EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no. 3
november 1969

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de penningmeester: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem(N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-32494.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot:
Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786.

Hoe bewijst U dat?

G. KROOSHOF
Groningen

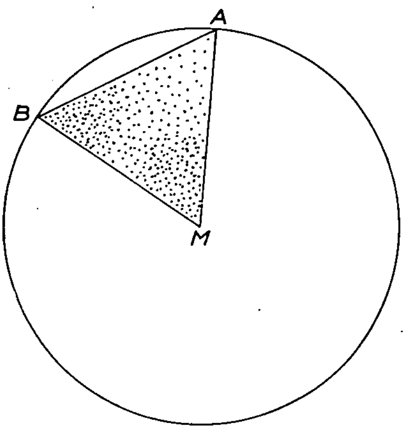
Tegen het eind van de vorige cursus moest er door de leerlingen van mijn brugklas een regelmatige zeshoek getekend worden. Ik liet toen op het bord de bekende constructie zien, waarbij de straal van een cirkel „zesmaal in die cirkel wordt afgepast".
De constructie op het bord kwam bijna goed uit, maar ik verzekerde de leerlingen, dat het bij hen wel goed zou lukken, als ze maar nauwkeurig genoeg waren.
Op deze opmerking reageerde één van de jongens (Arie) met de uitroep: „Hoe bewijst u dat?"

Het spreekt vanzelf dat ik de gelegenheid om met de klas over een bewijs te praten nu moest aangrijpen. Achteraf bedenk je echter altijd dat je het anders had kunnen aanpakken dan je deed. Ik had Arie bijvoorbeeld kunnen vragen hoe hij tot zijn uitroep kwam.
Was het omdat hij zekerheid wilde hebben dat bij iedereen de constructie zou kloppen? Of was hij verrast door deze aardige constructie, zodat hij zich afvroeg hoe het wel kwam dat het zo mooi klopte? Deze vragen stelde ik niet, omdat ik snel moest overwegen, hoe ik op Arie's uitroep zou reageren. Wat kunnen leerlingen in dit stadium van een bewijs begrijpen? Wat accepteert een brugklasleerling als bewijs?
Ik overwoog dat hij niet zou bedoelen een abstracte, logisch sluitende redenering te horen, waaruit kon blijken dat de geponeerde bewering zou volgen uit andere beweringen. Leerlingen als Arie zijn nog in het stadium dat een zeshoek een ding is, concreet, met zekere eigenschappen. Die eigenschappen worden de zeshoek niet toegekend op grond van meetkundige redeneringen. Hij heeft ze gewoonweg.

De brugklasleerling is niet de enige die op deze manier denkt. Onlangs nog had ik een gesprek met een leerling van de vierde klas van de h.b.s. We kwamen te praten over de niet-euklidische meetkunden en over het verschijnsel, dat in zulke meetkunden de som van de hoeken van een driehoek niet gelijk behoeft te zijn aan een gestrekte hoek. Maar dat moet toch kloppen met de werkelijkheid, was zijn reactie. De meetkunde beschrijft de werkelijkheid voor onze

leerlingen. En een deductief systeem is in deze zin niet een beschrijving van de werkelijkheid, althans niet van de werkelijkheid die onze leerlingen bedoelen. Daarom probeer ik nog al eens, wanneer de gelegenheid zich voordoet een lichte twijfel te zaaien in de geest van mijn leerlingen (van de hogere klassen) betreffende de mogelijkheid om de werkelijkheid te beoordelen. Welke werkelijkheid is *de* werkelijkheid, die van de kleurenblinde of die van de man die wel kleuren onderscheidt?
Terug naar de zeshoek. Een van zijn eigenschappen is, dat hij bestaat uit zes congruente gelijkzijdige driehoeken. Congruent hier niet opgevat als een meetkundige relatie, maar als een tastbaar iets, zoals tegels van een tegelvloer congruent zijn omdat ze allemaal in dezelfde pers geperst zijn.
Het 'bewijs' werd nu op de volgende manier met de klas ontwikkeld.

We tekenen AB gelijk aan de straal van de cirkel en trekken MA en MB.
Er ontstaat een driehoek. Wat voor bijzonders heeft ie? Gelijkzijdig. Gelijkhoekig. Hoe groot zijn de hoeken? 60°.
Waarom ook weer? Zo'n driehoek past op drie manieren 'in zijn omtrek'.



Door kleuren wordt het 'tegelachtige' van de driehoek geaccentueerd. De tegel kan draaien om M. Hoe ver moet je draaien om MB te krijgen op de plaats waar nu MA ligt? Hoe ligt de driehoek dan?

Het duurt niet lang of iemand ontdekt dat er zes van deze tegels in de cirkel passen. Arie vindt dat het verlangde bewijs geleverd is.

Naar aanleiding van dit lesfragment nog enkele opmerkingen over bewijzen in de schoolwiskunde.

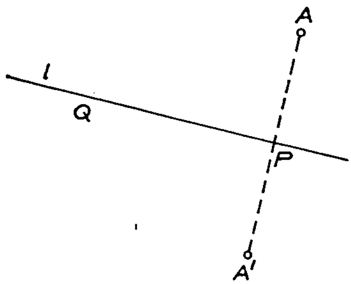
1 Gevallen als deze kunnen niet worden ingebouwd in een schoolboek. Het spontane optreden van de vraag „Hoe bewijst u dat?" kan op een onverwacht moment optreden, maar ook achterwege blijven. Misschien dat een leraar iets kan stimuleren in de richting van het stellen van de vraag, maar forceren kun je dat niet.

2 Het met de klas ontwikkelde 'bewijs' zou gemakkelijk om te zetten zijn in een echt bewijs. Tweemaal kan daarin een conclusie worden getrokken uit de eigenschappen van de rotatie: de gelijkzijdige driehoek kan door rotatie driemaal op zichzelf afgebeeld worden; de regelmatige zeshoek bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken, die door rotatie op elkaar af te beelden zijn.
Maar in de eerste plaats kennen de leerlingen in dit stadium het draaien nog niet als een afbeelding en bovendien zal het hun koud laten of de bewering waar is op grond van de eigenschappen van een afbeelding. Je ziet immers dat het klopt.

3 Toch zijn voorbeelden als deze voorbereidingen voor het echte bewijzen. In een nabespreking heb ik daarom de nadruk gelegd op twee ervaringen:
a We konden de bijzonderheid van de zeshoek ontdekken, omdat we die van de gelijkzijdige driehoek kenden.
b Deze bijzonderheid geldt niet alleen voor de zeshoek op het bord, maar ook voor elke zeshoek in de schriften van de leerlingen, voor *alle* zeshoeken.

Het 'voor-alle-karakter' van een bewijs hadden we al eens eerder ontdekt. Dat was in de algebralessen toen we werkten met bewerkingen aangegeven door een $*$. Deze bewerkingen waren dikwijls niet commutatief of associatief, hoewel bij speciale voorbeelden het $a * b = b * a$ nog wel eens wilde kloppen. We zagen toen, dat het niet-commutatief zijn door één enkel tegenvoorbeeld kon worden aangetoond, maar dat je voor het wel-commutatief zijn *alle* gevallen zou moeten onderzoeken.

4 In de traditionele meetkunde kwamen al spoedig in de eerste klas bewijzen aan de orde met behulp van congruentiegevallen. In verschillende moderne wiskundemethoden wordt de congruentie ingevoerd met behulp van de zg. congruente transformatie. Daardoor vervallen niet alleen de congruentiegevallen, maar ook de bewijsmethoden, waarin ze werden gebruikt.
Gelijkheid van lijnstukken of hoeken wordt in deze methoden dan ook meestal *toegelicht* door een deel van de figuur een translatie, rotatie of spiegeling te laten ondergaan. Van echt bewijzen kan dan pas sprake zijn als een aantal grondeigenschappen van de transformaties zijn vastgesteld en in de bewijzen wordt gebruikt. Het vergt echter tijd om de overgang te maken van het hanteren van een aantal concrete *handelingen* (draaien, spiegelen, verschuiven) naar het toepassen van de daarmee overeenkomende *abstracte eigenschappen* van transformaties. Dikwijls ontstaat het begrip voor deze eigenschappen bij het toepassen van de transformaties op een vlak waarin figuren door coördinaten zijn gegeven. Het toepassen van transformatieformules werkt het abstraheren in de hand.
Het is gewenst de eigenschappen van de transformaties, telkens wanneer de gelegenheid daartoe zich voordoet, door de leerlingen te laten formuleren. In het begin kan dat gebeuren met het vermelden van de bijzonderheden in een speciaal geval: Bij de spiegeling in de lijn l zijn A en A' elkaars spiegelbeeld. Nu



is $AP = A'P$ en zijn de hoeken APQ en $A'PQ$ recht. Later kan dan geconstateerd worden:
Bij *elke* spiegeling hebben punt en beeldpunt gelijke afstanden tot de spiegelas enz.
In een nog later stadium kan men er toe overgaan de gevonden eigenschappen in te voeren als axioma's en te doen opmerken dat met behulp van de wetten van de logica stellingen uit deze axioma's kunnen worden afgeleid. Dan is de leerling zo ver dat hij inziet, dat een bewijs niet iets is wat mij overtuigt, maar dat het een redenering is die aan deze wetten van de logica gehoorzaamt.
Het is niet waarschijnlijk dat elke leerling van het voortgezet onderwijs zo ver komt. In de onderbouw van de verschillende schooltypen en in het mavo zullen misschien de meeste leerlingen niet zo ver komen.

Figuren en symbolen

JOH. H. WANSINK
Arnhem

1 In het wiskunde-onderwijs spelen figuren en symbolen een belangrijke rol, wat de symbolen betreft stellig des te belangrijker naarmate de formalisering van de omgangstaal die we in het onderwijs wensen te bereiken, op een hoger niveau is gekomen. In ons traditionele meetkunde-onderwijs treden de figuren op de voorgrond, in het algebra-onderwijs de symbolen.

2 De geschiedenis van ons schoolonderwijs leert ons, dat figuren in het meetkunde-onderwijs geenszins onontbeerlijk zijn gebleken. Zo werd omstreeks de eeuwwisseling door Gravelaar een leerboek der planimetrie geschreven, waarin figuren geheel ontbraken. Uit het voorwoord van de derde druk (1907) citeer ik:

> Om de leerlingen tot nauwgezette studie te verplichten en de onderwijzer het toezicht erop te vergemakkelijken, heb ik in dit leerboek geen figuren opgenomen, maar ze vervangen door beschrijvingen, die tot in bijzonderheden afdalen.

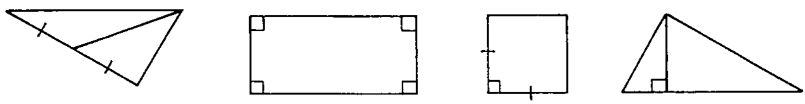
Gravelaar slaagde er op deze wijze in een leerboek samen te stellen, dat onder de meetkundeboeken van zijn tijd een ereplaats innam. De logische constructie van zijn betoog kwam door het weglaten van de figuren op een hoger plan te staan. Essentiële onderdelen van het betoog werden nimmer weggelaten op grond van de veronderstelling dat ze uit een figuur misschien wel voldoende duidelijk zouden mogen worden geacht.

3 In moderne algebraboeken zien we figuren een steeds ruimere plaats innemen in het bijzonder door de introductie van venn-diagrammen. Ook hier geldt, evenals voor meetkundefiguren, dat ze van logisch standpunt beschouwd eigenlijk wel gemist zouden kunnen worden. Wat de figuren illustreren, dient in de tekst zelf immers in logische samenhang tot uitdrukking te zijn gebracht. Het feit echter, dat van logisch standpunt beschouwd figuren èn in ons meetkunde-onderwijs èn in ons algebra-onderwijs gemist zouden kunnen worden, betekent geenszins, dat ze nu ook van didactisch standpunt bezien niet aanbevelenswaard zouden kunnen zijn. Ik acht de hoge vlucht die de illustratie-

techniek in de laatste decennia heeft genomen, van zeer grote betekenis, zolang de logische context er maar niet onder te lijden heeft.

4 Figuren zijn afbeeldingen van dat wat men met die figuren wenst aan te geven; de vorm van de figuren heeft een essentiële betekenis. Bij de symbolen daarentegen is de vorm in zekere zin geheel willekeurig, hoewel historisch gezien vaak wel verklaarbaar. Wat met de symbolen wordt aangeduid, behoeft niet uit de vorm van de symbolen intuïtief duidelijk te zijn. De betekenis van de symbolen moet uitdrukkelijk worden vastgelegd. De leerlingen moeten de afspraken (definities) onthouden.

5 Voorbeelden van meetkundige figuren.



De betekenis van elk dezer figuren is onmiddellijk duidelijk voor ieder die de desbetreffende entiteit kent. Ze wordt uit de figuur herkend. Dit geldt ook nog enigszins voor meetkundige symbolen als:

$\triangle \quad \bigcirc \quad \perp \quad //$

6 In het begin-onderwijs van de algebra ontstaat spoedig behoefte aan symbolen voor variabelen. Men duidt deze dan aan door een letter. Zo'n letter, b.v. een x of een a, stelt dan een willekeurig element voor van een nauwkeurig aangegeven getallenverzameling, zonder dat de letter door zijn vorm doet denken aan de getallen die door het symbool worden gerepresenteerd.
Vaak echter kiest men ook zulke letters niet geheel willekeurig. Men neemt bijvoorbeeld de eerste letter van het woord, dat het begrip aangeeft van de soort elementen die in het geding zijn.
Zo kiezen we als de variabelen betrekking hebben op lengten of breedten van rechthoeken, graag de letters l en b, voor oppervlakten de letter O. Voor de hoogte van een driehoek heeft de letter h de voorkeur.
Ook in formules als

$$i = \frac{d.p.k.}{36000} \quad \text{en} \quad v = i + w$$

treffen we voor de gekozen variabelen afkortingen aan.
Het abstractieproces dat doorlopen moet worden is nog maar ten halve voltrokken.
De leerling moet zo spoedig mogelijk leren abstraheren van de overeenkomst, die door de keuze van letter voor de variabele nog wordt gesuggereerd, en gaan inzien, dat men in principe geheel vrij is in de keuze van de letter die men voor de variabele wenst te gebruiken.

Welke getalvariabelen in het spel zijn wordt met moderne symbolen als $x \in \mathbf{N}$ en $x \in \mathbf{R}$ voldoende duidelijk aangegeven.

7 Voor de symbolen uit de algebra geldt, dat sommige ervan oorspronkelijk wel afbeeldingen geweest kunnen zijn van wat ze nu betekenen, maar dat, naarmate de behoefte aan gelijkenis verzwakte, het abstracte karakter van het desbetreffende symbool kon toenemen.
Duidelijk zien we dit bij de cijfers en getallen. Eertijds waren de eerste natuurlijke getallen 'vingergetallen'.
De symbolen voor de getallen 1–5 en van hun tienvouden waren bij de Chinezen:

𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 en 𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭

Ook nu nog zijn er tal van andere symbolen met reminiscenties aan hun betekenis, bijvoorbeeld de symbolen $=$, $<$, $>$, e.
Ook de hierboven gebruikte symbolen **N** en **R**.
Anders dan bij de meetkunde is hier echter geen sprake van verwijzing naar de entiteiten zelf, maar naar de namen ervan.

8 Leerlingen van 11 en 12 jaar staan gemakkelijker open voor de aanschouwelijke symbolen uit de meetkunde dan voor de meer abstracte uit de algebra. Dit impliceert echter nog niet, dat de traditionele schoolmeetkunde de jonge leerling nu ook beter zou hebben moeten liggen dan de schoolalgebra. In de meetkunde volstaat men immers al heel gauw niet meer met het ontdekken van eigenschappen in meetkundige figuren, maar gaat men over tot een zekere mate van deduceren, meer dan dat in het traditionele algebra-onderwijs het geval is. Stellen we echter dat deduceren nog wat uit, in de geest van methodes die zich baseren op de theorie van de denkniveaus van de Van Hieles, dan is de meetkunde stellig in staat, dank zij het suggestieve karakter van de erin optredende figuren, de leerlingen minstens zo gemakkelijk aan te spreken als de symbolen uit de algebra dit doen.

9 We wijzen er nog op dat de goede figuren uit de meetkundeboeken metrisch verantwoord dienen te zijn. Rechte hoeken moeten recht zijn, vlakke figuren moeten 'op maat' worden getekend, figuren uit R_3 dienen projectiefiguren te zijn. De venn-diagrammen uit het algebra-onderwijs zijn niet metrisch van aard. Ze kunnen daarom vrij spoedig aan de orde komen. Grafieken, roostervoorstellingen, zijn wel metrisch van aard. Ze komen dan ook later aan de orde.

Korrel CL II

Het limietbegrip

Het Leerplan 1958 bevatte voor de onderbouw vhmo onder andere: convergente meetkundige reeksen [1], en voor de bovenbouw van de b-afdelingen: de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening.
Het Voorstel Leerplan Rijksscholen 1968 stelt voor de bovenbouw vwo onder andere: continuïteit en discontinuïteit; limieten; convergentie van rijen en reeksen.
Gaf het Leerplan 1958 geen enkele aanwijzing over de mate van strengheid waarmee limieten en daaraan verwante begrippen, zoals convergentie van rijen en reeksen, behandeld moesten worden, ook het nieuwe voorgestelde leerplan – ondanks enige detaillering – laat de leraar nog steeds in het ongewisse. De vrees, die in Nederland leeft om aanwijzingen omtrent methodiek of didactiek in het leerplan te verwerken, zal hierbij mede wel een rol gespeeld hebben. Ten aanzien van het onderwerp limieten etc. lijkt het mij wenselijk die vrees voor staatsdidactiek te laten varen, door een nadere detaillering van het leerplan de strengheid of vaagheid van behandeling te normaliseren en het onderwerp ook overeenkomstig te examineren. Zulks lijkt mij vooral nodig omdat de behandelingswijze van het onderwerp limieten zeer uiteen kan lopen in het voortgezet onderwijs. Nog afgezien daarvan dat het *wat* en het *hoe* toch niet streng te scheiden zijn.
Een leraar die het onderwerp limieten, en wat daarmee in verband staat, een beetje streng wil aanpakken, mag daar wel twintig lessen voor uittrekken. Het resultaat is dan wellicht nog onbevredigend.
Een ander, die er intuïtief overheen rammelt, heeft aan één lesje wel genoeg. Deze leraar heeft dan t.o.v. zijn meer formele collega negentien lessen meer ter beschikking voor de eindexamentraining. Met als gevolg – omdat het onderwerp limieten toch niet op scherpe wijze aan de orde gesteld wordt tijdens het examen – dat de kans op hoge examencijfers bij hem groter is dan bij zijn precieze collega.
Overigens lijkt het mij moeilijk om een steekhoudende argumentatie te geven voor een voorgestelde mate van strengheid of vaagheid voor de behandelingswijze van het limietbegrip, hoe zo'n voorstel ook moge uitvallen. Daar het limietbegrip één van de belangrijkste begrippen van de wiskunde is, lijkt het mij zeer gewenst deze kwestie in studie te nemen, waarbij dan *echte* experimenten niet mogen ontbreken.

L. van den Brom

Amsterdam

---

[1] Of bij de opstellers in 1958 de behoefte bestond om de onderscheiding *rij-reeks* te maken, komt niet tot uiting in dat leerplan.

Korrel CL III

Verhoudingen en evenredigheden

In ons schoolprogramma komen we er niet toe een behoorlijke definitie te geven van verhouding en van evenredigheid. Niet, dat deze begrippen zo moeilijk zijn, maar op het tijdstip, dat ze ter sprake komen, kunnen ze nog niet behoorlijk geïntroduceerd worden. Toch loont het wel de moeite stil te staan bij de perikelen, die deze begrippen met zich meebrengen.
Het ligt voor de hand een evenredigheid te definiëren als een gelijkheid van twee quotiënten. Dat is in overeenstemming met de gebruikelijke notatie. Dan kunnen dus de eerste en de derde term gelijk aan 0 zijn en de tweede en de vierde term niet. Dat is jammer, want daardoor zijn de traditionele eigenschappen van evenredigheden niet zonder uitzondering geldig. Is b.v. de eerste en de derde term gelijk aan 0, dan ontstaat uit de evenredigheid geen evenredigheid, als we de binnentermen verwisselen. Eenvoudig remedie: verbied, dat er in een evenredigheid een term 0 voorkomt. Bij meetkundige toepassingen hebben we van dit verbod geen last. Vervelender wordt het, als we toekomen aan de stelling:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y &= a_3 \\ b_1x+b_2y &= b_3 \end{aligned}\right\} \text{ is een afhankelijk stelsel} \Leftrightarrow a_1:b_1 = a_2:b_2 = a_3:b_3.$$

Over verhoudingen plegen we nauwelijks te praten. Als $a:b = c:d$, dan zeggen we, dat a en b zich net zo verhouden als c en d. We hebben het dus wel over gelijkheid van verhoudingen, maar definiëren niet, wat een verhouding is. Deze situatie is ons bekend. We kunnen het hebben over gelijke richtingen, gelijke kleuren, gelijke vorm, gelijke waarde (van munten) zonder ooit richting, kleur, vorm, waarde te definiëren. Meer gebruikelijk is tegenwoordig richting, vorm e.d. te definiëren als ekwivalentieklassen (parten) van een partitie. En zo ligt het voor de hand ook verhoudingen te definiëren als ekwivalentieklassen. De verzameling, die we in parten gaan verdelen, is de verzameling $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ van de geordende paren reële getallen. De ekwivalentierelatie, die we tussen deze paren definiëren, stellen we voor door '='. De definitie luidt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \quad \text{betekent} \quad a_1b_2 = a_2b_1.$$

Rest nog te bewijzen, dat dit inderdaad een ekwivalentierelatie is. Zonder meer is duidelijk, dat de relatie reflexief en symmetrisch is. Helaas is zonder meer ook duidelijk, dat de relatie niet transitief is, immers: $(0, 0) = (1, 1)$, $(0, 0) = (1, 2)$ en $(1, 1) \neq (1, 2)$. Dit euvel is snel te verhelpen. De transitiviteit is gewaarborgd, als we het paar $(0, 0)$ uitsluiten. D.w.z. als we niet $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, maar $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \backslash \{(0, 0)\}$ in parten verdelen.
Nu verschijnt de evenredigheid in een nieuw licht. Een evenredigheid is een gelijkheid van twee verhoudingen. Alle vier de termen mogen 0 zijn, echter niet zowel de eerste als de tweede en ook niet zowel de derde als de vierde. Bij het opereren op evenredigheden moeten we er dus aan denken, dat een zinloos

resultaat ontstaat, zodra de verhouding '0 staat tot 0' optreedt. We hebben nu een beter inzicht gekregen in verhoudingen en evenredigheden. Dit leidt echter niet tot het opheffen van alle uitzonderingen bij de gebruikelijke eigenschappen van evenredigheden.
Hoe staat het nu met de afhankelijke stelsels vergelijkingen? Helaas ook niet best.

$$\left.\begin{aligned} 3x+\ \ 5y &= 0 \\ 6x+10y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{is een afhankelijk stelsel.}$$

Maar $3:6 = 5:10 = 0:0$ is nog even zinloos als te voren.
Toch is de situatie niet hopeloos. We breiden ons begrip verhouding uit tot verhoudingen van geordende tripels (en kunnen natuurlijk analoog verder gaan). We brengen dus een partitie teweeg in de verzameling $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \backslash \{(0,0,0)\}$.
De ekwivalentierelatie noteren we weer '$=$' en definiëren we als volgt:

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$$

betekent

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \wedge a_1 b_3 = a_3 b_1 \wedge a_2 b_3 = a_3 b_2.$$

Men overtuigt er zich gemakkelijk van, dat thans de mogelijkheid aanwezig is, dat b.v. $a_3 = b_3 = 0$. Daardoor kunnen we nu de stelling betreffende afhankelijke stelsels van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden in de volgende vorm brengen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + a_2 y &= a_3 \\ b_1 x + b_2 y &= b_3 \end{aligned}\right\} \text{is een afhankelijk stelsel} \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3).$$

We moeten er echter wel van uitgaan, dat geen van de twee vergelijkingen identiek is, omdat (0, 0, 0) bij het aanbrengen van de partitie uitgesloten is.
Nog enkele slotopmerkingen. Een gelijkheid van verhouding van twee geordende tripels kan niet altijd gereduceerd worden tot een gelijkheid van verhoudingen van geordende paren. Zo is wel $(3, 4, 5) = (6, 8, 10)$ te schrijven als $3:6 = 4:8 = 5:10$, echter niet $(0, 4, 5) = (0, 8, 10)$ als $0:0 = 4:8 = 5:10$.
Een evenredigheid is niet meer onder alle omstandigheden hetzelfde als een gelijkheid van twee quotiënten. Zo is $3:0 = 5:0$ een evenredigheid, maar geen gelijkheid van twee quotiënten. Eigenlijk zouden we met de notatie hiermee rekening moeten houden.

P. G. J. Vredenduin

Projectieve grondslagen van de leer der translaties en spiegelingen in de vlakke meetkunde

Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen [1]

Groningen

1 Homologieën

1.1 *Inleiding*

We stellen ons voor enkele zeer evidente concepties uit de transformatiemeetkunde, die tegenwoordig aan een propedeutische behandeling van de meetkunde op school ten grondslag worden gelegd, te bediscussiëren van het standpunt van de projectieve meetkunde uit. Weliswaar verliezen ze daardoor hun direct evidente karakter, maar een dieper inzicht in hun specifieke aard kan daarbij worden gewonnen.
We baseren onze beschouwingen op slechts weinig axioma's. Vooreerst op de *incidentieaxioma's*, die de relatie 'incident' tussen punt en rechte nader omschrijven. Voorts postuleren we de geldigheid van een z.g. sluitingstheorema, te weten het theorema van *Desargues*, dat we als volgt formuleren: (Fig. 1.1-1):

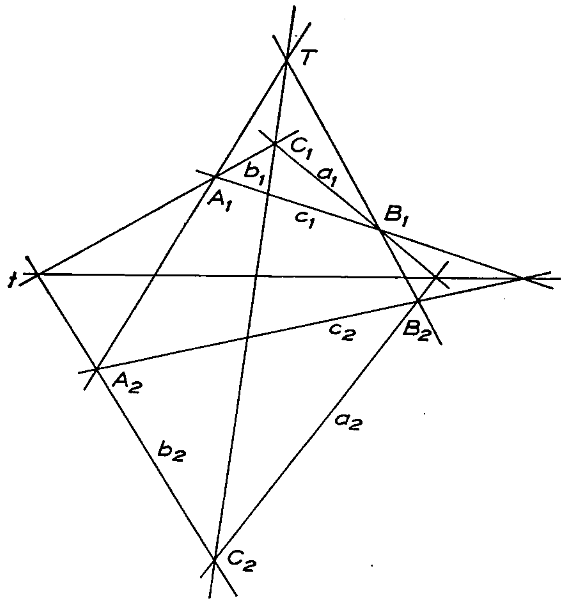
Zijn A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 punten in het projectieve vlak en zijn de rechten A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 incident met één punt T, dan zijn de snijpunten van A_1B_1 en A_2B_2, van B_1C_1 en B_2C_2, van C_1A_1 en C_2A_2 incident met één rechte t.

We zeggen ook, dat A_1B_1 en A_2B_2 elkaar op t ontmoeten, enz.
Bekend is, dat in de vlakke projectieve meetkunde een *dualiteitsprincipe* bestaat, dat uitdrukt: Iedere geldige bewering, betrekking hebbende op de incidentie van punten en rechten, blijft geldig als men daarin overal het woord 'punt' door het woord 'rechte' vervangt, en omgekeerd. We hebben daarom ook:

Zijn a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 rechten in het projectieve vlak en zijn de punten a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 incident met één rechte t, dan zijn de verbindingsrechten van a_1b_1 en a_2b_2, b_1c_1 en b_2c_2, c_1a_1 en c_2a_2 incident met één punt T.

De eigenschappen van de figuren in het projectieve vlak die ons interesseren zijn die, welke invariant zijn voor z.g. collineaties.

[1] Voordracht gehouden voor de Heroriënteringscursus voor VWO-leraren, georganiseerd door de CMLW te Groningen, september 1969.



FIGUUR 1.1-1

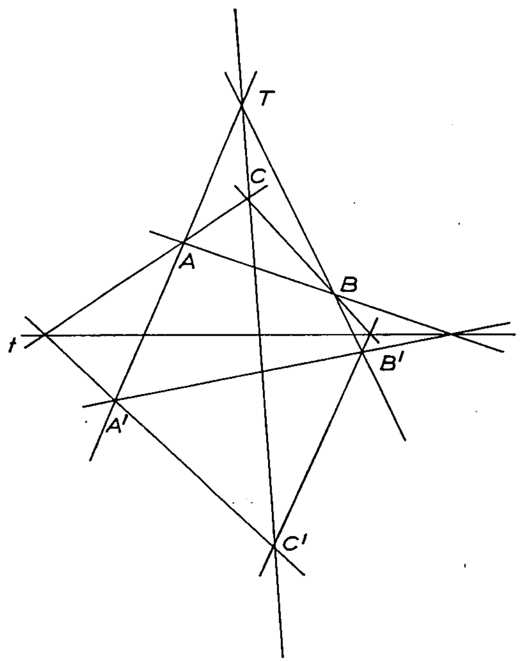
Een *collineatie* is een bijectieve afbeelding van de verzameling van de punten van het projectieve vlak in zich zelf, die *collineariteit* (d.i. de ligging op één rechte) niet verstoort.
Op grond van het dualiteitsbeginsel induceert een dg. afbeelding een bijectieve afbeelding van de verzameling der rechten van het vlak in zich zelf, die *concurrentie* (dus het incident zijn met één punt) niet verstoort.
De in de schoolwiskunde ter sprake komende transformaties, te weten de translaties en de spiegelingen aan een rechte of in een punt, zijn specialiseringen van een aparte klasse van collineaties, de z.g. centrale collineaties of homologieën. We willen ons daarmee uitvoerig bezig houden.

1.2 *Homologieën*

Een punt, dat door een collineatie in zich zelf overgaat heet een *dekpunt* van de collineatie. Geheel overeenkomstig heet een rechte, die door een collineatie met zich zelf tot dekking wordt gebracht een *dekrechte.*
Een *homologie* of *centrale collineatie* is een collineatie, waarvoor elk punt van een bepaalde rechte dekpunt is. Men noemt deze rechte de *as* van de collineatie. Als we kunnen bewijzen dat een dg. collineatie bestaat mogen we op grond van het dualiteitsprincipe verwachten, dat er ook een punt bestaat, waarvoor alle er mee incidente rechten dekrechten zijn. We zullen dit straks expliciet bewijzen (Stelling 1.2-2). Het bewuste punt heet *centrum.*
Een triviaal voorbeeld van een collineatie is de *identiteit*; daarvoor zijn alle punten van het vlak dekpunten.

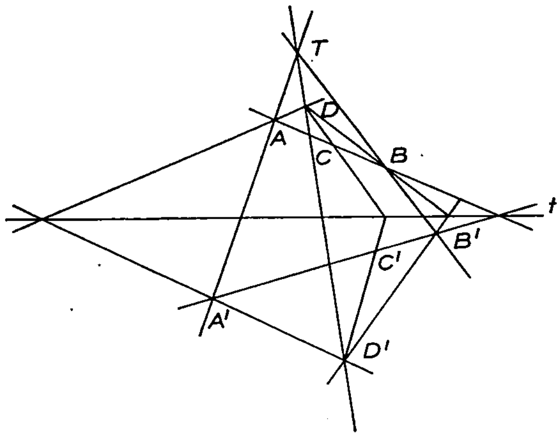
STELLING 1.2-1:
Een homologie met as t is volledig bepaald door de beeldpunten A′ en B′ van twee niet op de as gelegen verschillende punten A en B.

Bewijs: 1) Is $A = A'$, dan is A een niet op t gelegen dekpunt en dus zijn alle rechten door A dekrechten. Is bovendien $B = B'$ dan is B ook een dekpunt en alle rechten door B zijn dekrechten. Daar men ieder punt van het vlak met A en B kan verbinden, is ieder punt een dekpunt en de collineatie is in dit geval de identiteit.
2) We onderstellen nu (Fig. 1.2-1), dat B en B' verschillend zijn. Zij C een punt (niet op t) niet gelegen op de rechte AB. De rechten CA en CB ontmoeten elkaar dan niet op t. De rechte door A' die AC op t ontmoet en de rechte door B', die BC op t ontmoet, kunnen elkaar blijkbaar ook niet op t ontmoeten. Ze bepalen ondubbelzinnig een snijpunt C'.



FIGUUR 1.2-1

3) Onderstel nu dat C op AB ligt en uiteraard niet met A of B samenvalt. (Fig. 1.2-2). Laat D een punt zijn (buiten t) niet op AB. Blijkens 2) wordt daardoor ondubbelzinnig een punt D' bepaald. Van A en D zijn nu de beeldpunten bekend en daaruit volgt dat ook C' door C ondubbelzinnig is bepaald op grond van de in 2) beschreven constructie. Ieder punt van het vlak heeft dus een ondubbelzinnig bepaald beeldpunt, waarmee de bewering is bewezen.//
In het bewijs van deze stelling zijn alleen de incidentieaxioma's gebruikt. Iets dieper ligt de volgende stelling:



FIGUUR 1.2-2

STELLING 1.2-2:
Een homologie met as t heeft steeds een dekpunt T, waardoor alle dekrechten van de collineatie gaan, mits de homologie niet de identiteit is.

Bewijs: Laat A, B en C drie niet collineaire punten zijn en A', B' en C' hun beeldpunten. Is $A = A'$ dan is A een dekpunt en de bewering is al bewezen Neem aan dat A en A' verschillen, evenals B en B' en C en C'. Op grond van de sluitingsstelling van Desargues gaan AA', BB' en CC' door *één* punt T, want BC en $B'C'$, CA en $C'A'$, AB en $A'B'$ ontmoetten elkaar op t. Dit punt T is het gezochte centrum.//

Een homologie, waarvan het centrum incident is met de as, heet een *speciale homologie.*
Tot nu toe hebben we nog niet de zekerheid dat er werkelijk homologieën bestaan. Er geldt evenwel

STELLING 1.2-3:
Er bestaat steeds een van de identiteit verschillende ondubbelzinnig bepaalde homologie met voorgeschreven as t en voorgeschreven centrum T dat een niet met T samenvallend en niet met t incident punt A overvoert in een punt $A' \neq A$.

Bewijs: Is B een punt niet op de rechte AA' dan kunnen we B' vinden als het snijpunt van de rechte door B en T en de rechte door A', die de rechte AB op t ontmoet. Ligt C op AA' dan bepalen we C' als snijpunt van AA' met de rechte door B', die CB op t ontmoet. Ligt C niet op AA' of BB' dan vinden we C' uit B en B' als B' uit A en A'. Op die manier vinden we bij ieder punt een beeldpunt. We moeten nog verifiëren dat de rollen van de punten A en B verwisselbaar zijn. Zonder bezwaar mogen we aannemen, dat de lijnen AA', BB' en CC' verschillend zijn. Welnu B' is zo geconstrueerd dat AB en $A'B'$ elkaar op t ontmoeten en hetzelfde geldt voor BC en $B'C'$. Op grond van de stelling van Desargues zullen dan ook CA en $C'A'$ elkaar op t ontmoeten.//

STELLING 1.2-4:
Er bestaat steeds een ondubbelzinnig bepaalde speciale homologie met voorgeschreven as t, die een niet met t incident punt A in een punt A' overvoert.

Bewijs: Het centrum van deze homologie is mede gegeven, want het is het snijpunt T van t met AA'.//

Onder het *produkt* (of de *samenstelling*) van twee afbeeldingen ξ en η van het projectieve vlak in zich zelf verstaat men de afbeelding $\eta \circ \xi$ bepaald door

$$\eta \circ \xi\ (A) = \eta(\xi(A)).$$

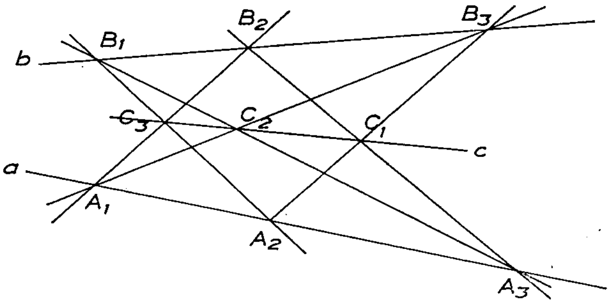
STELLING 1.2-5:
Het produkt van twee homologieën met dezelfde as is wederom een homologie, de identiteit niet uitgesloten. Het produkt van twee homologieën met hetzelfde centrum is wederom een homologie.

Bewijs: Triviaal. Het tweede deel van de bewering is het duale van het eerste.//

2 Speciale homologieën

2.1 *De kleine stelling van Pappos*

In de moderne opbouw van de projectieve meetkunde wordt een belangrijke plaats ingenomen door de volgende bewering, die reeds aan Pappos van Alexandrië bekend was:

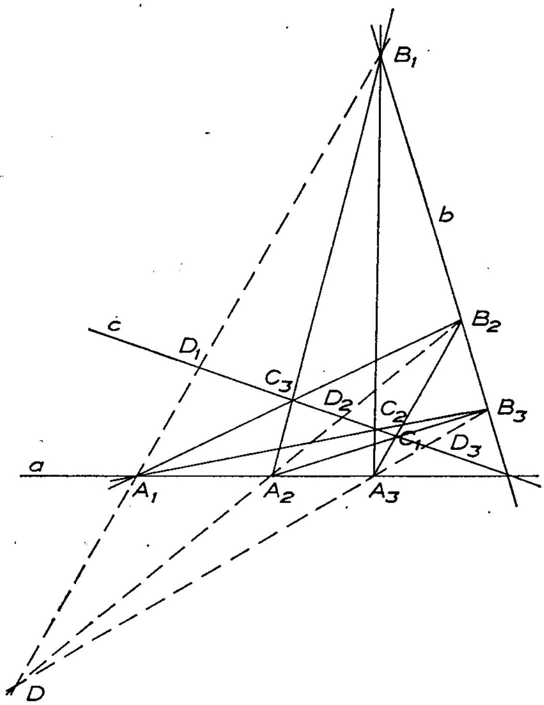


FIGUUR 2.1-1

Laat gegeven zijn twee niet samenvallende rechten a en b. Op a liggen de drie punten A_1, A_2, A_3 en op b de punten B_1, B_2, B_3. Dan liggen de snijpunten C_1 van A_2B_3 en A_3B_2, C_2 van A_3B_1 en A_1B_3, C_3 van A_1B_2 en A_2B_1 op één rechte c.

Men kan deze stelling niet bewijzen alleen op de basis van de incidentieaxioma's en de sluitingsstelling van Desargues. Er is echter een speciaal geval waarvoor dit wel kan. We zullen dit geval de kleine stelling van Pappos noemen.

STELLING 2.1-1:
Laat gegeven zijn twee niet samenvallende rechten a en b. Op de eerste liggen de punten A_1, A_2, A_3 en op de tweede de punten B_1, B_2, B_3 zodanig, dat de snijpunten C_3 van A_1B_2 en A_2B_1, C_1 van A_2B_3 en A_3B_2 op een rechte c liggen die gaat door het snijpunt van a en b. Dan zullen ook A_3B_1 en A_1B_3 elkaar in een punt C_2 op c ontmoeten.



FIGUUR 2.1-2

Bewijs: De snijpunten van A_1B_1, A_2B_2 en A_3B_3 met c noemen we opv. D_1, D_2 en D_3. Uit bekende stellingen omtrent de volledige vierhoek leiden we af, dat het snijpunt van A_1B_1 en A_2B_2 harmonisch ligt met D_1 ten opzichte van A_1, B_1 en harmonisch met D_2 ten opzichte van A_2, B_2. Evenzo ligt het snijpunt A_2B_2 en A_3B_3 harmonisch met D_2 ten opzichte van A_2, B_2 en harmonisch met D_3 ten opzichte van A_3, B_3. Bijgevolg gaan A_1B_1, A_2B_2 en A_3B_3 door één punt D. Daar D en D_3 harmonisch liggen ten opzichte van A_3 en B_3 en D en D_1 harmonisch ten opzichte van A_1, B_1, ligt D_3 op de rechte door C_2 en het snijpunt van a en b, dus ook C_2 ligt op c.//

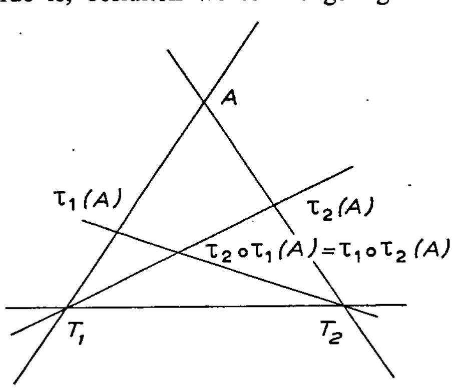
We gaan nu over tot de behandeling van stellingen over het product van speciale homologieën.

STELLING 2.1-2:
Het produkt van twee speciale homologieën met dezelfde as is wederom een speciale homologie, de identiteit niet uitgesloten.

Bewijs: Laat τ_1 en τ_2 speciale homologieën zijn met as t. Blijkens stelling 1.2-4 is het produkt $\tau_2 \circ \tau_1$ stellig een homologie. Stel P is een niet op t gelegen dekpunt van deze homologie, dus $P = \tau_2 \circ \tau_1(P)$. Dan is $\tau_2^{-1}(P) = \tau_1(P)$. De speciale homologieën τ_1 en τ_2^{-1} hebben hetzelfde effect op P en vallen daarom samen wegens stelling 1.2-1, want ze laten ook de centra onveranderd. Maar uit $\tau_1 = \tau_2^{-1}$ volgt dat $\tau_2 \circ \tau_1 = \text{id}$. De conclusie is dat $\tau_2 \circ \tau_1$ of wel de identiteit is of wel geen dekpunt buiten t bezit, dus een speciale homologie is.//

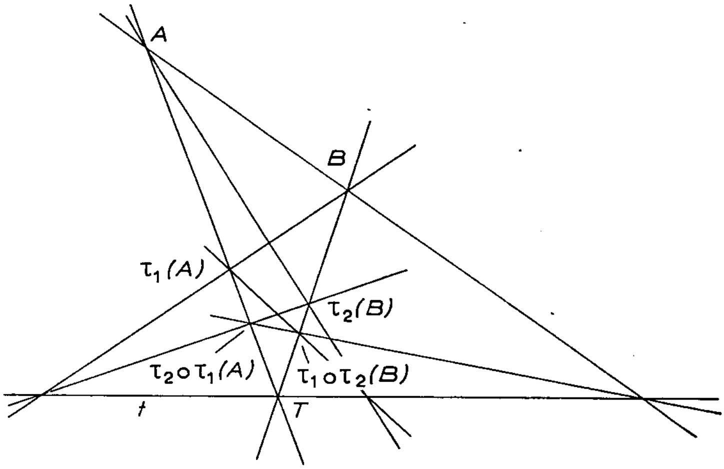
De belangrijkste stelling luidt:
STELLING 2.1-3:
Het produkt van twee speciale homologieën met dezelfde as is commutatief.

Bewijs: Laat τ_1 en τ_2 speciale homologieën zijn met gemeenschappelijke as en centra T_1 en T_2.
1) We beschouwen eerst het geval, waarbij $T_1 \neq T_2$. (Fig. 2.1-3)
Zij A een punt niet op t. Het punt $\tau_2 \circ \tau_1(A)$ ligt op de rechte door $\tau_1(A)$ en T_2, maar ook op de rechte door $\tau_2(A)$, die de rechte door A en $\tau_1(A)$ op t ontmoet, dus in T_1. Daaruit blijkt dat $\tau_2 \circ \tau_1(A)$ het snijpunt is van de rechten door $\tau_1(A)$ en T_2 en door $\tau_2(A)$ en T_1. Op precies dezelfde wijze kan men aantonen dat ook $\tau_1 \circ \tau_2$ (A) het snijpunt is van deze rechten. Daar zowel $\tau_2 \circ \tau_1$ als $\tau_1 \circ \tau_2$ speciale homologieën zijn met dezelfde as en hun effect op A hetzelfde is, besluiten we tot de geldigheid van de bewering voor dit geval.



FIGUUR 2.1-3

2) Onderstel nu dat T_1 en T_2 samenvallen in een punt T op t (Fig. 2.1-4). Zij A een gegeven (niet op t gelegen) punt en B een dergelijk punt, dat niet op TA ligt. De speciale homologie τ_1 beeldt A af op $\tau_1(A)$, gelegen op TA en de



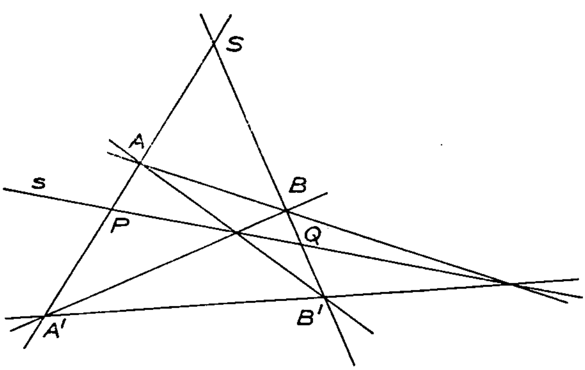
FIGUUR 2.1-4

speciale homologie τ_2 beeldt B af op $\tau_2(B)$, gelegen op TB. Voorts voert τ_1 het punt $\tau_2(B)$ over in het punt $\tau_1 \circ \tau_2(B)$ op TB en τ_2 voert het punt $\tau_1(A)$ over in $\tau_2 \circ \tau_1(A)$ op TA. De rechte, die A verbindt met $\tau_2(B)$ ontmoet de rechte door $\tau_1(A)$ en $\tau_1 \circ \tau_2(B)$ op t, terwijl ook de rechte die B verbindt met $\tau_1(A)$ de rechte door $\tau_2(B)$ en $\tau_2 \circ \tau_1(A)$ op t ontmoet. Volgens stelling 2.1-1 ontmoeten de lijn AB en die door $\tau_2 \circ \tau_1(A)$ en $\tau_1 \circ \tau_2(B)$ elkaar op t. Maar ook de rechte door $\tau_1 \circ \tau_2(A)$ en $\tau_1 \circ \tau_2(B)$ ontmoet AB op t. Bijgevolg vallen de punten $\tau_1 \circ \tau_2(A)$ en $\tau_2 \circ \tau_1(A)$ samen. Hiermee is het bewijs voltooid.//

3 Involutorische homologieën

3.1 *Inleiding*

We noemen een van de identiteit verschillende homologie *involutorisch*, als het produkt van de homologie met zichzelf de identiteit oplevert, m.a.w. als de homologie samenvalt met de inverse. Zij s de as en laat A overgaan in A' door de homologie σ. (fig. 3.1-1)



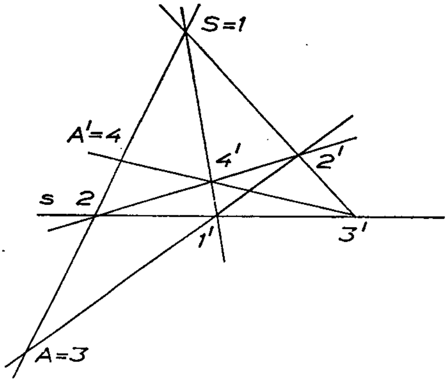
FIGUUR 3.1-1

Ligt B niet op AA' dan zij $B' = \sigma(B)$. Het snijpunt S van AA' en BB' is het centrum. De rechte AB ontmoet de rechte $A'B'$ op s. Daar σ^{-1} het punt A overvoert in A' en het punt B' in B zullen ook $A'B$ en AB' elkaar op s ontmoeten. Deze ontmoetingspunten zijn met S de diagonaalpunten van de volledige vierhoek $ABB'A'$. Het is nu nodig om het volgende te postuleren:

AXIOMA VAN FANO:
De drie diagonaalpunten van een volledige vierhoek zijn niet collineair.

Op grond van dit axioma mogen we besluiten dat S en s niet incident zijn, m.a.w.:
Een involutorische homologie is niet speciaal.

Is P het snijpunt van AA' met s en Q dat van BB' met s, dan is het duidelijk dat A en A' door S en P harmonisch worden gescheiden en dat eveneens B en B' door S en Q harmonisch worden gescheiden. We zeggen kort dat een punt en zijn beeldpunt door S en s harmonisch worden gescheiden.
Een eenvoudige constructie voor de afbeelding verloopt als volgt (fig. 3.1-2). Nummer het punt S, het snijpunt van de rechte door S en het gegeven punt A met de as s, en het punt A opv. met 1, 2, 3. Neem op s nog twee van 2 verschillende punten 1′ en 3′. Het snijpunt van 13′ en 1′3 noemen we 2′. De rechten 11′ en 22′ snijden elkaar in het punt 4′ en de rechte 3′4′ snijdt 12 in het punt 4. Dit is het gezochte punt A'.

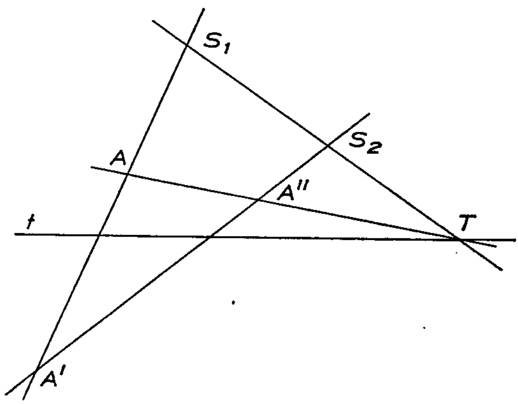


FIGUUR 3.1-2

3.2 *Het produkt van involutorische homologieën*

STELLING 3.2-1:
Het produkt van twee involutorische homologieën met dezelfde as is een speciale homologie, waarvan de as met de gemeenschappelijke as samenvalt en het centrum het snijpunt is van die as met de verbindingslijn van de centra der gegeven homologieën.

Bewijs: Laat σ_1 en σ_2 de gegeven homologieën zijn met centra S_1 en S_2 en T het snijpunt van S_1S_2 met de gemeenschappelijke as t (fig. 3.2-1). Is nu $A' = \sigma_1(A)$ en $A'' = \sigma_2(A')$, dan worden zowel A en A' als A' en A'' opv. harmonisch gescheiden door S_1 en t en S_2 en t. Dit kan alleen als AA'' door T gaat.//



FIGUUR 3.2-1

STELLING 3.2-2:
Het produkt van twee involutorische homologieën met hetzelfde centrum is een speciale homologie, waarvan het centrum met het gemeenschappelijke centrum samenvalt en de as de verbindingslijn is van dat centrum met het snijpunt van de assen der gegeven homologieën.

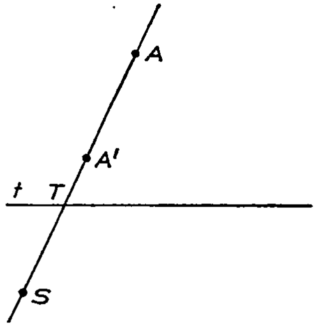
Bewijs: Deze stelling is de duale van de voorafgaande stelling.

STELLING 3.2-3:
Een speciale homologie met as t kan steeds worden beschouwd als het produkt van twee involutorische homologieën met dezelfde as.

Bewijs: Laat de speciale homologie bepaald zijn door de punten A en A'. Dan is T, het snijpunt van t met AA', het centrum. Zij voorts S het vierde harmonische punt van T ten opzichte van A en A'. De involutorische homologie met as t en centrum A laat dit punt invariant, terwijl de involutorische homologie met as t en het centrum S dit punt in A' overvoert.//

STELLING 3.2-4:
Een speciale homologie met centrum T kan steeds worden beschouwd als het produkt van twee involutorische homologieën met hetzelfde centrum.

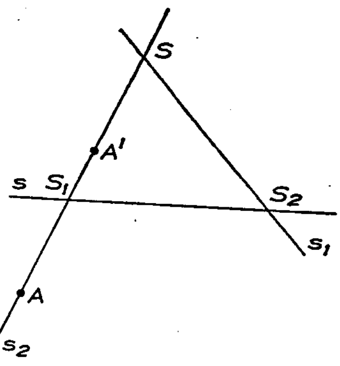
Bewijs: Deze stelling is de duale van de voorafgaande stelling.//



FIGUUR 3.2-2

Tenslotte bewijzen we:

STELLING 3.2-5:
Als van twee involutorische homologieën met verschillende assen het centrum van de ene op de as van de andere ligt, dan is het produkt wederom een involutorische homologie, terwijl bovendien het produkt commutatief is.



FIGUUR 3.2-3

Bewijs: Laat σ_1 en σ_2 de homologieën zijn opv. met centra S_1, S_2 en assen s_1, s_2. Krachtens onderstelling ligt S_1 op s_2 en S_2 op s_1 en geen der punten S_1, S_2 kan met het snijpunt der assen samenvallen. Zij voorts s de rechte door S_1 en S_2. Ieder tweetal punten die harmonisch liggen ten opzichte van S_1, S_2 worden door σ_1 en σ_2 verwisseld, zodat alle punten van s voor $\sigma_1 \circ \sigma_2$ invariant zijn. Hetzelfde geldt voor iedere lijn door S. Dus is $\sigma_1 \circ \sigma_2$ weer een homologie. Laat nu A en A' punten zijn, die harmonisch worden gescheiden door S en s. Deze worden door σ_1 verwisseld, maar zijn voor σ_2 invariant. Dus is $\sigma_1 \circ \sigma_2$ involutorisch. De inverse is $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \circ \sigma_1$, waarmee ook de commutativiteit van het produkt is bewezen.//

4 Affiene interpretatie

4.1 *Het affiene vlak*

In het projectieve vlak wijzen we een vaste rechte u aan als oneigenlijke rechte. Het complement van de verzameling van de punten van de rechte in de verzameling van de punten van het projectieve vlak heet een *affien vlak.* Twee rechten heten *parallel* als ze elkaar op de oneigenlijke rechte ontmoeten; een punt van de oneigenlijke rechte wordt ook *richting* genoemd, zodat parallele rechten dezelfde richting bezitten.
Een speciale homologie met as u heet een *translatie.*
Het oneigenlijke centrum bepaalt de *richting* van de translatie.
Een involutorische homologie met oneigenlijk centrum heet een (scheve) *spiegeling aan de as* van de homologie.
Een involutorische homologie, waarvan de as oneigenlijk is, heet een *spiegeling in het centrum* van de homologie.
Een homologie met oneigenlijke as en eigenlijk centrum heet een *homothetie* ten opzichte van dat centrum.
Een homologie met oneigenlijk centrum en eigenlijke as heet een *axiale affiniteit.*
Het *midden* van een eigenlijk puntenpaar A, B met $A \neq B$ is het punt D dat ten opzichte van A en B harmonisch is toegevoegd aan het oneigenlijke punt C van AB.

4.2 *Stellingen*

De meeste in het voorgaande genoemde stellingen kunnen zonder moeite affien worden geïnterpreteerd. We volstaan met het noemen van de meest belangrijke.

STELLING 4.2-1:
Het produkt van twee translaties is opnieuw een translatie. Het produkt van translaties is commutatief.

Bewijs: Stelling 2.1-2 en stelling 2.1-3.//

STELLING 4.2-2:
Het produkt van twee spiegelingen aan verschillende punten is een translatie.

Bewijs: Stelling 3.2-1.//

STELLING 4.2-3:
Het produkt van twee spiegelingen aan twee parallele rechten is een translatie.

Bewijs: Stelling 3.2-2.//

STELLING 4.2-4:
Het produkt van een spiegeling aan een rechte en een spiegeling in een punt op die rechte is een spiegeling aan een rechte.

Bewijs: Stelling 3.2-5.//

STELLING 4.2-5:
Het produkt van twee spiegelingen aan snijdende rechten, waarbij telkens de richting van de ene rechte de richting bepaalt van de spiegeling aan de andere is een puntspiegeling in het snijpunt van die rechten.

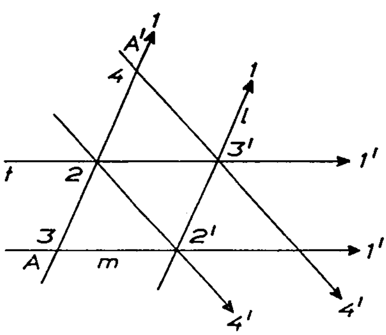
Bewijs: Stelling 3.2-5.//

4.3 *Constructies*

De in 3.1 besproken constructie van een involutorische homologie kan men op de volgende wijze affien specialiseren:

Spiegeling aan een rechte

(Fig. 4.3-1) Zij t de gegeven rechte, A het gegeven punt.

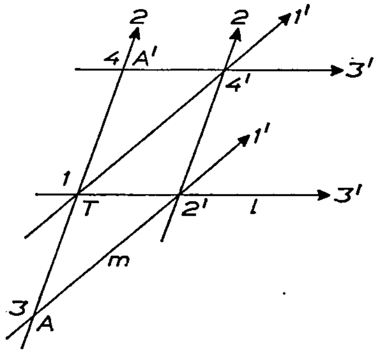


FIGUUR 4.3-1

De richting van de spiegeling noemen we 1, 2 is het snijpunt van t met de rechte door $A(=3)$ in de richting 1. Neem 3′ willekeurig op t en breng hierdoor de rechte l met richting 1. Zij 1′ de richting van t en verbind 3 met 1′ door middel van m. Het snijpunt van l en m is het punt 2′. De rechte door 3′ parallel met 22′ levert het gezochte punt 4 op.

Spiegeling in een punt

(Fig. 4.3-2) Trek door 1, het centrum, een rechte l, waarvan de richting met 3′ wordt aangeduid. Trek door de rechte m met richting 1′ verschillend van 3′.



FIGUUR 4.3-2

Het snijpunt van l en m is weer 2'. Trek door 2' de rechte parallel met 13, de richting noemen we 2. Deze snijdt de rechte door 1 met richting 1' in 4' en de rechte door 4' parallel met 12' levert op 13 het gezochte punt 4.

Literatuur

(1) G. de B. Robinson, The foundations of geometry.
(2) H. S. M. Coxeter, The real projective plane.
(3) E. Artin, Geometric algebra.
(4) J. C. H. Gerretsen, Grondslagen van de leer der reële getallen, Hoofdstuk 1. (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde).

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXVI. *Een probleem van Pieter Nieuwland*

Pieter Nieuwland (1764–1794) heeft zijn plaats in de geschiedenis der Nederlandse letterkunde, voornamelijk door het gedicht *Orion* ('Wie heft met statelijke pracht, bij de achtb're stilte van de nacht uit d'Oceaan het hoofd naar boven?'). Hij was een veelzijdig begaafde jongeman, werd op jeugdige leeftijd lector in de wis-, sterre- en zeevaartkunde aan de Doorluchtige Schole te Amsterdam en in 1793 hoogleraar te Leiden. In zijn korte leven heeft hij niet veel kunnen presteren, maar op zijn naam staat althans de oplossing van een wel curieus vraagstuk, uit het grensgebied overigens van serieuze wiskunde en mathematische recreatie, dat als volgt luidt:

> kan men in een massieve kubus een gat maken waar een even grote (of zo mogelijk een nog wat grotere) kubus door kan?

Op gezag van J. H. van Swinden [1] delen wij mede dat het vraagstuk al 'werkstellig was gemaakt door prins Rupert, uit het doorluchtige huis van de Paltzgraven aan den Rhijn, een ongemeen schrander man', die een achterkleinzoon moet zijn geweest van de Zwijger. De grote Wallis loste het 'naar regelen der meetkunde' op.
De verdienste van Nieuwland is dat hij de afmeting heeft bepaald van de grootste kubus waaraan een gegeven kubus doorgang kan verlenen. Zijn oplossing is in een aanhangsel van Van Swinden's [2] werk opgenomen en heeft langs deze weg haar plaats gevonden in de geschiedenis [3].

---

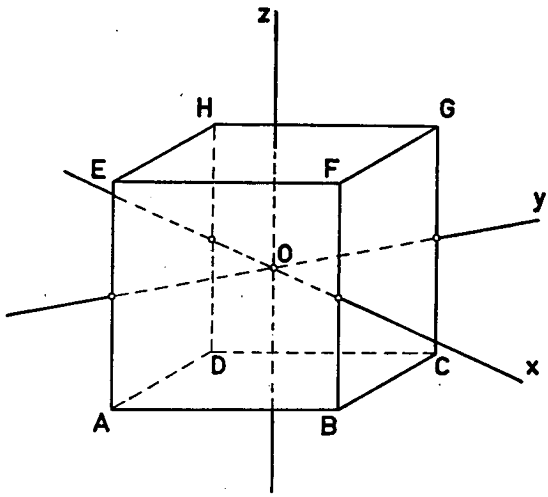
1 J. H. van Swinden, Grondbeginsels der meetkunde, tweede druk (Groningen, 1816), p. 512

2 J. H. van Swinden, t.a.p. p. 608–610.

3 M. Cantor kende het werk van Van Swinden, waarvan in 1834 een Duitse vertaling verscheen door Jacobi. Hij geeft aandacht aan het probleem in zijn *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (3. Bnd, 2. Aufl., Leipzig, 1901) p. 25, maar vermeldt de naam en de oplossing van Nieuwland niet. Dat is wel het geval bij M. Simon, *Ueber die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig, 1906), p. 213 en in de *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (Bnd. III, 1, Heft 6, Leipzig 1920, Zacharias), p. 1134.

Terwijl de beschouwingen van Van Swinden zelf over het probleem zeer duidelijk zijn en van goede tekeningen vergezeld, laat het aanhangsel zich naar onze mening veel moeilijker lezen. Bij de hier volgende reproductie gebruiken wij kortheidshalve de terminologie van goniometrie en elementaire analytische meetkunde.

Allereerst worde opgemerkt, dat de behandeling door Nieuwland in zoverre onbevredigend is dat hij zich beperkt tot doorboringen van een bepaald type. Hij wil in de kubus een vierkante koker (zoals wij een prismatische koker zullen noemen, met een vierkante loodrechte doorsnede) aanbrengen, neemt aan dat twee zijvlakken daarvan evenwijdig zijn met een diagonaalvlak en dat zij alle vier gelijke afstanden hebben tot het middelpunt. Zij ABCD, EFGH de gegeven kubus, met ribbe $2a$ en ACGE het diagonaalvlak (fig. 1). Wij kiezen het recht-



Figuur 1.

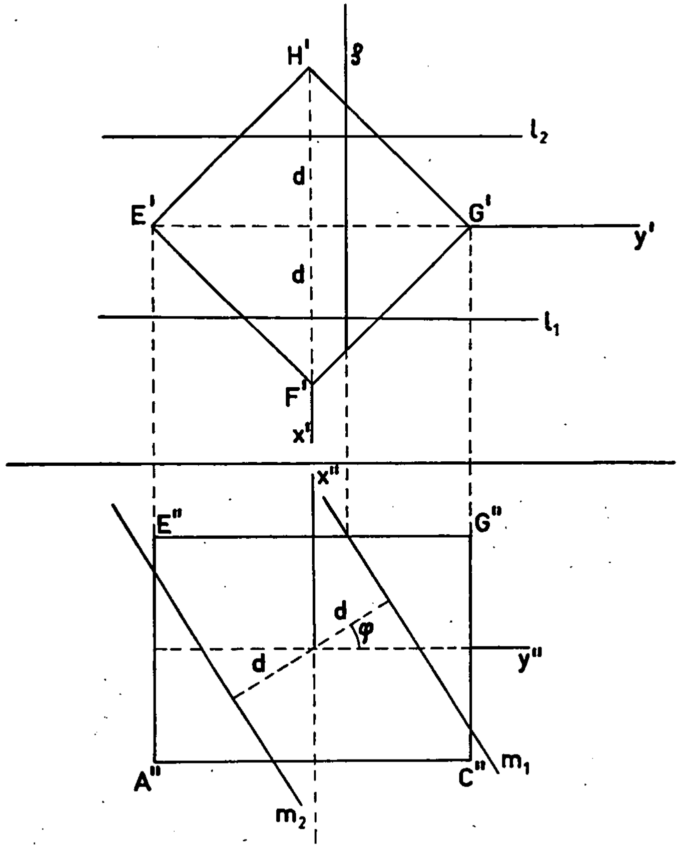
hoekig assenstelsel als aangegeven, met het middelpunt van de kubus als oorsprong. Het diagonaalvlak is dus $x = 0$, het bovenvlak $z = a$, het grondvlak $z = -a$.

Is $2d$ de zijde van de koker, dan krijgen twee van haar zijvlakken V_1 en V_2 de vergelijkingen $x = d$ en $x = -d$. De twee andere, W_1 en W_2, moeten loodrecht op het diagonaalvlak staan en tot O de afstand d hebben. Hun vergelijkingen luiden dus

$$y \cos \varphi + z \sin \varphi = d, \qquad y \cos \varphi + z \sin \varphi = -d \tag{1}$$

Daarbij is φ, de hoek die de normaal uit O op W_1 met OY maakt, de parameter waarover men nog beschikken kan om d zo groot mogelijk te maken. Wij kunnen ons blijkbaar tot het interval $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ beperken.

De doorgangen van V_1 en V_2 met het bovenvlak zijn l_1 en l_2 (fig. 2), evenwijdig met EG en op afstand d daarvan.

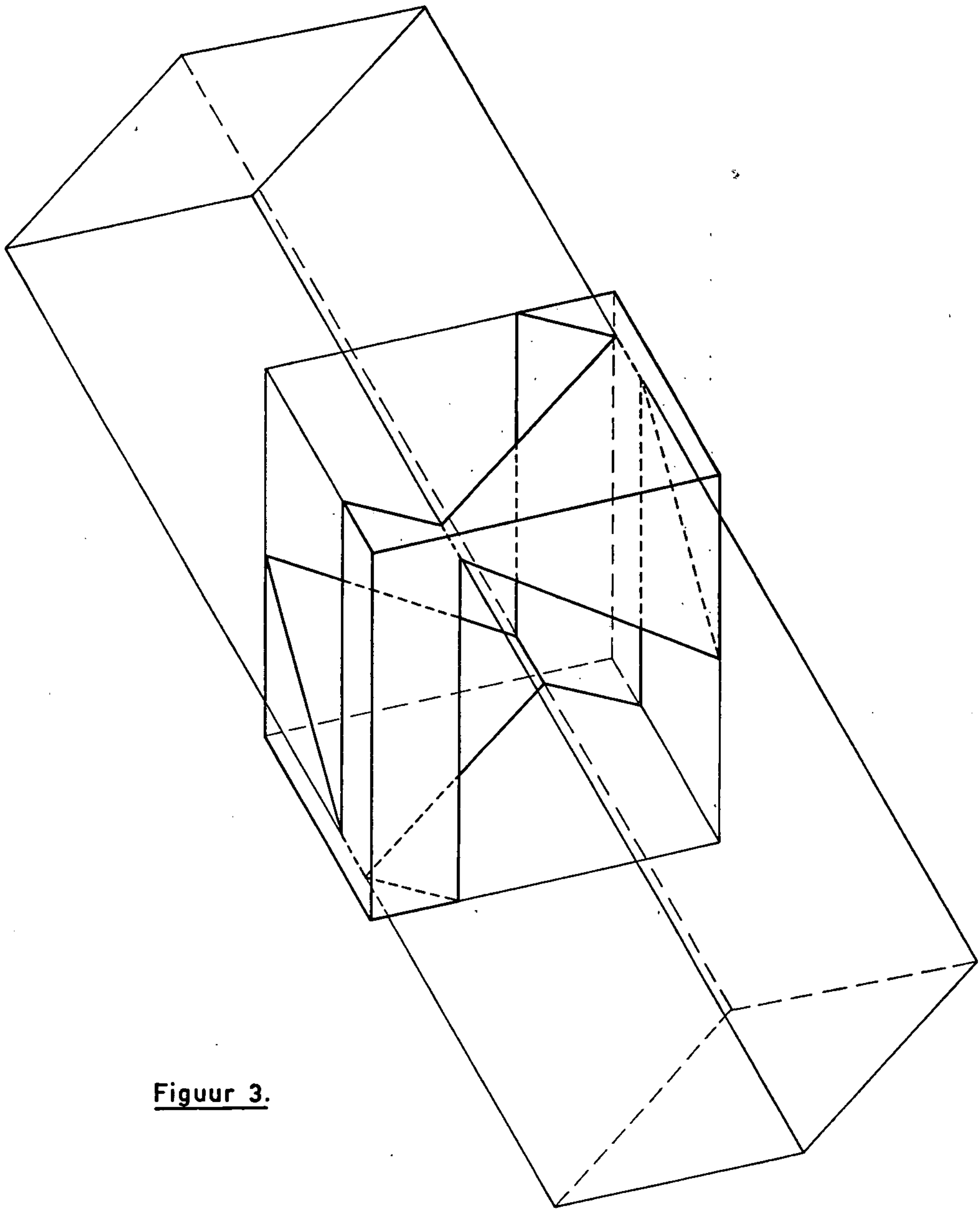


Figuur 2.

De doorgangen van W_1 en W_2 met het diagonaalvlak zijn de rechten m_1 en m_2, op afstand d van O en die van W_1 met het bovenvlak is s. Als m_1 het grondvlak snijden zou in een tussen A en C gelegen punt (en dus m_2 het bovenvlak in een tussen E en G gelegen punt) dan zou men niet ver komen. De koker zou dan grond- en bovenvlak volgens rechthoeken snijden en in deze situatie is het dan nog het voordeligst $\varphi = 0$ te nemen wat voor d maximaal $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ oplevert. Men zal dus de toestand nastreven die in de figuur is geschetst, waarbij m_1 de ribbe CG snijdt en m_2 de ribbe AE. Uit het bovenvlak wordt dan alles weggenomen wat tussen l_1 en l_2 en links van s valt, wat niet een gat is maar, zou men wagen te zeggen, een hap. In het grondvlak speelt zich, maar dan aan de rechterkant, hetzelfde af. Om te waarborgen dat de rest van de kubus samenhang houdt, moeten de snijpunten S_1 en S_2 van s met l_1 en l_2 binnen het bovenvlak liggen. De vergelijkingen van s zijn $z = a$, $y \cos\varphi + z \sin\varphi = d$. Voor S_1 geldt derhalve $x = x_1 = d$, $y = y_1 = (d - a\sin\varphi)/\cos\varphi$ en de conditie is

$x_1 + y_1 \leqq \leqq a\sqrt{2}$. In het grensgeval dat S_1 op FG ligt komt er

$$(a\sqrt{2} - d)\cos\varphi + a\sin\varphi = d, \tag{2}$$



Figuur 3.

welke vergelijking alleen een oplossing heeft als

$$(a\sqrt{2}-d)^2+a^2 \geqq d^2 \tag{3}$$

of wel als

$$d \leqq \tfrac{3}{4}a\sqrt{2}. \tag{4}$$

Daarmee is het resultaat van Pieter Nieuwland teruggevonden: *de ribbe van de grootste kubus, die* (op de aangegeven wijze) *door een gegevene geschoven kan worden is gelijk aan $\frac{3}{4}$ van de zijvlakdiagonaal van deze.*
Voor het grensgeval heeft (2) als oplossing de scherpe hoek φ_0 waarvoor $\cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$. Voor $d = a$ wordt (2):

$$(\sqrt{2}-1)\cos\varphi+\sin\varphi = 1,$$

met het fraaie antwoord $\varphi = \pi/4$. Voor m_1 geldt dan $y+z = a\sqrt{2}$, waaruit volgt dat W_1 door het midden M van CG gaat (en W_2 door het midden N van AE), een bijzonderheid die ik bij Nieuwland niet genoemd zie.
Fig. 3 tracht een indruk te geven van de doorboorde kubus. Uit het grond- en het bovenvlak worden vijfhoeken en uit de opstaande zijvlakken vierhoeken gesneden. De randen van de opening zijn scheve zevenhoeken. (In de figuur is $d = a$ aangenomen). Onlangs konden wij een filosofische beschouwing lezen over het gat in de beeldhouwkunst sinds Zadkine. Een materieel model van de configuratie van Pieter Nieuwland zou in geen beeldentuin misstaan. In de catalogus kan het onder de naam *Terre neuve* worden opgenomen.

Didactische literatuur
uit Buitenlandse Tijdschriften

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (XLVII-XLVIII; mei 1968– juni 1969).

J.-R. Pascual Ibarra, Démocratie et statistique;
E. Ehrhart, Un peu d'histoire des mathématiques pour nos élèves;
J. Chevalier, Matériaux pour un dictionnaire;
Colmez en anderen, Pour la formation des maîtres;
J. Colomb, Numération en base négative;
A. Gouret, Des vecteurs à peu de frais;
J. Bolon, Vers l'école libre.

G. Walusinski, Mai en octobre;
R. Apery, Catégories;
Jean Itard, Hamilton et les quarternions;
J. Kuntzmann, Une théorie moderne du calcul d'erreurs;
G. Kréwéras, Plaidoyer pour la somme cartésienne;
M. Dumont, Sur une rencontre internationale;
P. Jaquemier, L'associativité ou l'importance des parenthèses;
C. Hug, A propos de la mesure des aires;
P. Duceux, Programmation linéaire;
G. Walusinski, Où vont les mathématiques?;
M. Perrot, L'information continue;
Un projet de programme pour le premier cycle secondaire; Nouveau programme pour la classe de Terminale A.

Jean Bass, Groupes de nombres réels;
M. Guillemot, Encore les fractions;
E. Ehrhart, Notation et représentation de la mesure complexe d'un vecteur;
Guerber et Hennequin, Enquête sur l'enseignement des probabilités;
L. Duvert, Des 'Cercles de Mathématiques Modernes' pour les adultes;
M. Glaymann, Les relations;
E. Dehamé, L'anneau des entiers en Cinquième;
A. Doneddu, Calcul infinitésimal;
A. Chevalier et J. Chacron, Les nouvelles mathématiques en Sixième;
Jean Itard, Les miettes du festin.

P. Vissio, Sur l'enseignement des mathématiques dans le deuxième cycle secondaire;
J. de Biasi, Introduction à l'étude des nombres p-adiques;
P. Créco, Note sur la coopération des psychologues et des enseignants dans le cadre des expériences didactiques;
P. Gagnaire, Encore la base moins deux;
M. Lefur, Moyennes et populations;
M. Glaymann, L'arithmétique en classe de Cinquième.

M.-A. T. Pour la réforme de l'enseignement élémentaire;
Le Dily, Note sur l'antisymétrie.

G. Walusinski, Le pire des mots;
R. Boirel et F. Salles, Une hiatus épistémologique;
H. Freudenthal, Aux Pays-Bas;
I. R. Vesselo, Une expérience britannique locale;

A. Révuz, Quelques réflexions;
M. Pauly, A propos des symboles;
B. Levent, Catégories et géométrie élémentaire;
Le Dily, Le coin du bricoleur;
J. Fort, Colloque de Bucarest de septembre 1968.

Wiskunde werkgroep van de W.V.O.

De jaarlijkse Weekendconferentie van de Wiskunde Werkgroep wordt gehouden op zaterdag 13 en zondag 14 december 1969 in het Henri Dunanthuis van de Stichting Woudschoten te Zeist.

Het centrale thema is:

Eén jaar brugklaswiskunde.
De conferentie staat onder voorzitterschap van de voorzitter van de Wiskunde Werkgroep: Prof. dr. H. Freudenthal.

Sprekers:

zaterdagmiddag:	L.A.G.M. Muskens uit Schijndel over de wiskunde in de mavo-brugklas.
zaterdagavond:	W. J. Kniep uit Aalsmeer over de wiskunde in de meer homogene mavo-havo-vwo-brugklas.
zondagochtend:	H. N. Schuring uit Voorburg over de wiskunde in de heterogene mavo-havo-vwo-brugklas.
zondagmiddag:	Samenvatting en algemene discussie o.l.v. Prof. dr. H. Freudenthal.

Kosten:

Hele conferentie inclusief logies, linnengoed en handdoek	leden *f* 27,50	niet-leden *f* 32,50
Zonder logies en ontbijt	leden *f* 22,50	niet-leden *f* 27,50
Alleen zaterdag of zondag	leden *f* 12,50	niet-leden *f* 15.—

Reiskosten worden volledig vergoed voor docenten.

Aanmelden vóór 1 dec. bij de secretaris, drs. H. C. Vernout, Van Nouhuysstr. 11, Haarlem, tel. 023–257288.

Storten op giro 26.10.36 t.n.v. penningmeester W.V.O.–Wiskunde Werkgroep te Voorburg.

Wie zich per 1 januari 1970 als lid van de Wiskunde Werkgroep aanmeldt, wordt vanaf heden als lid beschouwd en kan dus tegen ledenprijs aan de conferentie deelnemen. Inlichtingen over de Werkgroep bij de secretaris. Contributie *f* 6,— of *f* 11,75 inclusief het maandblad „Euclides". Na opgave als deelnemer aan de conferentie ontvangt u een uitvoerig programma. Zo spoedig mogelijk na de conferentie wordt aan alle deelnemers een gestencilde syllabus toegezonden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verslag van de bestuursvergaderingen op 30 augustus en 13 september 1969 te Utrecht.

i Met betrekking tot het nieuwe leerplan stelt de vereniging zich twee taken:

– het opstellen van voorbeelden van vwo-examenopgaven (spoedig zal een opgavencommissie aan het werk gaan),

– het normaliseren van de nomenclatuur (maar niet op korte termijn: er moet eerst ervaring worden opgedaan).

ii De nieuwe statuten zijn Koninklijk goedgekeurd: zij zullen, evenals het huishoudelijk reglement in Euclides worden gepubliceerd.

iii R. den Otter zal in verband met verandering van werkkring in december uit het bestuur treden.

iv Er is een voorstel binnengekomen van de Vereniging van Geschiedenisleraren om voortaan met de zusterverenigingen een gemeenschappelijke dag voor jaarvergaderingen vast te stellen (er wordt gedacht aan een zaterdag in februari).
Het bestuur zal adhesie betuigen.
De jaarvergadering 1969–1970 zal echter plaatsvinden op maandag 22 december 1969.

v Voorlopig programma voor de algemene vergadering:

ochtendprogramma: 1. algemeen gedeelte
2. didactische voordracht (onderwerp: modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool)

middagprogramma: Er worden twee wetenschappelijke voordrachten gehouden; elk lid kan naar keuze een van beide lezingen beluisteren.

vi De Raad van Leraren heeft de mening van de vereniging over een ongedeeld vwo gevraagd. Naar de mening van het bestuur is een ontwikkeling naar een ongedeeld vwo gewenst, maar is een imperatief optreden in deze ongewenst. Op de a.s. jaarvergadering zal naar de mening van de leden worden gevraagd.

vii Op de jaarvergadering zal de penningmeester een voorstel tot contributieverhoging indienen.
Het jaaroverzicht van de penningmeester zal voortaan in Euclides worden gepubliceerd.

viii De volgende bestuursvergadering is op 15 november 1969 in Utrecht.
M. Kindt.

Voorlopige agenda van de Jaarvergadering
op maandag 22 december 1969
in Esplanade, Lucas Bolwerk, Utrecht.
Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering 1968 (1).
3. Jaarverslagen (1),
   3.1. van de secretaris,
   3.2. van de penningmeester,
   3.3. van de kascommissie,
   3.4. van de redactie van Euclides,
   3.5. van de Commissie voor de leesportefeuille.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing:
   Dr. ir. B. Groeneveld, drs. A. J. Th. Maassen en M. den Otter treden af; zij zijn niet herkiesbaar. Het bestuur stelt kandidaat: Dr. J. K. van den Briel (Heemstede), en drs. J. W. Maassen (Den Haag). Het bestuur zoekt een derde kandidaat in de vacature van M. den Otter. (2)
6. Vaststelling van de contributie 1970/1971.
7. Bespreking van het dilemma: Gedeeld of Ongedeeld V.W.O.? (3).
8. Didaktisch georiënteerde voordracht.
9. Rondvraag.

PAUZE.

10. Splitsing van de vergadering in twee delen
    10.1. Voordracht van Prof. dr. H. J. A. Dupare:
    Gedachten rondom discrete wiskunde.
    Voordracht van Dr. P. G. J. Vredenduin:
    Structuren.
    10.2 Sluiting.

(1) Publikatie zal geschieden in het decembernummer van Euclides.
(2) Namen van tegenkandidaten – resp. kandidaten – te melden aan de secretaris: Bosboomstraat 20, Arnhem.
(3) Dit agendapunt is opgenomen op verzoek van de Raad van Leraren.

Wiskundig Genootschap

Het wintersymposium zal gehouden worden op zaterdag 3 januari 1970 in het Stedelijk Gymnasium, Fruinlaan 15, Leiden. Als thema is gekozen 'Integraalrekening'.

Het programma luidt als volgt:

10.15–10.30 u. Aankomst en koffie

10.30–11.30 u. Prof. dr. H. Freudenthal:
'De historische ontwikkeling van het integraalbegrip'

11.45–12.45 u. Prof. dr. A. C. Zaanen:
'De integraalrekening in de moderne tijd'

12.45–14.00 u. Lunch

14.00–15.00 u. Prof. dr. G. W. Veltkamp:
'Numerieke aspecten van de integraalrekening'.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom. I.v.m. de beperkte plaatsruimte wordt ieder die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen verzocht zich voor 20 december 1969 aan te melden bij Drs. R. Sattler, Zaanstraat 57, Leiden. Wie aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen wordt verzocht vóór 20 december 1969 *f* 4,50 over te maken op giro 286085 ten name van Drs. R. Sattler te Leiden.

De Secretaris
A. W. Grootendorst

Kalender

wo 26 november: MC (2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam–O) 20 uur: in de serie 'Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht' Prof. Dr. L. C. A. Corsten: Terugkerende gebeurtenissen.

za 13 en zo 14 december: Weekendconferentie van de Wiskunde Werkgroep, Woudschoten, Zeist. 'Een jaar brugklaswiskunde'

ma 22 december: Jaarvergadering Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Utrecht in Esplanade.

za 3 januari: Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap; zie de mededeling in dit nummer (p. 114)

Boekbespreking

M. G. Kuipers, J. Siepelinga, R. Troelstra, G. Tromp – *Gemoderniseerde Meetkunde* op Basis van Afbeeldingen, deel I, Wolters-Noordhoff N.V., 128 blz., f 6,25 (exclusief b.t.w.)

Het hierboven genoemde boek doet fris aan en zal zeker in de brugklassen verbonden aan een v.w.o. school belangstelling trekken: Er wordt al redelijk snel deductief werk gevraagd zodat klassen met leerlingen waarvoor een ander meetkundeboek wat aan de eenvoudige kant is hier aan hun trekken komen.
Als voorloper heeft deze uitgave gekend het boek transformatiemeetkunde, waarvoor de methode weer is getest bij experimenten in de onderbouw. Dit werk is het resultaat van de voorgaande ervaringen.
De afbeeldingen waarvan in de titel sprake is, zijn in dit 1e deel de congruentieafbeeldingen. Hiervan neemt de spiegeling een centrale plaats in. Nadat dit begrip omzichtig is ingevoerd in hoofdstuk I en er in hoofdstuk II intuïtief mee wordt gewerkt, zodat de leerlingen er goed vertrouwd mee raken, volgen in hoofdstuk III met name genoemde eigenschappen van het spiegelen en worden de rotatie en translatie als het produkt van twee spiegelingen ingevoerd. In de loop van dit hoofdstuk worden ook al beredeneringen vanuit de geleerde eigenschappen gevraagd. In hoofdstuk IV komt men aan het formele bewijzen en het construeren toe, terwijl tot besluit hoofdstuk V gewijd is aan de congruentie. Hierbij heten twee figuren congruent als de ene beeldfiguur is van de ander onder een combinatie van de besproken afbeeldingen.
Facultatieve gedeelten zijn aangeduid met een sterretje: Hierin komen onder andere dekpunten, het samenstellen en ontbinden van afbeeldingen en de schuifspiegeling aan de orde. Een kenmerk dat voortvloeit uit de gevolgde methode is dat figuren worden gegroepeerd naar hun aard ten aanzien van een afbeelding. Zo vinden we gelijkbenige driehoek (symmetrische driehoek), vlieger, ruit en cirkel bij elkaar. Een licht heimwee naar een indeling van drie-, vier-, n-hoeken met o.a. het bekende rijtje parallellogram, rechthoek–ruit, vierkant doet zich gevoelen. Een gevolg is ook dat eenzelfde figuur meerdere malen ter sprake wordt gebracht. (Voorbeeld: parallellogram, definitie bij evenwijdige lijnen als alleen de spiegelingen nog maar ter sprake zijn gebracht, eigenschappen bij de rotaties (punt symmetrie), het kenmerk betreffende de gelijke en evenwijdige zijden van een vierhoek bij de translaties). De methode m.b.v. afbeeldingen geeft ook in een enkel geval aanleiding tot een andere naamgeving, zoals symmetrisch trapezium voor gelijkbenig trapezium.
Aan het einde van het boek worden bij het onderwerp congruentie ook de congruentiegevallen van driehoeken besproken, iets dat bij de experimentele uitgave naar ik meen niet het geval was. Hierover zal door de bij de samenstelling betrokkenen wel uitgebreid van gedachten zijn gewisseld. Hoewel de congruentiekenmerken bij deze methode best gemist kunnen worden, kan er in de praktijk dikwijls vlot mee worden gewerkt en ik denk dat de pragmatici het hier dan ook wel gewonnen zullen hebben van de idealisten.
Nog een kritische opmerking tot besluit: Voor lijnstukken die even lang zijn wordt het tekentje '$\cong$' gebruikt (ingevoerd op blz. 27). Op blz. 112 krijgt dit tekentje zijn rigoreuze betekenis van congruent'. In dit licht lijken notaties als bijv. $\angle A + \angle B + C \cong \angle C_{123}$ (blz. 82) en DE $\cong \frac{1}{2}$AB (blz. 101) onjuist. Aan mijn algemene waardering voor het bovenbesproken werk doet dit niets af.

R. Sattler

G. Y. Rainich en S. M. Dowdy, *Geometrie for teachers*, John Wiley & Sons, New York, 1968, 220 blz., 70/–.

Nu het wiskundeonderwijs op onze scholen aan een drastische heroriëntatie toe is, is het belangrijk kennis te nemen van opvattingen, didactiek en methodiek van anderen. Op deze wijze zal men een verantwoorde eigen methodiek kunnen vinden.

Het boek van deze beide auteurs geeft de lezer een uiterst heldere kijk op de samenhang van de vele meetkunden, die geconstrueerd kunnen worden en ook op welke wijze dit geschiedt. Daartoe wordt gestart met een intuïtieve driedimensionale euclidische meetkunde. De basiselementen zijn punten, getallen en vectoren. De relaties tussen deze elementen (de som en het verschil van twee vectoren is weer een vector, de som van een punt en een vector is weer een punt, het verschil van twee punten is een vector) worden bestudeerd. Intuïtief worden deze drie verzamelingen van elementen nodig, de distributieve, commutatieve en associatieve eigenschappen onderling blijken een grote rol te spelen.
Daarna volgt, uitgaande van de drie genoemde verzamelingen (punten, vectoren en getallen) een axiomastelsel, verdeeld in 5 groepen. 1) de vectoropstelling, 2) de combinatie vector-getal 3) de dimensie, 4) de metriek via dat produkt en 5) de relaties tussen punten en vectoren. (Het cross-produkt ontbreekt, omdat anders de dimensie 3 moest zijn) De invoering van de metriek geeft alleen moeilijkheden bij het vaststellen van hoekmaten. De functie cos x wordt daarom formeel vastgelegd over de machtreeks en alle bekende formules worden zonder meer als juist geaccepteerd. Deze axiomatische behandeling wordt daarna analytisch uitgewerkt.
In het daaropvolgende hoofdstuk worden dan drie mogelijkheden genoemd, waarop men tot meetkunden kan komen, die afwijken van de besproken euclidische en wel òf door beperking van de axioma's, òf door generalisering tot een omvattender meetkunde komen of over een meetkunde te ontwerpen die afwijkt van de behandelde euclidische.
Via de transformatiegroepen wordt dan de onderlinge samenhang behandeld. Aangetoond wordt dat de isometrische transformaties: translatie, rotatie en spiegeling alle door spiegelingen kunnen worden vervangen, terwijl alle spiegelingen weer door een samenstel van drie inversies kunnen worden vervangen. Ook de homothetie kan tenslotte teruggebracht worden tot twee inversies. Zodat de inversieve meetkunde een meetkunde is, die de euclidische omvat.
Dit wordt nog eens analytisch bekeken. Gaat men uit van de groep transformaties

$$x = ax+by+h$$
$$y = cx+dy+k, \quad a, b, c, d, k, h \text{ reëel.}$$

dan kan men aan de coëfficiënten zekere voorwaarden opleggen zoals

$ad \neq bc$ . . . de groep affine transformaties.

$a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1$ en $ab+cd = 0$ de groep van isometrische transformaties

$a^2+c^2 = b^2+d^2$, $ab+cd = 0$ de equiforme (homothetische) transformaties

$ad = bc = 1$ de equiaffine transformaties (behoud van oppervlak).

Deze korte samenvatting kan belangstellenden mogelijk enig idee geven van de inhoud van dit aanbevelenswaardige boek.

Burgers

R. L. Wilder, *Evolution of mathematical concepts*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1968, 224 blz., 75/–.

Wiskundige prestaties zijn niet puur persoonlijke prestaties. Ze kunnen slechts tot stand komen dank zij de wisselwerking die ontstaat door contacten met andere wiskundigen.
Het is deze these, die het boek beheerst, een boek voornamelijk geschreven voor niet-mathematici, die toch enig idee willen hebben, van de wijze waarop de wiskunde zich van de vroegste tijden heeft ontwikkeld, en de gevolgen van deze ontwikkeling op de wijze waarop die wiskunde nu gedoceerd wordt.
Het is prettig leesbaar geschreven en bevat een schat van details, zonder in typisch wiskundige technieken te vervallen, die ook een mathematicus zullen interesseren. De uitvoering is, zoals gewend, onverbeterlijk.

Burgers

C. J. Alders, F. van der Houven, *Wiskunde voor MAVO 2M*

Dit boek is bedoeld als een vervolg op wiskunde voor de brugklas van C. J. Alders e.a. Het bevat leerstof voor de tweede klas MAVO.
Theoretische beschouwingen komen er niet in voor. Met eenvoudige voorbeelden worden regels afgeleid die dan geoefend worden met eenvoudige vraagstukjes.
De notaties zijn aangepast aan die van de verzamelingsleer.
De meetkunde (lengte, oppervlak, Pythagoras) wordt verwerkt in de hoofdstukken over breuken, wortelvormen en vergelijkingen met een en twee onbekenden.

Burgers

Bruno Ernst, *Levende wiskunde.* Teleac, Delft, 1969, 71 blz. prijs niet opgegeven.

Dit boekje is de schriftelijke begeleiding van de gelijknamige televisiecursus die door Prof. Dr. F. van den Blij is samengesteld en gepresenteerd. Het boekje bevat meer wetenswaardigheden dan die welke de ondertitel 'Kegelsneden' suggereerd.
Voor schoolbibliotheken bijzonder aanbevolen.

Burgers

C. van der Linden, *Handelsrekenen en financiële rekenkunde,* Utrecht, Antwerpen. Prisma boeken.

Dit boekje is een compendium van de stof voor het vak Handelsrekenen (inclusief de Financiële Rekenkunde).
Het eerste gedeelte is bestemd voor hen, die deze vakken bestuderen op het niveau van het middelbaar onderwijs, het tweede gedeelte gaat verder en dieper en is bestemd voor opleidingen op het niveau van de accountantsexamens.
Daar het boekje niet meer pretendeert dan een compendium te zijn kan men er niet de eisen van een leerboek aan stellen. Het is in zijn soort duidelijk en tamelijk volledig.
Voor hen die reeds een leerboek bestudeerd hebben lijkt mij dit met zorg uitgevoerde werkje zeer goed bruikbaar.

H. Pleysier

P. Billingsley: *Convergence of probability measures.* John Wiley and Sons Inc., New York 1968, 253 blz.

Zoals de titel aangeeft, handelt dit boek over konvergentie van waarschijnlijkheidsmaten. De bekendste stelling op dit terrein is wel de centrale limietstelling. Een eenvoudige vorm van deze stelling luidt: Stel $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_n$ zijn onafhankelijke trekkingen uit dezelfde kansverdeling (met verwachting 0 en variantie 1).
Dan heeft $\underline{s}_n := n^{-\frac{1}{2}}(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n)$ een verdelingsfunktie die voor $n \to \infty$ tot een normale verdelingsfunktie ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) nadert. D.w.z. $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ voor elke x.
De theorie die in dit boek behandeld wordt gaat echter wezenlijk een stap dieper, het gaat hier namelijk om konvergentie van kansmaten op funktieruimten. Als belangrijk voorbeeld kan genoemd worden: De trekkingen $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ leggen een kontinue stuksgewijs lineaire

funktie h_n vast op het interval [0, 1] door

$$h_n(0) = 0$$

$$h_n\left(\frac{i}{n}\right) = s_i \text{ voor } i = 1, 2, \ldots, n.$$

De kansverdeling van de x_i bepaalt zo een kansverdeling P_n op de verzameling van alle kontinue funkties op [0, 1]. Bewezen wordt dat de kansmaten P_n voor $n \to \infty$ tot de Wienermaat W naderen, waarbij het begrip 'naderen' op een soortgelijke wijze gedefinieerd wordt als in de centrale limietstelling. De kansmaat W op de verzameling van kontinue funkties op [0, 1] is juist de kansmaat die gebruikt kan worden voor de beschrijving van het gedrag van een deeltje bij Brownse beweging (uitwijkingen in één richting).
Het zal duidelijk zijn, dat voor een gedegen behandeling van een onderwerp als dit een flinke hoeveelheid wiskundig gereedschap nodig zal zijn. Met name zijn maattheorie, funktionaalanalyse en topologie naast waarschijnlijkheidsrekening onmisbaar. De schrijver is er voortreffelijk in geslaagd de moeilijke en ingewikkelde materie helder en instruktief te presenteren. Toch blijft het boek door de aard van het onderwerp hoofdzakelijk van belang voor de specifiek in dit gebied geïnteresseerden.

J. Wessels

Ronold W. P. King, Richard B. Mack and Sheldon S. Sandler, *Arrays of cylindrical dipoles*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968 xiii+493 p., £ 6.10s.

Het te bespreken boek behoort tot het vakgebied der antennetheorie. In hoofdstuk 1 wordt een overzicht gegeven van de zgn. conventionele antennetheorie waarbij de stroomverdeling langs de antenne wordt gepostuleerd. In de daarna volgende hoofdstukken 2–7 wordt een meer exacte versie van de antenne theorie geboden, waarbij het antennestralingsprobleem wordt geformuleerd als een mathematisch randwaardeprobleem. De stroomverdeling langs de antenne wordt dan verkregen door oplossing van een integraalvergelijking. Achtereenvolgens worden besproken de straling van een enkele cilindrische antenne en van diverse configuraties van evenwijdige cilindrische antennes van gelijke lengte (circular array, curtain array) resp. van ongelijke lengte (Yagi-Uda array, log-periodic array). Het geheel geeft een goed overzicht van met name de bijdrage van de groep van King (Harvard University) tot het onderzoek van deze typen antennes. Tenslotte wordt in hoofdstuk 8 ingegaan op experimentele onderzoekingen aan de eerder beschouwde antennes; er worden een aantal meettechnieken besproken, terwijl voorts de verkregen exprimentele resultaten worden vergeleken met de theorie uit de voorafgaande hoofdstukken.
Het zal duidelijk zijn dat het boek van King et al. voornamelijk interessant is voorvakspecialisten op het gebied van de antennetheorie.

J. Boersma

J. J. Burckhardt, *Lesebuch zur Mathematik*, met een voorwoord van van Prof. dr. B. L. van der Waerden, Räber Verlag, Luzern, 1958, 79 blz. Zw. Fr. 12.40.

Een boek, dat m.i. goede diensten kan bewijzen in een schoolbibliotheek. Het bevat speciaal uitgekozen voorbeelden van bewijzen (vanaf de Griekse tijd tot aan de lineaire programmering van Dantzig), die in het bijzonder de gedachtengang onthullen van mathematici uit alle tijden. (Grieken, Drüser, Euler, Steiner, Coxeter, Sylvester, von Neumann en Dantzig). In het artikel 'Der Mathematiker' van J. von Neumann klinkt een waarschuwend geluid zich bewust te blijven van de verbinding met de historie en empirie, daar anders een degeneratie te vrezen valt.

Burgers

J. Duncan. *The elements of complex analysis*, John Wiley and Sons, London/New York/Sydney, 1968; 313 bladz., prijs: 85 sh (gebonden), 45 sh (ingenaaid).

Dit boek is een moderne inleiding in de functietheorie, bestemd voor (zoals de schrijver in zijn woord vooraf meedeelt) begaafde wiskunde-studenten. De behandelde onderwerpen wijken niet af van die welke aan iedere universiteit worden onderwezen: complexe getallen; continue en differentieerbare complexe functies; functies in de vorm van machtreeksen; contour-integratie; conforme afbeelding; analytische voortzetting van functies. Het boek onderscheidt zich in de volgende opzichten van andere leerboeken over functietheorie: in de eerste plaats door het streven om topologische inzichten bewust en consequent toe te passen. Dit heeft o.a. geleid tot zorgvuldige definities van nieuw geïntroduceerde begrippen (bijv. op bladz. 60–63 de begrippen differentieerbaarheid; reguliere en analytische functies). Het eerste hoofdstuk houdt zich met metrische ruimten bezig, waarbij de begrippen compact, volledig en samenhangend aan de orde komen. In hoofdstuk 5 worden de begrippen boog, contour en contour-integratie geanalyseerd. Daarbij komt een tweede eigenschap van de in dit boek gevolgde methode duidelijk naar voren: de auteur geeft er de voorkeur aan zich te beperken tot voor de toepassing van de theorie belangrijke gevallen, die streng behandeld worden; hij ziet er van af om de meest algemene gevallen, die zeer gecompliceerd zijn, te bestuderen. Zo wordt de stelling van Jordan, die uitspreekt dat iedere enkelvoudige gesloten kromme het vlak in precies twee gebieden verdeelt, alleen voor 'stervormige' krommen bewezen. Aansluitend wordt de stelling van Cauchy over de integraal van een functie f langs een enkelvoudige gesloten kromme in een gebied waar f analytisch is, alleen voor 'stervormige' gebieden bewezen. Als derde eigenschap moet vermeld worden het zorgvuldige onderscheid dat tussen locale en globale analyse gemaakt wordt (hoofdstukken 7 en 8). In de vierde plaats geeft de auteur bij ieder nieuw onderwerp dat aan de orde komt een oriënterende inleiding, zodat de student bij het volgende detail-werk zich steeds kan realiseren waar de behandeling voor dient en in welke richting hij gestuwd wordt.

Aan het einde van het boek is een aanhangsel over Riemann-Stieltjes-integratie opgenomen. Tevens zijn twee bladzijden gewijd aan geschikte onderwerpen voor verdere studie (bladz. 303 en 304).

De behandeling van de stof is zorgvuldig; het aantal slordigheden in de tekst is gering. Hier zij slechts gewezen op twee plaatsen waar de auteur ten onrechte plus- en mintekens verwisselt: op bladz. 87 in het bewijs van theorema 4.10 (regels 8 en 15 van boven) en op bladz. 141 in het bewijs van example 6.6 (regels 4 en 2 van beneden). Op bladz. 233 is in de linkerfiguur 8.6 bij het linker-benedenhoekpunt van Γ_n een minteken weggevallen.

De typografische verzorging van de tekst is uitstekend.

Het boek kan warm aanbevolen worden aan ieder die zich wil verdiepen in een moderne opbouw van de functietheorie.

W. J. Claas

Recreatie

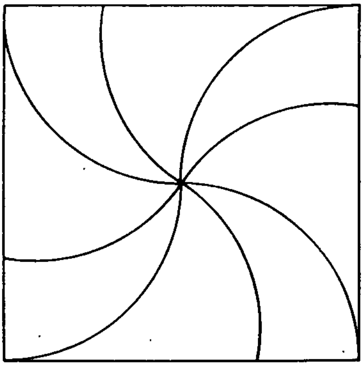
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

226 Uit een Tsjechisch Olympiade: wat is het kleinste natuurlijke getal, dat precies 15 delers heeft? Is er een kleiner natuurlijk getal met meer delers? (Uit: Wiskunde Post)

227 Gegeven is de plattegrond van een stad zonder doodlopende straten en zonder de uitvalswegén. Onderzoek, wanneer het mogelijk is in deze stad eenrichtingsverkeer in alle straten in te stellen zo, dat men toch vanuit elk punt elk punt kan bereiken.

Oplossingen

224 Gevraagd werd een vierkant door acht cirkelbogen in acht delen met gelijke oppervlakte te verdelen. In onderstaande figuur vindt men de oplossing. De middelpunten van de cirkelbogen zijn de vier middens van de zijden en de vier hoekpunten van het vierkant. Met het bewijs zal wel niemand moeite hebben.



225 Begin met de rij 1 1. Vorm daarvan uitgaande nieuwe rijen; de k^e rij wordt gevormd door in de $k-1^e$ tussen elk paar getallen met som k het getal k in te lassen. Hoeveel keer komt het getal 100 in de 100^e rij voor?
Met volledige inductie is direct duidelijk, dat twee naast elkaar staande getallen in een rij geen factor gemeen kunnen hebben. Op de 100^e rij kan dus alleen het getal 100 komen, als op de 99^e rij naast elkaar staan: 1 en 99, 3 en 97, 7 en 93, . . ., 99 en 1. Al deze combinaties komen op de 99^e rij precies één keer voor. Zo zal 13 en 87 op de 99^e rij voorkomen, als te voren voorkomt 13 en 74 en daarvoor 13 en 61, . . ., 13 en 9. En dit kan weer alleen maar ontstaan zijn uit 4 en 9, 4 en 5, 4 en 1. Omgekeerd is duidelijk, dat 4 en 1 voorkomt in rij 4 en dat daaruit inderdaad 13 en 87 ontstaat.
Het aantal keren, dat op de 100^e rij het getal 100 voorkomt, is dus gelijk aan het aantal getallen kleiner dan 100, dat met 100 onderling ondeelbaar is, dus aan $\varphi(100)$.

Inhoud