & 3 < 2x < 4 & 1{,}5 < x < 2 \\ 2^{3x} = 27, \text{ dus} & & 4 < 3x < 5 & 1{,}3 < x < 1{,}67 \\ & \multicolumn{2}{r}{\text{dus i.v.m. de vorige regel:}} & 1{,}5 < x < 1{,}67 \end{array}$$

enz.

na 7 dergelijke stappen vindt men als scherpste begrenzing $1{,}571428 < x < 1{,}600000$. Weliswaar geen al te scherpe begrenzing, maar de leerlingen krijgen enig idee van de grootte van $^2\log 3$ en wel op een zeer elementaire wijze.

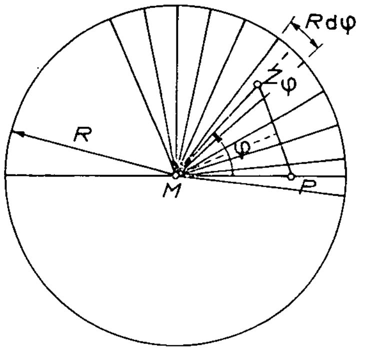
E. C. Buissant des Amorie

Amstelveen.

Korrel CLVI

Een integraal

Het drukke verkeer in steden beschouwende, kan men zich afvragen in hoeverre de vorm van een nederzetting invloed uitoefent op de onderlinge *gemiddelde* bereikbaarheid van willekeurige inwoners.
Voor een *cirkelvormige*, gelijkmatig bewoonde stad is dit berekend; uitgaande van het willekeurige punt P (in het zwaartepunt van een elementair deel der oppervlakte) tot een punt Z_φ ($\angle$ ZMP) $= \varphi$):



$$MP = MZ_\varphi = \tfrac{2}{3}R$$
$$PZ = 2 \cdot \tfrac{2}{3}R \cdot \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{4}{3}R \sin \tfrac{1}{2}\varphi.$$

De *gemiddelde* afstand PZ_φ hemelsbreed is dan:

$$\frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi \tfrac{4}{3}R \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \tfrac{1}{2}R^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{8R}{3\pi}\left[-\cos\tfrac{1}{2}\varphi\right]_0^\pi = \frac{8R}{3\pi} = PZ \text{ gemiddeld.}$$

Ter vergelijking kan men op analoge wijze de gemiddelde afstand van willekeurige punten bij 'lintbebouwing' becijferen, waar voor een rechthoek van L breed $4L$ lang PZ gemiddeld $\approx 1{,}36L$ uitkomt. Op hetzelfde oppervlak herleid is deze gemiddelde afstand circa 40% groter dan bij een cirkelvormige nederzetting

J. H. van der Vlis
Haarlem

Het Zesde Nederlands Mathematisch Congres

Het Zesde Nederlands Mathematisch Congres zal plaatsvinden op 6 en 7 april 1970 in het hoofdgebouw van de T. H. Delft, Julianalaan 132, aldaar,
In verband met de op 6, 7, 8 en 9 april eveneens te Delft te houden G.A.M.M.-Tagung zal het 6e N.M.C. slechts de volgende secties bevatten:

1. Grondslagen en logica
2. Algebra en getallentheorie: discrete wiskunde
3. Analyse
4. Topologie en meetkunde
5. Geschiedenis en didactiek

In deze secties zullen korte voordrachten gehouden worden (duur: 20 minuten, waarna 10 minuten voor discussie), terwijl ook in enkele secties een uitgenodigde spreker een grote voordracht (duur: 45 minuten) zal houden.
Op 7 april zal in de sectie Geschiedenis en Didactiek een symposium gehouden worden, gewijd aan het wiskunde-onderwijs op de scholen voor V.W.O.

Het voorlopige programma hiervan omvat de volgende lezingen:

'Het experiment kansrekening en statistiek', door:
J. J. Wouters te Voorburg

'De computer in het V.W.O.', door:
Prof. dr. A. v.d. Sluis te Utrecht

'Meetkunde met vectoren', door:
Dr. P.G.J. Vredenduin te Arnhem

'Analyse op het V. W. O', door:
Drs. J. van Dormolen te Utrecht

In januari 1970 verschijnt de congresfolder met nadere gegevens en de voorlopige agenda. Man kan zich als spreker aanmelden bij de secretaris-penningmeester van het congres Drs. F. A. Wiggenraad, p/a Afdeling der Algemene Wetenschappen, onderafdeling der Wiskunde, Julianalaan 132, Delft. Tel.: 01730-33222, toestel 5814 of 5801. Deze aanmelding dient te geschieden vóór 1 maart 1970, onder vermelding van de sectie waarin de voordracht gehouden zal worden. Zij die zich als spreker hebben aangemeld ontvangen een formulier waarop zij een korte samenvatting van hun voordracht kunnen geven. Aanmelding als deelnemer kan eveneens geschieden bij de secretaris-penningmeester. (Adres zie boven).

Commissie modernisering Leerplan Wiskunde

Mede in verband met de vele verzoeken daartoe is de C.M.L.W. van plan om in september 1970 o.m. een heroriënteringscursus te organiseren voor leraren-3e-graad, die (globaal) de stof zal omvatten van zowel de eerste als de tweede-jaars heroriënteringscursus, zoals die in voorgaande jaren gegeven is.

Deze herhalingscursus is in het bijzonder bedoeld voor leraren, die in voorgaande jaren door omstandigheden niet in staat bleken de voornoemde 1e- en/of 2e-jaarscursussen volledig te volgen. (Ook leraren die nog geen enkele heroriënteringscursus volgden, kunnen op deze cursus inschrijven.)

In 1971/72 zal deze herhalingscursus dan gevolgd worden door een cursus die de stof van het huidige 3e jaar omvat.

Om inzicht te krijgen in de animo voor het volgen van een dergelijke herhalingscursus verzoekt de C.M.L.W. al diegenen, die in principe willen deelnemen, zich *voor 1 februari a.s. op te geven* bij het secretariaat van de Commissie, Budapestlaan 6, Utrecht.

Daarbij wordt men verzocht te vermelden naar welke van de onderstaande cursusplaatsen zijn voorkeur uitgaat.

Bij voldoende belangstelling zal ca. 1 maart een definitief inschrijvingsformulier aan de potentiële deelnemers verzonden worden.

Alkmaar	Eindhoven	Leeuwarden
Amersfoort	Goes	Meppel
Amsterdam	Emmen	Roosendaal
Arnhem	Groningen	Rotterdam
Den Bosch	Den Haag	Sittard
Deventer	Haarlem	Utrecht
Dongen	Heerlen	Zwolle
Dordrecht	Hengelo	

Congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen.

Het 18e congres, georganiseerd door Liwenagel, Velebi, Velines en Wimecos wordt gehouden op vrijdag 3 april te Utrecht.

Het thema voor het congres luidt: 'Weten en geweten van de wetenschap'.

Nadere mededelingen zullen te zijner tijd volgen.

Het dagelijks bestuur is thans als volgt samengesteld:

Voorzitter: Dr. J. W. Schuyl. R. de Beerenbrouckiaan 10b te Amersfoort.
Secretaris: Drs. J. Hoogeveen. Anjerlaan 11 te Warnsveld. Tel.: 05750-7553.
Penningmeester: Dr. Th. J. Korthagen. Coehoornsingel 72 te Zutphen.

de secretaris,
J. Hoogeveen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verslag van de bestuursvergadering
op 15 november 1969 te Utrecht.

i. Dr. J. K. v. d. Briel (Heemstede) en Drs. J. W. Maassen ('s-Gravenhage) wonen als gast de vergadering bij.

ii. Op vrijdag 3 april 1970 zal in het universiteitscentrum de Uithof (Utrecht) het 18e congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen worden gehouden. Het thema is: 'Weten en geweten in wetenschap'. Er zal één wiskunde-voordracht worden gehouden; het bestuur heeft als spreker uitgenodigd: Dr. D. v. Dalen (Utrecht).

iii. L. v. Beek (Balk) zal op de jaarvergadering door het bestuur worden voorgedragen om de plaats van M. den Otter in het bestuur in te nemen.

iv. De sectiecommissie mavo/havo is als volgt samengesteld: Achterop (Amersfoort), Bozuwa (Dordrecht), Gijsen (Nijmegen), Muskens (Schijndel), Zijlstra ('s-Hertogenbosch). De sectiecommissie havo/vwo zal bestaan uit: v. d. Briel (Heemstede), v. Dormolen (Oegstgeest), Kindt (Bennekom), Maassen ('s-Gravenhage), Vredenduin (Oosterbeek).

v. Het bestuur overweegt om, op de eerste zaterdag na de schriftelijke eindexamens in 1970, een discussiemiddag voor de leden te organiseren over de examenopgaven (ook van de experiment-examens).

vi. De volgende bestuursvergadering is op 20 december 1969 te Utrecht.

M. Kindt

Bestuurswisseling

Het voorzitterschap van de vereniging wordt thans vervuld door Dr. J. K. van den Briel, Alb. Thijmlaan 42, Heemstede, 023—286086, terwijl secretaris is geworden Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 's-Gravenhage, 070—687998.

Kalender

wo 25 februari: Voordracht in de serie 'Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht' in het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O, aanvang 20 uur. Prof. Dr. R. Doornbos: *Afhankelijkheid.*

wo 25 maart: In dezelfde serie, dezelfde plaats, dezelfde tijd. Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen: *Een algebraïsche behandeling van Aristotelische syllogistiek.*

vr 3 april: 18e Congres van leraren in wiskunde en natuurwetenschappen te Utrecht. Zie de mededeling in dit nummer, p. 193.

ma 6 en di 7 april: 6e Nederlands Mathematisch Congres te Delft. Zie de mededeling in dit nummer, p. 192.

Boekbespreking

Prof. Dr. J. J. J. Dalmulder, *De ontwikkeling van het wiskundig economisch denken*, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, N. V. Universitaire Pers, Rotterdam, 1968, 32 blz.

De oratie van prof. Dalmulder als buitengewoon hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Groningen is belangwekkende lectuur voor wie een idee wil hebben van de wijze, waarop de wiskunde in de economie wordt toegepast. De schrijver gaat uitvoerig in op de methodologie van zijn vak, die in principe niet anders blijkt dan die van elke empirisch-theoretische wetenschap als de sterrenkunde of de natuurkunde. Hij betrekt algemene beschouwingen over de beoefening van wetenschap op die van de wiskundige economie, nu en in de toekomst.
Lezing is naar mijn mening vooral aan te bevelen aan docenten, die antwoord willen kunnen geven aan hun leerlingen, als deze vragen stellen naar aanleiding van hun studiekeuze en wat willen weten over de betekenis van wiskundige economie en econometrie, voor welke vakken sinds betrekkelijk korte tijd universitaire opleidingen bestaan.

H. W. Lenstra

M. Kindt, drs. A. J. Th. Maassen, dr. C. P. S. van Oosten, *Moderne algebracursus*, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1969, prijzen resp. *f* 1,25, *f* 1,60, *f* 1,25 en *f* 2,20.

De cursus bestaat uit Taakhoofdstukken. Ze zijn losbladig en passen in een normale klemband. Tot nog toe verschenen No. 0, (koppelen, tellen, passen, meten, 12 blz.) No. 1 (de binaire schrijfwijze van natuurlijke getallen, 16 blz.) No. 2 (Restklassen, 12 blz.) No. 4 (de driehoek van Pascal, 22 blz.).
De auteurs zijn erin geslaagd de taken zo in te kleden, dat de leerlingen ze zelfstandig kunnen doorwerken m.i. met pleizier.

Burgers

K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz, *Wiskunde voor de tweede klas*, J. Noorduyn & Zn. N.V., Gorinchem, deel 2, voor MAVO *f* 7,90, 150 blz., voor HAVO *f* 7,50, 110 blz., voor VWO *f* 7,90, 152 blz.

In elk van deze drie deeltjes gaan de auteurs er van uit, dat de verschillende begrippen die reeds in het eerste deel aan de orde waren, tot het geestelijk bezit van de leerlingen behoort. In het V.W.O.-deel wordt behandeld de afstand van twee punten, de omtrek van de cirkel, de oppervlakte van veelhoeken en van de cirkel, voor het samenstellen van transformaties wordt de som-notatie gebruikt, zodat de transformatievolgorde van links naar rechts is.
De relaties komen als pijl- en roosterdiagrammen aan de orde. Minder fraai acht ik dat (2; 7) een *stel wortels* genoemd wordt van de vergelijking $3x + 2y = 20$. M.i. is het beter het getallenpaar als geordend paar, wortel te noemen.
Het havo- (en mavo-)deel behandelt de metriek en relaties op iets eenvoudiger niveau, terwijl in het laatste hoofdstuk vergelijkingen met twee variabelen behandeld worden.
Het geheel is keurig verzorgd, een groot aantal opgaven begeleidt de tekst. Het boek zal zijn weg wel vinden.

Burgers

Helmar Lehmann, *De rekenliniaal*;
164 blz.; Uitgeverij Het Spectrum, Utrecht-Antwerpen.

Dit boekje is verschenen in de reeks *Prisma-Technica, Bibliotheek voor Moderne Technici*. Het is uit het Duits vertaald door A. J. Reerink.

Het boekje geeft alle informatie ten aanzien van het gebruik van de rekenliniaal die de wiskunde-docent voor zijn onderwijs nodig heeft. De auteur zet de wiskundige principes uiteen waarop de rekenliniaal berust, beschrijft de samenstelling en de diverse schalen, en besluit met een beknopt historischoverzicht. Het boekje is royaal geïllustreerd. De typografische verzorging is uitstekend.
Gaarne aanbevolen.

Joh. H. Wansink

Dr. M. G. Kuipers, J. Siepelinga, R. Troelstra, G. Tromp, *Gemoderniseerde meetkunde op basis van afbeeldingen*: deel 2 H, bewerkt door C. J. Klesser en C. Rijnders, Wolters-Noordhoff N.V. Groningen, 1969, 83 bladz., *f* 5,75.

Dit tweede deel geeft in de eerste twee hoofdstukken (26 bladz.) een verdieping van de stof over de afbeeldingen, behandeld in deel 1 VH; terwijl een mooie serie opgaven de leerlingen ruime gelegenheid biedt de verzamelingenleer van het brugjaar bij meetkundige vraagstukken stelselmatig te leren toe te passen. In de volgende drie hoofdstukken is voor een goede inpassing gezorgd van de behandelde stof over de afbeeldingen van deel 1 VH., weer geheel overeenkomstig de principes voorgestaan door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. In deze drie hoofdstukken worden achtereenvolgens behandeld: puntverzamelingen, afstand van twee punten, lengtemaat, bijzondere puntverzamelingen, plaatsbepaling van punten op lijn en vlak, coördinaten van een punt, oppervlakten van vlakdelen, stelling van Pythagoras, plaatsbepaling van een punt in de ruimte en inhouden van lichamen.
Ook in dit deel wordt met moderne begrippen gewerkt, de tekst is eenvoudig en scherp, terwijl de taal aangepast is aan die van 13 en 14-jarigen. Het constant werken met maatgetallen is een goede noot. De talrijke, goed-verzorgde figuren werken verhelderend. Vele opgaven, meestal voorzien van een begeleiding, sieren ieder hoofdstuk en sporen de leerlingen aan tot zelfwerkzaamheid. Elk hoofdstuk wordt besloten met een serie extra opgaven.
In het voorwoord merken de bewerkers op, dat ze rekening hebben willen houden met het leerplan voor de tweede klas H.A.V.O. èn met een vrij nauwe aansluiting bij deel II V. De extra opgaven zullen er zeker toe bijdragen om de overgang H.A.V.O.-V.W.O. of omgekeerd te vergemakkelijken op die scholen waar na het brugjaar nog geen definitieve scheiding heeft plaatsgevonden.
Deze methode is een aanwinst voor het onderwijs op die scholen waar men wil werken met een logische opbouw van het meetkunde-onderwijs volgens moderne richtlijnen.

W. Th. Camps

Dr. P. M. van Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring, *Van A tot Z, Werkboek der wiskunde voor havo en vwo,* deel HV-4B; J. Muusses N.V. Purmerend, 1969, X+113 blz., *f* 7,90.

Na deel HV-2a en 2b verschijnt nu vervroegd deel HV-4B omdat, zoals de schrijvers in het voorwoord opmerken, 'er van verschillende kanten gevraagd wordt het reeds nu al mogelijk te maken met moderne methoden te werken; . . . het (oude) examen wordt er zelfs gemakkelijker door'. De schrijvers verwijzen naar een vierjarige ervaring; ook als de leerlingen de theorie over de verzamelingen van de eerste klassen onder de knie hebben, hopen we dat dit in bredere kring ervaren wordt.
Ook voor de scholen die aan het HAVO-experiment meedoen geeft dit deel (weer volgens de schrijvers) genoeg voor de meetkunde van de vierde klas. Het boek is ingedeeld in twee afdelingen: een *systematische cursus* (63 blz.) en een *herhaling en uitbreiding* (35 blz.). In beide afdelingen worden achtereenvolgens in vijf hoofdstukken behandeld: *vectoren* (o.a. nevenvector, loodrechte stand), *inprodukt van twee vectoren* (waarmee o.a. sinus en cosinus gede-

finieerd wordt; ook toegepast bij de berekening van oppervlakte), *goniometrie* (liefst gebruik van de rekenliniaal; vergelijkingen, cyclometrische functies, parameters), *kubus* (hoek vlakken, hoek rechte en vlak, piramide), *stereometrisch tekenen* (parallelprojectie als transformatie, orthogonale projectie, netwerken). Als slot komen dan nog tien bladzijden *Regels der wiskunde* en vijf met *Vragen over de wiskunde.*
Vectorrekening staat overal op de voorgrond. Er is overvloed aan oefenstof, waarbij geleidelijkheid en zelfwerkzaamheid op de voorgrond staan. Door leerlingen met inzicht zal hard gewerkt moeten worden, terwijl een bespreking-vooraf toch wel dikwijls nodig zal blijken te zijn.
Een enkele vraag: waarom geeft dit boek in het begin drie manieren ($\mathbf{AB}$, AB, $\overrightarrow{AB}$) om een vector aan te duiden en wordt daarna gekozen voor die aanduiding ($\mathbf{AB}$), die bij het werken er mee zeker niet het gunstigste zal blijken te zijn?
Velen zullen met 'deze blik in de toekomst' hun voordeel kunnen doen; we hopen dat deze nieuwe weg in de nieuwe materie, zoals de schrijvers opmerken, de levendigheid in de didactiek en methodiek ten goede zal komen.

W. Th. Camps

Nicht-numerische Informationsverarbeitung, herausgegeben von R. Gunzenhäuser, Springer-Verlag Wien 1968, XX+509 blz., DM 118.—.

Behalve voor strikt rekenwerk, kunnen digitale rekenautomaten ook voor heel veel andere soorten werkzaamheden ingeschakeld woren. Karakteristiek voor computers zijn – naast de rekenmogelijkheden – de geheugencapaciteit, de mogelijkheid tot het uivoeren van logische operaties en daarbij de snelheid en accuratesse. Daarmee lenen computers zich zeer goed voor het volbrengen van opdrachten waarbij aantal en samenhang van de operaties die verricht moeten worden een belangrijker rol spelen dan de moeilijkheid van het rekenwerk. Een typisch voorbeeld vormt de administratie van de girodienst: het vereiste rekenwerk is triviaal, maar de omvang van het materiaal en het aantal operaties dat er op verricht moet worden zijn enorm, terwijl het belang van snelheid en accuratesse evident is.
In het bovengenoemde boekwerk is een groot aantal artikelen verzameld over het uitvoeren met rekenautomaten van opdrachten waarvan het rekentechnische aspekt niet het belangrijkste is. Een andere beperking die de samensteller in acht heeft genomen, bestaat uit het weglaten van artikelen over computerbehandeling van commerciële problemen. Wat betreft de beperking tot niet-rekentechische problemen, valt te twisten over het leggen van de grens; de tweede beperking is vrij willekeurig. Dit blijkt ook uit de volgende (niet uitputtende) opsomming van onderwerpen die wel opgenomen zijn: linguistisch onderzoek, vertaalwerk, dokumentatie, bibliotheekbeheer, brievensortering, geautomatiseerde instruktie, automatische kunstproduktie, lesroosterontwerp, projektplanning en voortgangskontrole, numerieke besturing van machines, verkeerssignalering, simulatie van verkeers- en kommunikatiesystemen, schaken, automatisch opereren met formules.
De behandeling van dit grote aantal onderwerpen in het boek, is nogal verschillend van stijl en van diepgang. Door het kiezen van specialisten voor elk onderwerp is de presentatie nogal verbrokkeld. Ook komt daardoor niet goed naar voren wat deze heel verschillende problemen op het punt van computerimplementatie aan moeilijkheden en mogelijkheden gemeen hebben. Aan de andere kant heeft de gekozen opzet tot voordeel dat op de verschillende terreinen vrij recente informatie met grote deskundigheid wordt gepresenteerd.

J. Wessels

Didactische literatuur

The Mathematical Gazette, 380-384; Mei 1968-Mei 1969

J. K. Backhouse, Teaching mathematics to less able secondary pupils;
C. A. R. Bailey, Geometry in the middle school;
A. J. Weir, Problems of teaching topology in schools;
P. J. Wallis, The rate of growth of mathematics during four centuries;
N. A. Routledge, The 9th International Mathematical Olympiad;
J. E. Littlewood, A ballistic paradox;
L. J. Mordell, The minimum value of a definite integral;
G. C. Shephard, Twenty problems on convex polyhedra.

A. P. Rollett, Class consciousness;
F. Conway, Patterns of household expenditure;
A. M. Gillings, Antelope;
R. J. Clark, An experiment in teaching subsidiary mathematics using a linear program;
H. G. Forder, Groups from one axiom.

B. Thwaites, Mathematical education in Russian schools;
D. V. Anderson, Scheduling a two-way bottleneck;
R. L. Goodstein, Free variable axioms for groups;
H. E. Vaughan, Cliques and groups;
L. Boxell, Inferential puzzles;
F. H. Francis, Patterns in group tables.

M. E. Rayner, Vectors and relative velocity;
C. A. Coulson, How many different Keys?
H. Perfect, The mathematics of AGMs;
F. J. Budde, Transformation geometry in the plane by complex number methods;
J. Abram, The language of algebra;
A. Oppenheimer, Some inequalities for a triangle;
A. M. Cohen, Introducing numerical analysis and number theory at school;
D. W. Crowe and J. Molnár, On polyhedra with specified types of face.

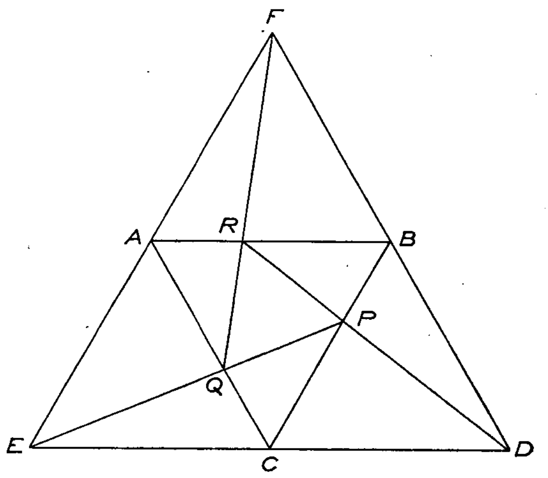
M. E. Baron, A note on the historical development of logic diagrams; Leibniz, Euler and Venn;
R. O. Davies, A pop charts problem;
B. D. Price, Mathematical groups;
F. L. Carter, Perspective drawing;
M. D. Fox, A three- dimensional pipe-joining problem;
D. Stanley-Jones, Full circle pendulum.

Recreatie

Nieuwe opgave met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

231. Gegeven zijn een onbekend aantal verschillende voorwerpen, die in een onbekend aantal groepen verdeeld zijn. De aantallen voorwerpen in de groepen zijn alle verschillend. Iemand mag van één groep een aantal voorwerpen kiezen (het aantal mag niet 0 zijn). Hij blijkt zo 197 verschillende resultaten te kunnen krijgen. Hoeveel groepen voorwerpen waren er en hoeveel voorwerpen bevatten deze elk? (naar een suggestie van B. Kootstra)

232. Gegeven is in onderstaande figuur, dat $\triangle$ *ABC* gelijkzijdig is en dat *DE // AB*, *EF // BC* en *FD // CA*. Construeer de lijnen *DR*, *EP* en *FQ* zo, dat $\triangle$ *PQR* gelijkzijdig wordt. (B. Kootstra)



228. Een trein bereikt A ten tijde t_1 en passeert A in 10 sec. Ten tijde t_2 bereikt de trein B en passeert B in 9 sec; $t_2 - t_1 = 20$ min. A en B lopen in dezelfde richting. Op welk tijdstip zal de ene voetganger de andere inhalen?

Kies het coördinatenstelsel zo, dat de trein in rust is. Een treinreiziger ziet eerst A en daarna B voorbijkomen, B is 20 min achter, maar haalt elke 9 sec 1 sec in. Het duurt dus $1200 \cdot 9$ sec (gerekend vanaf t_2) totdat B A heeft ingehaald. (Of in de werkelijke situatie B door A of A door B wordt ingehaald, hangt af van de richting van de trein t.o.v. die van de wandelaars.)

229. Hoeveel getallen uit de rij 1, 2, ..., 100 kan men maximaal kiezen, als geen der gekozen getallen de som mag zijn van twee andere gekozen getallen?

In elk geval kan men er 51 kiezen, nl. 50, 51, ..., 100. Men kan er echter geen 52 kiezen, Onderstel het kleinste gekozen getal is b.v. 4. Elke keuze van een getal a, waarin $5 \leqq a \leqq 96$, blokkeert een ander getal, nl. $a+4$. Van deze getallen kan men er dus hoogstens 50 kiezen. Kiest men er 50, dan zijn daardoor ook 97, 98, 99, 100 geblokkeerd. Kiest men er 49, dan is er van de getallen 97, 98, 99, 100 hoogstens 1 niet geblokkeerd, enz. Hoe het ook zij, men komt niet verder dan 51 getallen.

Stelt men als eis, dat geen der gekozen getallen de som is van twee of meer andere gekozen getallen, dan is het antwoord eveneens: men kan hoogstens 51 getalllen kiezen. De redenering is hetzelfde.

230. De letters stellen natuurlijke getallen voor. Gegeven is, dat $a^2+b^2 = c^2$. Bestaan er a_1, b_1, c_1, waarvoor $a_1{}^2+b_1{}^2 = c_1{}^2$ en $a_1-b_1 = a-b$?
Bepaal a, b en c zo, dat $a^2+b^2 = c^2$, $a-b = 2$ en a, b en c tussen 1000 en 2000 liggen.
Onderstel, dat

$$a^2+b^2 = c^2.$$

Beschouw nu de getallen

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a+b+2c \\ b_1 &= a+2b+2c \\ c_1 &= 2a+2b+3c. \end{aligned}$$

Voor deze getallen geldt

$$\begin{aligned} a_1{}^2+b_1{}^2 &= c_1{}^2 \\ a_1-b_1 &= a-b. \end{aligned}$$

Hiermee is de eerste vraag bevestigend beantwoord.
Kies b.v. $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. En dus $|a-b| = 1$. Dan vinden we volgens bovenstaand procédé resp.

$$\begin{aligned} 3^2+4^2 &= 5^2 \\ 20^2+21^2 &= 29^2 \\ 119^2+120^2 &= 169^2 \\ 696^2+697^2 &= 985^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat

$$1392^2+1394^2 = 1970^2.$$

Voor deze drie getallen geldt $1394-1392 = 2$ en bovendien liggen ze alle drie tussen 1000 en 2000. Ze voldoen dus aan de in de opgave gestelde eis.
Ik vestig uw aandacht op de uitkomst 1970. U begrijpt dan, dat deze puzzel weer bedoeld is als nieuwjaarswens van de heer Kootstra voor de lezers van Euclides.
We moeten nog wel aantonen, dat hij ons alleen maar een gelukkig 1970 toewenst. Ook dit lukt.
Onderstel, dat $a^2+b^2 = c^2$ en dat $a-b = 2$. Er zijn dan twee mogelijkheden:

a a en b zijn beide oneven; dan is $a^2 = 1 \pmod 4$, $b^2 = 1 \pmod 4$, $c^2 = 0 \pmod 4$, en dit kan dus niet,

b a en b zijn beide even, hetgeen dus het geval is.
Dan is c ook even en kunnen we a, b en c alle drie door 2 delen Het probleem wordt zo gereduceerd tot het vinden van een drietal getallen, waarvoor $a^2+b^2 = c^2$, $|a-b| = 1$ en die alle drie tussen 500 en 1000 liggen. Nu zijn er getallen p en q zo, dat

$$a = \tfrac{1}{2}(p^2-q^2),\ b = pq \text{ en } c = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2).$$

Nu moet

$$\tfrac{1}{2}(p^2-q^2) - pq = 1 \wedge \tfrac{1}{2}(p^2-q^2) - pq = -1.$$

Omdat $p>q$ en $pq<1000$, is $q \leqq 30$. We kunnen deze vergelijkingen nu trachten op te lossen voor $q = 1, \ldots, q = 30$. De even waarden kunnen we voor q buiten beschouwing laten, omdat p dan oneven zou zijn en dan $\frac{1}{2}(p^2-q^2)$ niet geheel is.) We vinden alleen $q = 17$, $p = 41$.
Waarmee de uniciteit van de oplossing bewezen is.
Een imposante nieuwiaarswens.

Inhoud