EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN
WISKUNDELERAREN, VAN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

X — 15 JULI 1969

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Naaldbanden: Verkrijgbaar bij de uitgever door storting van f 5,50 op giro nr. 1308949; vermelden: .... ex naaldband(en) Euclides.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 *afdrukken* verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

WOLTERS-NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

INHOUD VAN DE 44STE JAARGANG

ARTIKELEN EN VOORDRACHTEN

KORRELS

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

DIVERSEN

BESPREKING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN

MEETKUNDE MET VECTOREN

door

P. G. J. Vredenduin

Oosterbeek

1. Mijn bedoeling is in dit artikel stil te staan bij de problemen, die zich voordoen bij de vectoriële fundering van de driedimensionale meetkunde. Noodzakelijk is daartoe eerst kort na te gaan, hoe de planimetrie vectorieel gefundeerd kan worden, omdat anders niet duidelijk is van welke voorkennis men uitgaat.

Voor vectoren in het platte vlak worden de bekende eigenschappen van een vectorruimte bewezen:

a. de optelling van vectoren is commutatief en associatief, de optelling heeft een neutraal element, elke vector heeft één tegengestelde.

b. als $r \in \mathsf{R}$ en $s \in \mathsf{R}$, dan geldt

$$r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v},$$
$$(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v},$$
$$r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w},$$
$$1\vec{v} = \vec{v}.$$

Verder geldt:

een lijn l is een ééndimensionale vectorruimte, d.w.z.: als $O \in l$, $P \in l$, $O \neq P$, dan is de lijn l de verzameling van de punten Q, waarvoor $\overrightarrow{OQ} = r\,\overrightarrow{OP}$ $(r \in \mathsf{R})$.

Korter geformuleerd

$$l = \{Q \mid \overrightarrow{OQ} = r\,\overrightarrow{OP},\ r \in \mathsf{R}\}.$$

En evenzo:

een vlak V is een tweedimensionale vectorruimte, d.w.z.: als $O \in V$, $P \in V$, $Q \in V$ en O, P en Q niet collineair zijn, dan is

$$V = \{R \mid \overrightarrow{OR} = r\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ},\ r \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R}\}.$$

Ten slotte is nog van belang de parametervoorstelling van een rechte lijn. Is l evenwijdig aan de drager van $\overrightarrow{OQ}$ en is $P \in l$, dan is

$$l = \{R \mid \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + r\,\overrightarrow{OQ},\ r \in \mathsf{R}\}.$$

Of ook wel: als $P \in l$, $Q \in l$ en $P \neq Q$, dan is

$$l = \{R \mid \overrightarrow{OR} = r\,\overrightarrow{OP} + (1 - r)\,\overrightarrow{OQ},\ r \in \mathsf{R}\}.$$

2. Nu is onze taak de stereometrie vectorieel te funderen. De eenvoudigste weg is de volgende. We stellen vast: „De'' ruimte is een driedimensionale vectorruimte. D.w.z.

a. er zijn vier punten O, P, Q, en R, die niet coplanair zijn,

b. de ruimte x is de verzameling

$$\{S \mid \overrightarrow{OS} = r\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ} + t\,\overrightarrow{OR},\ r \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R},\ t \in \mathsf{R}\}.$$

Deze methode is kort en bondig en nog aardig goed ook.

Alleen jammer is, dat we onderwijs geven aan kinderen, die er heel anders over denken dan wij. Voor deze kinderen is de ruimte er op de een of andere manier al. Deze ruimte heeft een bepaalde structuur. Een vectorruimte heeft ook een structuur. En onze leerlingen zullen dus van ons eisen, dat we aantonen, dat de eigenschappen van een vectorruimte inderdaad voor onze ruimte van kracht zijn. We hebben ze zelfs doelbewust zo opgevoed. We hebben eerst een stuk planimetrie ontwikkeld, toen vectoren gedefinieerd en ten slotte laten zien, dat voor deze vectoren de sub 1 genoemde eigenschappen gelden. Onze leerlingen eisen dus naar analogie hiervan, dat we eerst een stuk stereometrie ontwikkelen, dan laten zien, dat de eigenschappen van een driedimensionale vectorruimte voor deze stereometrie van kracht zijn en zijn dan bereid verder de meetkunde van de ruimte vectorieel op te bouwen.

We gaan dus eerst de stereometrie niet-vectorieel opbouwen. Maar hoe? Naar analogie van de aanvankelijk bij de planimetrie gevolgde manier intuïtief? Dat zou kunnen. We zijn dan gauw klaar, want we kunnen volstaan met intuïtief duidelijk te maken, dat voor de ruimte de eigenschappen van een driedimensionale vectorruimte van kracht zijn. De leerling is te ver gevorderd om zich met deze kluit in het riet te laten sturen.

Hoe funderen we de stereometrie, als we het niet intuïtief mogen doen, omdat de leerling eraan gewend is niet intuïtief te werk te mogen gaan? Er blijft maar één uitweg over: axiomatisch. We maken dus duidelijk, dat we voor het ontwikkelen van een nieuw onderdeel van de wiskunde de axiomatische methode nodig hebben en leggen een en ander over deze methode uit. Daarna kiezen we onze axioma's.

Hoe kiezen we deze axioma's? Er zijn twee mogelijkheden:

a. we volgen de traditionele methode,

b. we kiezen onze axioma's zo, dat we zo snel mogelijk kunnen aantonen, dat in de stereometrie alle eigenschappen van een driedimensionale vectorruimte van kracht zijn.

M.i. ligt het voor de hand te besluiten tot de laatste van deze twee mogelijkheden.

We kiezen als axioma's:

A1. *Er zijn vier punten, die niet coplanair zijn.*
A2. *Door twee verschillende punten gaat een rechte lijn.*
A3. *Door drie niet collineaire punten gaat een plat vlak.*

Ad A2. Zijn O en P verschillende punten, dan gaat daardoor een rechte lijn. We weten al, dat een rechte lijn een ééndimensionale vectorruimte is. De lijn is dus de verzameling

$$\{Q \mid \vec{OQ} = r\,\vec{OP},\ r \in \mathsf{R}\}.$$

De lijn is dus door O en P eenduidig bepaald. We behoeven in het axioma niet op te nemen, dat er door elke twee verschillende punten niet meer dan één lijn gaat.

Ad A3. Zijn O, P en Q drie niet collineaire punten, dan is het vlak erdoor de verzameling

$$\{R \mid \vec{OR} = r\,\vec{OP} + s\,\vec{OQ},\ r \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R}\}.$$

Het vlak is dus eenduidig bepaald.

Men kan nu bewijzen: als een lijn twee punten met een vlak gemeen heeft, dan ligt hij erin.

Bewijs. Onderstel, dat P en Q in het vlak OPQ, bepaald door de drie niet collineaire punten O, P en Q, liggen. Dan is

$$\{R \mid \vec{OR} = r\,\vec{OP} + (1-r)\,\vec{OQ},\ r \in \mathsf{R}\} \subset$$
$$\subset \{R \mid \vec{OR} = r\,\vec{OP} + s\,\vec{OQ},\ r \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R}\}.$$

Hiermee is het bewijs voltooid.

Nu wordt het tijd ons te realiseren, welke eigenschappen we nog moeten bewijzen. De meeste eigenschappen van een driedimensionale vectorruimte leveren geen probleem meer op, omdat ze in wezen tweedimensionaal zijn. We moeten alleen nog aantonen:

E1. De vectoroptelling is associatief.
E2. Zijn O, P, Q en R niet coplanair, dan zijn er bij elk punt S reële getallen r, s en t te vinden zo, dat

$$\vec{OS} = r\,\vec{OP} + s\,\vec{OQ} + t\,\vec{OR}.$$

E3. Is vlak V evenwijdig aan de dragers van de twee niet-collineaire vectoren $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OR}$ en is $P \in V$, dan is

$$V = \{S \mid \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + r\,\overrightarrow{OQ} + s\,\overrightarrow{OR},\ r \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R}\}$$

(parametervoorstelling van een vlak).

In de vlakke meetkunde was fundamenteel de transitiviteit van de evenwijdigheid van lijnen. Hierop berust de translatie.

Het ligt voor de hand voor de ruimte te accepteren:

A4. *De evenwijdigheid van lijnen is transitief.*
(Evenwijdigheid van lijnen wordt op de traditionele manier gedefinieerd.) Het axioma komt erop neer, dat we postuleren, dat we in de ruimte evenals in het platte vlak kunnen spreken over richtingen.

We kunnen nu E1 bewijzen. Onderstel, dat $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OR}$ drie niet coplanaire vectoren zijn (fig. 1).

Kies achtereenvolgens

S zo, dat $OPSQ$ een parallellogram is,
T zo, dat $OPTR$ een parallellogram is,
U zo, dat $OQUR$ een parallellogram is,
V zo, dat $QSVU$ een parallellogram is.

Dit alles kan op grond van A3. Uit A4 volgt, dat ook $OPVU$ en $OSVR$ parallellogrammen zijn. Daaruit volgt:

$$\overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OV},$$

waarmee de juistheid van E1 aangetoond is.

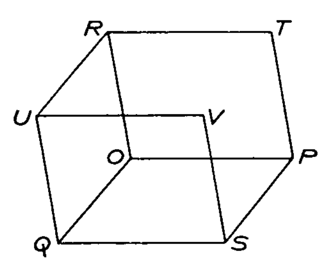


Fig. 1

De juistheid van E3 is nu direct in te zien. Het vlak door R, T en U is namelijk de verzameling

$$\{W \mid \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OR} + r\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ},\ r \in \mathsf{R},\ s \in \mathsf{R}\}.$$

Nu moet E2 nog bewezen worden. D.w.z. we moeten nog een of ander axioma poneren, waardoor vastgelegd wordt, dat het aantal dimensies van onze ruimte niet meer dan 3 is. Traditioneel gebruiken we daarvoor het axioma:

als twee vlakken een punt gemeen hebben, dan hebben ze nog een daarvan verschillend punt gemeen.

We geven de voorkeur aan een daarmee ekwivalent, maar iets anders luidend axioma:

A5. *Als een van twee evenwijdige lijnen een vlak snijdt, dan snijdt de andere het ook.*

Nu kunnen we E2 bewijzen. Onderstel, dat $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OR}$ drie niet-coplanaire vectoren zijn en S een willekeurig punt. Trek door S lijnen evenwijdig aan OP, OQ en OR. Volgens A5 snijden deze de vlakken OQR, ORP en OPQ (fig. 2). De snijpunten noemen we resp. U, V en T. Nu is duidelijk, dat er reëele getallen r, s en t bestaan zo, dat

$$\overrightarrow{OS} = r\,\overrightarrow{OP} + s\,\overrightarrow{OQ} + t\,\overrightarrow{OR}.$$

Hiermee is E2 bewezen.

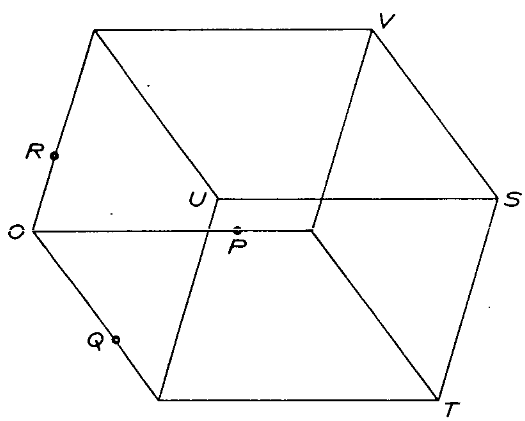


Fig. 2

Nu gaat het geweten van de beroepswiskundige aan het knagen. Zijn de axioma's A1–5 wel onafhankelijk? Dat zijn ze stellig niet. A2 is overbodig, want A2 is afleidbaar uit A1 en A3.

Geef namelijk twee punten P en Q ($P \neq Q$). Kies O zo, dat O, P en Q niet collineair zijn. Dat kan volgens A1. (Kon het niet, dan waren alle punten collineair en dus ook coplanair.) Beschouw nu de deelverzameling van vlak OPQ:

$$\{R \mid \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + r\,(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}),\ r \in \mathsf{R}\}.$$

Dit is een rechte lijn in vlak OPQ, die door P en Q gaat, hetgeen we zien door $r = 0$ resp. $r = 1$ te kiezen. Door P en Q gaat dus een lijn, q.e.d.

Toch maar A2 laten staan? Ik vermoed, dat de meesten „graag" zullen zeggen.

En dan A4. Dat is op de traditionele manier afleidbaar uit de overige axioma's. Heeft u er zin in? Dat zou betekenen een ouderwets stuk stereometrie bedrijven met als enig doel vereenvoudiging van het axiomasysteem en wel het bewerkstelligen van een vereenvoudiging, waaraan eigenlijk niemand behoefte heeft.

Niet ieder zal het hiermee eens zijn. Het is per slot van rekening een didactische kwestie en dus aanvechtbaar, zodra men een ander standpunt inneemt. Ik heb alleen een bepaald standpunt willen verdedigen.

3. Iets erger wordt het, als we het inprodukt gaan invoeren. De eigenschap van het inprodukt, die niet zuiver tweedimensionaal is, is

$$(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}\vec{v}) + (\vec{u}\vec{w}). \tag{1}$$

Om dit aan te tonen, moeten we laten zien (fig. 3), dat de projectie van OR op l gelijk is aan de som van de projecties van OP en OQ op l ($OPRQ$ is een parallellogram). Of in plaats daarvan, dat de projecties van OP en RQ op l gelijk zijn. Te bewijzen is dus:

De projecties van twee lijnstukken, die gelijk en evenwijdig zijn, op een rechte lijn, zijn gelijk.

We kunnen nu twee wegen inslaan.

a. Trek door Q de lijn $m \,//\, l$. De projectie van QR op m is QR', de projectie van OP op l is OP', de projectie van QR' op l is $Q'R''$. Dan is

$$OP' = QR' = Q'R''.$$

We zijn nu klaar, als we nog bewijzen, dat $Q'R''$ de projectie van QR op l is, dus als we bewijzen, dat $RR'' \perp l$. Daartoe hebben we de stelling nodig:

als een lijn loodrecht staat op twee snijdende lijnen uit een vlak, staat hij loodrecht op alle lijnen uit dat vlak.

Ten eerste is het bewijs van deze stelling vervelend en ten tweede is deze stelling juist zo'n prachtig gevolg van de eigenschap (1).

b. We accepteren het axioma

A6. *De projecties van gelijke en evenwijdige lijnstukken op een rechte lijn zijn gelijk.*

Kiest u maar. Als ik me realiseer, dat ons doel is het afleiden van de eigenschappen van de ruimte met behulp van lineaire algebra en dat we plausibel willen maken, dat dit geoorloofd is, dan is voor mij de keus niet moeilijk.

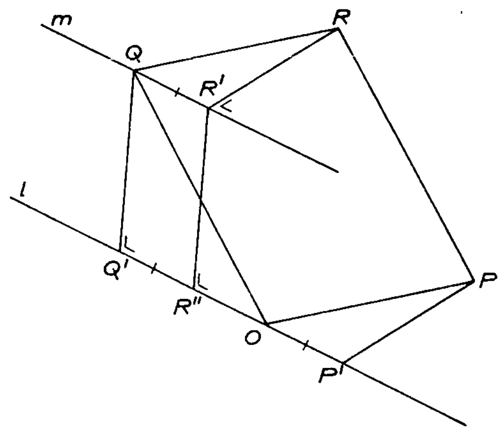


Fig. 3

Opmerking. Wie graag een soort zuinigheid betracht bij de keuze van de axioma's, kan A6 vervangen door

A6'. *De projectie van het midden van een lijnstuk PQ op een lijn l is het midden van de projectie van PQ op l.*

A6' is een bijzonder geval van A6. Zonder veel moeite is A6 uit A6' afleidbaar.

BOEKBESPREKING

M. F. Willerding en R. A. Hayward, *Mathematics: The alphabet of science*, John Wiley & Son Ltd., Chichester, 1968, 285 blz. 62/–.

Voor degenen, die zich in de wiskunde interesseren en geen bijzondere wiskunde-opleiding genoten hebben, een alleraardigst boek. Een tiental onderwerpen (logica, getallenleer, congruenties, Pythagorastheorema, groepen, ringen en lichamen, waarschijnlijkheid, statistiek, computers en computertaal, matrices, finite meetkunde) zoals men ziet van verschillend ,,allooi" wekken belangstelling.

Een uitvoerige antwoordlijst (20 blz.) op de gestelde meestal eenvoudige problemen, zal de bestudering veraangenamen.

Een boek dat m.i. uitstekende diensten kan doen in de schoolbibliotheek.

Burgers

±

door

Drs. L. van den Brom
Amsterdam

Het eerste vraagstuk voor het eindexamen Gymnasium en HBS 1968 *Goniometrie en Analytische Meetkunde:*

XOY is een rechthoekig assenstelsel.
Gegegeven zijn de ellips E met vergelijking $4x^2 + 9y^2 = 36$ en de hyperbool H met vergelijking $x^2 - 4y^2 = 4$.
a. Stel de vergelijking op van elke raaklijn aan E, die evenwijdig is aan een asymptoot van H.
b. Bewijs dat E en H elkaar loodrecht snijden.

Onderdeel *b* van dat vraagstuk vormt de aanleiding tot dit opstel.

(A) De hoek die twee krommen met elkaar maken in een snijpunt is de hoek tussen de raaklijnen aan de krommen in dat snijpunt. Zo men spreekt over loodrecht snijden zonder meer, dan zal men wel op het oog hebben dat de krommen elkaar in ieder der snijpunten onder een rechte hoek snijden.

Allereerst dient men dus de snijpunten van E en H te bepalen. De oplossing van $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$ naar x^2 en y^2 is: $x^2 = \frac{36}{5}$ en $y^2 = \frac{4}{5}$. De snijpunten kunnen opgegeven worden als:

$$\left(\pm \frac{6}{\sqrt{5}},\ \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Uit het verband is duidelijk dat de twee $\pm$ - tekens onafhankelijk van elkaar gevarieerd moeten worden. Men komt echter in de literatuur wel tegen het gebruik, in één verband, van twee of meer $\pm$ - tekens; waarbij uit de tekst blijkt dat het niet de bedoeling is onafhankelijk $+$ of $-$ te kiezen. Om deze onduidelijkheid te vermijden kan men beter met twee-waardige parameters k, l, m, etc., met $k^2 = 1$, $l^2 = 1$, $m^2 = 1$, etc., werken dan met $\pm$. Het al of niet onafhankelijk zijn kan men dan aangeven door al of niet een andere letter te gebruiken.

Met deze suggestie kunnen we onze snijpunten dan noteren als:

$$\left(\frac{6k}{\sqrt{5}},\ \frac{2l}{\sqrt{5}}\right) \text{ met } k^2 = 1,\ l^2 = 1.$$

De raaklijnen in $\left(\frac{6k}{\sqrt{5}}, \frac{2l}{\sqrt{5}}\right)$ aan resp. E en H hebben tot vergelijkingen:

$$\frac{48k}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{6k}{\sqrt{5}}\right) + \frac{36l}{\sqrt{5}}\left(y - \frac{2l}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$\text{en } \frac{12k}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{6k}{\sqrt{5}}\right) - \frac{16l}{\sqrt{5}}\left(y - \frac{2l}{\sqrt{5}}\right) = 0 \text{ [1]}$$

Eenvoudiger geschreven:

$$4kx + 3ly = 6\sqrt{5} \text{ en}$$
$$3kx - 4ly = 2\sqrt{5}.$$

Het cosinus-produkt van de normaalvectoren van deze twee lijnen levert: $12k^2 - 12l^2 = 0$. De raaklijnen aan E en H in ieder van de vier snijpunten staan dus loodrecht op elkaar.

Dat een kandidaat van inzicht blijk geeft als hij met verwijzing naar de symmetrie t.o.v. x- en y-as dat $\pm$ – gedoe vermijdt, zal iedere leraar beamen. (De normen voor de HBS: *het bewijs behoeft slechts voor één snijpunt geleverd te worden*, lieten bij dit onderdeel geen ruimte, om het al of niet bezitten van zulk een inzicht in het cijfer te verwerken.)

De door mij gedane suggestie, om voor $\pm$ een twee-waardige parameter k, met $k^2 = 1$, in te voeren, is allerminst origineel. Voor het gelijktijdig aangeven van de n complexe n^e éénheidswortels is het gebruikelijk te werken met een n-waardige parameter k met $k^n = 1$. (Zie bijv. Inleiding in de Mathesis van Dr. E. M. Bruins, op blz. 201 wordt bij het uitwerken van een voorbeeld gebruik gemaakt van een „k" met $k^3 = 1$). Merkwaardiger wijze denkt men bij $n = 2$ zelden aan deze mogelijkheid. Zijn wij zó zeer geconditioneerd door de wortelformule van de vierkantsvergelijking?

Met $k^2 = 1$, *is* $ax^2 + 2bx + c = 0$ *gelijkwaardig met*

$$x = \frac{-b + k\sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

zal wel nooit ingang vinden bij het VO. Maar mocht men ooit de wortelformule in die gedaante gaan hanteren, dan dient men er wel aan te denken dat de leerling niet, op twee of meer plaatsen waar een onafhankelijke parameter nodig is, dezelfde letter gebruikt. Als

---

[1] Afgeleid met $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_1, y_1)}(y - y_1) = 0$, zie mijn „Als $l_1 \perp l_2$, dan $m_1 m_2 = -1$?" (Euclides **44**, blz. 257).

men die fout begaat is men nog verder van huis, want bij de niet ondubbelzinnige $\pm$ - notatie gaat men in ieder geval nog na wat de bedoeling is.

(B) Een ander punt dat ik naar aanleiding van het geciteerde vraagstuk wil aansnijden is het volgende:

Mij zijn bewijzen voor *b* onder ogen gekomen die ongeveer aldus verliepen: Uit de vergelijkingen van E en H werd eerst y' bepaald.

Uit E: $\quad 8x + 18yy' = 0$ of $y' = -\dfrac{4x}{9y}$,

uit H: $\quad 2x - 8yy' = 0$ of $y' = \dfrac{x}{4y}$.

Men moet (0, 0) hierbij wel uitzonderen!

Daarna werd gesteld: $\left(-\dfrac{4x}{9y}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{4y}\right) = -1$ of

(1) $\quad x^2 - 9y^2 = 0$, gecombineerd met

(E) $\quad 4x^2 + 9y^2 = 36$ en

(H) $\quad x^2 - 4y^2 = 4$

Men leverde vervolgens het bewijs door te laten zien dat de oplossingen van (E) en (H) aan (1) voldoen.

Principieel is geen bezwaar te maken tegen zo'n bewijs. Maar begrijpt de leerling wel wat hij doet? Eerst werden de richtingsvelden opgesteld van de stelsels krommen $4x^2 + 9y^2 = C_1$ en $x^2 - 4y^2 = C_2$, waartoe resp. E en H behoren. Dan werd de vergelijking (1) van de verzameling punten waarin de richtingen loodrecht op elkaar staan opgesteld. En tot slot toonde men aan dat de snijpunten van E en H tot die laatste verzameling behoren.

Ik heb echter ook varianten gezien. Uit (1) en (E) liet men volgen $5y^2 = 4$, ook (1) en (H) leverde $5y^2 = 4$, en dan laconiek q.e.d. Wat de betreffende kandidaat gedaan zou hebben als strikvraagsgewijs voor E $4x^2 + 9y^2 = -36$ en voor H $x^2 - 4y^2 = -4$ was opgegeven, laat zich slechts raden.

Het geval was door mij hier niet vermeld als ik niet in en leerboek voor de analytische meetkunde het volgende uitgewerkte voorbeeld had aangetroffen:

„Bewijs dat de ellips $2x^2 + y^2 = a^2$ en de parabool $y^2 = 2px$ elkaar loodrecht snijden."

We rekenen niet eerst de coördinaten van de snijpunten uit (want deze komen „lelijk" uit), maar doen als volgt. Stel dat het punt $S(x_1, y_1)$ één van de snijpunten is, dan geldt $2x_1^2 + y_1^2 = a^2$ en $y_1^2 = 2px_1$. De vergelijking van de raaklijn in S aan de ellips is

$2x_1 x + y_1 y = a^2$, de richtingscoefficiënt van deze raaklijn is dus $-\frac{2x_1}{y_1}$. De vergelijking van de raaklijn in S aan de parabool is $y_1 y = px + px_1$, de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is dus $\frac{p}{y_1}$. We krijgen nu:

$$m_1 m_2 = -\frac{2x_1}{y_1} \cdot \frac{p}{y_1} = -\frac{2px_1}{y_1{}^2} = -\frac{2px_1}{2px_1} = -1$$

en hieruit volgt dat de ellips en de parabool elkaar loodrecht snijden."

Stel dat het punt $S(x_1, y_1)$ één van de snijpunten is, . . .

Dat niets over de symmetrie t.o.v. de x-as wordt opgemerkt is niet het ergste, maar bestaan *reële* snijpunten? Voor $a = 0$ kan men hetzelfde verhaal afdraaien, en eveneens als men in de opgave a^2 vervangt door $-a^2$.

Dit bewijs(?) steekt wel schril af tegen de zorgvuldigheid die men de leerlingen bij de vierkantsvergelijkingen laat betrachten. De bestaansvoorwaarde $D \geqq 0$ voor reële wortels, wordt zelden op het examen vergeten.

Laat men bij het begrip hoek tussen twee krommen de leerlingen toch allereerst de snijpunten bepalen, en daarna de raaklijnen in die snijpunten etc. Dat sluit zonder trucjes rechtstreeks bij de definitie aan. (Opgaven die lelijk uitkomen kan men vermijden.)

(C) Ik vraag mij nog af, of ergens in Nederland op 17 april 1968, een kandidaat nog opgemerkt heeft dat de ellips E en de hyperbool H confocaal zijn, en als zodanig vier reële snijpunten bezitten. Dat verder de raaklijn aan de ellips buitenbissectrice is van de driehoek op de voerstralen naar het raakpunt, bij de hyperbool binnenbissectrice. En dat de loodrechte stand van de raaklijnen in een snijpunt van E en H, dan volgt uit de loodrechte stand van binnen- en buitenbissectrice.

Ongeveer 20 jaar geleden schreef Prof. Dr. O. Bottema over de afschaffing van de B.M. aan Dr. Joh. H. Wansink (Euclides 24, 1948/49 blz. 307):

„Ik heb de indruk, dat de meeste van mijn wiskunde-collega's hier, zo niet alle, een afschaffing of vermindering van het vak op de H.B.S. zeer zouden betreuren. Persoonlijk zou ik dat zeker en voor een vervanging door Analytische Meetkunde zou ik weinig voelen. Er is daar een groot gevaar (dat wij hier bij de propaedeuse ook ervaren), dat men door de berekeningen afgeleid wordt van het begrip en het natuurlijk meetkundig inzicht."

WIJ ZIJN NIET ZO ZUIVER IN DE LEER!

door

Drs. L. VAN DEN BROM

Amsterdam

In de 43e jaargang van Euclides, blz. 17, werd aandacht besteed aan de regel, tevens definitie van het wortelteken:
Onder de voorwaarde $a \geqq 0 : \sqrt{a} = b$ *gelijkwaardig met* $a = b^2$ *en* $b \geqq 0$ (a en b reëel). Men kwam daar tot de conclusie dat de voorwaarde $a \geqq 0$ overbodig was. Die conclusie werd door mij weerlegd in mijn opstel „Gelijkwaardig $\Leftrightarrow$ Ekwivalent?" (Euclides 44, blz. 130) In dit opstel zullen we onze aandacht richten op de voorwaarde $b \geqq 0$ en wel bij het gebruik van genoemde regel in de *analytische meetkunde*, speciaal bij de cirkelvergelijking. Hiervoor werden door mij dezelfde leerboeken geraadpleegd als in mijn "Als $l_1 \perp l_2$, dan $m_1 m_2 = -1$?" (Euclides 44, blz. 257). De daar gebruikte letteraanduiding voor de verschillende schoolboeken a.m. zal ook nu gevolgd worden.

In (BKS), (K), (L), (S_1), (S_2), (V) en (Wa) wordt de afstand d van twee punten, $P_1(x_1, y_1)$ en $P_2(x_2, y_2)$, geïntroduceerd met de formule $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d$. In (H), een werkboek, wordt dezelfde formule middels een vraagstuk ingevoerd. Van die formule uitgaande en gebruikmakende van de regel „Onder de voorwaarde $a \geqq 0$: $\sqrt{a} = b$ gelijkwaardig met $a = b^2$ en $b \geqq 0$", moet men dan voor de vergelijking van de cirkel met middelpunt (p, q) en straal r komen tot: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ *en* $r \geqq 0$.

Geen van de geraadpleegde boeken vermeldt bij de vergelijking van de cirkel de voorwaarde $r \geqq 0$. [1])

In (A), (DH) en Wij) wordt niet de afstand d van twee punten ingevoerd, maar het kwadraat van die afstand: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2$. In die boeken is daarmee een tweewaardige afstand geïntroduceerd, want $d \geqq 0$ wordt niet gesteld.

De eerste indruk na het lezen van het bovenstaande zal wel zijn: *Spijkers op formeel water zoeken.* Immers de vergelijkingen $x^2 + y^2 = (+1)^2$ en $x^2 + y^2 = (-1)^2$ stellen beide de cirkel met straal 1

[1]) In (L) wordt op blz. 30 tussen haakjes opgemerkt *waarbij r positief is,* maar die opmerking wordt niet herhaald of gebruikt.

om (0, 0) voor. Bij getalvoorbeelden wordt de omissie $r \geqq 0$ echter niet gevoeld. De laatste twee vergelijkingen zijn te reduceren tot éénzelfde $x^2 + y^2 = 1$. De moeite die men doet in de algebra om de reële wortel éénwaardig te houden, door in genoemde regel $b \geqq 0$ te stellen, is voor de analytische meetkunde kennelijk vergeefs. Fraai is het niet, als niet aan de eis der één-één-duidigheid tussen de meetkundige dingen en zekere uitdrukkingen over het lichaam der reële getallen voldaan wordt. (Dat een lijn of een kromme oneindig vele vergelijkingen bezit, die onderling een factor ongelijk nul verschillen, kan ondervangen worden door geschikte normeringsafspraken.)

Met vraagstukken waarin men r als parameter laat optreden wordt het ernst. Dat bleek bij het eindexamen VHMO 1967. Het tweede vraagstuk Goniometrie en Analytische Meetkunde luidde toen:

XOY is een rechthoekig assenstelsel.
Gegeven zijn de punten $A(4, 0)$ en $B(0, 2\lambda)$, waarbij $\lambda \neq 0$.
Van drie cirkels C_1, C_2 en C_3 is gegeven:
C_1 gaat door A en raakt de Y-as in O;
C_2 gaat door B en raakt de X-as in O;
C_3 heeft middelpunt O en straal λ.
Elk tweetal van deze cirkels heeft een machtlijn.

a. Bewijs dat de drie machtlijnen door één punt K gaan en bepaal vervolgens de verzameling van de punten K als λ veranderlijk is.
b. Voor welke waarden van λ ligt K binnen de cirkels C_1, C_2 en C_3?

In de normen voor de HBS werd later bij dat vraagstuk vermeld:
N.B. Indien in dit vraagstuk $\lambda < 0$ niet is uitgesloten, niets aftrekken.

Als men uitgaat van $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ *en* $r \geqq 0$, als analytische voorstelling van de cirkel, dan komt men bij de oplossing tot:

$$\begin{array}{lll} \lambda \neq 0: & (C_1) \quad (x-2)^2 + y^2 = 4 & \text{of } x^2 + y^2 - 4x = 0, \\ & \left.\begin{array}{l}(C_2)\ \lambda > 0: x^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 \\ \quad\ \ \lambda < 0: x^2 + (y-\lambda)^2 = (-\lambda)^2\end{array}\right\} & \text{of } x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0, \\ & (C_3)\ \lambda > 0: x^2 + y^2 = \lambda^2 & \end{array}$$

De voorwaarde $\lambda > 0$ bij (C_3) beperkt nu de parameter in het hele vraagstuk tot positieve waarden.

Als men bij de algemene cirkelvergelijking $r \geqq 0$ weglaat, zoals in de leerboeken, dan heeft men bij formele toepassing van die vergelijking, in het bovenstaande vraagstuk, geen argument om zich tot $\lambda > 0$ te beperken. Dan slechts $\lambda \neq 0$ vanwege de opgave.

De oplossing van het vraagstuk zullen we laten rusten, omdat zich daarbij geen interessante bijzonderheden voordoen.

Terzijde: Natuurlijk dient men ook op andere plaatsen in de analytische meetkunde, waar men kwadraten in de coëfficiënten gebruikt, beperkingen te stellen opdat één-één-duidigheid gegarandeerd is. Bijv. de standaardvergelijking van de ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0.$$

Ik kan mij voorstellen dat men mij nu tegenwerpt, dat in de middelbare school het niet mogelijk is zo'n grote precisie te eisen, als ik kennelijk voorsta. Mijn antwoord zou daarop zijn dat mijn kritiek zich in de eerste plaats richt op de schoolboeken. Mij is voldoende bekend, ook uit eigen ervaring, dat men slechts een enkele keer een vraagstuk analytische meetkunde tot in alle details in de klas bespreekt, meestal richt men zich op de kern van de oplossing om te voorkomen dat het onderwijs in dorheid ten onder gaat. De leerboeken echter, moeten wat de theorie betreft uiterst precies en correct gesteld zijn. De leraar kan dan wel bepalen hoeveel water hij *zijn* leerlingen in hun wijn toestaat. Men moet daarbij wel bedenken dat die leerlingen, die later programma's voor computers moeten schrijven, zeker gebaat zijn met een wiskundeopleiding waarin men hoge eisen stelt aan precisie en correcte formulering.

Ook geloof ik dat juist een grote consequentie in het wiskundeonderwijs belangrijk kan bijdragen tot de begrijpbaarheid daarvan. Het is toch allesbehalve consequent als $\sqrt{a}$ gedefinieerd wordt middels: *Onder de voorwaarde* $a \geqq 0$: $\sqrt{a} = b$ *gelijkwaardig met* $a = b^2$ *en* $b \geqq 0$, dat dan bij de toepassing op de cirkelvergelijking $b \geqq 0$ maar wegvalt. En aan de andere kant weer, wordt het een examen-kandidaat aangerekend als hij de verzameling met vergelijking $\sqrt{x} = y$ in het coördinatenvlak tekent als de hele parabool.

Nu de a.m. onder het nieuwe programma een drastische beperking zal ondergaan, ten gunste van de vectoriële behandeling van de meetkunde, annex een beperkte inleiding tot de lineaire algebra, wil ik nog het volgende opmerken:

De analytische meetkunde is een prachtig vak om de leerlingen een voorbeeld te geven hoe men een wetenschap kan aritmetiseren. Dat is voor de meetkunde in principe eenvoudiger als voor bijv. de natuurkunde, de scheikunde of de economie, omdat men met de meetkunde binnen de wiskunde blijft.

Ook kan men de leerlingen het gevoel bijbrengen dat men werkt in een model van de meetkunde middels uitdrukkingen over het lichaam der reële getallen. (Natuurlijk zonder daar expliciet over te praten.) Men hoeft, om dat te bereiken, zeker niet de begrippen pool en poollijn bij de kegelsneden in te voeren. Liever niet zelfs! Maar men dient wel te zorgen dat men de leerlingen voldoende laat oefenen in dat aritmetiseren van de meetkunde, door ook vraagstukken te laten maken die in zuivere meetkundetaal gesteld zijn, zoals bewijsvraagstukken. In het algemeen oefent men nu slechts één bepaalde schakel: *het rekenwerk*. Ook de interpretatie van dat rekenwerk komt zelden aan bod.

Het rekenwerk alleen zal zeker niet bijdragen tot een verdieping van het meetkundig inzicht. Bij de huidige traditie van het onderwijs in de analytische meetkunde, ontgaat het de leerlingen dat dat vak ook een verrijking aan de meetkunde geeft. Geheel nieuwe begrippen komen uit de aritmetisering te voorschijn, zoals de graad van een kromme. Andere begrippen worden nader gepreciseerd, zoal de raaklijn aan een kromme.

De beperking van het aantal onderwerpen dat, in de nabije toekomst, behandeld moet worden bij de analytische meetkunde, schept de mogelijkheid dat men meer aandacht kan besteden aan die modellering van de meetkunde in de algebra. Ik zie echter ook een dreiging, en wel in de meetkunde met vectoren. Het gevaar is niet denkbeeldig dat alles door elkaar gaat lopen bij de leerlingen, als nog een derde model, de vectorruimte, geïntroduceerd wordt. Indien men echter in de aanvang de nodige afscheiding weet aan te brengen en aan het eind tot een synthese weet te komen, dan *kan* een grote winst geboekt worden. Een winst die niet zal voortkomen uit een slechts formele ambtelijke wijziging van het leerplan.

NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

De penningmeester maakt de leden er op attent dat het nu reeds mogelijk is de contributie voor het verenigingsjaar 1969—1970 ten bedrage van *f* 9,00 (inclusief abonnement Euclides) te storten of over te schrijven naar postrekening 143917 ten name van de Vereniging van wiskundeleraren te Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen betalen een contributie van *f* 3,50.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXXV. De gemengde oppervlakte van twee driehoeken

1. Kan men twee gegeven driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ in hun vlak zodanig ten opzichte van elkaar plaatsen, dat de rechten A_1A_2, B_1B_2 en C_1C_2 onderling evenwijdig zijn?

We beschouwen $A_1B_1C_1$ als vast en geven de tweede driehoek alle mogelijke standen; de verzameling van deze laatste kan door *drie* parameters worden beschreven. De evenwijdigheid der drie rechten voert tot *twee* onafhankelijke voorwaarden. Hoewel er dus ruimte genoeg schijnt voor een positief antwoord, is het aan de andere kant zó, dat een oplossing onmiddellijk oneindig vele met zich voert, want een verschuiving van $A_2B_2C_2$ in de richting der drie evenwijdige lijnen geeft hem opnieuw een stand die aan de vraag voldoet. Wij doen dus het beste $A_2B_2C_2$ zodanig verplaatst te denken, dat A_2 met A_1 samenvalt. Alleen een wenteling om A_2 over een hoek φ is dan nog mogelijk, terwijl ook slechts aan één conditie, de evenwijdigheid namelijk van B_1B_2 en C_1C_2 moet worden voldaan. De vraag schijnt dus redelijk. Het lijkt niet waarschijnlijk dat zij altijd bevestigend zal worden beantwoord: als de zijden a_1, b_1, c_1 van $A_1B_1C_1$ elk groot zijn in vergelijking met de overeenkomstige zijden a_2, b_2, c_2 van $A_2B_2C_2$ kan men zich een stand als de gevraagde niet indenken. Wij trachten nodige en voldoende voorwaarden te vinden, waaraan a_i, b_i en c_i moeten voldoen opdat er een oplossing is.

2. Wij voeren een rechthoekig assenstelsel OXY in, waarbij O met A_1 en A_2 samenvalt. De punten B_1, C_1, B_2 en C_2 hebben de coördinaten (u_1, v_1), (u_2, v_2), (p_1, q_1) en (p_2, q_2). Bij een rotatie om O over een hoek φ gaat een punt $P(x, y)$ over in het punt $P'(x', y')$, zodanig dat

$$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi, \quad y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi. \tag{1}$$

De richtingscoëfficiënten van B_1B_2' en C_1C_2' moeten gelijk zijn. Daaruit volgt

$$\frac{p_1 \sin\varphi + q_1 \cos\varphi - v_1}{p_1 \cos\varphi - q_1 \sin\varphi - u_1} = \frac{p_2 \sin\varphi + q_2 \cos\varphi - v_2}{p_2 \cos\varphi - q_2 \sin\varphi - u_2}, \tag{2}$$

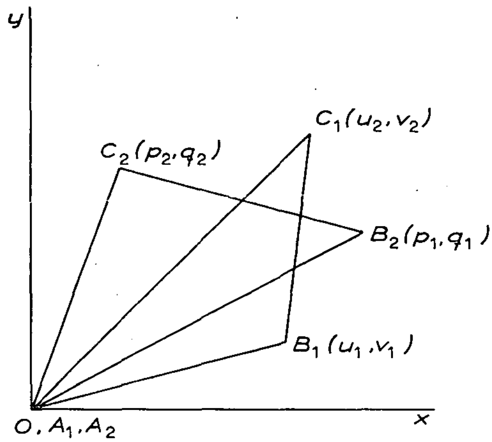


Fig. 1.

wat voor φ de vergelijking oplevert

$$P\cos\varphi + Q\sin\varphi + R = 0, \tag{3}$$

waarbij

$$\begin{aligned} P &= q_2u_1 - q_1u_2 - p_2v_1 + p_1v_2 \\ Q &= p_2u_1 - p_1u_2 + q_2v_1 - q_1v_2 \\ R &= u_2v_1 - u_1v_2 + p_2q_1 - p_1q_2. \end{aligned} \tag{4}$$

De vergelijking (2) heeft dan en alleen dan (twee) reële wortels als

$$P^2 + Q^2 - R^2 \geqq 0. \tag{5}$$

Na substitutie van (4) komt er

$$\begin{aligned} &(p_1^2 + q_1^2)(u_2^2 + v_2^2) + (p_2^2 + q_2^2)(u_1^2 + v_1^2) - 2(u_1u_2 + v_1v_2) \\ &(p_1p_2 + q_1q_2) - (u_2v_1 - u_1v_2)^2 - (p_2q_1 - p_1q_2)^2 \geqq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Nu is

$$p_1^2 + q_1^2 = c_2^2,\ u_2^2 + v_2^2 = b_1^2,\ p_2^2 + q_2^2 = b_2^2,\ u_1^2 + v_1^2 = c_1^2.$$

Voorts is $u_1u_2 + v_1v_2$ het inwendig produkt van de vectoren OB_1 en OC_1 en dus gelijk aan $b_1c_1\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}(-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$ en evenzo $p_1p_2 + q_1q_2 = \frac{1}{2}(-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$; tenslotte is $u_2v_1 - u_1v_2 = 2O_1$, $p_2q_1 - p_1q_2 = 2O_2$, waarbij O_i de oppervlakte van driehoek $A_iB_iC_i$ voorstelt. Voor (6) krijgen wij dus

$$2b_1^2c_2^2 + 2b_2^2c_1^2 - (-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 8(O_1^2 + O_2^2) \geqq 0, \tag{7}$$

of wel

$$- a_1^2a_2^2 - b_1^2b_2^2 - c_1^2c_2^2 + (b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2) + (c_1^2a_2^2 + c_2^2a_1^2) \\ + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2) - 8(O_1^2 + O_2^2) \geqq 0, \tag{8}$$

en daar

$$16O_i^2 = - a_i^4 - b_i^4 - c_i^4 + 2b_i^2c_i^2 + 2c_i^2a_i^2 + 2a_i^2b_i^2, \tag{9}$$

komt er

$$- (a_1^2 - a_2^2)^2 - (b_1^2 - b_2^2)^2 - (c_1^2 - c_2^2)^2 + 2(b_1^2 - b_2^2)(c_1^2 - c_2^2) \\ + 2(c_1^2 - c_2^2)(a_1^2 - a_2^2) + 2(a_1^2 - a_2^2)(b_1^2 - b_2^2) \leqq 0. \tag{10}$$

Wij onderscheiden twee gevallen.
Zij elke zijde van de ene driehoek groter dan de overeenkomstige zijde van de andere, dus b.v. $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$, dan is het linkerlid van (10) van dezelfde bouw als (9) en dus evenredig met het kwadraat van de oppervlakte van een driehoek met zijden $\sqrt{(a_1^2 - a_2^2)}$, $\sqrt{(b_1^2 - b_2^2)}$, $\sqrt{(c_1^2 - c_2^2)}$. De ongelijkheid (10) drukt uit dat een dergelijke driehoek niet reëel is. In alle overige gevallen geldt, behoudens verwisseling van driehoeken of zijden, $a_1 \geqq a_2$, $b_1 \geqq b_2$, $c_1 \leqq c_2$. Als $a_1^2 - a_2^2 = l_1^2 \geqq 0$, $b_1^2 - b_2^2 = l_2^2 \geqq 0$, $c_2^2 - c_1^2 = l_3^2 \geqq 0$, dan is het linkerlid van (10)

$$- (l_1^2 - l_2^2)^2 - l_3^2(2l_1^2 + 2l_2^2 + l_3^2) = - \{(l_1 + l_2)^2 + l_3^2\}\{(l_1 - l_2)^2 + l_3^2\}$$

en aan de ongelijkheid is altijd voldaan.

De conclusie is: men kan de driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ zo plaatsen, dat A_1A_2, B_1B_2 en C_1C_2 evenwijdig zijn, *tenzij* elke zijde van de ene groter is dan de overeenkomstige zijde van de ander (zeg $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$) en tevens de drie grootheden $\sqrt{(a_1^2 - a_2^2)}$, $\sqrt{(b_1^2 - b_2^2)}$, $\sqrt{(c_1^2 - c_2^2)}$ aan de driehoeksongelijkheid voldoen, d.w.z. dat elk kleiner is dan de som van de beide andere.

3. Men zou de uitdrukking, die in (8) voorkomt

$$- a_1^2a_2^2 - b_1^2b_2^2 - c_1^2c_2^2 + (b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2) + (c_1^2a_2^2 + c_2^2a_1^2) \\ + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2) \tag{11}$$

met $16O_{12}^2$ kunnen aanduiden en $O_{12} = O_{21}$ de *gemengde oppervlakte* der beide driehoeken kunnen noemen. Men heeft dan, zoals uit (7) blijkt

$$8O_{12}^2 = b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - 2b_1c_2b_2c_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \tag{12}$$

en dus (daar $|\cos \alpha_1 \cos \alpha_2| < 1$), $O_{12}^2 > 0$; de gemengde oppervlakte van twee driehoeken is reëel. Blijkbaar is $O_{11} = O_1$, $O_{22} = O_2$.

Men heeft dan

$$8(O_{12}^2 - O_{11}O_{22}) = b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - 2b_1c_2b_2c_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \\ - 2b_1c_1b_2c_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

$$= b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - 2b_1c_2b_2c_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

waaruit volgt

$$O_{12}^2 \geqq O_{11}\,O_{22}, \tag{13}$$

waarbij het gelijkteken alleen geldt als de driehoeken gelijkvormig zijn. Voor de conditie (8), die over de mogelijkheid van de door ons beschouwde plaatsing beslist, kan men nu schrijven

$$2O_{12}^2 \geqq O_{11}^2 + O_{22}^2. \tag{14}$$

De gemengde oppervlakte is altijd minstens gelijk aan het meetkundig gemiddelde van de oppervlakte der driehoeken. De genoemde stand is mogelijk als het kwadraat der gemengde oppervlakte groter is dan het rekenkundig gemiddelde van de kwadraten der gegeven oppervlakten. Daar $O_{11}^2 + O_{22}^2 \geqq 2O_{11}O_{22}$, is dat inderdaad een verder gaande eis.

4. Zij (fig. 2) $A_2B_2C_2$ de loodrechte projectie van $A_1B_1C_1$ op een vlak V. Als φ en φ' de scherpe hoeken zijn, die A_1B_1 en A_1C_1 met V maken, dan is

$\cos\varphi = \dfrac{c_2}{c_1}$, $\cos\varphi' = \dfrac{b_2}{b_1}$, $A_1A_2 - B_1B_2 = c_1 \sin\varphi_1$ $A_1A_2 - C_1C_2 = b_1 \sin\varphi'$, $B_1B_2 - C_1C_2 = b_1 \sin\varphi' - c_1 \sin\varphi$,

en uit

$$(B_1B_2 - C_1C_2)^2 = a_1^2 - a_2^2$$

volgt dan, na eliminatie van φ en φ'

$$-(a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) + (c_1^2 - c_2^2) = 2\sqrt{(b_1^2 - b_2^2)(c_1^2 - c_2^2)}, \tag{15}$$

of na kwadraten en herleiden

$$2O_{12}^2 = O_{11}^2 + O_{22}^2, \tag{16}$$

een betrekking die derhalve voor twee driehoeken gelden moet, waarvan de ene een orthogonale projectie is van de andere. Omgekeerd vormen $a_1 \geqq a_2$, $b_1 \geqq b_2$, $c_1 \geqq c_2$ samen met (16) een stel voldoende voorwaarden, opdat er een orthogonale projectie van $A_1B_1C_1$ bestaat, die congruent is met $A_2B_2C_2$.

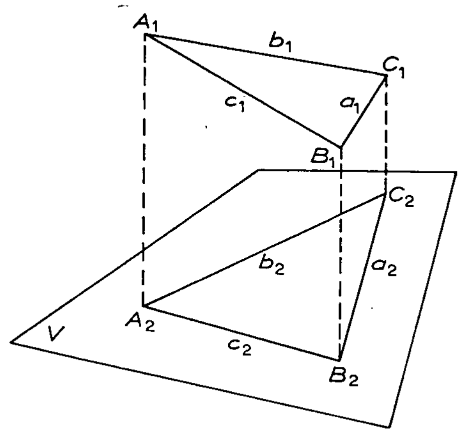


Fig. 2.

Om dat in te zien bouwen wij fig. 2 van uit $A_2B_2C_2$ op en laten A_1 met A_2 samenvallen. Dan is $\cos\varphi = c_2/c_1$, $\cos\varphi' = b_2/b_1$, $B_2B_1 = \pm c_1 \sin\varphi$, $C_2C_1 = \pm\, b_1 \sin\varphi'$. De sluitingsvoorwaarde $B_1C_1 = a$ voert tot

$$a_1^2 = (c_1 \sin\varphi \mp b_1 \sin\varphi')^2 + a_2^2,$$

waarvan de uitwerking (15) oplevert.

5. Wij zullen ten slotte een ongelijkheid afleiden voor de gemengde oppervlakte van een driehoek $A_1B_1C_1$ en zijn scheve parallelprojectie $A_2B_2C_2$ op een tafereel, of wat hetzelfde is, voor die van twee driehoeken die doorsneden zijn van een prismatische koker (fig. 3).

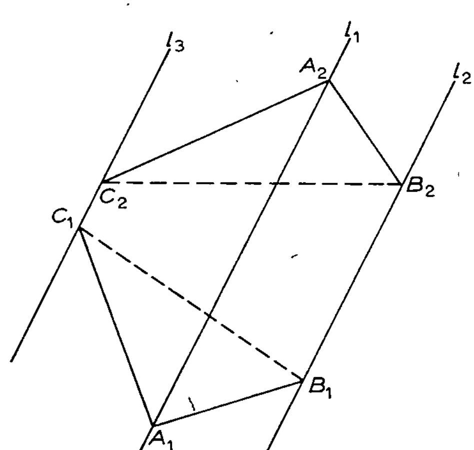


Fig. 3.

Zonder bezwaar kunnen wij A_1 en A_2 laten samenvallen in de oorsprong van een rechthoekig assenstelsel $OXYZ$. Als YOX-vlak nemen wij het vlak V door O en de middens M_2 en M_3 van B_1B_2 en C_1C_2 (fig. 4) en als YOZ het vlak door l_1 loodrecht op XOY. Als $M_2 = (p_2, q_2, O)$, $M_3 = (p_3, q_3, O)$, $M_2B_1 = B_2M_2 = k_2$, $M_3C_1 = C_2M_3 = k_3$ en de hoek tussen OZ en l_1 met ϑ wordt aangegeven hebben wij

$$B_1 = (p_2, q_2 + k_2 \sin\vartheta, k_2 \cos\vartheta), \quad B_2 = (p_2, q_2 - k_2 \sin\vartheta, - k_2 \cos\vartheta),$$
$$C_1 = (p_3, q_3 + k_3 \sin\vartheta, k_3 \cos\vartheta), \quad C_2 = (p_3, q_3 - k_3 \sin\vartheta, - k_3 \cos\vartheta). \tag{17}$$

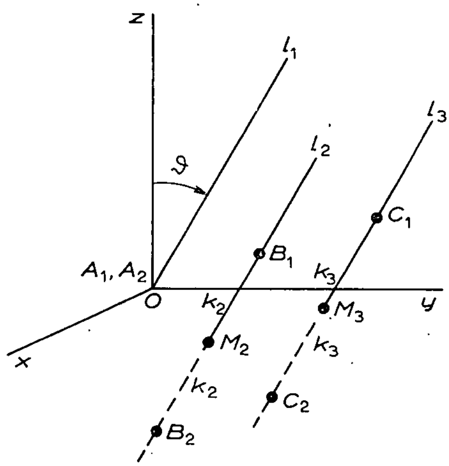


Fig. 4.

Dan is

$$a_1^2 - a_2^2 = B_1C_1^2 - B_2C_2^2 = 4(q_2 - q_3)(k_2 - k_3) \sin\vartheta,$$
$$b_1^2 - b_2^2 = OC_1^2 - OC_2^2 = 4q_3k_3 \sin\vartheta, \; c_1^2 - c_2^2 = 4q_2k_2 \sin\vartheta. \tag{18}$$

Nu blijkt uit (9) en (11)

$$16(O_{11}^2 + O_{22}^2 - 2O_{12}^2) = -(a_1^2 - a_2^2)^2 - (b_1^2 - b_2^2)^2 - (c_1^2 - c_2^2)^2$$
$$+ 2(b_1^2 - b_2^2)(c_1^2 - c_2^2) + 2(c_1^2 - c_2^2)(a_1^2 - a_2^2) + 2(a_1^2 - a_2^2)(b_1^2 - b_2^2), \tag{19}$$

waaruit na substitutie van (18) voor onze driehoeken volgt

$$O_{11}^2 + O_{22}^2 - 2O_{12}^2 = -(q_2k_3 - q_3k_2)^2 \sin^2\vartheta, \tag{20}$$

zodat voor twee driehoeken, die elkaars parallelprojecties zijn, of wel voor twee tussenschotten van een prismatische koker de ongelijkheid

$$2O_{12}^2 \geqq O_{11}^2 + O_{22}^2 \tag{21}$$

bestaat.

De snijlijn s van de vlakken der driehoeken ligt in het middenvlak OXY en heeft zoals gemakkelijk uit (17) volgt de vergelijking $(q_2k_3 - q_3k_2)x + (p_2k_3 - p_3k_2)y = 0$. In (21) geldt, blijkens (20), het gelijkteken als $q_2k_3 - q_3k_2 = 0$ en ook als $\sin\vartheta = 0$. In het eerste geval valt s met OX samen, in het tweede is l_i evenwijdig met de Z-as. In beide gevallen staat s loodrecht op l_i en omgekeerd: als s loodrecht op l_i is, treedt één der beide gevallen in. Wij hebben dus: in (21) geldt het gelijkteken dan en alleen dan, als de snijlijn der twee doorsneden loodrecht staat op de ribben van de koker. In het bijzonder is dit het geval als een der doorsneden loodrecht op l_i staat en wij vinden dan de relatie (16) terug.

BERICHTEN

VAKANTIECURSUS 1969 VAN HET MATHEMATISCH CENTRUM

Zoals gebruikelijk organiseert het Mathematisch Centrum ook dit jaar in augustus een vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden, en wel
te Eindhoven op 12 en 13 augustus en te Amsterdam op 14 en 15 augustus a.s.

Onderwerp: *"Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening"*.

Sprekers: o.a. Prof. dr. J. Hemelrijk (Amsterdam), Prof. dr. J. Th. Runnenburg (Amsterdam), drs. W. Molenaar (Amsterdam).

Tijden: eerste dag 10.30—16.00 uur; tweede dag 10.00—15.30 uur.

Cursusgeld: *f* 5,— (waarin begrepen de kosten van een uit te reiken syllabus).

Lunch: Beide dagen gezamenlijke lunch (deelnemen voor leraren V.H.M.O. kosteloos).

Reiskostenvergoeding: leraren V.H.M.O. krijgen vergoeding op basis treinkosten 2e klasse.

Boekententoonstelling: expositie van leer- en studieboeken.

Aanmelding: vóór 1 augustus a.s. opgeven bij het secretariaat van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O, tel. 020—947272, onder vermelding van school of instituut waaraan men is verbonden, welke cursus (Eindhoven of Amsterdam), wel of niet deelnemen aan lunches.

Betaling: overmaken van cursusgeld ad *f* 5,— bij voorkeur vóór de aanvang van de cursus op postgiro 462890 of gem. giro M.2138 t.n.v. het Mathematisch Centrum, Amsterdam, met vermelding van doel der betaling".

RINGEN MET SLAGEN

door

B. Bokhorst
Rotterdam

Neem een strook papier (b.v. plakband). Maak daarin een halve slag. Druk de strook plat. We krijgen dan iets, dat gelijkt op figuur 1 of op figuur 2. Denken we de einden van de strook aan elkaar geplakt en de ring platgedrukt, dan kan de platgedrukte ring een convexe veelhoekige vorm aannemen. Het aantal vouwen moet dan minstens

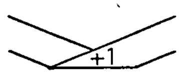


Fig. 1

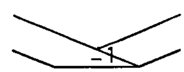


Fig. 2

3 zijn. Doorlopen we de ring tegen de wijzers van de klok en gaan we bij het passeren van een vouw van onder naar boven, (fig. 1) dan geven we aan de halve slag, die in de ring is gekomen, de waarde $+ 1$. Gaan we van boven naar beneden (fig. 2), dan stellen we de waarde $- 1$. Het is duidelijk, dat een halve slag met de waarde $+ 1$ wordt opgeheven door een halve slag met de waarde $- 1$. Wanneer we dus een ring vormen met $2n$ (n is een natuurlijk getal) vouwen, waarvan de totale waarde $2n$ is, dan is dat een ring met $2n$ halve slagen (in dezelfde richting). Telkens, als we een positieve vouw vervangen door een negatieve, daalt het aantal halve slagen met 2. Op deze manier kunnen we ringen maken met $0, 2, 4, \ldots, 2n$ halve slagen. Het aantal halve slagen is gelijk aan de absolute waarde van de som der getallen bij de vouwen. Het teken van de som, als deze ongelijk aan nul is, geeft de richting aan van de halve slagen.

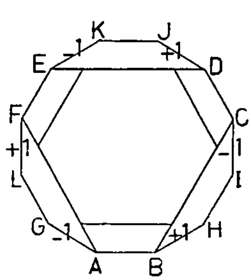


Fig. 3

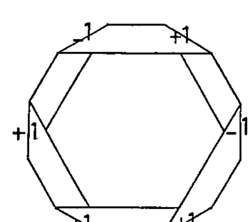


Fig. 4

De figuren 3 tot en met 6 geven een zeshoekige figuur. In fig. 3 is de som van de getallen bij de vouwen 0. Deze figuur stelt dus een ring voor zonder slagen. In figuur 4 is de som 2. Deze stelt een ring voor met 2 halve slagen. In fig. 5 heeft de ring 4 halve slagen en in fig. 6 6 halve slagen. Gaan we terug naar fig. 3. Als we langs de rand van de ring gaan, beginnend bij A en gaande naar B, C, D, E, F en A, dan zien we, dat AB aan de buitenkant van de figuur ligt, BC aan de binnenkant, CD weer aan de buitenkant, enz. Daar er een even aantal lijnstukken gepasseerd is als we éénmaal zijn rondgeweest, komen we weer bij A terug.

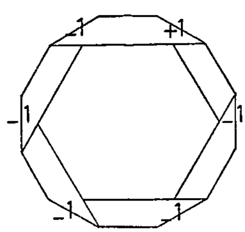


Fig. 5

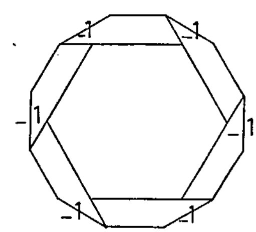


Fig. 6

Het blijkt, dat er een tweede rand is. De ring heeft 2 randen. Hetzelfde verhaal kunnen we ook houden bij de figuren 4, 5 en 6. Ook hier zijn 2 randen. In het algemeen heeft een ring, die kan worden afgebeeld door een $2n$-hoekige figuur 2 randen. We gaan weer terug naar figuur 3. Als we b.v. BHIC aan de bovenkant verven, zal, als we na de vouw gewoon doorverven, ICDJ aan de onderkant geverfd worden. Doorgaande zien we, dat de opvolgende stukken om en om aan de bovenkant of aan de onderkant geverfd worden. Daar het aantal stukken, dat we éénmaal rondgaande verven, even is, komen we weer terug bij de bovenkant van het vlak BHIC. Het blijkt, dat de ring 2 zijvlakken heeft. Dit praatje gaat ook door voor de figuren 4, 5 en 6. In het algemeen zal een ring, die voorgesteld kan worden door een $2n$-hoekige figuur 2 zijvlakken hebben.

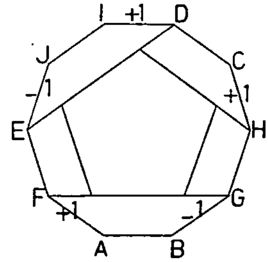


Fig. 7

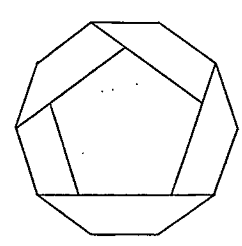


Fig. 8

Als we uitgaan van een $(2n + 1)$ hoekige figuur, dan komen we tot ringen met 1, 3, 5, . . ., $(2n + 1)$ halve slagen. In de figuren 7, 8 en 9 zijn vijfhoekige figuren afgebeeld. In fig. 7 is de som der getallen bij de vouwen 1. Deze figuur stelt dus een ring voor met 1 halve slag. Figuur 8 stelt een ring voor met 3 halve slagen, fig. 9 één met 5 halve slagen. Als we bij deze figuren de rand volgen, te beginnen met AB, dan beginnen we aan de buitenkant van de figuur en dan verder gaat het afwisselend. Na 5 stukken gepasseerd te zijn, komen we niet terug bij A. We moeten dan nog een keer rond. Het blijkt dus, dat hier sprake is van een ring met 1 rand. Gaan we FABG aan de bovenkant verven, dan blijkt, dat we, achterelkaar doorvervende, tweemaal rond moeten gaan om weer bij het bovenvlak van FABG terug te komen. Een ring, die we kunnen voorstellen door een $(2n + 1)$-hoekige figuur heeft ook slechts 1 zijvlak.

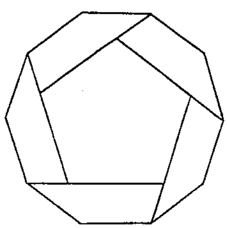


Fig. 9

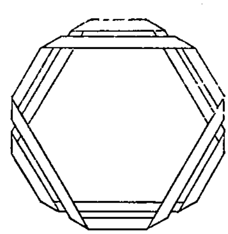


Fig. 10

Nu gaan we de ringen in de lengterichting doorknippen. Als we dat doen bij de ring uit fig. 3 krijgen we 2 ringen, die geheel los van elkaar zijn. (zie fig. 10). Ieder van deze ringen heeft 0 halve slagen. Als we de ring uit figuur 4 doorknippen, krijgen we 2 ringen, zoals afgebeeld in fig. 11. Als we uitgaan van een ring voorgesteld door een $2n$-hoekige figuur, dan krijgen we steeds 2 ringen, ieder met hetzelfde aantal halve slagen als de ring, waarvan we zijn uitgegaan. Wel blijkt, dat de ringen uit de figuren 11, 12 en 13 samenhangen.

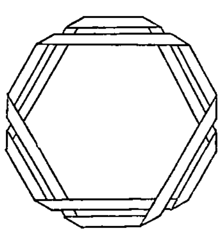


Fig. 11

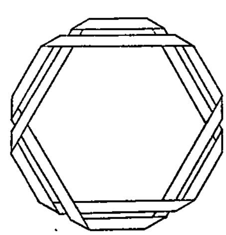


Fig. 12

Als in de ring, waarvan we uitgaan, 2 vouwen met gelijke tekens (b.v. plussen) op elkaar volgen, zal de ene ring van de doorgeknipte ring, van de achterkant van de andere ring overgaan op de voorkant of omgekeerd. In fig. 4, waarvan fig. 11 is afgeleid, staan 3 opeenvolgende plussen. De ene ring in fig. 11 gaat van de achterkant van de andere ring naar de voorkant en dan weer terug naar de achterkant. De ene ring is dus éénmaal om de andere gewonden. Gaan we uit van een andere volgorde van de vouwen, dan krijgen we toch hetzelfde resultaat. Nemen we b.v. deze volgorde van de tekens: $++++--$ dan krijgen we vanwege de 4 opvolgende plussen 3 halve slagen van de ene ring om de andere. De 2 opvolgende minnen geven aanleiding tot 1 halve slag, maar in tegengestelde richting.

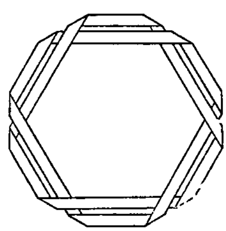


Fig. 13

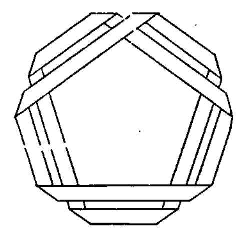


Fig. 14

Het resultaat is toch: $3 - 1 = 2$ halve slagen. Voor de tekens bij fig. 5 kunnen we nemen: $---+--$. Hier staan 5 opvolgende minnen. Dit geeft 4 halve slagen of de ene ring is 2 maal om de andere gewikkeld. In fig. 6 staan de tekens: $------$. Hier staan 6 opvolgende minnen. Dit geeft 6 halve slagen. De ene ring is driemaal om de andere gewikkeld. (fig. 13). We bekijken nu de vijfhoekige figuur 7. Hierin zit één halve slag. Bij doorknippen krijgen we 1 ring (vanwege het oneven aantal vouwen), die bestaat uit 2 windingen (fig. 14). Iedere winding telt evenveel halve slagen als de ring waarvan we zijn uitgegaan. Daar komen nog 2 halve slagen

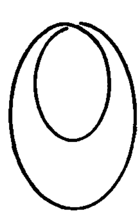


Fig. 15

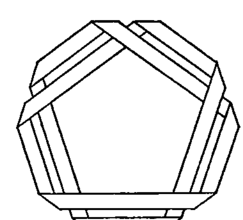


Fig. 16

bij. In fig. 15 is een ring getekend van 2 windingen, ogenschijnlijk zonder slagen. Als we daar een ring van willen maken met 1 wikkeling, draaien we de kleine wikkeling een halve slag om zijn vertikale as. Daardoor komt de buitenkant van de kleine wikkeling aan de binnenkant van de enige ontstane winding te liggen. Dit gebeurt links van de as, maar ook rechts. Een buitenkant naar binnen draaien is hetzelfde als een halve slag leggen. Er komen dus 2 halve slagen bij.

De ontstane slagen hebben dezelfde richting. In figuur 14 is dus een ring ontstaan met $2 + 2 = 4$ halve slagen. Dat in fig. 14 de ene winding één keer van de voorkant naar de achterkant van de andere winding gaat, is geen beletsel voor het uit elkaar halen van de windingen en er 1 winding met 4 halve slagen van te maken.

Uit fig. 8 halen we fig. 16. Deze stelt voor 1 ring met $2 \times 3 + 2 = 8$ halve slagen. De ene winding is 1 hele slag om de andere gewikkeld.

Bij fig. 9 behoort fig. 17. Figuur 9 stelt een ring voor met 5 halve slagen.

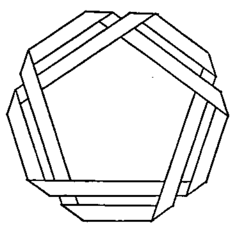


Fig. 17

Figuur 17 is een ring met $2 \times 5 + 2 = 12$ halve slagen. De ene wikkeling is 2 hele slagen om de andere gewikkeld.

BOEKBESPREKING

R. Bens, E. Bouqué, W. Dewilde, F. Smissaert, A. Snauwaert, *Opbouw* 1, Wesmael-Charlier, Tweede uitgave, 1968, XV + 268 blz.

Zoals men weet, is thans in België het nieuwe programma ingevoerd in de zesde klasse (te vergelijken met onze eerste klasse). In Euclides is enkele jaren geleden de eerste uitgave van Opbouw 1 besproken. Dit was nog slechts een experimentele uitgave; nu is het boek bestemd voor lessen, die volgens het officiële nieuwe programma gegeven worden. Voor Nederlandse leraren is het interessant de geboden stof te vergelijken met hetgeen door ons in de brugklas gegeven wordt. Om dit mogelijk te maken volgt hier eerst een summier overzicht van de stof met tussen haakjes het aantal eraan bestede pagina's.

Verzamelingen (52),
beginselen vlakke meetkunde (punt, lijn, evenwijdigheid) (13),
relaties, functies, afbeeldingen, ekwivalentierelaties, orderelaties, partitie (80),
ordening van de rechte lijn, projectie, translatie (18),
gelijkmachtigheid van verzamelingen (14),
het natuurlijk getal (35),
vergelijkingen, kennismaking met gehele en gebroken getallen (31).

Het is op dit ogenblik voor een Nederlands leraar zeer interessant een dergelijk boek onder ogen te krijgen. Vanzelfsprekend gaat men dan vergelijkingen trekken tussen de Belgische methode en de onze. Als essentieel verschil valt in de eerste plaats op, dat men in België begint met de leerlingen de wiskundige taal te laten hanteren. Men oefent grondig in het manipuleren met verzamelingen, relaties, functies, afbeeldingen zonder dat men aan de wiskunde eigenlijk begint. In Nederland beginnen we zo snel mogelijk met wiskunde en leren dan al doende, hoe men de wiskundige taal hanteert. Vandaar dat men in een Nederlands schoolboek het natuurlijk getal b.v. op pag. 10 zal vinden en hier op pag. 168.

Beide methoden hebben natuurlijk voor- en nadelen. Het manipuleren met verzamelingen, relaties, functies en afbeeldingen, voordat men aan de eigenlijke wiskunde begint, is zeker mogelijk. Tal van nuttige en niet te moeilijke opgaven kunnen gemaakt worden. En bij de opbouw van de wiskunde is het gemakkelijk, dat men van meet af aan een ruime terminologie tot zijn beschikking heeft. Toch zou ik niet graag propageren een logische inleiding in de wiskunde te geven van 142 pag. Ik zou meer voelen voor een tweerondensysteem, waardoor b.v. ekwivalentierelaties, antireflexieve en antisymmetrische relaties, gelijkmachtigheid, samenstelling van relaties, verschil van twee verzamelingen e.d. eerst later aan de orde gesteld worden. Natuurlijk zal de praktijk moeten uitwijzen of deze bedenkingen een goede grond hebben of niet.

Als tweede verschil valt mij op de poging de wiskunde van meet af aan zo goed mogelijk te geven. Dit boek staat op een behoorlijk peil en dreigt niet af te glijden naar fröbelen. Dit is in ieder geval een pluspunt voor onze zuiderburen.

In het Belgische programma komt voor „te onderhouden vaardigheden en begrippen". De op de basisschool verkregen technische vaardigheid moet dus onderhouden worden. Bij ons ontbreekt het daar wel eens aan, hetgeen echter ook ligt aan de aard van de vaardigheden, die de basisschool de leerlingen bijbrengt. Wat ik echter in het Belgische programma mis, is een opsomming van de nieuw te verkrijgen vaardigheden. En m.i. is dat wel een gemis. In onze brugklas wordt veel meer gedaan aan algebraïsch rekenwerk dan in België. Ik vraag me af, of de Belgen niet wat al te rigoureus te werk gegaan zijn in het naar voren brengen van het structurele aspect van de wiskunde.

Wie dit boek in handen kan krijgen, raad ik aan het eens goed te bezien. We kunnen er veel nut van hebben bij het bepalen van ons eigen standpunt. Het boek is met veel zorg geschreven, zoals van dit team verwacht kon worden. Veel contact is gezocht met de praktijk, vooral ook in de vraagstukken. De opgaven zijn met bekwame hand samengesteld, zodat ze de leerling inderdaad in staat stellen de theorie goed te gaan begrijpen. Soms zijn ze naar mijn smaak iets te wetenschappelijk voor een beginklas.

Het aantal wekelijkse lesuren in de zesde klas in België is vier.

Tot slot wens ik de schrijvers geluk met het gereedkomen van dit boek. Ik wens het een goede toekomst toe.

P. G. J. Vredenduin

E. Bouqué, *Boole'se algebra's*, Story's wiskundige monografieën 2, Gent, 1968, 98 blz., 160 BF.

De schrijver behandelt in dit werk de samenhang tussen enige fundamentele onderdelen van de moderne wiskunde, nl.:

1. de verzamelingenalgebra, met de bewerkingen doorsnede, vereniging en complement;
2. de distributieve tralie met complementering, met de bewerkingen infimum, supremum en complement;
3. de boole'se algebra, met de bewerkingen $+$, $\cdot$, $'$;
4. de oordeelslogica, met de bewerkingen conjunctie, disjunctie, negatie;
5. de schakelalgebra.

Verzamelingenalgebra is een bijzonder geval van de leer van de distributieve tralie met complementering.

Tussen distributieve tralies met complementering en boole'se algebra bestaat slechts een terminologisch verschil.

De oordeelslogica blijkt via de waarheidstabellen homomorf te zijn met de boole'se twee-elementen algebra.

En ten slotte hangt met dit laatste nauw samen de bruikbaarheid van de diagrammen van Venn voor het bewijzen van stellingen uit de verzamelingenalgebra.

De schakelalgebra geeft een materiële representatie van de boole'se twee-elementen algebra en staat daardoor in direct verband met de oordeelslogica.

De schrijver ziet kans in kort bestek het wezenlijke van al deze onderwerpen uiteen te zetten en de samenhang scherp te belichten. Daarbij stelt hij de boole'se algebra centraal. Via de tralies komt boole'se algebra op een natuurlijke wijze tot stand. Ook het door Bouqué gekozen axiomastelsel munt uit door een grote mate van natuurlijkheid. In het bijzonder worden de eigenschappen van atomistische en als speciaal geval daarvan ook eindige boole'se algebra's onderzocht. Deze laatste blijken isomorf te zijn met verzamelingenalgebra's.

Veel uit dit boekje staat in nauw verband met het moderne programma. Voor de tegenwoordige wiskundeleraar is alleen hierom al het boekje zeer lezenswaard. Het is belangrijke en toch betrekkelijk gemakkelijke lectuur.

P. G. J. Vredenduin

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1968, Zehnte Auflage, VII + 271 blz.

Hoewel enkele voorgaande drukken reeds in Euclides besproken zijn, wil ik niet volstaan met naar deze besprekingen te verwijzen. Daarvoor is dit boek van te groot belang. Zoals bekend behelst het de eerste volledige axiomatisering van de Euclidische meetkunde. Weliswaar is deze axiomatische fundering van de planimetrie en de stereometrie verouderd. Men ziet er te duidelijk de sporen van Euclides in. Maar desondanks is het een kostelijk stukje klassieke axiomatiek.

Ook de verdere hoofdstukken over het verband tussen fundamentele stellingen van de planimetrie zijn zeer lezenswaard. Men vindt uitvoerig uiteengezet het verband tussen de stelling van Pascal, de stelling van Desargues, het axioma van Archimedes en de commutativiteit van de vermenigvuldiging (van lijnstukken).

Verder vindt men een modernisering van de Euclidische oppervlakterekening, waarbij uitgegaan wordt van: oppervlakte driehoek $= \frac{1}{2} \cdot$ zijde $\cdot$ hoogtelijn op die zijde. En een amusant hoofdstuk over de mogelijkheid figuren te construeren met behulp van liniaal en transporteerbaarheid van één enkel lijnstuk. Bewezen wordt, dat men door ook gebruik van passer toe te staan, meer constructies kan uitvoeren.

Nieuw is in deze druk de toevoeging door P. Bernays van een aantal supplementen, waarin hoofdzakelijk werk van Nederlandse mathematici verwerkt is, nl. van Freudenthal, Van der Waerden en Kijne.

P. G. J. Vredenduin

L. H. Lange, *Elementary Linear Algebra*, Uitgave John Wiley and Sons, New York, 1968, 353 blz., 84 sh.

Dit boek is ,,a first course on the theory of vector spaces and matrices, with introductory comments on the theory of groups and other mathematical systems".

Het is zowel geschreven voor de eerstejaars student aan de universiteit als voor de leraar bij het voortgezet onderwijs.

De schrijver is een leerling van George Pólya. Hij heeft het boek een motto meegegeven ontleend aan een gezegde van Herbert, Spencer, een vriend van George Pólya: ,,was ist unterrichten? Zum eigenen Erfinden des Lernenden systematisch Gelegenheit geben".

De schrijver is er ten volle in geslaagd dit gezegde te realiseren in zijn boek.

Op eenvoudige wijze introduceert hij enige begrippen uit de verzamelingsleer, aan de hand van de verzameling van de rationale getallen. Vervolgens geeft hij een inleidende beschouwing over matrixrekening met veel voorbeelden geïllustreerd. Hij behandelt daarna de begrippen functie, lichaam en isomorfie. Dit eerste hoofdstuk bevat veel oefenmateriaal.

Het tweede hoofdstuk geeft een inleiding in enige wiskundige systemen waaronder vectorruimten.

Daarna worden de vectorruimten en de lineaire transformaties met behulp van matrices enigszins streng geïntroduceerd. Ook de Euclidische vectorruimten komen aan de orde. Een uitvoerige behandeling van matrices en determinanten volgt daarop. Het boek eindigt met een hoofdstuk over lineaire programmering waarin o.a. de simplex methode kort behandeld wordt.

Voor docenten, die binnenkort wiskunde II zullen moeten doceren bij het v.w.o., geeft dit boek een goede theoretische achtergrond. De wijze waarop het geschreven is, leent zich uitstekend voor zelfstudie.

Wie een niet te moeilijke inleiding in de lineaire algebra wenst te bestuderen, kan ik dit boek stellig aanbevelen.

Westerhof

Andreas Diemer, *Die automatisierte elektronische Datenverarbeitung und ihre Bedeutung für die Unternehmensleitung*, 249 blz., Walter de Gruyter & Co., Berlijn. 2de druk, 1968, Geb. DM 34.—.

De 1ste druk werd besproken in Euclides, 38e jaargang, blz. 63/64. Er zijn in de 2de druk een aantal minder belangrijke wijzigingen t.o.v. de 1ste druk aangebracht.

A. I. van de Vooren

C. B. Boyer, *History of Mathematics*, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1968, 715 blz., 97/-.

Dit fraai uitgegeven werk, verdeeld in 27 hoofdstukken bespreekt de ontwikkeling van het wiskundig denken vanaf de oudste tijden (ongeveer —3000) tot op heden. Afzonderlijk komen de Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde, die der Indiërs, Arabieren, Chinezen tot de Europese in de middeleeuwen aan de orde.

Het voorspel van de moderne wiskunde begint in het midden van de 16e eeuw (Galilei, Cavalieri, Briggs, Stevin, Napier, Kepler). Speciale aandacht krijgen uiteraard Fermat, Descartes, Pascal, de ,,Bernoulli Era'', Euler, de wiskundigen van de tijd der Franse revolutie (Lagrange, Monge, Laplace, Legendre, Carnot e.a.), de periode Gauss-Cauchy (met Abel, Galois e.a.), de voorlopers van de moderne algebra tot het 15e internationale congres in Moskou 1967.

Het is een boeiend boek, niet alleen voor wiskundig geschoolden geschreven. Men zou het m.i. het beste kunnen vergelijken met dat van E. T. Bell, *Men of mathematics*.

Elk hoofdstuk gaat vergezeld van enkele ,,exercises'' waarop men zijn krachten kan testen.

In elke schoolbibliotheek zal het een veelgevraagd boekwerk zijn.

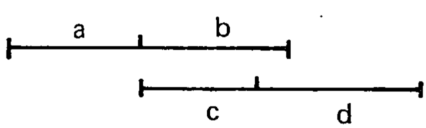
Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

220. In een land wonen superintelligente dwergen. Ze kunnen op generlei wijze met elkaar communiceren, noch door spraak noch door gebaar of hoe dan ook. In het land bevinden zich geen spiegels. De enige, die met de dwergen communiceren kan, is hun koning. Deze roept hen op zekere dag bijeen en zegt het volgende. ,,Ik weet, dat ten minste één van jullie blauw haar heeft. Elke morgen om 9 uur zal ik jullie bijeenroepen. Ik zal dan vragen, of alle blauwharigen onder jullie een pas vooruit willen doen. Indien niemand hieraan gehoor geeft, neem ik aan, dat jullie nog niet weten, of je blauw haar hebt of niet, en laat ik jullie weggaan om de volgende ochtend mijn verzoek te herhalen.'' Op zekere dag deden alle blauwe dwergen een pas voorwaarts. Hoe waren ze erachter gekomen, of ze blauw haar hadden?

221. Twee maatstokken zijn elk een geheel aantal cm lang. Op beide is één deelstreep aangebracht, waardoor ze elk in twee delen verdeeld worden, die alle vier een geheel aantal cm lang zijn Het aantal cm van de vier delen noemen we a, b, c en d. De maatstokken kunnen langs elkaar verschoven worden. Door een uiteinde of de deelstreep van de ene stok te laten samen vallen met een uiteinde of de deelstreep van de andere, is men in staat verschillende lengten af te meten. Geven we de stokken de stand in de onderstaande figuur,



dan kunnen b.v. afgelezen worden de lengten a, $a + b$, $c + d - b$.

Gevraagd wordt a, b, c en d zo te kiezen, dat alle lengten van 1 tot en met n cm afgelezen kunnen worden en zo, dat n maximaal is.

OPLOSSINGEN

218. Gevraagd werd natuurlijke getallen a, b, c en d te vinden, waarvoor

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad \text{en} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{d^2}.$$

Elke gelijkheid van de eerste soort, waarin a, b en c geen factor gemeen hebben, is te schrijven in de vorm

$$\frac{1}{p(p+q)} + \frac{1}{q(p+q)} = \frac{1}{pq}$$

en elke dergelijke gelijkheid van de tweede soort in de vorm

$$\frac{1}{(rt)^2} + \frac{1}{(st)^2} = \frac{1}{(rs)^2}, \quad \text{waarin } r^2 + s^2 = t^2.$$

We kunnen nu op de volgende manier ongelimiteerd veel oplossingen vinden. Ga b.v. uit van

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Dan is

$$\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} = \frac{1}{12^2}.$$

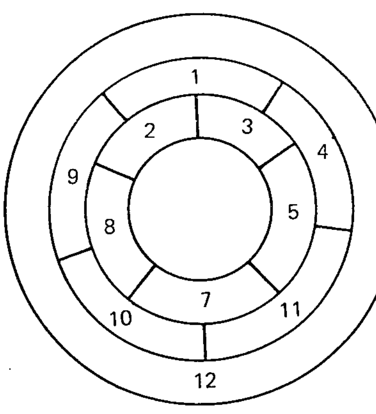
$15 + 20 = 35$. En dus is

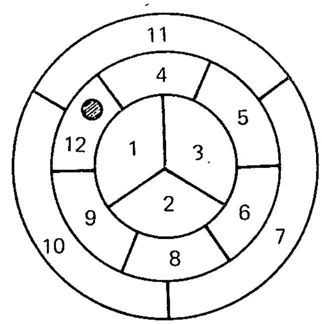
$$\frac{1}{15 \cdot 35} + \frac{1}{20 \cdot 35} = \frac{1}{15 \cdot 20}$$

en

$$\frac{1}{(15 \cdot 35)^2} + \frac{1}{(20 \cdot 35)^2} = \frac{1}{(12 \cdot 35)^2}.$$

219. Voor de opgave zie vorig nummer. De nummering in de twee figuren geeft aan op welke wijze bij de topologische afbeelding (homeomorfie) de delen van de linker figuur corresponderen met die van de rechter. (In de linker figuur ontbreekt in de cirkel het getal 6)





Met ingang van de nieuwe jaargang wordt de abonnementsprijs van Euclides verhoogd tot f **10,50**; de omvang van het tijdschrift zal voortaan ± 40 pagina's bedragen.