Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no. 4
december 1969

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de penningmeester: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem(N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-32494.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

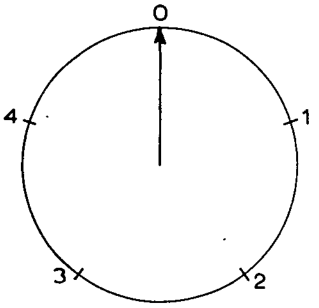
Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

De achtergronden van het klokrekenen

G. KROOSHOF
Groningen

In enkele nieuwe wiskundemethoden worden de brugklasleerlingen aan het rekenen en denken gezet met opgaafjes als deze:



In de bovenstaande figuur zie je een zogenaamde vijfurenklok. Je ziet er de getallen 0, 1, 2, 3, en 4 bij staan. De klok heeft één wijzer. Laat je die eerst draaien van 0 tot 4 en daarna nog drie afstanden verder, dan komt hij te staan bij het getal 2.
We zouden kunnen zeggen: Op deze klok is $4+3 = 2$.
Met dit soort opgaafjes leren de leerlingen al vrij snel omgaan. Na een aantal experimentjes begrijpen ze dat je de volgende opteltabel kunt maken:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Ze kunnen ook leren vermenigvuldigen op deze klok door bijvoorbeeld af te spreken dat 3×4 zal betekenen $4+4+4 = 3+4 = 2$.

Het is dus ook mogelijk een vermenigvuldigtabel te maken:

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Er is nu dikwijls gevraagd wat wel de achtergrond is van dit klokrekenen. Welke betekenis heeft het voor de wiskundige ontwikkeling van de leerlingen?

a Minirekenkunde

In de moderne wiskunde speelt het begrip structuur een belangrijke rol. Een voorbeeld van een structuur is een groep. Dat is een verzameling, waarin een bewerking is gedefinieerd, die aan een aantal eisen moet voldoen. Is deze bewerking het optellen dan moet deze gehoorzamen aan de volgende vier axioma's:

1 de verzameling moet gesloten zijn voor het optellen, d.w.z. de som van elk tweetal elementen van de verzameling moet opnieuw element van de verzameling zijn. Aan deze eis voldoet bijvoorbeeld de verzameling van de natuurlijke getallen.

2 het optellen moet associatief zijn. Aan deze eis voldoet **N** eveneens.

3 er moet een neutraal element zijn. Voor het optellen is dat het getal nul. Als nul dus gerekend wordt als element van **N**, dan voldoet **N** ook aan deze eis.

4 bij elk element van de verzameling moet ook de inverse ten opzichte van het optellen in de verzameling aanwezig zijn. Aan deze eis voldoet **N** niet, want **N** bevat niet de tegengestelden van de natuurlijke getallen. **N** is dus ten opzichte van het optellen *geen* groep.

Bekijken we nu de opteltabel, die hierboven voor het klokoptellen is gegeven dan blijkt dat de verzameling $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *ten opzichte van dit klokoptellen* wel een groep is:

1 de som van elk tweetal elementen van V is weer element van V.

2 dat dit klokoptellen associatief is, zou door de leerlingen gecontroleerd kunnen worden door voor alle drietallen elementen a, b en c van V te controleren dat $(a+b)+c = a+(b+c)$. Juist omdat de verzameling V maar vijf elementen heeft is deze controle uitvoerbaar. Dat is een voordeel van deze minirekenkunde.

3 In V is 0 het neutrale element, want voor iedere $a \in V$ is $a+0 = 0+a = a$.

4 In de tabel blijkt ook dat ieder element zijn inverse in V heeft. Twee elementen a en b zijn nl. ten opzichte van het optellen elkaars inverse als hun som nul is. In de tabel lezen we af:

$0+0 = 0$, $1+4 = 0$, $2+3 = 0$, $3+2 = 0$, $4+1 = 0$. In deze minirekenkunde komen dus geen negatieve getallen voor, de verzameling is ook gesloten ten opzichte van het aftrekken. Bijvoorbeeld $2-4 = 3$, omdat $4+3 = 2$.

Het is niet nodig met de leerlingen de groepsstructuur te bespreken, maar het gesloten zijn voor het optellen en ook voor het aftrekken is zeker een interessant aspect van dit klokrekenen. Hierbij wordt ook duidelijk dat het aftrekken gedefinieerd wordt als de inverse bewerking van het optellen.
Het associatief zijn van dit optellen is niet een vanzelfsprekende zaak, zoals bij het gewone optellen. Daarom zijn de leerlingen genegen de controle op het associatief zijn uit te voeren. Deze hoeft niet nagerekend te worden als het de leerlingen duidelijk wordt dat je ook door het draaien van de wijzer over de klok kunt begrijpen dat $(a+b)+c = a+(b+c)$. Je legt in beide gevallen dezelfde afstand af. Maar het is niet gewenst dit met de leerlingen te bespreken, als ze het niet zelf ontdekken.

Minder vanzelfsprekend en ook niet gemakkelijk op de klok te controleren is, het associatief zijn van het klokvermenigvuldigen. Maar alle gevallen kunnen zonder bezwaar nagerekend worden. Zonodig wordt het rekenwerk over de klas verdeeld. Het delen kan worden ingevoerd als de inverse bewerking van het vermenigvuldigen. We zeggen dat $\frac{2}{4} = 3$, omdat $3 \times 4 = 2$ is.

Het invoeren van de inverse bewerkingen aftrekken en delen in dit klokrekenen schept begrip voor de betekenis van deze bewerkingen in de bekende getallenverzamelingen. Het feit, dat hier geen breuken of negatieve getallen nodig zijn geeft een extra bekoring aan deze minirekenkunde.

In de vermenigvuldigtabel kan men aanleiding vinden om te praten over de bijzondere rol van het getal nul. Delingen als $\frac{4}{0}$ zijn niet mogelijk, omdat uit de tabel blijkt, dat er geen enkel getal is dat met nul vermenigvuldigd een ander getal dan nul oplevert.
Het quotiënt $\frac{0}{0}$ is onbepaald, omdat het produkt van elk getal van V met nul gelijk is aan nul. Het getal nul heeft in V dus geen omgekeerde en daarom heeft V ten opzichte van het klokvermenigvuldigen niet de groepsstructuur.

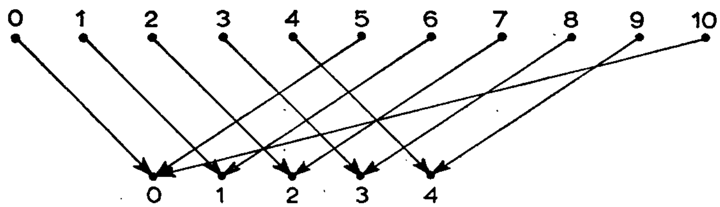
b **Rekenen modulo 5**

Schrijven we de rij van de natuurlijke getallen op:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4

dan kunnen we (zoals hier gebeurd is) daaronder schrijven de rest die elk van deze laat bij delen door 5. Bij elk van de natuurlijke getallen komt dan een element te staan van de verzameling $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

We kunnen daarom zeggen dat de verzameling van de natuurlijke getallen wordt afgebeeld op V:



De verzameling van de natuurlijke getallen wordt hierdoor in vijf deelverzamelingen verdeeld, nl. de deelverzameling van de getallen die bij delen door 5 nul als rest laten; die van de getallen welke 1 als rest laten, enz.
We noemen ze *restklassen naar de modulus* 5.
Elk van de elementen van V vertegenwoordigt zo'n klasse.

Maken we in N de optelling $39+28 = 67$, dan behoort daarbij in V de optelling $4+3 = 2$, want 39 behoort tot de restklasse, die door 4 wordt gerepresenteerd, 28 in de klasse, die door 3 wordt aangewezen en 67 in de klasse, die bij 2 hoort. De optelling $4+3 = 2$ behoort nu juist tot het klokrekenen. Misschien is er een pientere leerling die opmerkt, dat je het klokrekenen kunt uitvoeren door de getallen van V gewoon op te tellen of te vermenigvuldigen en er daarna een veelvoud van 5 af te trekken. In dat geval kan men voor deze leerling de achtergrond van het klokrekenen wel onthullen door te laten zien hoe de restklassen van de verzameling van de natuurlijke getallen kunnen ontstaan. Maar deze onthulling neemt wel iets weg van het bekoorlijke van het klokrekenen en het is dus niet gewenst daar zelf mee voor den dag te komen.

c Rekenen modulo 6

Leerlingen die de smaak van het klokrekenen te pakken hebben zullen ook graag een klok nemen met een ander aantal cijfers erbij. Het is dan aardig een zesurenklok te nemen omdat zich daarbij nog een bijzonderheid voordoet, die weer te maken heeft met het geheimzinnige getal nul. (Nul is voor de meeste leerlingen een moeilijk getal.)
Bij het rekenen modulo 6 blijkt nl. dat het produkt van twee getallen nul kan zijn zonder dat een van beide nul is. Bijvoorbeeld $3 \times 2 = 0$. Wie met zijn leerlingen met het klokrekenen wil 'omspelen' kan met ze nagaan bij welke klokken zich dit verschijnsel wel en niet voordoet.

d Rekenen in het vijftallig stelsel

Een enkele maal is de vraag gesteld of het klokrekenen te maken heeft met het rekenen in een ander talstelsel. Uit het bovenstaande zal waarschijnlijk wel gebleken zijn dat dat niet het geval is. Bij het rekenen in het vijftallig stelsel worden ook alleen maar de *cijfers* 0, 1, 2, 3 en 4 gebruikt, maar de getallenverzameling, waarin gerekend wordt is bijvoorbeeld die van de natuurlijke getallen. Het is dus niet de verzameling V, die uit slechts vijf *getallen* bestaat. Tellen we in het vijftallig stelsel dan noemen we de natuurlijke getallen op, alleen hebben ze andere namen en een andere schrijfwijze:

0 1 2 3 4 10 11 12 13 14 20 21 22 enz.

e Samenvatting

Het klokrekenen moet als een spel met de leerlingen gespeeld worden. Het heeft als belangrijkste doelstellingen:

1 De bekende rekenkundige eigenschappen, zoals de commutatieve en de associatieve eigenschap, te laten opmerken in een getallensysteem waarin ze niet de vanzelfsprekendheid hebben als in de verzameling van de natuurlijke getallen.

2 Eenvoudige vergelijkingen aan de leerlingen te presenteren, die niet dadelijk door raden kunnen worden opgelost, maar die toch ook nog geen theorie voor het oplossen noodzakelijk maken.

3 De leerlingen alvast eens te laten kennismaken met een structuur, die o.a. de eigenschap heeft gesloten te zijn voor de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en waarin voor de onbeperkte uitvoerbaarheid van de inverse bewerkingen geen nieuwe getallen ingevoerd behoeven te worden.

4 Het invoeren van aftrekken en delen te doen gebeuren door ze te definiëren als inverse bewerkingen van het optellen en vermenigvuldigen.

5 Het getal nul extra aandacht te geven.

Het wiskundeonderwijs in Frankrijk.

Drs. B. VAN DER KROGT
Amsterdam

In het jaar waarin het Eerste Internationale Congres over het Onderwijs in de Wiskunde plaats vindt in Lyon (24–29 augustus 1969) is het gerechtvaardigd speciale aandacht te besteden aan het land dat de eer te beurt viel om dit congres te organiseren.
Tijdens een tweejarig verblijf van 1965 tot 1967 als leraar wiskunde aan het Lycée International te St. Germain-en-Laye bij Parijs heb ik van nabij kennis kunnen maken met boeiende ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs in Frankrijk. Nu deze ontwikkelingen een steeds duidelijker stempel gaan drukken op het franse wiskundeonderwijs, lijkt het de moeite waard er in dit tijdschrift enige beschouwingen aan te wijden, temeer omdat een aantal daar ontstane ideeën ook van belang lijken voor de verdere verbetering van het nederlandse wiskundeonderwijs.
Eerst iets over de franse partner van onze WIMECOS en LIWENAGEL:

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.
(afgekort de A.P.M.)

Deze vereniging is een organisatie met ongeveer achtduizend leden die werkzaam zijn bij het openbaar onderwijs. Het belangrijkste punt waarin de A.P.M. bijv. van Wimecos verschilt is het bestand van zijn leden. Van de A.P.M. kan namelijk iedereen lid worden die te maken heeft met het wiskundeonderwijs *op welk niveau dan ook*, dus van de kleuterschool tot en met de universiteit. Dat de A.P.M. dit een belangrijk beginsel vindt, moge blijken uit de slagzin die sinds januari 1967 op elk omslag van het Bulletin van de A.P.M. voorkomt:
'de la Maternelle aux Facultés'
Het is de vaste overtuiging van vele franse prominenten dat alleen door een bundeling van alle deskundigen en belangstellenden uit alle takken van onderwijs in één organisatie een harmonische opbouw van het wiskundeonderwijs mogelijk is.
(De fransen staan trouwens niet alleen met hun idee om alle krachten op alle niveaus te bundelen in een vereniging. Ook de engelse Association of Teachers of Mathematics en de amerikaanse National Council of Teachers of Mathematics hebben zowel het basisonderwijs als het voortgezet onderwijs als werkterrein.)
Het Bulletin bevat de laatste jaren een rijke verscheidenheid aan artikelen. Naast beschouwingen over de wiskunde zelf vindt men er o.a. voorstellen voor programma's voor het basisonderwijs, beschouwingen van psychologen over de

relaties van psychologie en didaktisch onderzoek en niet te vergeten de boeiende verslagen van de gevechten die de A.P.M. levert met het franse ministerie van onderwijs. De zeer geestrijke en uitdagende kommentaren van G. Walusinski maken vrijwel elk nummer tot boeiende lektuur. Opvallend is ook dat vele leden reageren in het Bulletin en daar met verve konservatieve en progressieve standpunten verdedigen. Zij die zich willen oriënteren omtrent de franse ontwikkelingen kunnen niet beter doen dan een abonnement nemen op dit Bulletin van de A.P.M. Per jaar ontvangt U zes nummers met een totale omvang van ongeveer 300 bladzijden. Bovendien ontvangt U dan elk jaar de Annales Vuibert: een volledige kollektie van examenopgaven op mavo-, vwo- en wiskunde mo-a-niveau. (de totale omvang hiervan is ongeveer 500 kleine bladzijden) De prijs van het abonnement + Annales is 30 franse francs. Aanmelden bij monsieur A. Blondel, 154, Avenue Marcel-Cachin, 92, Chatillon-sous-Bagneux. Ter verdere illustratie van het brede werkterrein van de A.P.M. de samenstelling van het bestuur:
Naast een voorzitter (momenteel een vrouw) zijn er vice-voorzitters voor elk van de volgende schooltypen: basisonderwijs, voortgezet onderwijs (lagere klassen) voortgezet onderwijs (hogere klassen), technisch onderwijs, kweekschoolonderwijs, classes préparatoires en universitair onderwijs.
Een andere aktiviteit van de A.P.M. die het vermelden waard is omdat wij in Nederland iets dergelijks niet kennen is de organisatie van televisiekursussen voor de herscholing (recyclage) van leraren en onderwijzers. Onder de bezielende leiding van prof. Revuz vinden er ieder jaar herscholingskursussen plaats voor de leraren in de lagere en hogere klassen van het voortgezet onderwijs. De uitzendingen vinden plaats na schooltijd en dikwijls volgen de leraren van een school of stad gezamenlijk zo'n kursus. Het succes van deze kursussen, die de veelzeggende naam 'Chantiers Mathématiques' (wiskunde-werkplaatsen) meekregen, is in niet geringe mate te danken aan de zeer ongedwongen sfeer waarin zo'n uitzending zich afspeelt. De uiteenzetting is namelijk geen monoloog maar een dialoog tussen twee deskundigen waarbij de welbespraaktheid, de gloedvolle betoogtrant en de dynamische presentatie door vooral Revuz en Glaymann voor een groot deel verantwoordelijk zijn voor de populariteit van deze kursussen.
Voor het basisonderwijs bestaat er een televisiekursus 'Atelier de Pédagogie' opgezet onder auspiciën van het Institut Pédagogique National. De presentatrice van deze kursus, madame Picard, (een van de belangrijkste deskundigen in Frankrijk wat betreft de modernisering van het wiskundeonderwijs op de basisschool) werkt tijdens het eerste deel van een uitzending met een groepje kinderen aan een onderwerp, bijv. verzamelingen, logika, rekenen in een bepaald talstelsel, waarbij zij demonstreert hoe jonge kinderen zelf, – dikwijls onder gebruikmaking van materialen als de logiblocs en het multibase-materiaal van Dienes, – zelf wiskundige ontdekkingen kunnen doen. Na dit eerste deel volgt dan een nabespreking waarin de didaktische grondslagen van die nieuwe aanpak voor de onderwijzers uiteengezet worden.

Dat men in Frankrijk zijn heil gezocht heeft in televisiekursussen vindt zijn oorzaak in het feit dat het franse ministerie van onderwijs niet bereid was (en misschien nog wel niet is) veel geld te investeren in de herscholing. Televisiekursussen waren gewoon de goedkoopste oplossing!
Het is werkelijk indrukwekkend wat de A.P.M. met zeer bescheiden organisatorische en financiële middelen, oproeiend tegen een sterke konservatieve stroming binnen het ministerie van onderwijs en onder de inspekteurs, heeft gepresteerd. Belangrijk in dit verband zijn de namen van Revuz, Walusinski, Lichnerowicz, Glaymann, Dumont en Vissio.
In een volgende bijdrage hoop ik U te informeren over het 'Charte de Chambéry', een in april 1968 vrijwel unaniem goedgekeurd aktieplan voor de komende jaren, waarin aan allerlei facetten van een modernisering van het wiskundeonderwijs aandacht wordt geschonken.
Tot slot van dit artikel wil ik nog pleiten voor een verbreding van het werkterrein van onze nederlandse vereniging van wiskundeleraren. Het is in het belang van de nederlandse jeugd van 4 tot 18 jaar, dat allen die zich met haar wiskundige vorming bezighouden één groot team vormen. De franse, engelse en amerikaanse voorbeelden liggen er. Moge de onlangs gedane stap van de opneming van de mavo-kollega's in onze vereniging spoedig gevolgd worden door de openstelling van onze kring voor kollega's uit het basisonderwijs.

De wiskunde in de oudheid

Door een misverstand zijn een aantal fouten in het artikel van Prof. Duparc (oktobernummer) niet gecorrigeerd. Het betreft hier in het bijzonder enkele van de Griekse woorden. De redactiesecretaris biedt auteur en lezers zijn verontschuldiging aan.

Een ander montessori-geluid.

C. A. VAN BAALEN
Durgerdam

Hoe spanningsloos het wiskunde-onderwijs verliep in zijn brugklas beschreef de heer Vernout in het septembernummer. Het is jammer dat hij niet vermeldt dat buiten die klas dit onderwijs op het amsterdamse montessori-lyceum afgelopen jaar aanleiding heeft gegeven tot ernstige meningsverschillen, die tenslotte geleid hebben tot het vertrek van twee van de vier wiskundeleraren, beide oudleerlingen van deze school. Om beide standpunten in het juiste licht te zien is het nodig iets van de voorgeschiedenis te weten.

Geschiedenis van montessoriaans wiskunde-onderwijs

Voor de oorlog werd op een gewone school het kind van dag tot dag opgedragen wat hij moest doen, volgens welke regels het moest en hoe hij het moest opschrijven. Bijna alles moest woordelijk uit het hoofd geleerd worden. Het denken werd tot in zijn innerlijkste oorsprong gevormd tot onvrijheid. Wiskunde, zoals die toen werd onderwezen, was daartoe bij uitstek geschikt.
De vader van de huidige rektor van het lyceum, de heer Haak, heeft voor wiskunde een systeem gemaakt dat radikaal brak met de traditionele methoden. Naar analogie van de methode-Montessori voor het lager onderwijs liet hij de kinderen in principe vrij om te kiezen wat zij deden, hoe hard zij wilden werken en vooral hoe zij het wilden doen. Om hen dan tot aktiviteit te krijgen moest er leermateriaal zijn, dat aansloot op de behoeften in het kind. Dat materiaal moest zo boeiend zijn dat het uitnodigde om er mee bezig te zijn en dat de kinderen steeds verder lokte om zich er in te verdiepen. De bestaande leerboeken waren daartoe ongeschikt. De heer Haak sr. herschreef het wiskundeprogramma op losse kaarten. Door een uitgekiende opzet kon het kind ze naar eigen keuze in verschillende volgorde doorwerken. Deze vrijheid, gekombineerd met op de behoefte aan spel aangepaste vragen maakte dat de kinderen inderdaad met rode oortjes wiskunde zaten te doen.
De oudere montessori-leraren denken met heimwee terug aan de begintijd. Zij vragen zich af waarom de goede werksfeer er niet meer is. Hun verklaring is dat de school niet zuiver genoeg meer is in de montessori-leer. De heer Vernout zoekt het dan ook in een voortzetting van het systeem van zelfwerkzaamheid, eigen tempo en zwakke kontrole.

De individuele zelfwerkzaamheid

Voor de oorlog was de vrijheid binnen het montessorilyceum een oase in een wereld waarin kinderen die nergens anders kregen. Ze reageerden dankbaar met enthousiast werken. In de loop van twintig jaar kregen tieners daarbuiten steeds meer vrijheid in kleding, muziek, tijdsbesteding en erotische kontakten. Het is begrijpelijk dat zij nu niet meer zo enthousiast zijn over de vrijheid om de volgorde van hun sommen te mogen bepalen. De eens geliefde wiskundekaarten begonnen beduimeld terug te komen in de mappen of raakten vaak helemaal weg. Tenslotte werden ze door de wiskundeleraren vervangen door een boek waarmee de leerlingen nog wel zelfstandig konden werken. Maar de vrijheid van keuze van onderwerp was verdwenen. Alleen de vrijheid tot eigen tempo bleef over.

Het eigen tempo

In het klassikale systeem werd met de klas een gemiddeld tempo aangehouden. Daarbij verveelden de goede leerlingen zich, terwijl de slechte het toch nog niet konden bijbenen. In het montessori-systeem kreeg iedere leerling een persoonlijke jaartaak, waaraan hij mocht werken in het tempo dat hij zelf aankon en op het begripsniveau dat bij hem paste. Dat was een grote verbetering. De ontwikkeling is hierna echter verder gegaan. In het tienerleven zijn vermaak en afleiding sterk toegenomen. Leren en intellektueel weten zijn gedevalueerd. Zelfstandig tot inzicht komen krijgt in onze tijd van kommunikatie en teamwork steeds minder betekenis. Het zelfstandig werken van de montessori-leerlingen is verwaterd tot een oppervlakkig over de stof heen haasten. Met zo min mogelijk moeite proberen zij zoveel mogelijk bladzijden afgetekend te krijgen. Het past in deze tijd en het kan gebeuren omdat in het oude montessori-systeem kontrole vrijwel overbodig was.

Weinig kontrole

Het geeft bevrediging iets af te hebben. Daarom werden onderwerpen afgesloten door testjes zoals Vernout ze beschrijft. Er mocht in het schrift gekeken en hulp gevraagd worden aan leerlingen en leraar. Om de leerlingen ook bij het werk aan de gewone oefenstof niet te frustreren lag naast het schrift steeds een antwoordenlijst. Vroeger stelden leerlingen er een eer in dat zuiver te houden, maar dat soort eergevoel bestaat niet meer. In de onderbouw wordt de schijn nog opgehouden. De oudere leerlingen bevredigt het niet meer. Zij zijn op de hoogte van de moderne interviewtechniek. Zij willen dat die kritische benadering ook op hen toegepast wordt. Zij weten dat wiskunde de mogelijkheid geeft tot nauwkeurige strukturering van informatie. Zij eisen nu dat wat zij wel of niet weten nauwkeurig vastgesteld wordt. Komen leerlingen openlijk met kritiek dat ze te weinig geleerd hebben, dan wordt, zoals Vernout zelf beschrijft, hun mening terzijde geschoven door te zeggen dat het leren zo spanningsloos gebeurd is dat ze het niet eens gemerkt hebben.

De nieuwe leerlingen

De leerlingen weten nu dat wiskunde een soort taal is die de mogelijkheid geeft tot zeer genuanceerde kommunikatie. Taal funktioneert in een gesprek en niet in individueel bezig zijn. Zij vragen nu van de leraar dat hij hen bevrijdt uit het individualisme. De vrijheid om zelf te doen wat je zelf wil is een oude vrijheid en die hebben ze in hun persoonlijk leven buiten de school genoeg. Wat zij van de leraar nodig hebben is hulp bij een nieuwe vrijheid, de vrijheid om te kunnen samenleven in een groep. Voor wiskunde betekent dat dat zij niet meer individueel willen werken. In het oude montessori-systeem was de goede leerling vóór en de zwakke achter (het eigen tempo). Wat nu aan hen appelleert is dat de begaafde leerling de zwakkere helpt zodat de groep in zijn geheel een gezamenlijke taak kan volbrengen. Zij missen echter theorie en techniek van overleg. Die vragen zij van de leraar. Zij zijn nog niet op de hoogte van groepsprocessen en daarom is de leraar nodig als bindende kracht in de groep. Hij moet centrum zijn van het gesprek, zolang zij het niet uit zichzelf gaande kunnen houden. Als de vaart er in zit wordt hij kritikus. Als ontmoediging intreedt is hij weer nodig als gangmaker.
Maar zover is het voorlopig nog helemaal niet. Op het amsterdamse montessorilyceum in ieder geval niet, want daar heeft men gekozen om verder te gaan op de voorlaatste voet van individueel onderwijs.

Een konkreet plan

Bestaan er al veel van die nieuwe soort jeugdige personen? In zekere zin vrijwel geen enkele. Slechts in een onverwachte wending van een gesprek of een impulsieve reaktie duikt dit nieuwe even op en verdwijnt dan weer onder traditioneler gedragsvormen.
Toch was er al een plan om het ruimte te geven. De leerstof zou verdeeld worden in kursussen van enkele maanden. De grootte van zo'n taak is niet ontmoedigend en de inhoud ervan is voor leerlingen enigszins te overzien. De opdracht wordt gegeven aan een groep in zijn geheel, met de verantwoordelijkheid dat zo mogelijk ieder lid van de groep de kursus voltooit. Om de bereikte resultaten bewust te maken wordt een kursus afgesloten door een diepgaand onderzoek naar de verworven kennis (proefwerken, diskussies, interviews). Voor een volgende kursus kan er dan op vertrouwd worden dat men zinvol kan samenwerken zonder wachten op achterblijvers. Aan de andere kant hebben zwakkere leerlingen of kinderen met tijdelijke problemen de kans om door een kursus over te doen niet altijd samen te zitten met anderen die het altijd eerder en beter weten. Een jaar zitten blijven bestaat niet meer in dit systeem. Er ontstaat een vrij kontinue regulering van verschillen in tempo en niveau van de individuele leerlingen, terwijl ze toch in groepen samenwerken. Mogelijk is ook om kursussen van karakter te laten verschillen. Er kan in een kursus bijv. alleen geoefend worden in technieken. In een andere wordt beleefd hoe

het is om eens zelf iets te ontdekken. Er kan ook eens meegemaakt worden wat het is als er in een kursus alleen college gegeven wordt.
Twee leraren kunnen samen één kursus geven (bijv. mechanika). Er komen soms misschien kursussen zonder leraar. Inhaalkursussen, extrakursussen, enz. Om de zaak organiseerbaar te houden moeten alle kursussen bijv. twee maanden duren of eventueel een veelvoud daarvan. Om de twee maanden gaat een leerling voor de meeste vakken over naar een volgende kursus. De beslissing valt per vak. Overgangsvergaderingen zijn overbodig. Verder gaan met onvoldoendes hoeft niet meer geaccepteerd te worden.
Tussen de kursusperiodes valt een soort windstilte van een of twee dagen. Hierin vallen sportdagen, schoolfeesten, kreatieve gebeurtenissen enz.
Zolang er nog een eindexamen is voor alle vakken tegelijk zal er een administratieve regeling moeten bestaan om niet bij bepaalde vakken teveel achter te raken.

Konklusie

Het amsterdamse montessori-lyceum wil de kant van het groepswerk niet op. Integendeel. Men is bezig de individuele taak, die tot nog toe een jaar besloeg, te verlengen tot meer jaren. Het individueel tot inzicht komen blijft er prevaleren boven kommunikatie met groep en leraar.
Andere scholen zullen hopelijk de weg van het individueel onderwijs niet zo ver opgaan als het montessorisysteem gedaan heeft. Daardoor zullen die andere scholen misschien eerder tot de volgende fase kunnen overgaan.

Analytische meetkunde met translaties

W. AMSE
Heerenveen

M.i. dient wiskunde II de leer van een structuur en enige modellen hiervan te
Ik denk uiteraard aan de n-dimensionale vectorruimte over R.
Maar dan moeten we het vectorbegrip niet onnodig 'verconcretiseren' tot pijl; laat dit maar aan de natuurkundecollega's over. Voorlopig hebben wij aan het begrip *translatie* voldoende.
Is de samenstelling van translaties behandeld, dan kunnen we bij ieder drietal punten A, B en C denken aan

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \tag{1}$$

Interpretatie: *De translatie, die gerepresenteerd wordt door het koppel* (A, C) *is de som van de translaties, die door* (A, B) *en* (B, C) *gerepresenteerd worden.*
Het gaat hier natuurlijk om de additief voorgestelde samenstelling: de associatieve wet is dus geen meetkundige kwestie, hetgeen een voordeel is bij de overgang van R_2 op R_3.
Er is maar uiterst weinig stereometrische voorkennis nodig om ook in R_3 over (1) te kunnen beschikken.
Stellen we $\vec{AB} = -\vec{BA}$ om aan te duiden, dat (A, B) en (B, A) tegengestelde translaties representeren, dan is (1) gelijkwaardig met:

$$\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$$

Definiëren we

$$\vec{PQ} = \vec{RS} \Leftrightarrow (P, Q) \text{ en } (R, S) \text{ representeren dezelfde translatie}$$

dan mogen we in sommen $\vec{PQ}$ door $\vec{RS}$ vervangen. Dit geldt ook voor scalaire veelvouden, die als volgt gedefinieerd worden. Is $\vec{t}$ een translatie en (A, B) een willekeurig representerend koppel van $\vec{t}$, dan verstaan we onder $\lambda\vec{t}$ de translatie, die gerepresenteerd wordt door het beeld van (A, B) onder een homothetie met factor λ. Notaties: $\lambda(A, B)$ voor dit beeld; $\lambda\vec{AB}$ voor $\lambda\vec{t}$.
Na bespreking van de roemruchte wetten, kunnen we gaan demonstreren, dat

de verzameling van de translaties door de invoering van een scalaire vermenigvuldiging een handig werktuig is geworden.
Voorbeeld: CD is binnenbissectrice van $\triangle ABC$.
De normen van de translaties $(1/b)\overrightarrow{CA}$ en $(1/a)\overrightarrow{CB}$ zijn gelijk $(= 1)$.
Daar de diagonalen van een ruit bissectrices zijn, kunnen we stellen:

$$\overrightarrow{CD} = \lambda((1/b)\overrightarrow{CA}+(1/a)\overrightarrow{CB})$$

D op AB houdt in: $\lambda/b+\lambda/a = 1 \Rightarrow \lambda = ab/(a+b)$ enz. (bissectrice stelling).
De fundamentele eigenschap: A, B en C collineair $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ laat zich vanuit $\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AB})$ zeer eenvoudig bewijzen.
Kortom: Doe in de onderbouw iets aan analytische meetkunde met translaties, maar houd de zaak *vrij. Geen coördinaten,* dan veel liever inprodukt via de normen van de betreffende translaties! De lessen in wiskunde II kunnen dan beginnen met het bovenstaande over te dragen op R_3 en de behandeling van de volgende hoofdstellingen:

A1 $\vec{a} \neq \vec{o} \wedge \lambda\vec{a} = \vec{o} \Rightarrow \lambda = 0$

A2 *Wordt* $\vec{a} \neq \vec{o}$ *gerepresenteerd door het koppel* (O, A), *dan geldt:*
$\{\vec{x}|\vec{x} = \lambda\vec{a}, \lambda \in \mathbf{R}\} =$
$= \{\vec{x}|\vec{x}$ *wordt gerepresenteerd door een koppel* (O, X) *op lijn* $OA\}$

B1 $\vec{b} \neq \alpha\vec{a} \wedge \lambda\vec{a}+\mu\vec{b} = \vec{o} \Rightarrow \lambda = \mu = o$

B2 *Worden* $\vec{a}$ *en* $\vec{b} \neq \alpha\vec{a}$ *gerepresenteerd door resp.* (O, A) *en* (O, B), *dan geldt:*
$\{\vec{x}|\vec{x} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\} =$
$= \{\vec{x}|\vec{x}$ *wordt gerepresenteerd door een koppel* (O, X) *in vlak* $OAB\}$

C1 $\vec{b} \neq \alpha\vec{a} \wedge \vec{c} \neq \beta\vec{a}+\gamma\vec{b} \wedge \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = o$

C2 Worden $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \alpha\vec{a}$ en $\vec{c} \neq \beta\vec{a}+\gamma\vec{b}$ *gerepresenteerd door resp.* (O, A), (O, B) en (O, C), *dan geldt:*
$\{\vec{x}|\vec{x} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}, (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\} =$
$= \{\vec{x}|\vec{x}$ *wordt gerepresenteerd door een koppel* (O, X) *in de ruimte*$\}$

In C2 gaat het dus om de verzameling van alle translaties.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ heten daarom *basistranslaties,* waarmee men wil zeggen: iedere translatie is er een lineaire combinatie van.
C1 garandeert, dat hierin de scalairen éénduidig bepaald zijn. Analoge beschouwingen gelden voor B2 en B1 t.a.v. de verzameling van alle translaties in het vlak OAB en zouden we ook nog aan lijnmeetkunde doen, dan gaven A2 en A1 al aanleiding tot zulke bespiegelingen.

Het bovenstaande moet m.i. een keer doorgeworsteld worden, voordat de leer van de structuur een aanvang kan nemen.
Ik ben er van overtuigd, dat we onze leerlingen benadelen als we hun de verzameling van de polynomen c.q. polynoomfuncties van een zekere graad als model onthouden.
Het is een zuiverder model, want het mist de problematiek, die schuilt achter onze benamingen vrije en gebonden vectoren; voorbeelden van basistransformaties en homomorfismen (c.q. lineaire functies!!) zijn er zeker zo illustratief in.
Bovengenoemde problematiek is ook een motief om analytische meetkunde met translaties de primeur te geven. Analytische meetkunde met vectoren kan dan als volgt ingeleid worden:
De hoofdstellingen kunnen we belichten als oplossers van het plaatsprobleem.
Is er een punt O uitverkoren om de plaats van andere punten ten opzichte hiervan vast te leggen, dan kan dit als volgt geschieden:
Kies nog drie punten A, B en C, niet coplanair met O.
Volgens C2 geldt dan:

(O, A), (O, B) en (O, C) representeren basistranslaties.

C1 leert: Voor iedere $\vec{t}$ is de uitdrukking $\vec{t} = \lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$ uniek.
Nu heeft iedere translatie juist één representant waarvan O het eerste element is en omgekeerd. Laat dit (O, T) voor $\vec{t}$ zijn.
Het element $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ is nu dus niet alleen translatiebepalend, maar ook plaatsbepalend voor het punt T t.o.v. O.
In de eerste functie zullen we het element een *translatievector* noemen, in het tweede geval een *plaatsvector*.
Vector slaat op het volgende:
Het gaat niet om een element van $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ zonder meer, maar van $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ als vectorruimte, d.w.z.: Er is een optelling en een scalaire vermenigvuldiging in gedefinieerd en wel aldus:

$$(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$p(a_1, a_2, a_3) = (pa_1, pa_2, pa_3).$$

Lezen we $\sim$ als 'is kortschrift voor', dan geldt nu dank zij de wetten in de verzameling van de translaties:

$$(a, b, c) \sim \vec{t} = a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC} \wedge (p, q, r) \sim \vec{u} = p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC} \Rightarrow$$
$$(a+p, b+q, c+r) \sim \vec{t}+\vec{u} \wedge (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \sim \lambda\vec{t}$$

Wat doen we nu met dit fenomeen? Wel, het gecompliceerde karakter van de translaties vergeten en voortaan puur mechanisch met de vectoren rekenen! Dit alles gaat natuurlijk de vectoren als translatievectoren aan. Wat voor consequenties heeft dit voor de plaatsfunctie? Hiervoor geldt:

Voor ieder tweetal punten P en Q met plaatsvectoren (p_1, p_2, p_3) *en* (q_1, q_2, q_3) *is*

$(q_1-p_1, q_2-p_2, q_3-p_3)$ *de translatievector van de translatie, die door* (P, Q) *gerepresenteerd wordt.*

Hoe O ook gekozen is, altijd geldt immers $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.
Nu is de afstand tussen P en Q de norm van deze translatie.
Hebben we op dit punt iets aan de translatievector?
De enscenering van de mogelijkheden, die de keuze van de punten A, B en C op dit punt bieden, zal ik de lezer verder besparen.
Onderwijl is analytische meetkunde met vectoren gelanceerd.

Berichten

Colleges sterrenkunde voor afgestudeerden

Traditiegetrouw organiseert het Utrechts Sterrenkundig Instituut ook in het academisch jaar 1969–1970 een reeks colleges voor afgestudeerden. Het algemene onderwerp is:

DE FYSISCHE EIGENSCHAPPEN VAN DE STERREN.

De volgende voordrachten worden gehouden:

15 januari: Drs. R. van Helden: 'Het sterspectrum, wat is het, hoe verkrijgt men het?'

22 januari: Professor A. B. Underhill: 'Analyse van sterspectra, bepaling van eigenschappen van sterren'.

29 januari: Dr. E. van den Heuvel: 'Magneetvelden in sterren'

5 februari: Dr. J. Heintze: 'Massa, straal en energieflux van sterren'.

De voordrachten worden gehouden in het Universiteitsgebouw, Domplein 29 te Utrecht, en duren van 19.30 uur precies tot 21.15 uur precies.
Leraren kunnen hun reiskosten vergoed krijgen.
Men geve zich voor deelname op bij het secretariaat van het Sterrenkundig Instituut te Utrecht, p/a Laboratorium voor Ruimte-Onderzoek, Huizingalaan 121.

C. de Jager

Korrel CLIV

Elimineren

Een veel voorkomend probleem bij de behandeling van meetkunde met vectoren is het volgende. Gegeven is het vlak met parametervoorstelling

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Gevraagd de vergelijking van dit vlak.
Het vlak is dus de verzameling van de punten, waarvoor geldt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2+2\lambda+\mu \\ x_2 &= 1-\lambda \\ x_3 &= 4+3\lambda-2\mu \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

De vergelijking van het vlak is

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = a_4 \tag{B}$$

wil zeggen: het vlak is de verzameling van de punten, waarvoor (B) geldt.
Nu weet ieder, hoe je rekenen moet. Je elimineert λ en μ uit (A) en krijgt dan (B). Moeilijker is te begrijpen, wat elimineren wil zeggen en waarom eliminatie hier tot het gewenste resultaat leidt. En het komt me noodzakelijk voor, dat dit begrepen wordt. De hierboven gegeven formulering van het probleem brengt ons daarbij op de goede weg. Het vlak is

1 de verzameling van de punten, waarvoor geldt
$(\exists\lambda, \mu)$ (A),
2 de verzameling van de punten, waarvoor geldt (B).

Ons probleem is dus (B) zo te bepalen, dat

$$(\exists\lambda, \mu)(A) \Leftrightarrow (B).$$

We gaan daarbij als volgt te werk:

$$(A)\begin{Bmatrix} x_1 = 2+2\lambda+\mu \\ x_2 = 1-\lambda \\ x_3 = 4+3\lambda-2\mu \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = 2+2(1-x_2)+\mu \\ \lambda = 1-x_2 \\ x_3 = 4+3(1-x_2)-2\mu \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mu = x_1+2x_2-4 \\ \lambda = 1-x_2 \\ x_3 = 4+3(1-x_2)-2(x_1+2x_2-4) \end{Bmatrix} \quad \text{(C)}$$

De juistheid hiervan is direct duidelijk. Omdat (A) $\Leftrightarrow$ (C), is nu ook

$$(\exists\lambda, \mu)(\mathrm{A}) \Leftrightarrow (\exists\lambda, \mu)(\mathrm{C}).$$

Tenslotte is

$$(\exists\lambda, \mu)(\mathrm{C}) \Leftrightarrow x_3 = 4+3(1-x_2)-2(x_1+2x_2-4).$$

Het rechterlid is dus de gevraagde vergelijking.
Dat de laatste ekwivalentie juist is, vereist voor de leerling toelichting. De implicatie van links naar rechts is duidelijk. Nu terug. Kies x_1, x_2, x_3 zo, dat aan het rechterlid voldaan is, b.v. $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 32$, Nu moeten we een waarde voor λ en een waarde voor μ vinden zo, dat ook aan het linkerlid voldaan is. Dit gelukt door te kiezen

$$\lambda = 1-(-3) = 4$$
$$\mu = 2+2\cdot -3-4 = -8.$$

Daarmee is de ekwivalentie bewezen.
Bovenstaande redenering is streng en voldoet daarmee aan een noodzakelijke voorwaarde voor het funderen van een goed inzicht. Bovendien worden de ekwivalenties op zo duidelijke manier gedemonstreerd, dat de leerling zonder moeite het betoog kan volgen. Met veel vallen en opstaan ben ik tot het bovenstaande gekomen. Vandaar deze korrel, waar een ander misschien ook iets aan kan hebben.

Na het schrijven van deze korrel werd ik opnieuw geconfronteerd met het probleem 'elimineren' bij het onderwijs in de analyse. Het ging om de volgende opgave.
Gegeven is de parametervoorstelling van een vlakke kromme:

$$x = t+1$$
$$y = t^2-t.$$

Stel de vergelijking van de kromme op.
Iets duidelijker geredigeerd: wat is de verzameling van de punten (x, y), waarvoor $x = t+1 \wedge y = t^2-t$, als t de reële getallen doorloopt?
Dit 'doorlopen' is ook nog minder fraai. Beter is de redactie: welke is de verzameling

$$\{(x, y) | \exists t \,.\, x = t+1 \wedge y = t^2-t\}? \qquad (1)$$

(Het is correcter hierin i.p.v. '$\exists t$' te schrijven '$\exists t \in \mathbf{R}$', maar velen zullen dit op school niet doorvoeren.)

De opgave luidt nu: vind een relatie van de vorm $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, die gelijkwaardig is met (1).
Nu is

$$\exists t \begin{Bmatrix} x = t+1 \\ y = t^2 - t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \exists t \begin{Bmatrix} t = x-1 \\ y = (x-1)^2 - (x-1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow y = (x-1)^2 - (x-1).$$

De gevraagde relatie is dus $\{(x, y) | y = x^2 - 3x\}$.
Deze rekenwijze noemt men: elimineren van t uit

$$x = t+1 \text{ en } y = t^2 - t.$$

Het probeem is analoog aan het voorgaande. Het is echter iets doorzichtiger en daarom uitermate geschikt om leerlingen duidelijk te maken, wat elimineren betekent en waarvoor het noodzakelijk is.

P. G. J. Vredenduin
Oosterbeek

Liwenagel

Abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel en het abonnementsgeld voor de 45e jaargang nog niet betaalden, wordt vriendelijk verzocht dit binnenkort te doen door *f* 5,50 over te maken op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede.
Het abonnementsgeld is intussen verhoogd tot *f* 7,—. Omdat dit zo laat wordt meegedeeld zal de verenigingskas *voor deze jaargang* het verschil bijpassen. Dit moge voor de abonnees een aansporing zijn om nu direct aan bovenstaand verzoek te voldoen, zodat er later geen extra aanmaningen verstuurd behoeven te worden.

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Mathematica & Paedagogia (33–38; 1968–1969).

E. Etienne, La différentielle;
C. Henry, Mathématique moderne et économie;
G. G. Hall, Introduction à la théorie de l'information;
E. de Corte en K. Swinnen, De houding tegenover het leervak wiskunde bij leerlingen uit het tweede en het derde studiejaar.

R. Broeckx, Vernieuwing;
R. Broeckx, Leerplan wiskunde voor de zesde van de humanoria;
L. Gotovitch, Que peut penser une 'pédagogue' du nouveau programme de mathématique?
A. Dubois, Déclaration du Ministre de l'Education Nationale;
P. Janssens, Lev Davidovich Landau;
R. Broeckx, Surjecties van A naar B tellen;
Y. Noël-Roch, A propos des quantificateurs;
W. de Roover, Enkele gedachten over de commutativiteit van de vermenigvuldiging;
G. van Hout, Mathématique et langue maternelle;
R. Broeckx, De vierkantsworteltrekking;
R. Broeckx, Over de invoering der reële getallen.

A. Terfve-Legros, A propos du nouveau programme de l'enseignement technique;
E. Bouqué, Aktueel;
Y. Noël-Roch, Non ($\forall x \ldots$) en sixième;
C. Hug, A propos de la mesure des aires au cours moyen;
C. de Munter, Interestberekening op het programma van de zesde?
R. Broeckx, Relatievoorschriften;
C. Hamoir, A propos de la différentielle;
G. Deen, Gedifferentieerde premiën inzake autoverzekeringen;
Sirius, A mon point de vue;
E. Bouqué, Moderne wiskunde en rekenvaardigheid.
A. Dubois, Extrait du discours prononcé par monsieur le ministre à l'école normale de Nivelles;
W. de Roover, Breuken;
V. Baligand e.a., Etude des manuels de mathématique;
R. Broeckx, Over notaties;
R. Bens, Hoofdrekenen;
R. Bens, Examenvragen.

Programme de mathématique pour les classes de 5e des humanités (Enseignement moyen catholique);
G. Bosteels, Matrices;
Ph. de Vleeschouwer, Sur les 'acquisitions à entretenir' dans le nouveau programme;
R. Broeckx en C. van Mechelen, Over structuurisomerie;
E. Boucqué, Strikte en algemene orderelaties;
R. Broeckx, Logaritmen door vectoren voorstellen;
J. Verlooy, Binaire kommagetallen;
G. Noël, Echternach 1969.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Agenda van de Jaarvergadering

op maandag 22 december 1969
in Esplanade, Lucas Bolwerk, Utrecht.
Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering 1968 (1).
3. Jaarverslagen (1),
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing:
   Dr. ir. B. Groeneveld, drs. A. J. Th. Maassen en M. den Otter treden af; zij zijn niet herkiesbaar. Het bestuur stelt kandidaat: Dr. J. K. van den Briel, drs. J. W. Maassen en L. van Beek.
6. Vaststelling van de contributie 1970/1971.
7. Bespreking van het dilemma: Gedeeld of Ongedeeld V.W.O.? (2).
8. Voordracht von drs. E. J. Wijdeveld en F. Goffree: Wiskunde in de Basisschool.
9. Rondvraag.

PAUZE

10. Splitsing van de vergadering in twee delen
    10.1. Voordracht van Prof. dr. H. J. A. Duparc:
    Gedachten rondom discrete wiskunde.
    Voordracht van Dr. P. G. J. Vredenduin:
    Structuren.
    10.2 Sluiting.

(1) Hierna afgedrukt.
(2) Dit agendapunt is opgenomen op verzoek van de Raad van Leraren.

Verslag van het Verenigingsjaar 1 september—31 juli 1969.

Het bestuur was in dit jaar als volgt samengesteld: dr. ir. B. Groeneveld, voorzitter, drs. A. J. Th. Maassen, secretaris, drs. J. van Dormolen, penningmeester, C. J. Alders (tot 23 december 1968), M. Kindt, L. A. G. M. Muskens (vanaf januari 1969), M. den Otter (vanaf februari 1969), dr. P. G. J. Vredenduin.
De jaarvergadering is gehouden op 23 december 1968 in ‘Esplanade’, Utrecht.
De presentielijst bleek door 76 leden te zijn getekend.
Tijdens deze vergadering zijn de Statuten en het Huishoudelijk Reglement van de vereniging gewijzigd. Op 20 juni 1969 is de koninklijke goedkeuring verkregen op de ‘overgelegde gewijzigde statuten’. De vereniging heet thans Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Op 9 december 1968 heeft het bestuur nog eens krachtig gepleit bij de Raad van Leraren voor een mondeling gedeelte bij het eindexamen wiskunde voor het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs voor al die kandidaten die wiskunde II in hun pakket hebben gekozen.
Het bestuur heeft Prof. dr. B. van Rootselaar bereid gevonden namens de Vereniging zitting te nemen in de programma-commissie voor de opleiding van leraren.
Het bestuur heeft bij de Raad van Leraren adhesie betuigd met het voorstel van Velines, te ijveren voor toekenning van taakurenpakketten aan besturen van vakgroepen.
Het bestuur heeft in dit jaar acht maal vergaderd.

Notulen van de Algemene Vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op 23 december 1968 in 'Esplanade' Utrecht.

Om 10.30 uur opent de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld, de vergadering.
Hij richt een speciaal woord van welkom tot dr. J. H. Wansink, erelid, de inspecteurs dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof, dr. Th. J. Korthagen die Liwenagel vertegenwoordigt, tot G. Krooshof die namens de redactie van Euclides de vergadering bijwoont, en tot de sprekers prof. dr. N. G. de Bruijn en drs. R. Sattler.
De voorzitter houdt zijn jaarrede; deze rede zal in Euclides worden gepubliceerd.
De notulen van de vorige jaarvergadering en de verschillende jaarverslagen worden goedgekeurd.
De penningmeester wordt décharge verleend.
De heren J. F. Deckers en B. v.d. Meyden worden benoemd in de nieuwe kascommissie.
Bij de bestuursverkiezing wordt dr. P. G. J. Vredenduin herkozen; C. J. Alders neemt afscheid als bestuurslid.
N.a.v. een interruptie van een der leden betreffende de vacature-Alders, vraagt de voorzitter – vooruitlopend op het agendapunt: Statutenwijziging – de machtiging van de vergadering om twee bestuursleden te zoeken in mavo-kringen; die machtiging wordt hem verleend.
De contributie voor 1969–1970 wordt vastgesteld op *f* 9,—.
De voorzitter brengt een brief van de Raad van Leraren in bespreking, gedateerd 19-12-1968 handelende over eindexamenregelingen.
Na enige discussie over deze brief doet een der leden het voorstel van orde, de kwestie in de rondvraag af te handelen; dit voorstel wordt aangenomen.
Vredenduin doet mededeling over het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap.
Hierna geeft de voorzitter het woord aan prof. dr. N. G. de Bruijn die een voordracht houdt over 'Computerwiskunde op school'.

Pauze.

Na de hervatting van de vergadering houdt drs. R. Sattler een lezing over 'Vectormeetkunde'.
Hierna volgt de rondvraag.
Drs. L. van den Brom is het niet eens met het beleid van het bestuur t.a.v. deelneming aan commissies die zich belasten met het samenstellen van een programma voor de lerarenopleiding. Het bestuur is het met de zienswijze van de heer van den Brom niet eens.
De brief van de Raad van Leraren wordt besproken, waarin de Raad verzoekt een uitspraak te doen over centraal schriftelijk examen plus een schoolonderzoek – of – centraal schriftelijk examen plus een schoolexamen.
De Heer E. H. Schmidt: het examen kan alleen gered worden, als het zo eenvoudig mogelijk gehouden wordt; de school moet daarom zoveel verantwoordelijkheid zelf op zich nemen als mogelijk is.
De Heer A. J. Elsenaar: het gaat erom dat de objectiviteit niet in het gedrang komt door de neiging van de leraar zijn leerlingen vooral niet te duperen of door de overdreven pogingen van de leraar strikt eerlijk te zijn, die evenzeer tot onvoldoend verantwoorde beoordeling kunnen leiden.
De vergadering stelt zich vrijwel unaniem achter het bestuursvoorstel, het tweede alternatief te prefereren.
Statutenwijziging: De voorzitter krijgt machtiging van de vergadering eventuele technische wijzigingen, die noodzakelijk mochten blijken om de koninklijke goedkeuring te verkrijgen, aan te brengen. Deze machtiging wordt ook de secretaris verleend. Hiervoor is dus geen besluit van de ledenvergadering meer vereist.
Velen hebben bezwaar tegen de voorgestelde naam: Vereniging van Wiskundeleraren. L. E. J. Brouwer. Bij stemming blijken voor deze naam 18 leden te zijn en tegen 22. Aangenomen wordt daarna als naam: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
De Statuten worden daarna door de vergaderingen aangenomen, nadat op voorstel van enkele leden nog verbeteringen in de redactie aangebracht zijn.
Van den Brom ontraadt stemming over het Huishoudelijk Reglement. De vergadering wenst wel meteen een beslissing t.a.v. dit reglement te nemen. Het wordt daarna aangenomen.
Het bestuur verkrijgt daarna van de vergadering machtiging twee personen uit de kring van het mavo-onderwijs te vragen in het bestuur zitting te nemen.
Bij de rondvraag bedankt *van der Neut* mede namens zijn collega Westerhof. Volgens hem is Wimecos geen goedverzorgde vijver meer, maar is zij een bruisende beek geworden.
Schmidt uit zijn vreugde over de beslissing mavo-leraren in de vereniging op te nemen. Totnogtoe hielp het vwo de mavo-leraren, thans is men een stap verder gegaan.
Van den Briel: het komt voor, dat het bevoegd gezag leraren van een school

verplicht een bepaald leerboek te gebruiken, omdat het het noodzakelijk acht, dat in alle brugklassen van een scholengemeenschap hetzelfde boek gebruikt wordt. Ligt het op de weg van het bestuur van de vereniging (NVvW) hier stelling tegen te nemen?
Het bestuur is van mening, dat het bevoegd gezag formeel niet incorrect handelt en dat het dus niet op zijn weg ligt hiertegen op te treden.
Om 17.15 uur sluit de voorzitter de vergadering.

Verslag kascommissie

Heden, de 21e oktober 1969 hebben ondergetekenden de boeken en bescheiden over de periode 1 september 1968–31 juli 1969 van de penningmeester gecontroleerd en in orde bevonden. Gezien de uitstekende staat waarin de administratie zich bevindt stellen zij de vergadering voor de penningmeester décharge te verlenen onder dankzegging voor de bewezen diensten aan de vereniging.

De kascommissie:

w.g. J. F. Deckers B. van der Meijden

Jaaroverzicht over de periode 1 *september* 1968 – 31 *juli* 1969

Inkomsten

Saldo op 1-9-68			Euclides abonne-		
Giro	*f* 876.31		menten		*f* 5093.00
Amro-bank	9612.44		Euclides redactie		500.00
Kas	179.34		Administratie en PTT		
Spaarbank 3½ %	0.00		Convoc. jaarverg.	*f* 500.00	
Spaarbank 5½ %	0.00		Ledenwerfactie	2013.84	
		f 10668.09	Bestuur	624.17	
Contributies					3138.01
1968–1969		8802.50	Vergaderingen		
Contributies			Jaarvergadering	473.75	
1969–1970		363.50	Bestuur	509.60	
Publikaties		1796.24			983.35
Rente			Reiskosten		399.57
Amro-bank	*f* 253.76		Boekenbonnen		150.00
Spaarbank 3½ %	2.90		Saldo op 31-7-69		
Spaarbank 5½ %	22.91		Giro	3833.47	
		279.57	Kas	309.60	
			Spaarbank 3½ %	502.90	
		f 21909.90	Spaarbank 5½ %	7000.00	
			Amro-bank	0.00	
					11645.97
					f 21909.90

Achterstallige contributie op 31 juli 1969: *f* 128.00

Redactieverslag 44e jaargang van Euclides

Aan de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

De 44e jaargang van Euclides werd gekenmerkt door veranderingen. Wimecos werd Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, welke naamsverandering gepaard ging met een openstellen van het lidmaatschap voor andere dan vwo-leraren. De inhoud van het blad zal aan de nieuwe toestand aangepast moeten worden en als eerste stap daartoe werd de redactie uitgebreid met een tweetal plaatsen, te bezetten door mavo-leraren. Eén plaats daarvan werd ingenomen door de heer Ch. Krijnen te Oosterhout. De andere plaats zal, naar verwacht wordt, spoedig bezet worden.
Een belangrijke verandering was het uittreden van de voorzitter Dr. Joh. H. Wansink, die niet minder dan 17 jaar deel uitmaakte van de redactie en zijn stempel wel zeer op 't blad drukte. Bovendien nam de heer Drs. H. W. Lenstra afscheid als redactielid. Hun plaatsen werden ingenomen door de heren F. Goffree te Hengelo en Drs. J. van Lint te Zwolle.
De nieuwe status en de gewijzigde doelstelling van het blad waren een goede aanleiding om ook de uitvoering en het uiterlijk te vernieuwen. Dit zal met ingang van de 45e jaargang geschieden.
Die komende nieuwe uitvoering betekende dat oude, reeds gezette kopij zo veel mogelijk in de 44e jaargang een plaats moest vinden. Daardoor moesten niet alleen enkele belangrijke of actuele bijdragen blijven liggen, naar ook werd de inhoud van de laatste nummers minder gevarieerd.
Overigens kon een groter aantal bladzijden dan voorheen gewijd worden aan didactische problemen of aan bijdragen betreffende nieuwe programma's, nieuwe leerstof of andere onderwijsvormen.
Enkele inzendingen moesten weer om verschillende redenen geweigerd worden.
De 44e jaargang telde 320 pagina's.

Utrecht, 11 oktober 1969

Namens de redactie,

G. Krooshof, voorzitter
A. M. Koldijk, secretaris

Nieuwe naam voor Internationale Raad voor Audio-visuele Media: I.C.E.M.

De Internationale Raad voor de bevordering van het gebruik en de ontwikkeling van audio-visuele onderwijsmiddelen (I.C.E.F.) heeft tijdens de laatste jaarvergadering te Stockholm vorige maand, zijn naam en statuten gewijzigd.

Blijkens artikel 1 van de nieuwe statuten luidt de nieuwe naam:

I.C.E.M. International Council for Educational Media.

De Raad is tot deze naams- en statutenverandering overgegaan om duidelijk aan te geven dat de oude naam – I.C.E.F. International Council for the Educational Film –, niet duidelijk deed uitkomen dat werkzaamheden van de Raad zich, gedurende de laatste jaren hebben uitgebreid tot het *gehele* terrein van de audio-visuele en andere technische onderwijsmedia.

Wat is de I.C.E.M.?

Anno 1969 zijn 29 *landen* in de I.C.E.M. vertegenwoordigd. Per land staat het lidmaatschap open voor één persoon, die door zijn functie bevoegd is het nationale, of indien dat niet bestaat, een uit andere hoofde erkend instituut te vertegenwoordigen, dat zich bezighoudt met de ontwikkeling, produktie en distributie van audio-visuele en andere technische media, en voorlichting aan de scholen t.a.v. het onderwijskundig gebruik hiervan.
De UNESCO heeft aan de I.C.E.M. de consultatieve status A verleend.
Nederland wordt in de I.C.E.M. vertegenwoordigd door de Stichting Nederlandse Onderwijs Film, in de persoon van haar directeur, de heer H. J. L. Jongbloed.

Doelstellingen van de I.C.E.M.

Hield de Internationale Raad zich tot voor enkele jaren nog vrijwel uitsluitend met de onderwijsfilm bezig, art. 2 over de doelstelling van de I.C.E.M. weerspiegelt duidelijk de frontverbreding welke door de audio-visuele instituten, waaronder de Stichting Nederlandse Onderwijs Film in Nederland, wordt nagestreefd.

Dit artikel luidt:

a Het bevorderen van persoonlijke contacten tussen degenen die beroepshalve verantwoordelijkheid dragen voor het bevorderen van de produktie, distributie en het gebruik van de moderne media.
b Het creëren van een internationaal forum voor de uitwisseling van ervaringen op het gebied van de onderwijstechnologie.
c Het bevorderen van een betere integratie van alle moderne media in het onderwijs.

d Het bevorderen van het gebruik van de moderne media zowel bij de onderwijzersopleiding als in de klas.
e Het bevorderen van de beschikbaarheid van moderne media over de gehele wereld, o.m. door het entameren van internationale coprodukties en door internationale uitwisseling en distributie van onderwijsmedia.
f Het onderhouden van contacten met, en het adviseren van producenten van hard- en software.
g De aangesloten landen informeren met betrekking tot de ontwikkelingen op het terrein van de onderwijstechnologie.
h Samenwerken met andere organisaties ter bevordering van het gebruik van de audio-visuele media.

Nadere inlichtingen: I.C.E.M.-Holland, p/a Nederlandse Onderwijs Film,
Sweelinckplein 33, Den Haag.
tel. 070-600924.

Kalender

ma 22 december: Jaarvergadering Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Utrecht, Esplanade; zie dit nummer p. 114

za 3 januari: Wintersymposium Wiskundig Genootschap in het Stedelijk Gymnasium, Leiden. 'Integraalrekening' Zie Euclides, november p. 114.

ma 5 t/m wo 7 januari: Heroriënteringscursus Computerkunde voor vwo-leraren, georganiseerd door de CMLW te Utrecht. (Inschrijving gesloten).

ma 5 t/m wo 7 januari: Heroriënteringscursus Meetkunde met vectoren voor vwo-leraren, georganiseerd door de CMLW te Groningen. (Inschrijving gesloten).

6–7 april 1970: 6e Nederlands Mathematisch Congres te Delft. Nadere gegevens volgen.

28 mei–1 juni 1970: 10e Didacta, Europese beurs voor leermiddelen te Bazel, Zwitserland.

1–10 september 1970: Internationaal Wiskundig Congres te Nice, Frankrijk.

Commissie modernisering leerplan wiskunde

Bij de heroriënteringscursus Computerkunde, die in september 1969 te Eindhoven werd gehouden (en waaraan de in Utrecht te houden cursus identiek zal zijn) ging het om het waarom en het hoe van computerkunde bij het voortgezet onderwijs. Een eerste versie van een schoolboekje werd uitgereikt en besproken, en vraagstukken daaruit werden gemaakt.

Bij deze cursus bestond onder de deelnemers een sterk gevoel voor de noodzaak van computerkunde-onderwijs bij het voortgezet onderwijs. Er was een groot enthousiasme om hiermee, al was het maar experimenteel, te beginnen. Algemeen bestond echter de vrees, dat men niet voldoende boven de stof stond, vooral ten aanzien van diverse computertoepassingen. De vraag werd dan ook gesteld of hieraan door een spoedig te houden vervolgcursus iets gedaan kon worden.

Om op een dergelijke cursus het verlangde hogere plan te kunnen bereiken, is het nodig, dat men reeds vóór het begin daarvan over enige elementaire programmeerkennis beschikt. Men stemde er dan ook algemeen mee in, dat het goed was te verlangen, dat deelnemers aan zo'n vervolgcursus van te voren hoofdstuk 1 en 2 van het bovengenoemde schoolboekje onder de knie hebben, en daarvan hebben doen blijken door een stuk of tien programmeeropgaven (enigszins over deze hoofdstukken verspreid) te maken en door een computer te laten verwerken, hetgeen – gratis – te Utrecht kan gebeuren.

De C.M.L.W. is bereid gevonden in principe een (of twee) *vervolgcursussen* te doen plaats vinden, en wel op:
19. 20, 21 maart te Utrecht en eventueel 5, 6, 7 maart te Eindhoven.
De suggestie van de genoemde toelatingseis nam de C.M.L.W. over.

N.B.
1 De cursus te Eindhoven zal alleen dan plaatsvinden, wanneer het aantal der aanmeldingen een splitsing gewenst maakt.
2 *De aanmelding voor de cursussen sluit op* 10 *januari* 1970.

Deze cursussen zijn (het woord *vervolg*cursussen duidt hier al op) in de eerste plaats bestemd voor hen, die de in de aanhef genoemde cursussen te Eindhoven en Utrecht gevolgd hebben resp. zullen volgen. Voorzover de plaatsruimte dit toelaat zijn ook anderen zeer welkom. Voor laatstgenoemden is op aanvraag een inschrijfformulier beschikbaar.
Adres: secretariaat C.M.L.W., De Uithof, Budapestlaan 6, Utrecht.

Boekbespreking

Frédérique et Papy, *L'enfant et les graphes,* Marcel Didier, Brussel, 1968, 190 blz., Prijs onbekend.

Sedert september 1967 heeft '*Le centre Belge de Pédagogie de la Mathématique*' een experiment gehouden in twee klassen met leerlingen van zes jaar.
Dit boek geeft een beschrijving van de tien behandelde lessen. De figuren zijn reprodukties van de originele tekeningen van de jonge leerlingen, die daarin de neiging 'om poppetjes te tekenen' niet konden weerstaan.
Voor degenen die belangstelling hebben in de opzet van deze methode een belangwekkend boek. De uitvoering is luxueus.

Burgers

E. Martensen, *Potentialtheorie*, B. G. Teubner – Stuttgart 1968. 266 blz.
Dit boek over potentiaaltheorie is geschreven vanuit het standpunt van de toegepaste analyse. Het behandelt de potentiaaltheorie in drie dimensies, waarbij veel aandacht gegeven wordt aan de toepassingsgebieden – ook de heel moderne – van dit vak in de fysica. 'Abstracte' potentiaaltheorie en zijn verbanden met maattheorie en toepassingen van potentiaaltheorie in bijvoorbeeld functietheorie worden niet besproken. De stijl en uitvoering van het boek zijn keurig verzorgd. Voor een lezer die dit boek wil gebruiken voor een eerste kennismaking met het behandelde vak is het volgende van belang.

a Waar de auteur zegt, dat voor drie van de vier hoofdstukken een gefundeerde kennis van de infinitesimaalrekening voldoende is (– in het vierde hoofdstuk wordt ook kennis van de Fredholmtheorie verondersteld –), houdt dit wel in dat men vertrouwd moet zijn met begrippen als gradient, rotatie en divergentie en met stellingen als die van Stokes en Gauss.
b De waarde van dit boek voor zelfstudie zou groter geweest zijn indien het meer vraagstukken zou bevatten of indien de opgenomen vraagstukken (in totaal 89) gelijkmatiger over de tekst verdeeld waren.
c De lezer wordt zeer geholpen door vele in het boek opgenomen gedetailleerd uitgewerkte voorbeelden, waardoor het gemis aan opgaven voor vele gebruikers van het boek zeker gecompenseerd wordt.
Conclusie: een goed geschreven, maar niet al te gemakkelijk boek.

S. Ackermans

Zellig Harris, *Mathematical Structures of Language*, Interscience tracts in pure and applied mathematics 21, Interscience Publishers, New York, London, Sydney, Toronto, 1968, IX+230 blz., 112/–.

De schrijver, van huis uit een filoloog, stelt zich ten doel een analyse te geven van de structuur van de taal en daarbij de hulpmiddelen te gebruiken, die de moderne wiskunde biedt. Eerst behandelt hij het probleem, hoe de structuur van een volzin (sentence) is. Dit is echter slechts een inleiding tot het centrale thema van zijn boek: hoe worden zinnen gevormd uitgaande van elementaire zinnen door hierop bepaalde transformaties uit te voeren? Aan een simpel voorbeeld wordt de bedoeling iets duidelijker.
Door inlassing van 'zeer' ontstaat uit 'dit boek is mooi' 'dit boek is zeer mooi'.
Door inlassing van 'jong' ontstaat uit 'dit paard loopt' 'dit jonge paard loopt'.
In het eerste geval betekent 'zeer' een versterking van het adjectief. Als de oorspronkelijke woordopvolging een acceptable zin vormt, d.w.z. betekenis heeft, zal de daaruit afgeleide ook aan deze eis voldoen.
In het tweede geval is de situatie anders. 'Dit potlood is zwart' is acceptabel, maar 'dit jonge potlood is zwart' is het niet.
De transformaties, die de schrijver beschouwt, voldoen aan de eis, dat uit acceptabele zinnen weer acceptable zinnen ontstaan. Toevoeging van 'zeer' is dus wel, toevoeging van 'jong' geen transformatie.
We kunnen echter ook uit 'dit paard loopt' en 'dit paard is jong' afleiden 'dit jonge paard loopt'. Zijn nu eerstgenoemde twee zinnen acceptabel, dan is de derde het ook. Dit is dus wel een transformatie.
In werkelijkheid is de situatie nog iets gecompliceerder, doordat de schrijver eist, dat meer acceptabele zinnen overgaan in meer acceptabele (acceptabel is immers een predikaat, dat een zin in meerdere of mindere mate kan toekomen).
Ten slotte komt de auteur tot een abstract systeem. De wiskundige, die nu een soort axiomatische opbouw verwacht, wordt teleurgesteld. Het abstracte systeem is weinig meer dan een recapitulatie van het voorgaande in iets gewijzigde symboliek.

Het boek is in hoge mate merkwaardig. Het is de moeite waard voor filologen met een wiskundige inslag en voor mathematici met taalkundige interesse. Degenen, die verwachten een stuk grammatica of een stuk logica te vinden, moet ik waarschuwen dat dit niet het geval en ook per se niet de bedoeling van de schrijver is.

P. G. J. Vredenduin

Grundzüge der Mathematik, Band V, Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1968.

De gehele serie 'Grundzüge' is blijkbaar bedoeld om leraren en mathematici in industrie en bedrijfsleven te informeren t.a.v. belangrijke aspecten van de zuivere en toegepaste wiskunde. Daarbij is een beperking in de keuze van de stof onvermijdelijk. Ook is dat in dit deel het geval zoals de schrijvers in het voorwoord opmerken. Niettemin kan er geen twijfel over bestaan, dat in het onderhavige deel een aantal belangrijke en actuele onderwerpen worden behandeld, zoals uit de navolgende opsomming van titels van hoofdstukken moge blijken.

> 1. Allgemeine Gesichtspunkte. 2. Ziffernrechner (Rechenautomaten), 3. Analogrechner, 4. Numerische Verfahren, 5. Anwendungen der Algebra, 6. Anwendungen der Analysis, 7. Neuere Entwickelungen der numerischen Mathematik.

De hoofdstukken – door verschillende specialisten geschreven – zijn in het algemeen goed leesbaar (voor zover een wiskunde-tekst dat kan zijn). In de presentatie wordt een plezierige middenweg tussen de uitersten van een gedetailleerde technische uiteenzetting, en een oppervlakkig maar weinig inzicht gevend overzicht, bewandeld. Als de andere, grotendeels reeds verschenen, delen van de serie op een soortgelijke manier zijn of worden geschreven zal de serie op geslaagde manier in een belangrijke behoefte voorzien.

W. T. van Est

Prof. dr. J. H. van den Berg, *Metabletica van de materie*, Callenbach N.V. Nijkerk, 1968, 450 blz., f 34,50.

Uitgaande van het feit, dat omstreeks 1730 de niet-euclidische meetkunde tot ontwikkeling komt en in het bijzonder het verschijnen in 1733 van het boek G. Saccheri '*Euclides ab omni naevo vindicatis*' gaat de schrijver, via de metabletische methode dit verschijnsel verklaren.

De metabletische methode vereist op zes beginselen:

1 het beginsel niet te verstoren
2 het beginsel der werkelijkheid
3 het beginsel der veranderlijkheid
4 het beginsel der gelijktijdigheid
5 het beginsel van het unieke voorval
6 het beginsel der beklemtoning.

Letterlijk alles wat aan verandering onderhevig is, is niet een enkelvoudige verandering, maar is op alle gebieden aantoonbaar. Alle verandering op het gebied van bouwstijlen, schilderkunst, religieus denken, spiritualiteit, marialogie, transubstantiatie, humanisma, askese, moraal, ontdekkingsreizen, interruimtelijk verkeer, relativiteitstheorie, de plaats van de vrouw in de samenleving spelen gezamenlijk op elkaar in.

Zo ontstaat een boeiende en interessante bespreking die menigeen zal boeien.

Burgers

I. Bucur, A. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, A. Wiley – Interscience Publication.

Het boekje is m.i. in de eerste plaats bedoeld voor degene die reeds enigszins vertrouwd is met de begrippen 'categorie' en 'functor', en behoefte gevoelt aan iets meer technische kennis. Voor dit doel lijkt het bijzonder geschikt. Als een eerste inleiding in de theorie laat het zich wellicht minder gemakkelijk lezen door het ontbreken van voldoende veel voorbeelden.

W. T. van Est

Russell V. Person: *Essentials of Mathematics.* second ed. John Wiley and Sons, 721 blz., prijs 88s.

Het werk bestaat uit vijf delen. Het eerste, Arithmetic, behandelt het rekenen op basisschoolniveau. Zonder opzienbarende vondsten worden wijdlopig alle rekentechnieken besproken. Alleen de laatste paragrafen kunnen een zesde klas leerling iets nieuws vertellen over talstelsels.
De algebra, die in het volgende deel aan bod komt, gaat niet veel verder dan ons peil derde leerjaar V.H.M.O. De onderwerpen complexe getallen en determinanten vormen hierop een uitzondering.
Deel III: Geometry houdt zich in hoofdzaak bezig met de metriek. Ook deel IV en deel V belichten vooral de praktische en rekentechnische zijden van de onderwerpen logaritmen en trigonometrie.
Het boek wil wiskunde geven voor lager technisch onderwijs. Hierdoor, alsmede door de traditionele aanpak, biedt het weinig aantrekkelijks voor wiskundeleraren bij ons voortgezet onderwijs.

Van der Zijden

Recreatie

Nieuwe opgave met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

228 Een trein bereikt A ten tijde t_1 en passeert voetganger A in 10 sec. Ten tijde t_2 bereikt de trein voetganger B en passeert B in 9 sec; $t_2 - t_1 = 20$ min. A en B lopen in dezelfde richting. Op welk tijdstip zal de ene voetganger de andere inhalen? (B. Kootstra)

229 Iemand mag uit de natuurlijke getallen 1, 2, . . ., 100 er enige uitkiezen, maar zo, dat geen van de gekozen getallen de som is van twee andere, die hij gekozen heeft. Hoeveel kan hij er maximaal kiezen?
En hoeveel kan hij er maximaal kiezen, als geen van de gekozen getallen de som mag zijn van twee of meer andere gekozen getallen?

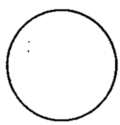
230 Gegeven is een drietal natuurlijke getallen a, b en c, waarvoor geldt: $a^2+b^2 = c^2$. Onderzoek of er bij elk dergelijk drietal andere drietallen natuurlijke getallen a_1, b_1, c_1 te vinden zijn, waarvoor eveneens $a_1{}^2+b_1{}^2 = c_1{}^2$ en waarvoor bovendien $a_1-b_1 = a-b$. Vind een drietal natuurlijke getallen a, b, c, waarvoor $a^2+b^2 = c^2$ en $a-b = 2$, met de eigenschap, dat a, b en c tussen 1000 en 2000 liggen. (B. Kootstra)

226 Wat is het kleinste natuurlijke getal met precies 15 delers? Is er een kleiner natuurlijk getal met meer delers?
Het aantal delers van $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ ($p_1, p_2, \dots, p_k$ priem en alle verschillend) is gelijk aan $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$. Omdat $15 = 3 \,.\, 5$, is het kleinste natuurlijke getal met precies 15 delers dus

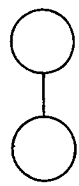
$$2^{5-1} \,.\, 3^{3-1} = 144.$$

$16 = 4 \,.\, 2 \,.\, 2$ en dus heeft 16 delers $2^3 \,.\, 3 \,.\, 5 = 120$. Men ziet gemakkelijk, dat dit het enige getal kleiner dan 144 is met meer dan 15 delers.

227 Stel in een stad in alle straten eenrichtingsverkeer in zo, dat men vanuit elk punt elk punt kan bereiken.
Neem de buitenomtrek van de stad. Als die de gedaante heeft van fig. 1a, dus topologisch een cirkel is, is er geen beletsel. Is de gedaante zoals in fig. 1b, dan is er geen oplossing.

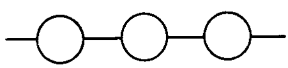


FIGUUR 1a

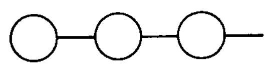


FIGUUR 1b

Neem nu de buitenomtrek weg en verwijder ook alle straatgedeelten, waarvan een uiteinde tot deze buitenomtrek behoorde. Is de buitenomtrek zoals in fig. 2, dan is er geen beletsel, als de beide uiterste 'cirkels' door een verbindingsweg met de vroegere buitenomtrek verbonden zijn (fig. 2a). Is dat niet het geval (fig. 2b), dan is er geen oplossing.

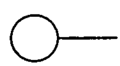


FIGUUR 2a



FIGUUR 2b

Zo gaat men verder. In het algemeen kan men dus zeggen, dat er een oplossing is, mits geen geïsoleerde lus van de vorm (fig. 3)



FIGUUR 3

voorkomt. Steden zonder dergelijke wormvormige aanhangsels laten dus het geëiste eenrichtingsverkeer toe.

Inhoud