EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN
WISKUNDELERAREN, VAN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

VIII — 1 MEI 1969

INHOUD

Prof. J. Kriens: De besliskunde en haar toepassingen . 225
Prof. Dr. O. Bottema: Zes punten op een cirkel . . . 235
Dr. A. J. E. M. Smeur: Leonardo da Vinci 238
Dr. J. T. Groenman: Over vierhoeken en merkwaardige punten 243
Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften . 248
Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde . . . 251
Boekbespreking 251
Recreatie 255

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE BESLISKUNDE EN HAAR TOEPASSINGEN [1])

door

J. KRIENS

Tilburg

Besliskunde kan worden omschreven als de studie die zich bezighoudt met het oplossen van beslissingsproblemen door eerst een wiskundig model van de beslissingssituatie te maken, vervolgens het uit het beslissingsprobleem voortgekomen wiskundige optimumprobleem uit te rekenen en tenslotte de gevonden oplossing terug te vertalen in de taal van de beslissingssituatie. Het is duidelijk dat diegenen, die de wiskunde alleen beoefenen vanwege de esthetische bekoring die ervan uit kan gaan, hier niet in de eerste plaats aan hun trekken komen. Naast het plezier dat de beoefenaar kan beleven aan het opstellen van wiskundige modellen voor de meest uiteenlopende beslissingssituaties, is een belangrijke maatstaf voor succesvol besliskundig onderzoek of men er in slaagt de beslissingsproblemen beter op te lossen dan langs andere weg mogelijk is.

De meeste toepassingen van de besliskunde liggen op industrieel terrein; daarnaast zijn er ook talrijke in de landbouw, het transportwezen, op militair terrein en vele andere gebieden. Volledigheidshalve volgen een aantal namen, waaronder verschillende problemen bekend staan: mengproblemen, produktie- en voorraadproblemen, wachttijdproblemen, toewijzingsproblemen, vervangingsproblemen. Voor de niet-ingewijden zeggen deze namen nog weinig. Daarom zullen enkele problemen wat nader bekeken worden, waarbij dan bovendien gelegenheid is, de begrenzingen van de toepasbaarheid der besliskunde te onderkennen.

1. *Een transportprobleem*

Een produkt (het mogen ook mensen zijn!) is aanwezig op een aantal plaatsen en moet vervoerd worden naar een aantal bestemmingen. De vervoerskosten per eenheid zijn evenredig met de af te

---

[1]) Voordracht gehouden in de door het Mathematisch Centrum georganiseerde Vakantiecursus 1967 over Besliskunde. De schrijver dankt drs. J. Th. van Lieshout, medewerker van de Katholieke Hogeschool te Tilburg, voor de assistentie, verleend bij het samenstellen van de tekst.

leggen afstand. Gevraagd wordt te berekenen welke hoeveelheden goederen van waar naar waar vervoerd moeten worden opdat de totale transportkosten zo klein mogelijk zijn.

Om het probleem wiskundig te kunnen formuleren onderstellen wij: er zijn m opslagplaatsen waarin resp. de hoeveelheden $a_1, \ldots, a_m$ liggen; er zijn n bestemmingsplaatsen, waar de hoeveelheden $b_1, \ldots, b_n$ nodig zijn;

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{1}$$

de vervoerskosten van één eenheid van opslagplaats i naar bestemmingsplaats j bedragen c_{ij}; er worden x_{ij} eenheden vervoerd van opslagplaats i naar bestemming j.

De totale vervoerskosten bedragen

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}; \tag{2}$$

deze moeten door geschikte keuze van de x_{ij} geminimaliseerd worden onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Men herkent in dit probleem een speciale vorm van het lineaire programmeringsprobleem. Voor niet al te grote waarden van m en n (beide bijvoorbeeld enkele honderden) kunnen problemen van deze vorm snel en zonder enige moeite op een rekenautomaat worden opgelost, hetgeen dan ook veelvuldig gebeurt.

Enige voorbeelden van transportproblemen zijn: het vervoer van grondstoffen (ruwe olie, erts) van vindplaatsen naar verwerkingsplaatsen; het transport van gereed produkt, dat in verschillende fabrieken wordt gemaakt, naar afnemers; het vervoer van lege wagens van plaatsen waar ze overtollig zijn naar plaatsen waar er behoefte aan is.

Een begrenzing van de toepasbaarheid kan ontstaan wanneer slechts een gedetailleerd model zinvol is, waardoor het probleem een zeer grote omvang krijgt. Het wordt dan moeilijk om op tijd over de juiste gegevens te beschikken, de geheugenruimte van de rekenautomaat kan te klein worden, terwijl tenslotte de berekeningen te langdurig en te kostbaar kunnen worden. Ter illustratie kan men denken aan een transportmodel voor West-Europa in het kader van de E.E.G.

Daar het wiskundig model voor het transportprobleem eenvoudiger is dan het algemene lineaire programmeringsmodel zijn de grenzen ten aanzien van de omvang bij toepassingen van het laatste model eerder bereikt dan bij het eerste. G. B. Dantzig vermeldt overigens dat met het algemene model een probleem met 30.000 vergelijkingen en meer dan een miljoen variabelen is geoptimaliseerd. [2, blz. C110]. Een indruk omtrent de toeneming van de snelheid, waarmee l.p. problemen opgelost kunnen worden, geven enkele door Koenigsberg en Buchan verstrekte tijden [1, blz. 484]: voor een probleem met 50 vergelijkingen en 100 variabelen liggen deze tussen 14 à 20 uur (I.B.M. 650 met ponskaarten) en minder dan 30 seconden (I.B.M. 7090 met ponsbanden); het desbetreffende staatje dateert uit 1963 en is derhalve sterk verouderd.

2. *Een voorraadprobleem*

Een groothandelaar verkoopt goederen uit voorraad. Wanneer het aantal in het magazijn aanwezige eenheden van een artikel daalt onder een bepaald niveau x, plaatst hij een order bij zijn leverancier, die de bestelde goederen na enige tijd, de zogenaamde levertijd, brengt. Eén van de te beantwoorden vragen luidt nu: hoe groot moet x gekozen worden?

Kiest de handelaar x hoog, dan zal hij waarschijnlijk nog eenheden in voorraad hebben, wanneer de goederen worden afgeleverd, hetgeen kosten voor het in voorraad houden van goederen impliceert, die vermeden zouden zijn bij een latere aankomst van de order. Kiest hij x laag, dan loopt hij het risico dat zijn voorraad reeds is uitgeput voordat de nieuwe goederen binnenkomen en dat er bij verdere vraag „neen" verkocht moet worden. Bij de bepaling van de gunstigste waarde van x worden de voorraadkosten afgewogen tegen de kosten — nadelen — van neenverkoop. Het is duidelijk dat ook de kansverdeling van de vraag naar het artikel tijdens de levertijd een belangrijke rol speelt in deze berekening.

Stelt men dat de vermijdbare voorraadkosten evenredig zijn met het aantal eenheden dat nog over is wanneer de nieuwe order binnenkomt en dat deze c_1 per stuk bedragen, dat de kosten van neenverkoop c_2 per eenheid zijn en dat de kansverdeling van de vraag v tijdens de levertijd continu is met verdelingsdichtheid $f(v)$, dan is de som van de tegen elkaar af te wegen kosten

$$c_1 \int_0^x (x - v)\, f(v)\, dv + c_2 \int_x^\infty (v - x)\, f(v)\, dv. \tag{6}$$

Differentiatie naar x leert dat deze som minimaal is voor die waarde x^* van x, die voldoet aan

$$\int_{x^*}^{\infty} f(v)\, dv = \frac{c_1}{c_1 + c_2} . \qquad (7)$$

In woorden: x moet zodanig gekozen worden dat de kans op neenverkoop gelijk is aan $\frac{c_1}{c_1 + c_2}$.

Dit is één van de vele modellen die men voor in de praktijk voorkomende voorraadproblemen kan maken (vgl. voor andere modellen [3], de deeltjes 1.5 en 1.7). In het bijzonder wanneer de voorraadadministratie op een rekenautomaat geschiedt en het gaat om grote aantallen artikelen, kunnen deze modellen gebruikt worden om de voorraadbeheersing beter te laten verlopen dan op de klassieke, meer intuïtieve wijze.

De van belang zijnde constanten en verdelingsfuncties dient men te schatten, hetgeen met uitzondering van één grootheid in de meeste situaties wel mogelijk is. Deze uitzondering betreft de kosten van neenverkoop. Hierover staan veelal weinig gegevens ter beschikking, terwijl ook de mogelijkheden om te experimenteren beperkt zijn.

Hiermee is een tweede begrenzing van de toepasbaarheid der besliskunde gevonden: men moet de in het model aanwezige constanten voldoende nauwkeurig kunnen schatten. Slaagt men er in het gegeven voorbeeld niet in, c_2 te bepalen, dan is het model nog niet geheel verloren: men kan dan aan het rechterlid van vergelijking (7) een mede door intuïtie bepaalde waarde geven en vervolgens x^* berekenen. De intuïtieve benadering van het probleem is echter teruggekomen, zij het dat haar rol bescheidener is geworden.

3. *De optimale hoogte van een dijk*

Eeuwenlang is het in Nederland gebruik geweest de dijken te verhogen tot het peil van de hoogste ter plaatse bekende stormvloedstand. Reeds voor de tweede wereldoorlog realiseerde men zich bij Rijkswaterstaat dat ook met hogere dan de reeds waargenomen standen rekening moet worden gehouden.

Op grond van een mengsel van fysische en economische overwegingen kwam de in 1953 door de regering ingestelde Deltacommissie tot de conclusie dat de kans op overstroming tot een aanvaardbare waarde wordt teruggebracht, wanneer men deze in Hoek van Holland op 10^{-4} per jaar, ofwel 1 % per eeuw zou brengen.

Ondanks de aanzienlijke verbetering ten opzichte van vroegere overwegingen heeft ook deze methode nog iets onbevredigends en men zou gaarne tot een beter gefundeerde conclusie willen komen. De vraag is of deze wellicht door het afwegen van economische voor- en nadelen verkregen kan worden. Immers noch zeer hoge, noch zeer lage dijken zijn economisch verantwoord, zodat er ergens een optimum moet zijn. Een tweede is uiteraard of dit optimum ook te achterhalen is.

Wij beschouwen hier alleen een sterk vereenvoudigd geval en nemen daarbij aan dat het gaat om één afzonderlijke polder, waarbij een stormvloedstand boven het kritieke peil h_0 (welk peil niet gelijk behoeft te zijn aan de kruinhoogte) een overstroming veroorzaakt, die alle laag gelegen goederen in de polder verloren doet gaan en waarbij stormvloedstanden onder het kritieke peil geen enkele schade veroorzaken.

De vraag is nu of het huidige kritieke peil, economisch gezien, bevredigend is en zo neen, met hoeveel het dient te worden verhoogd.

Stel dat wij het kritieke peil met x meter verhogen. In veel gevallen blijken de dijkverhogingskosten i in goede benadering lineaire functies van x te zijn, zodat wij krijgen

$$i = i_0 + i_1 x, \tag{8}$$

waarin i_0 de initiële kosten zijn en i_1 de kosten per meter dijkverhoging.

Deze dijkverhogingskosten moeten worden afgewogen tegen de verminderde kansen op rampschaden. Dit is slechts mogelijk wanneer er één bepaalde maatstaf beschikbaar is, of anders gezegd, wanneer wij weten voor welk bedrag de overblijvende kansen op rampschaden in rekening moeten worden gebracht. Wij verrichten hiertoe het volgende gedachtenexperiment.

Stel dat een verzekeringsmaatschappij in staat en bereid zou zijn om de overblijvende mogelijke rampschaden te verzekeren. De maatschappij zal ieder jaar een premie vragen, die gelijk is aan de rampschadeverwachting per jaar; deze is na de verhoging met x meter

$$p\ (h_0 + x)\ w, \tag{9}$$

waarin $p(h_0 + x)$ de kans is op overschrijding van het peil $h_0 + x$ per jaar en w de totale door de dijk te beschermen waarde vertegenwoordigt (inclusief kosten van dijkherstel, indirecte schade ten gevolge van produktiederving elders, waardevermindering van de grond, etc.). Teneinde deze te betalen premies te kunnen vergelijken met i, bepalen wij de contante waarde van al deze premies. Zij δ de rentevoet per jaar, dan is de contante waarde van een over t jaar te betalen premie

$$\frac{p(h_0 + x)\, w}{\left(1 + \dfrac{\delta}{100}\right)^t},$$

of met een continue rentevoet

$$p(h_0 + x)\, w\, \mathrm{e}^{-\delta/100}. \tag{10}$$

Men kan aantonen dat voor $p(h_0 + x)$ geschreven kan worden

$$p(h_0 + x) = p_0\, \mathrm{e}^{-\lambda x}, \tag{11}$$

waarin p_0 de huidige overschrijdingskans is, welke evenals de parameter λ uit de waargenomen hoogwaterstanden kan worden geschat.

De totale verdisconteerde waarde van alle te betalen schaden is dan

$$r = \int_0^\infty p_0\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{-\delta t/100}\, \mathrm{d}t = p_0\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \frac{100}{\delta} = \frac{p_0^*\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\delta} \tag{12}$$

met $100\, p_0 = p_0^*$.

Dus bij een verhoging van de dijken met x meter worden de totale kosten om de polder te verdedigen tegen de zee

$$k = i + r = i_0 + i_1 x + \frac{p_0^*\, w\, \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\delta}. \tag{13}$$

Achten we die dijkverhoging optimaal, waarbij k minimaal is, dan wordt het optimum gevonden door

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = i_1 - \frac{p_0^*\, w \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\delta} \tag{14}$$

gelijk aan nul te stellen. Dus als x^* de optimale verhoging is, geldt

$$i_1 - \frac{p_0^*\, w\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x^*}}{\delta} = 0, \tag{15}$$

of

$$x^* = \frac{1}{\lambda} \log \frac{p_0^*\, w\lambda}{\delta\, i_1}. \tag{16}$$

Op de onderstellingen die aan dit eenvoudige model ten grondslag liggen kan op velerlei wijzen kritiek worden geleverd. Zo is er geen rekening gehouden met de relatieve bodemdaling, toenemende welvaart en andere factoren. Door een enigszins gecompliceerder model zijn deze bezwaren echter te ondervangen.

Een ander punt is, dat, teneinde het optimum te kunnen berekenen, twee niet geheel gelijkwaardige grootheden zijn opgeteld; nl. enerzijds de werkelijk uit te geven kosten van dijkverhoging en anderzijds de contante waarden van toekomstige schadeverwachtingen. In de praktijk van de verzekeringsmaatschappijen is een dergelijke procedure gebruikelijk en kan de methode verdedigd worden met statistische argumenten. Als de regering deze handelwijze toepaste op alle beslissingen en er voldoende projecten van vergelijkbare omvang waren, dan was ook hier de methode zonder meer te rechtvaardigen. In werkelijkheid is dit niet het geval. Anderzijds is de fictieve verzekeringsmaatschappij alleen ingevoerd als „model" teneinde de redenering aanschouwelijk te maken. Het model kan aanzienlijk gewijzigd worden zonder dat de resultaten erdoor veranderen.

Verder moet men ook hier om het model te kunnen gebruiken, de vereiste constanten trachten te schatten. Vooral de bepaling van de te beschermen waarde w is lastig. Het ligt voor de hand uit te gaan van de in het desbetreffende gebied aanwezige kapitaalgoederenvoorraad, vermeerderd met de aanwezige duurzame consumptiegoederen. Daarnaast moet rekening worden gehouden met de kosten van dijkherstel en bemaling, de verliezen die ontstaan door produktiederving in het betreffende gebied en elders, en moeilijk te waarderen factoren, zoals de waarden van mensenlevens, culturele goederen, e.d. Het in rekening brengen van een bepaald bedrag voor de bescherming van de aanwezige mensen is niet erg zinvol; zelfs het waarderen van een mensenleven op een, vrijwel nooit toegepast, hoog bedrag van bijv. ƒ 100.000,— leidt tot verhogingen van slechts enkele centimeters. Beter is het derhalve alleen te werken met zuiver economische factoren en de aldus verkregen verhogingen te beschouwen als ondergrenzen.

De moeilijkheden welke hier ondervonden worden, zijn voor de toepassing van de besliskunde van veel ernstiger aard dan die in de twee voorafgaande voorbeelden. In feite maken ze een direct gebruik van de resultaten van het besliskundig onderzoek onmogelijk. Dit neemt niet weg dat de studie ruimschoots zijn vruchten afwierp doordat men

a) een systematische methode van aanpak verkreeg, waarmee voor alle gebieden de verschillende factoren steeds op dezelfde wijze worden afgewogen;
b) inzicht verkreeg welke factoren veel invloed hebben en welke niet;

c) inzicht verkreeg welke relevante factoren relatief het slechtst bekend zijn;
d) inzicht verkreeg in methoden waarop niet zuiver economische factoren in rekening gebracht kunnen worden.

Voor een uitvoeriger discussie verwijzen wij naar [4].

Nu wij zowel een aantal met succes gebruikte toepassingen als enkele begrenzingen van de toepasbaarheid der besliskunde hebben besproken, wil ik tenslotte de aandacht vestigen op een model, waarvan mij niet bekend is, of men er ooit met profijt mee heeft gewerkt.

4. *Een opleidingsprobleem*

Stel dat men, uitgaande van een prognose omtrent de aantallen leerlingen die een bepaald type onderwijs zullen volgen, een raming heeft gemaakt van het aantal voor dit onderwijs vereiste leerkrachten. Voor een periode van t jaar, die over k jaar begint lijkt het aantal beschikbare docenten aan de lage kant en daarom vraagt men zich af of er nieuwe docenten opgeleid moeten worden.

De opleiding duurt l jaar, waarbij wij aannemen dat l niet groter is dan k. De totale opleidingscapaciteit bedraagt N personen per jaar. Tijdens de opleiding vindt er een verloop onder de leerlingen plaats, waardoor aan het einde van het i^{de} leerjaar nog slechts een fractie p_i van het met de opleiding gestarte aantal leerlingen verder studeert. De kans dat een leerling die aan de opleiding begint na l jaar afstudeert is derhalve p_l. Ook onder de afgestudeerden is er een zeker verloop en wel blijkt de kans dat iemand j jaren na het afstuderen zich nog voor de functie beschikbaar stelt gelijk te zijn aan q_j $(j = 0, 1, \ldots)$.

Men vraagt zich nu af met hoeveel leerlingen de opleiding ieder jaar moet worden begonnen. Het wordt gezien als een kostenprobleem omdat er voldoende candidaten voor de opleiding zijn te verwerven. Daar het onmogelijk is de opleiding zó te organiseren dat voor ieder jaar het beschikbare aantal leerkrachten precies gelijk is aan het vereiste aantal, aanvaardt men noodgedwongen dat er in sommige jaren overtollige docenten zijn en in andere jaren tekorten. De daardoor onstane nadelen worden in de vorm van kostenfactoren in rekening gebracht.

Als eenheid van kosten nemen we de opleidingskosten van iemand die een volledige opleiding heeft gevolgd. De opleidingskosten van iemand die na j jaar $(j < l)$ afvalt zijn gelijk aan een fractie j/l van de kosteneenheid. Overtollige leerkrachten worden op een wachtlijst geplaatst en krijgen per jaar per persoon een bedrag uitgekeerd dat gelijk is aan c_1 eenheden. Een vacature die niet vervuld kan worden veroorzaakt per jaar een verlies van c_2 eenheden. [1])

Het tijdsbestek waarin het probleem loopt, beslaat $k + t$ jaren, namelijk de k jaren van de aanloopperiode en de t daaropvolgende jaren. De eerstgenoemde jaren beschouwen wij als de jaren 1 t/m k, de laatste genoemde als de jaren $k + 1$ t/m $k + t$. De bij een bepaald jaar behorende variabelen krijgen als index het nummer van het desbetreffende jaar.

Stel dat in het j^{de} jaar x_j/p_l leerlingen de opleiding beginnen ($j = 1, \ldots, k + t$).[2]) De (eventuele) tekorten in de jaren $k + 1$ t/m $k + t$ geven we aan met s_{k+1} t/m s_{k+t}, de (eventuele) aantallen overtollige krachten met r_{k+1} t/m r_{k+t}. De vereiste aantallen nieuwe docenten zijn n_{k+1} t/m n_{k+t}, de aantallen ongebruikte plaatsen van de totale opleidingscapaciteit N worden aangegeven met u_1 t/m u_{k+t}.

Tussen de ingevoerde grootheden bestaan de volgende relaties:

$$\left.\begin{array}{l}
q_{k-l}\, x_1 + q_{k-l-1}\, x_2 + \ldots + q_0\, x_{k-l+1} - r_{k+1} + s_{k+1} = n_{k+1} \\
q_{k-l+1}\, x_1 + q_{k-l}\, x_2 + \ldots + q_1\, x_{k-l+1} + q_0\, x_{k-l+2} - r_{k+2} + s_{k+2} = n_{k+2} \\
\vdots \\
q_{k-l+t-1}\, x_1 + q_{k-l+t-2}\, x_2 + \ldots + q_{t-1}\, x_{k-l+1} + \ldots + q_0\, x_{k-l+t} - r_{k+t} + s_{k+t} = n_{k+t}
\end{array}\right\} \quad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{p_l}\, x_1 + u_1 = N \\
\dfrac{p_1}{p_l}\, x_1 + \dfrac{1}{p_l}\, x_2 + u_2 = N \\
\dfrac{p_2}{p_l}\, x_1 + \dfrac{p_1}{p_l}\, x_2 + \dfrac{1}{p_l}\, x_3 + u_3 = N \\
\vdots \\
\dfrac{p_{l-1}}{p_l}\, x_1 + \dfrac{p_{l-2}}{p_l}\, x_2 + \ldots + \dfrac{1}{p_l}\, x_l + u_l = N \\
\dfrac{p_{l-1}}{p_l}\, x_2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{p_l}\, x_{l+1} + u_{l+1} = N \\
\vdots \\
\dfrac{p_{l-1}}{p_l}\, x_{k+t-2l+1} + \ldots \dfrac{1}{p_l}\, x_{k+t-l} + u_{k+t-l} = N
\end{array}\right\} \quad (18)$$

---

[1]) De salariskosten van diegenen die in actieve dienst zijn behoeven niet als afzonderlijke term in de kostenfunctie te worden opgenomen, daar wordt genoeg over gesproken. Ook langs wiskundige weg kan het weglaten worden verdedigd.

[2]) Wij geven deze aantallen aan met x_j/p_l omdat dan, gezien het verloop tijdens de opleiding, na l jaren precies x_j personen ter beschikking komen.

De vergelijkingen (17) geven voor de perioden $k+1$ t/m $k+t$ het verband weer tussen de variabelen waarmee de personeelssituatie beschreven wordt. De algemene vorm luidt: beschikbare krachten verminderd met overtollige krachten en vermeerderd met het tekort is gelijk aan het aantal benodigde krachten. De vergelijkingen (18) geven het verband weer tussen het aantal gebruikte en het aantal open plaatsen van de opleidingscapaciteit voor de perioden 1 t/m $k+t-l$. De opleidingscapaciteiten voor de perioden $k+t-l+1$ t/m $k+t$ kunnen buiten beschouwing blijven omdat deze in ieder geval voldoende zijn om de in die perioden nog aanwezige leerlingen op te vangen.

De te optimaliseren functie wordt gevormd door de kosten die geminimaliseerd moeten worden. Deze kostenfunctie luidt:

$$y = \frac{1}{l\,p_l}\left\{\sum_{r=0}^{l-1} p_r\right\}\left(\sum_{j=1}^{k+t-l} x_j\right) + c_1 \sum_{j=k+1}^{k+t} r_j + c_2 \sum_{j=k+1}^{k+t} s_j, \qquad (19)$$

waarin $p_0 = 1$.

Tenslotte moeten alle variablen een waarde $\geqq 0$ bezitten. Vullen wij in (17), (18) en (19) de waarden van de constanten in, dan ontstaat een — strikt genomen geheeltallig — lineair programmeringsprobleem.

Aan bovenstaande probleemstelling kan in velerlei opzichten een meer algemene vorm gegeven worden. Zo kan men rekening houden met de kosten, nodig om leerlingen te werven door één of meer extra termen in de kostenfunctie op te nemen. Verder kan men er rekening mee houden dat niet iedereen de studie in hetzelfde aantal jaren voltooit. Een andere generalisatie betreft het geval, waarin een deel van de nu opgeleide personen later zelf kan gaan opleiden waardoor de opleidingscapaciteit vergroot kan worden en men dus voor de opgeleide personen moet kiezen tussen direct inschakelen in het onderwijs of verder opleiden tot opleiders.

De vorm van het in dit voorbeeld behandelde probleem is behalve voor dit probleem representatief voor een gehele klasse van produktieproblemen, die betrekking hebben op een aantal perioden.

LITERATUUR

1. J. Buchan and E. Koenigsberg, Scientific Inventory Management, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1963).
2. G. B. Dantzig, Management Science in the World of Today and Tomorrow, Management Science 13 (1967) C 107–C 111.
3. Leergang Besliskunde, 8 delen, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1965–1969).
4. Rapport Deltacommissie, Bijdrage II.2, D. van Dantzig en J. Kriens, Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden, Staatsdrukkerij- en Uitgeverijbedrijf (1960).

ZES PUNTEN OP EEN CIRKEL

door

Prof. Dr. O. Bottema

Delft

1. In *Euclides*, 44, (1968-69), 55-56, heeft Bronkhorst een vernuftig bewijs gegeven voor de van Sandman en Graham afkomstige stelling, die als volgt luidt: Zijn a_i, b_i en c_i ($i = 1, 2, 3$) de in fig. 1 aangegeven onderlinge afstanden van zes punten A_k ($k = 1, 2, .. 6$) in een plat vlak, dan geldt als de punten op een cirkel. liggen de betrekking

$$a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1, \tag{1}$$

en omgekeerd: als (1) geldt, dan liggen de zes punten op een cirkel Over deze stelling maken wij hier enkele opmerkingen.

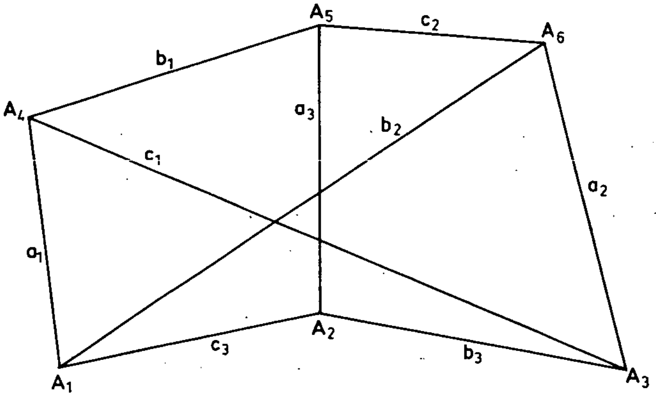

Fig.1.

2. De stelling en haar omgekeerde moeten zorgvuldiger geredigeerd worden dan zojuist geschiedde. De betrekking (1) geldt niet „ als de punten op een cirkel liggen", maar „als de punten A_i op een cirkel liggen in de cyclische volgorde $A_1 A_2 \ldots A_6$". Dat blijkt ook uit het door Bronkhorst gegeven bewijs, waarbij de stelling van Ptolemeus op de vierhoeken $A_1 A_2 A_4 A_6$, $A_3 A_2 A_4 A_6$ en $A_5 A_2 A_4 A_6$ wordt toegepast ervan uitgaande dat deze convex zijn. De opmerking houdt verband met het feit, dat de zes punten in de

figuur niet verwisselbaar zijn: er zijn twee drietallen $A_1 A_3 A_5$ en $A_4 A_6 A_2$, een punt van een drietal wordt alleen verbonden met die van het andere drietal en voorts nemen de verbindingen $A_1 A_4$, $A_3 A_6$ en $A_5 A_2$ van overeenkomstige punten in (1) nog een uitzonderlijke plaats in. De omgekeerde stelling kan dan als volgt luiden: als (1) geldt dan liggen de zes punten op een cirkel *en wel in de volgorde* $A_1 A_2 \ldots A_6$.

3. De stelling en haar omgekeerde kunnen met behulp van *inversie* bewezen worden. Onderwerp A_i $(i = 1, \ldots, 5)$ aan de inversie met centrum A_6 en macht één; zij B_i het beeldpunt van A_i en verder d_{ij} de afstand van B_i en B_j. Dan is, als $A_2 A_6 = x$ en $A_4 A_6 = z$:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b_2 d_{14} z,\ a_3 = c_2 d_{25} x,\ b_1 = c_2 d_{45} z,\ b_3 = a_2 d_{23} x, \\ c_1 = a_2 d_{34} z,\ c_3 = b_2 d_{12} x, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

zodat (1) na deling door $a_2 b_2 c_2 x z$ (die ongelijk nul is als de zes punten verschillend zijn), luidt

$$d_{14} d_{25} = d_{23} d_{45} + d_{12} d_{34} + d_{14} d_{23} + d_{12} d_{45} + d_{25} d_{34} \qquad (3)$$

De volgende ongelijkheden gelden:

$$d_{14} d_{25} \leqq d_{12} d_{45} + d_{15} d_{24} \qquad (4)$$
$$d_{35} d_{24} \leqq d_{45} d_{23} + d_{25} d_{34} \qquad (5)$$
$$d_{13} d_{24} \leqq d_{12} d_{34} + d_{14} d_{23} \qquad (6)$$
$$d_{15} d_{24} \leqq d_{13} d_{24} + d_{35} d_{24} \qquad (7)$$

(4), (5) en (6) volgen telkens uit de stelling: de drie produkten van de overstaande zijden van een volledige vierhoek voldoen aan de driehoeksongelijkheid en wel door deze toe te passen op $B_5 B_1 B_2 B_4$, $B_3 B_5 B_2 B_4$ en $B_1 B_3 B_2 B_4$; (7) volgt uit de driehoeksongelijkheid voor $B_1 B_3 B_5$. Door optelling van (4), (5), (6) en (7) ontstaat de *voor elk vijftal punten geldende ongelijkheid*:

$$d_{14} d_{25} \leqq d_{23} d_{45} + d_{12} d_{34} + d_{14} d_{23} + d_{12} d_{45} + d_{25} d_{34}, \qquad (8)$$

die als wij met (2) teruggaan naar de oorspronkelijke figuur de *voor elk zestal punten* A_i *geldende ongelijkheid*,

$$a_1 a_2 a_3 \leqq b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1 \qquad (9)$$

oplevert.

4. In (8) geldt alleen het gelijkteken als dat geldt in *elk* der betrekkingen (4), (5), (6), (7). Als het geldt in (7) dan liggen B_1, B_3 en B_5, en wel in deze volgorde, op een rechte. Geldt in (4), (5) (6) het gelijkteken, dan liggen B_3 en B_5 beide op de cirkel door B_1, B_2 en B_4, waaruit volgt dat de vijf punten op een rechte liggen.

Om in te zien welke volgorde zij hebben kan men het best naar de punten A_i teruggaan, die op één cirkel moeten liggen en wel, gezien de volgorde van B_1, B_3 en B_5, zodanig dat A_1, A_3, A_5 en A_6 op elkaar volgen. Maar dan gelden, als wij van A_2 resp. van A_4 uitgaan in plaats van A_6, de volgorden $A_1 A_2 A_3 A_5$ en $A_1 A_2 A_4 A_5$ en dus $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$.

5. Samenvattend hebben wij: in (8) geldt het gelijkteken alleen dan als $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$, in deze (cyclische) volgorde, op één rechte liggen; in (9) geldt het alleen dan als $A_1 A_2, \ldots, A_6$, in deze volgorde, op een cirkel liggen.

Naschrift van Dr. P. Bronkhorst

1. Inderdaad had ik vergeten te vermelden, dat de zeshoek convex moest zijn. De betekenis van form. (1) is dan als volgt:

In het rechterlid staan twee produkten van telkens 3 niet opvolgende zijden en drie produkten van telkens twee overstaande zijden en de diagonaal, die met deze zijden geen hoekpunt gemeen heeft.

In het linkerlid staat het produkt van bovengenoemde diagonalen. Verder volgt uit het bewijs, dat Sandham en Graham gaven van het omgekeerde, eenvoudig, dat de zeshoek convex is, terwijl de punten 1, 2, . . .6 op elkaar volgen. Immers de koordenvierhoeken 2461, 2463, 2465 hebben resp. tot diagonalen : 14 en 26; 24 en 36; 25 en 64. Tekent men ze achtereenvolgens dan ontstaat de convexe zeshoek met opvolgende hoekpunten 1, 2, . . ., 6.

2. Op mijn vraag naar een stereometrisch bewijs (zie: „ Gevolg" blz. 56) hebben de heren Harkema en Renique gereageerd. Beide heren bewezen eerst dat elke vector v_i ($i = 1, 2, 3$) binnen de *verlengden* van de andere twee ligt. (b.v.: voor ieder punt van v_3 geldt $z \leqq 0$, terwijl voor de punten van v_1 en v_2 geldt $z \geqq 0$). Harkema concludeert dan uit het feit dat ook de loodrechte projectie v' van v op V geen stompe hoek maakt met de vectoren v_i, dat v' de nulvector moet zijn.

Renique brengt door O het vlak $W \perp v$ aan; daar uit het voorgaande volgt dat de 3 vectoren v_i niet alle aan dezelfde kant van de snijlijn van V en W liggen, vallen V en W samen. (anders maakte minstens één der vectoren v_i een stompe hoek met v).

3. Naderhand ontving ik nog een oplossing van Mevr. Dijkstra-Kluyver. Aangetoond wordt, dat als de vectoren v_i scherpe hoeken maken met v, ze niet in één vlak V kunnen liggen.

LEONARDO DA VINCI

Het is deze maand 450 jaar geleden, dat Leonardo da Vinci gestorven is, namelijk op 2 mei 1519. Hij is op 15 april 1452 te Vinci, tussen Pisa en Florence, geboren. Hij leerde en werkte op het atelier van Verrocchio te Florence. Begin- en einddatum van deze periode uit zijn leven zijn niet precies bekend; het was van ca. 1466 tot ca. 1478. Vervolgens (op zijn vroegst vanaf 1482; weer is de datum niet precies bekend) was hij in dienst van Ludovico Sforza te Milaan, tot 1499. Daarna verbleef hij op verschillende plaatsen in Noord-Italië en tenslotte ging hij in 1515 naar Frankrijk waar hij te Amboise, bij Tours, overleden is.

Het is bekend, dat zijn belangstelling vrijwel onbeperkt was. De bewaard gebleven aantekeningen handelen over alle mogelijke onderwerpen. Zij zijn echter zonder enig systeem; alles staat door elkaar en vaak zijn aantekeningen niet afgemaakt. Een enkele maal staat er een jaartal bij maar overigens is het niet bekend uit welke tijd zij stammen. De tekst is steeds in spiegelschrift. Men vindt onder andere aantekeningen over architectuur, perspectief, ontwerpen van kunstwerken, over biologie en menskunde, techniek, mechanica en wiskunde. Hij vervaardigde honderden zeer nauwkeurige anatomische tekeningen en hij had als eerste enig idee over een bloedsomloop. Hij verklaarde het asgrauwe licht der maan en van hem is de bekende uitdrukking: „de oude maan in de armen der jonge". Hij ontwierp allerlei toestellen, waarbij onder andere een serieus ontwerp voor een vliegtuig. In een brief aan Sforza bood hij zich aan als iemand, die in staat was bruggen te bouwen en machines om met grote kracht stenen te werpen, en nog andere aanvals- en ook verdedigingswapens, maar ook om waterleidingen aan te leggen en „bouwwerken, schilderstukken en beeldhouwwerken in marmer en brons even goed als ieder ander te kunnen uitvoeren".

Met de uitspraak: „het experiment vergist zich nooit" wees hij op het fundamentele belang van het experiment voor de natuurwetenschap. Weliswaar had Aristoteles daar 1850 jaar eerder ook al op gewezen maar Leonardo's uitspraak was in zijn tijd voor velen toch weer nieuw. Uit de experimenten moest men tot natuurwetten komen, die dan weer wiskundig geformuleerd dienden te worden. Zelf heeft hij getracht kwantitatieve wetten over de snelheid van vallende lichamen te vinden; zijn aantekeningen daarover zijn echter nogal verward.

Ondanks zijn uitgebreide belangstelling is hij vóor de ontwikkeling der wetenschap vrijwel zonder betekenis geweest. Wij laten hier uit zijn aantekeningen een en ander volgen over wiskundige onderwerpen. Het is in hoofdzaak van na 1500. Zoals zal blijken is het feitelijk zonder enig belang. Onze motivering voor het signaleren ervan kan dan ook alleen maar zijn, dat het toch wel interessant is eens iets meer juist hierover te vernemen, gezien de begaafdheid van Leonardo op vele andere gebieden waardoor hij een boeiende en tegelijk enigszins raadselachtige persoonlijkheid blijft.

Wat betreft de rekenkunde vinden we nogal wat berekeningen over evenredigheden.

Wat de stereometrie betreft vinden we enkele ruimtelijke figuren met onder andere de opmerking: „de grootste piramide, die uit een kubus genomen kan worden, is het derde deel der gehele kubus". Hij kent ook de juiste ligging van het zwaartepunt van een viervlak.

Meer is er te vinden over vlakke meetkunde. Zo vinden we aantekeningen over driehoeken en cirkels en de bekende constructie van de middelloodlijn van een lijnstuk. Ook geeft hij de reeds lang bekende methode om een hoogte te meten met behulp van schaduwlengtes en gelijkvormige driehoeken; hij schrijft er bij: „e bona regula" (dit is een goede, geschikte, regel). Van de constructie der middelevenredige geeft hij alleen maar een voorbeeld, echter voor een eenvoudig geval, namelijk $\sqrt{9}$ als middelevenredige van 1 en 9, met behulp van een halve cirkel met middellijn 10.

De breedte van een rivier kan als volgt gemeten worden (figuur 1).

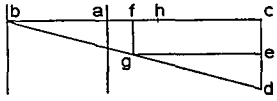

Fig. 1.

Zij *ab* te meten en *b* een vast te herkennen punt. Markeer de punten *a* en *c* zo, dat de lijn *bac* loodrecht op de oever is en *ac* groter dan de te verwachten lengte van *ab*. Neem een punt *d* zo, dat $\angle c = 90°$. *e* is het midden van *cd*, $eg \parallel ca$, $gf \parallel ec$ en $fh = fa$. Dan geldt dus: $ch = ab$. De methode is wat omslachtig en niet origineel want hij is al bekend uit een werk van de 3e eeuw.

Er zijn ook enkele aantekeningen betreffende de cirkelkwadratuur. Onder andere vindt men de twee figuren, die ook elders nog wel eens voorkomen, eerst van een cirkel verdeeld in een aantal gelijke sectoren en daarnaast die sectoren ineengeschoven tot, bij benadering, een grote rechthoek. Hiermee wordt dan geïllustreerd, dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan het halve produkt van omtrek en straal. Het probleem der cirkelkwadratuur wordt dan in feite verschoven naar het vinden van de omtrek.

Origineel maar niet direct wiskundig is: neem een cirkelcilinder waarvan de hoogte gelijk is aan de halve straal van de cirkel en rol die af op een plat vlak. De oppervlakte der ontstane rechthoek (de cilindermantel) is gelijk aan die van de cirkel.

Ook blijkt hij te weten, dat de cirkeloppervlakte evenredig is met het kwadraat van de straal; hij geeft er althans een voorbeeld van (figuur 2). „Indien de halve middellijn van een cirkel *ab* de helft is van de halve middellijn van een andere cirkel *ae*, dan gaat de kleinere cirkel viermaal in de grotere."

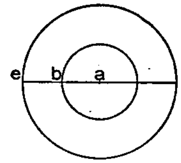

Fig. 2.

Verder zij nog vermeld, dat Leonardo gezocht heeft naar constructies om in een gegeven cirkel een regelmatige veelhoek te beschrijven ofwel omgekeerd, om bij een gegeven zijde van een regelmatige veelhoek het middelpunt van de omschreven cirkel te vinden. Bij enkele van deze constructies werkt hij met een constante passeropening.

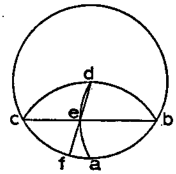

Fig. 3.

„In deze constructie wordt, met één enkele passeropening, de cirkel door *bc* in 3, door *ac* in 6, door *fc* in 8 en door *af* in 24 gelijke delen verdeeld." (Figuur 3).

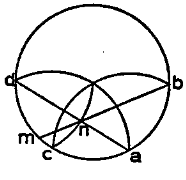

Fig. 4.

„Indien men, met één enkele passeropening, een cirkel in 5 gelijke delen wil verdelen, en in 3, en in 30, doe dan als volgt: zet de passerpunt in *a* en trek *bc*, zet dan de passerpunt in *c* en trek *ad*, trek vervolgens de lijn van *b* naar het snijpunt *n* en waar deze lijn de cirkel ontmoet, in *m*, is de constructie beëindigd, dit wil zeggen *am* is het vijfde deel van de cirkel, *ac* het zesde deel en *cm* het dertigste." (Figuur 4). Leonardo geeft nog een toelichting, die in feite hierop neerkomt, dat hij berekent, dat *cm* het dertigste deel is, maar waarbij hij blijkbaar zonder meer als juist aanneemt, dat *am* inderdaad het vijfde deel is. De constructie geeft natuurlijk niet het gewenste resultaat; de middelpuntshoek op boog *am* is 72°25', dus 0,6 % te groot.

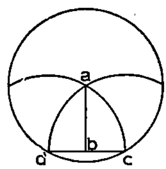

Fig. 5.

Voor een regelmatige zevenhoek geeft hij (figuur 5): „Met een enkele passeropening een cirkel in 7 te verdelen. Trek een cirkel. Zet daarna de passerpunt in *c*, trek *ad*, zet vervolgens de passerpunt in *d* en trek *ac*. De lijn *ab*, getrokken vanuit het midden van *cd*, zal precies 1/7 van de cirkel zijn." Leonardo was er blijkbaar van overtuigd, dat de constructie juist is. In feite is het een zeer goede benadering; de middelpuntshoek op *ab* als koorde is 51°19' wat minder dan 0,25 % te klein is. Deze constructie komt men echter vaker tegen, voor het eerst bij Heron van Alexandrië (1e eeuw na Chr.). Het is dus geen vondst van Leonardo.

Wel van hem zijn enkele vrij goede benaderingsconstructies voor het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een regelmatige veelhoek als de zijde gegeven is. Zij ABC (figuur 6) een gelijkzijdige driehoek met zijde a. Is AB de zijde van een regelmatige 8-hoek dan is volgens Leonardo het middelpunt M zo gelegen, dat $CM = \frac{1}{3}a$.

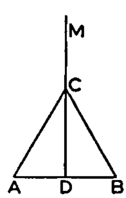

Fig. 6.

We kunnen $\angle AMB$ berekenen; die is 45°16′, dus 0,6% te groot. Is AB de zijde van een regelmatige 9-hoek, dan is M zo gelegen, dat $CM = \frac{1}{2}a$. Nu blijkt $\angle AMB = 40°12'$ te zijn, 0,5 % te groot.

De bekende historicus der wiskunde Moritz Cantor heeft de veronderstelling geopperd, dat Leonardo wellicht op de volgende wijze tot deze benadering gekomen is. Is AB de zijde van een regelmatige 6-hoek, dan komt M in C. Omdat 8 het derde deel van 6 meer is dan 6, is bij een 8-hoek $CM = \frac{1}{3}a$ genomen. En omdat 9 de helft van 6 meer is dan 6, is bij de 9-hoek $CM = \frac{1}{2}a$ genomen.

Als we dit generaliseren komen we tot: is AB de zijde van een regelmatige n-hoek dan is M zo gelegen (figuur 6), dat:

$$CM = \frac{n-6}{6}\,a.$$

Bij Leonardo vinden we dan alleen de gevallen $n = 8$ en $n = 9$. We merken op, dat die betrekking juist is voor $n = 6$ maar ook voor $n = 12$. Als $6 < n < 12$ krijgen we hoeken AMB, die te groot zijn, echter hoogstens 0,6 %. Voor $n > 12$ worden de hoeken AMB te klein; bij $n = 18$ is de afwijking al 1 % geworden.

Voor de gevallen, dat $n < 6$ is, moet men M tussen C en D nemen. De benadering wordt dan onnauwkeurig. Toch gebruikt Leonardo weer een soortgelijke constructie als AB de zijde van een regelmatige 5-hoek is maar hij neemt dan $CM = \frac{1}{5}CD$. Dan is $\angle AMB = 71°38'$ wat 0,5 % te klein is.

Deze constructies kunnen voor hem als beeldend kunstenaar betekenis gehad hebben, ze vormen echter geen reden om hem speciaal als wiskundige te vermelden. De enige reden waarom men zijn naam nog vindt in moderne werken over de geschiedenis der wiskunde is, dat hij een werk over de leer van de perspectief samengesteld heeft in een tijd, dat de systematische behandeling van perspectiefconstructies sterk in de belangstelling kwam. Meer weten we er niet van, want het werk is verloren gegaan. Verder zijn van hem de figuren van regelmatige lichamen afkomstig in een werk van Luca Pacioli (ca. 1445–1514). Van andere vondsten, die hem in de vorige eeuw nog toegeschreven werden, zoals bijvoorbeeld de tekens + en —, weet men thans, dat die toeschrijving wat al te voorbarig geweest is.

A. J. E. M. Smeur

OVER VIERHOEKEN EN MERKWAARDIGE PUNTEN

door

Dr. J. T. Groenman

Groningen

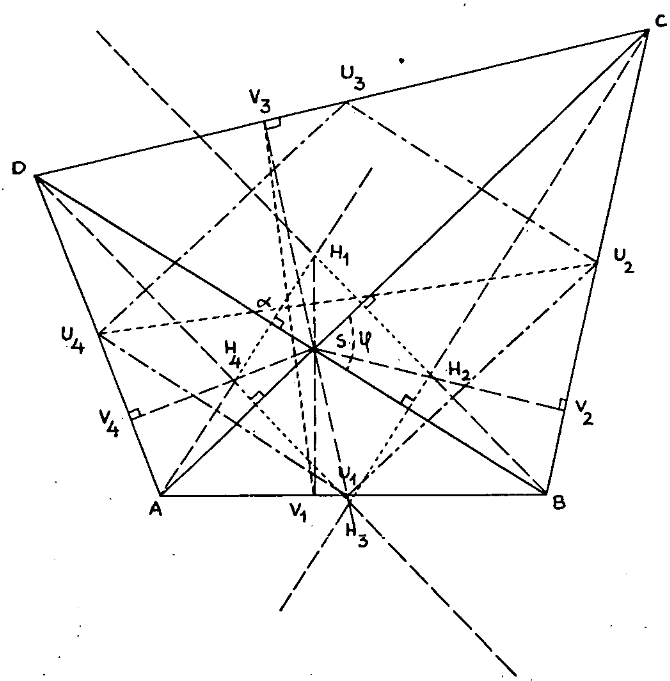

Fig. 1 (bij het snijpunt van BD en AH_1 moet X staan)

a. ABCD is een willekeurige vierhoek (fig. 1).

H_1, H_2, H_3, H_4 zijn de hoogtepunten van de driehoeken ABS, BCS, CDS en DAS.

U_1, U_2, U_3, U_4 zijn de middens van de zijden AB, BC, CD en DA.

Het is duidelijk, dat de vierhoeken U en H parallellogrammen zijn; deze parallellogrammen *zijn gelijkvormig*.

Bewijs: Omdat de zijden van U en H onderling loodrecht zijn, hebben U en H gelijke hoeken (φ en $180°-\varphi$, waarbij φ de hoek der diagonalen van ABCD is).

Verder is
$$\left.\begin{array}{l} H_1X = XB \cot\varphi \\ H_4X = DX \cot\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} H_1H_4 = BD \cot\varphi. \\ H_1H_2 = AC \cot\varphi. \end{array}$$

Hiermede is de geponeerde gelijkvormigheid bewezen; de gelijkvormigheidsfactor $= \frac{1}{2} : \cot \varphi$.

Omdat beide parallellogrammen loodrechte zijden hebben zijn ook de diagonalen onderling loodrecht; de gelijkvormigheid is immers direct.

$$U_2U_4 \perp H_1H_3$$
$$U_1U_3 \perp H_2H_4.$$

b. Zijn de punten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 de zwaartepunten van de driehoeken ABS, BCS, CDS en DAS, dan ziet men gemakkelijk in dat ook geldt:

$$Z_2Z_4 \perp H_1H_3$$
$$Z_1Z_3 \perp H_2H_4$$

(dit vraagstuk vond ik in Praxis der Mathematik 9. Heft 3 p. 81).

d.

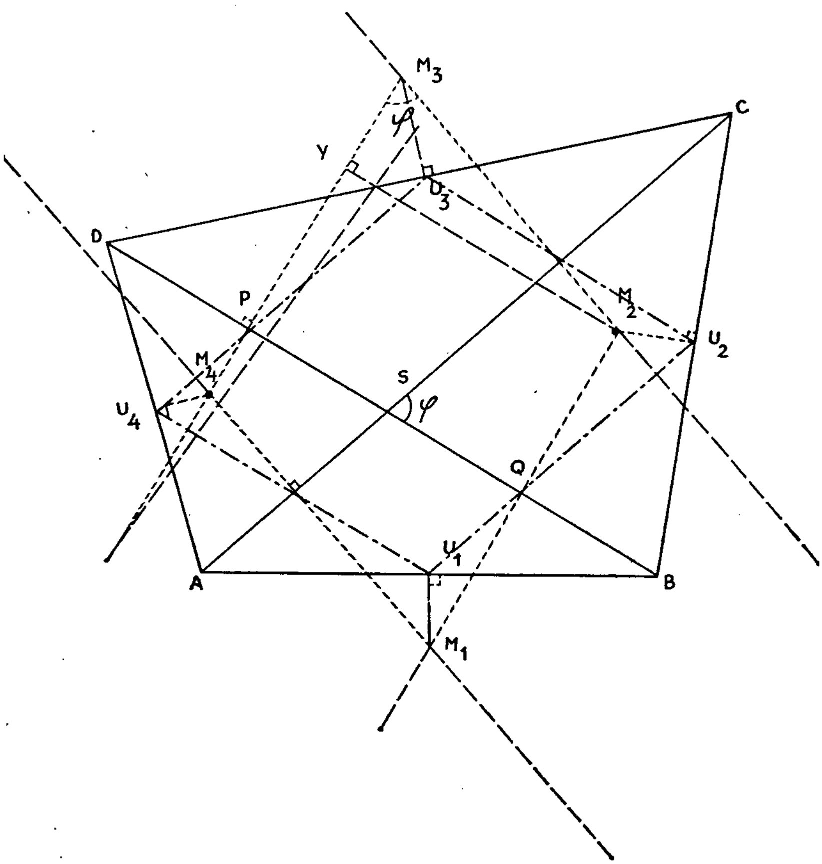

Fig. 2

c. Is ABCD een koordenvierhoek, dan is bv. $\triangle BCS \backsim \triangle ADS$ en is dus $SH_2 : SV_2 = SH_4 : SV_4$; dan is dus ook — omdat $H_2H_4 // V_2V_4$ —

$$U_1U_3 \perp V_2V_4$$

en

$$U_2U_4 \perp V_1V_3$$

d. De vierhoek ABCD is in de figuur 2 overgetekend; M_1, M_2, M_3, M_4 zijn de middelpunten der omgeschreven cirkels van de driehoeken ABS, BCS, CDS en DAS. Van de parallellogrammen U en M zijn de zijden weer onderling loodrecht en de hoeken derhalve gelijk.

Nu is $\sin\varphi = \dfrac{YM_2}{M_2M_3}$, dus $M_2M_3 = \dfrac{PQ}{\sin\varphi} = \dfrac{BD}{2\sin\varphi}$

en $M_2M_1 = \dfrac{AC}{2\sin\varphi}$

De parallellogrammen U en M zijn dus gelijkvormig met gelijkvormigheidsfactor $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{2\sin\varphi}$.

Totaal is gevonden $U \backsim H \backsim M$

$\left(\text{zijdenverhouding } \dfrac{1}{2} : \cot\varphi : \dfrac{1}{2\sin\varphi} = 1 : 2\cot\varphi : \dfrac{1}{\sin\varphi}\right)$.

Van U en M staan de diagonalen niet loodrecht op elkaar, omdat de gelijkvormigheid indirect is.

e. 1. M en H zijn congruent als $2\cot\varphi = \dfrac{1}{\sin\varphi}$; dat geldt als $\varphi = 60°$.

2. Oppervlak $U = \frac{1}{2}O$ (O is het oppervlak van ABCD).
Oppervlak $H = 4\cot^2\varphi \cdot \frac{1}{2}O = 2\cot^2\varphi \cdot O$.
Oppervlak $M = \dfrac{1}{\sin^2\varphi} \cdot \frac{1}{2}O = \dfrac{1}{2\sin^2\varphi} \cdot O$

Daaruit volgt

$$4O_M - O_H = \left[\frac{2}{\sin^2\varphi} - \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right] O = 2O.$$

f. Wij komen terug op het geval *c.* — ABCD is een koordenvierhoek, $SV_2 \perp BC$, $SV_4 \perp AD$. Bekend is dus $V_2V_4 \perp U_3U_1$ (zie *c* en figuur 3*a*). Bovendien zal blijken dat V_4V_2 door U_1U_3 wordt gehalveerd, m.a.w. $U_3V_2U_1V_4$ is een vlieger.

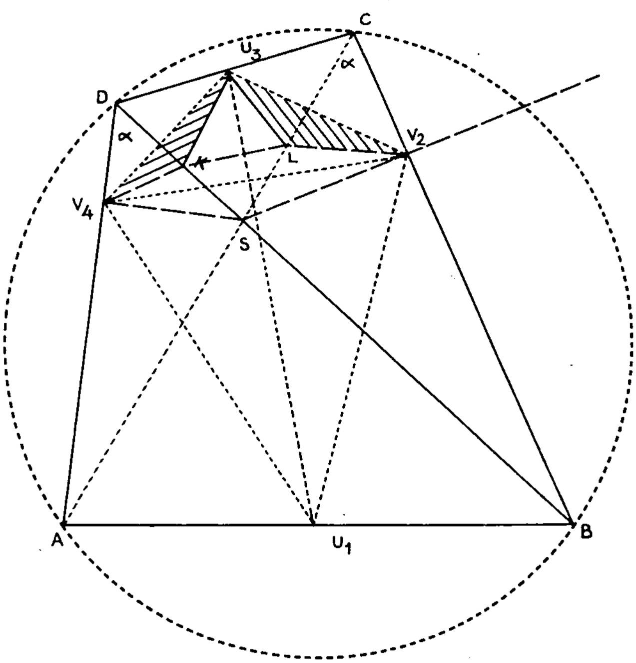

Fig. 3a (in deze figuur moet SL = LC zijn)

Zij DK = KS en CL = LS.

$$\left.\begin{array}{l} KV_4 = KS = U_3L \\ U_3K = LS = LV_2 \\ \left.\begin{array}{l}\angle DKU_3 = \angle U_3LC \\ \angle DKV_4 = 180^\circ - 2\alpha \\ \qquad = \angle CLV_2\end{array}\right\} \rightarrow \angle V_4KU_3 = \angle U_3LV_2 \end{array}\right\} \rightarrow \triangle U_3KV_4 \cong \triangle V_2LU_3$$

$$\downarrow$$

$$U_3V_4 = U_3V_2$$

Evenzo $U_1V_4 = U_1V_2$

$\therefore U_3V_2U_1V_4$ is een vlieger.

g. In figuur 3b is de vierhoek ABCD uit figuur 3a opnieuw getekend en is het snijpunt T van AD en BC bepaald.

$TW_4 \perp BD$ en $TW_2 \perp AC$.

Dan is $W_4W_2W_2V_4$ een gelijkbenig trapezium.

Bewijs: W_2, V_2, V_4 en W_4 liggen op een cirkel met middellijn TS.

$\angle T_1 = 90^\circ - \alpha = \angle T_2$.

$W_4V_4 = W_2V_2$.

Omdat $U_3U_1 \perp V_4V_2$ stond — zie *f*. — gaat U_3U_1 ook

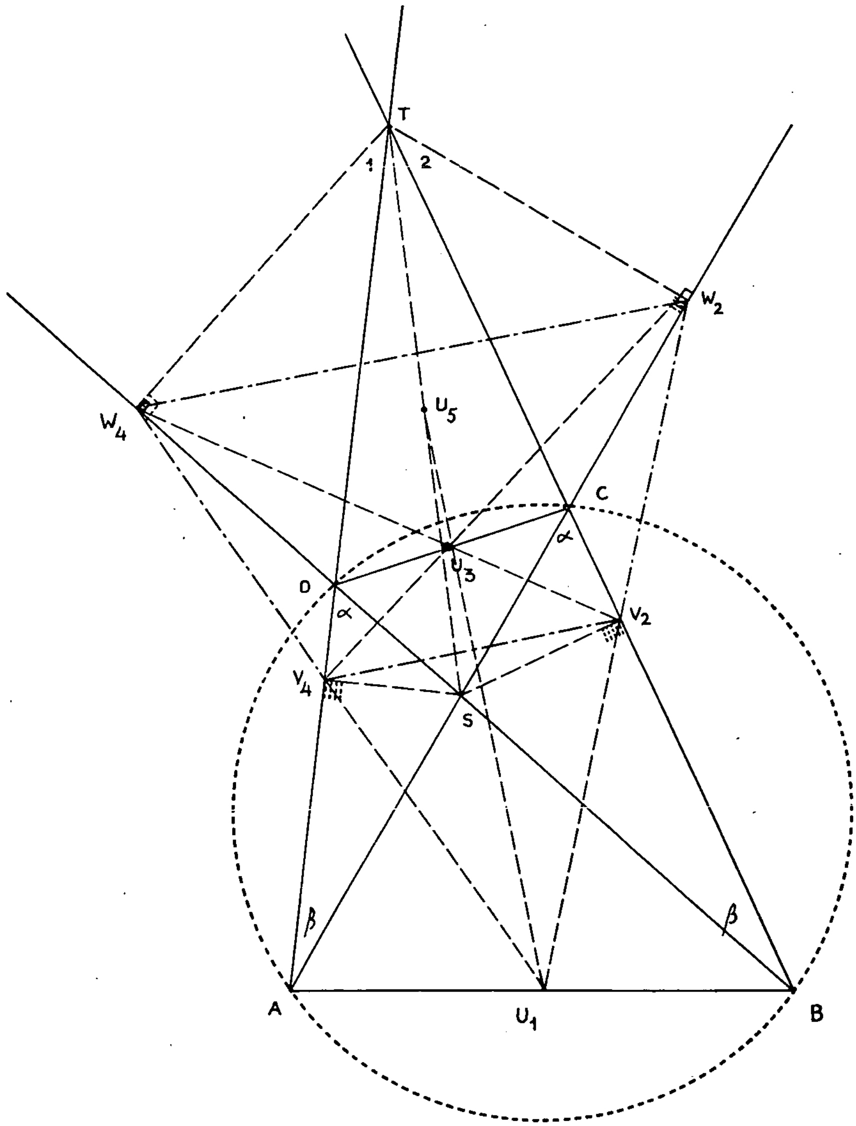

Fig. 3b

door het middelpunt van de cirkel en ligt het midden van TS zoals bekend op U_3U_1.

h. $\dfrac{V_4D}{V_4A} \cdot \dfrac{U_1A}{U_1B} \cdot \dfrac{W_4B}{W_4D} = \dfrac{V_4D}{W_4D} \cdot 1 \cdot \dfrac{W_4B}{V_4A} = \dfrac{V_4S}{W_4T} \cdot \dfrac{W_4T}{V_4S} = 1.$

W_4V_4 gaat dus door U_1

evenzo: W_2V_2 gaat door U_1
W_2V_4 gaat door U_3
W_4V_2 gaat door U_3.

Vlieger en gelijkbenig trapezium vertonen dus een zeer merkwaardige onderlinge ligging.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN [1]

1. *School Science and Mathematics* (LXVII, 8–9 en LXVIII, 1–5; november 1967 – mei 1968).

D. Rappaport, Logic, psychology and the new mathematics;
J. C. Biddle, Effectiveness of two methods of instruction of high school mathematics;
S. E. Wade, Parent participation as an aid to the child's learning;
Sh. Yeshurun, Single-valued functions vs many-valued operations;
R. C. Hicks, Topics in mathematics for elementary school teachers.

W. A. Miller, Partial fractions for the junior and senior high mathematics programs;
N. Locksley, A mathematical look at evaluation of teaching.

J. M. Jeffery, A senior high school math.-science seminar;
L. M. Schell, Learning the distributive property by third graders;
J. E. Inskeep, Pre-service preparation to teach elementary school mathematics.

R. B. Harvey, Grade seven and a computer;
M. W. Keller, Semantics and mathematics;
R. Marx, Mathematics can be fun;
J. Jeffrey, Thoughts on testing.

Th. B. Milligan, Simplified item analysis for better grading;
J. M. Scandura e.o., Research in mathematics and science education;
Ch. Mangrum a.o., Doctoral dissertation research in science and mathematics, reported for 1965;
J. W. Alspaugh, The relationship between high school algebra and the algebra of computers.

C. N. Hedley, The relationship of personality factors to scientific and mathematical ability factors;
M. L. Keedy, Ares, volumes and sweeps;
Th. C. Gibney a.o., Utilizing a flow chart in teaching ninth grade mathematics;
R. E. Reys, Mathematical competence of preservice elementary school teachers;
C. B. Read, Reading numbers expressed in figures.

A. R. Amir-Moéz, Folding a square into a number of subsquares;
W. R. Spickerman, A note on casting out (N — 1)'s;
M. F. Willerding, The uselessness of mathematics;
J. D. Patterson, A new aspect of uniform circular motion.

---

[1]) Voor deelname aan de leesportefeuille waarin onderstaande tijdschriften zijn opgenomen wende men zich tot G. A. J. Boost, Parklaan 107a, Roosendaal (NB).

2. *The Mathematical Gazette* (LI, 376 en 377 en 378, LII, 379; mei 1967–februari 1968).

H. O. Davis, 33-solitaire; new limits, small and large;
M. Deakin, Estimating bounds on athletic performance;
A. Zirakzadeh, A note on projective polygons;
S. M. Collings, Cyclic polygons and their Euler lines;
G. Hoffman de Visme, A note on conic envelopes;
F. Choriton, Some potential problems involving spheres;
M. T. L. Bizley, A note on derangements;
H. T. Croft, Some geometrical thoughts;
J. E. Drummond, An exploded disc.

F. W. Kellaway, The teacher of mathematics and society;
F. J. Budden, Modern mathematics and music;
A. J. M. Spencer, The education of mathematicians for industry;
J. P. Marchant, Computer education;
G. S. Smith, On a new method of calculating the roots of algebraic equations;
R. J. Montgomery, Aboriginal applied mathematics.

E. de St. Q. Isaacson, Mathematics of the pop charts;
J. A. E. Simons, A new triangle on the election;
R. Tanner, Notes for the classroom;
P. Holgate, The size of elephant herds;
L. A. Vermeulen, The solution of a certain number polynomial equations;
E. J. F. Primrose, Cyclic projectivities;
D. E. Daykin a.o., Markov chains and snakes and ladders.

H. S. M. Coxeter, Mid-circles and loxodromes;
J. P. N. Philips, A simple method of constructing certain magic rectangles of even order;
A. K. Austin, Finite and infinite sets;
M. J. Wenninger, Some interesting octahedral compounds;
T. J. Fletcher, Combining matrices;
J. Vickery, Programming a desk computer;
J. Cable, A vectorial Dedekind.

3. *The Mathematics Teacher* (LXI, 1–5; januari 1968–mei 1968)

B. Rusof, Error analysis without calculus;
J. E. Holmer, Continued fractions;
M. Gardner, A magic square for the new year;
M. Basil, Pascal's pyramid;
St. Szabo, Several ways of translating a conditional sentence;
E. R. Ranucci, Jungle-gym geometry;
W. K. Viertel, A visual aid for an elementary applied maximum problem in calculus;
Ch. G. Moore, Pierced polygons;
J. H. Jordan, Small-digit representation of real numbers;
K. Streitmatter a.o., Twelfth-grade high school mathematics: Calculus?
I. Vinigradov, Mathematics looking ahead;
Ch. R. Eilber, College preparatory mathematics: preparation for what?

A. Arcache, The use of elastic for illustrating homothetic figures;
G. L. Henderson, Mathematics via radio in Wisconsin;
D. D. Spencer, Computers: their past, present and future;
C. C. Read, Debutable or erroneous statements relating to the history of mathematics;
J. H. Hlavaty, The Czechoslovak national mathematical olympiads.

E. R. Ranucci, A tiny treasury of tessalations;
J. J. Pedersen, Dressing up mathematics;
R. Troyer, Rotations, angles and trigonometry;
J. C. Merwin a.o., Assessing the progress of education in mathematics;
N. A. Court, Mathematics in the history of civilisation;
I. Hollingshead, Mathematics education in Kenya;
M. G. Schaefer, Revision of secondary mathematics in a selected number of schools;
M. J. Sneider, Achievement and programmed learning.

Irving Adler, What shall we teach in high school geometry?
E. G. Begle, SMSG: the first decade;
V. Keiser, The relationship between nontrivial automorphisms and order of fields;
M. L. Archambeau, Pythagorean triples grouped into families;
J. Garfunkel, A project in mathematics;
Sh. Libeskind, A simple constructive proof of two identities;
J. A. Rice, The affinity of mathematics to music;
H. Andersen, A nontrivial introduction to irrational numbers;
L. E. Boyer, The five-pointed star;
J. Hardesty, On similarity transformations;
N. Schaumberger a.o., Concerning the rational zeros of polynomials;
J. W. A. Young, The teaching of mathematics;
K. and Helen Easterday, Ninth-grade algebra, programmed instruction and sex differences;
G. N. Wollan, Maclaurin and Taylor and their series;
H. S. M. Coxeter, Music and mathematics;
J. N. Kapur, Some recent efforts for improvement of school mathematics in India.

W. J. Sanders a.o., Congruency geometry for junior high school;
R. L. Morton, Divisibility by 7, 11, 13 and greater primes;
J. M. Moser, Mathematics by analogy;
W. Miller a.o., Gaussian, parabolic and hyperbolic numbers;
Z. Usiskin, Six nontrivial equivalent problems;
D. Paisley, An interesting observation regarding the sine curve;
E. M. McGehee, Door spaces;
J. M. Etkin, Binomial coefficient formulas by general reasoning;
Carol Ash, A plausibility argument for l'Hôpital's rule;
G. W. Evans, Some of Euclid's algebra;
B. L. Boe, A study of ability of secondary school pupils;
M. Garcia, Reforms in mathematical education in Central and South America.

Ch. Buck, What should high school geometry be?
Ch. A. McComas, A proof of the space-separation postulate;
Th. F. Mulcrone, A plea for the terminology "flex point";

R. H. Shudde, The two-by-two transportation problem;
St. A. Smith, What does a proof really prove?

H. C. Trimble, The heart of teaching;
Th. A. Romberg a.o., The development of mathematics achievement tests;
N. Schaumberger, Another application of De Moivre's theorem;
J. A. Auclair a.o., A topological problem for the ninth-grade mathematics laboratory;
A. N. Whitehead, Mathematics and liberal education;
R. D. Pethtel, Closed-circuit television instruction in college mathematics;
A. O. Garder, The history of mathematics as a part of the history of mankind;
L. Smith, Continual in-service education;
H. F. Fehr, Centers of mathematical pedagogy.

DE COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

Universiteitscentrum De Uithof, Budapestlaan 6, Utrecht (030)-511411, tsl. 230.

De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde brengt ter kennis dat zij in het cursusjaar 1969/1970 de navolgende cursussen voor eerste graadsleraren hoopt te organiseren:

1)	4, 5, 6 september	1969	– "*Meetkunde Onderbouw*" te Utrecht
2)	11, 12, 13 september	1969	– "*Meetkunde Onderbouw*" te Groningen
3)	11, 12, 13 september	1969	– "*Computerwiskunde* (herh.)" te Eindhoven
4)	23, 24, 25 oktober	1969	– "*Algebra & Analyse*" te Utrecht
5)	5, 6, 7 januari	1970	– "*Meetkunde met vectoreu*" te Groningen
6)	5, 6, 7 januari	1970	– "*Computerwiskunde* (vervolg)" te Utrecht

De cursussen hebben evenals het vorig jaar een duur van drie dagen. Zij vangen steeds aan op donderdag 10.30 uur en eindigen zaterdags ca. 12.30 uur Bij de bepaling van het karakter der cursussen is uitgegaan van de ervaring opgedaan in het afgelopen jaar. Naast de wetenschappelijke achtergrond zal mede afhankelijk van het onderwerp der cursus, weer ruime aandacht worden besteed aan de methodisch/didaktische aspecten van de schoolstof.

De Secretaris van de C.M.L.W.
Prof. Dr. A. F. Monna.

BOEKBESPREKING

Ir. W. Geerts, drs. H. A. D. Paris, J. Onderstal, *Meetkundewerkboek voor de brugklas*, Nijgh & van Ditmar N.V., 's-Gravenhage, 1968, 89 blz., *f* 7.25.

Reeds vanaf de eerste bladzijde wordt grote aandacht besteed aan duidelijke onderscheidingen en formuleringen, waarbij tekens uit de leer van de verzamelingen, waar in hoofdstuk II verder op wordt ingegaan, goede diensten bewijzen. Dit brengt echter direct consequenties mee. De uitspraak: „ Als $S \in l$ en ook $S \in m$ dan noemen we S het snijpunt van l en m" is alleen juist met een figuur als illustratie. Het lijkt me beter, wil men later de notatie $l \cap m$ die hierop volgt, niet moeten wijzigen, direct $l \cap m$ te vertalen met „de gemeenschappelijke elementen (punten) van l en m".

Indien de rechte lijnen *l* en *m* slechts één gemeenschappelijk punt hebben, dan spreekt men van snijdende lijnen.

De transformaties: spiegeling (lijn- en puntspiegeling), rotatie en translatie komen in deze volgorde als congruentie-transformaties aan de orde. Het boek besluit met een paragraaf over coördinaten.

Wel heb ik enig bezwaar tegen de methode antwoorden te laten invullen in de tekst, waardoor een dergelijk nogal duur boek slechts éénmaal te gebruiken is.

Aan de uitvoering, in nogal groot formaat, is alle zorg besteed. Gaarne ter kennismaking aanbevolen.

Burgers

Algebra, een geprogrammeerde cursus voor MAVO/HAVO deel 11, van de werkgroep Geprogrammeerde algebra. In opdracht van de stichting Onderwijs Oriëntatie. Uitgegeven door J. M. Meulenhoff, J. Muusses, Nijgh & van Ditmar, Spruyt, van Mantgem & De Does, W. J. Thieme & Cie. Besteladres. Nijgh & van Ditmar, Badhuisweg 232, den Haag.

De werkgroep bestaat uit de heren: F. Bouman, ir. W. Geerts, W. van der Klooster, dr. D. J. Lock, drs. J. Niphuis en J. Onderstal. Dit leerboek loopt parallel aan „Algebra, een geprogrammeerde cursus voor het VHMO" deel 1, vandaar de aanduiding 11, zo zal deel 2 gelijk op lopen met deel 12 enz.

De uitgave is mogelijk gemaakt door een subsidie van de Stichting voor onderzoek van het onderwijs (S.V.O.). De eerste versie is, volgens het voorbericht, doorgewerkt door ongeveer 600 leerlingen verspreid over vijf scholen. De opgedane ervaringen en gegevens zijn gebruikt voor de tweede serie, die op negen scholen is doorgewerkt met in totaal ongeveer 750 leerlingen. De scholen die aan het testen hebben medegewerkt waren voor het grootste deel MAVO-(ULO)scholen.

Dit is de derde versie.

Elk hoofdstuk is verdeeld in fundamentele schakels, daarna een overzicht en test, gevolgd door herhalingsschakels, waarna opnieuw een test.

Wil men deze cursus met recht recenseren, dan zal men deze aan de praktijk moeten toetsen. Daarom wil ondergetekende liever enkele opmerkingen plaatsen, die betrekking hebben op z.i. niet gelukkige formuleringen. Zo zou ik 2^3 liever lezen: „twee tot de macht drie". Als $a^3 \times a^5$ *vereenvoudigd* wordt tot a^8, dan is het beter (blz. 147) om niet te zeggen: factoren met verschillend grondtal kun je niet *samennemen*. Waarom niet? „Kun je niet vereenvoudigen?"

Dat een vergelijking (blz. 205) een algebraïsche regel met één letter, zonder woorden geschreven met behulp van één „is-gelijk-teken" is verre van fraai (blz. 206). Het *zoeken* van de oplossingenverzameling noemen we het *oplossen* van de vergelijking, mag ook wel scherper geformuleerd worden.

Evenmin fraai is op blz. 198 „Er *zit* in deze verzameling een getal." Wat voor zin het heeft om nog over een *valse* vergelijking te spreken (blz. 208) ontgaat me.

Zo vindt men op blz. 41 „We kunnen $p + 3 = 9$ *kloppend* maken". Maar ik laat het oordeel gaarne over aan gebruikers. Mijn indruk, dat de cursus doordacht en geleidelijk opklimmend is gemaakt, wil ik gaarne tot besluit vermelden. Aan de uitvoering werd veel zorg besteed.

Burgers

Adele Leonhardy, *College algebra*, uitg. John Wiley and Sons, 468 blz., Prijs 70 sh.

Het boek begint met een uiteenzetting over de wiskunde als deductieve wetenschap, de eerste beginselen van de logica en over verzamelingen. Met gebruik van deze kennis worden daarna de uitbreidingen van de getallenverzameling besproken tot en met de complexe getallen. Veel aandacht wordt hierbij besteed aan de elementaire algebraïsche rekentechniek.

Na een hoofdstuk over volledige inductie volgen de onderwerpen vergelijkingen en ongelijkheden. Hoewel de aanpak modern is, wordt er uiteindelijk niet meer behandeld dan een vierdeklasser van ons gymnasium over deze onderwerpen heeft geleerd. Hetzelfde geldt voor de hoofdstukken VIII en IX: ,,Relaties, functies en grafieken'' en ,,Stelsels vergelijkingen''. Om een indruk te geven van het niveau: Asymptoten en continuïteit komen aan bod zonder dat het limietbegrip is geïntroduceerd.

Hoofdstuk X: ,,Matrices en determinanten'', vind ik maar matig geslaagd. De ingevoerde begrippen worden gebruikt bij de oplossing van stelsels vergelijkingen, maar op een weinig doorzichtige wijze. Het is mij trouwens een raadsel, hoe de lezer, zonder voorafgaande bepaling een matrix met een getal kan vermenigvuldigen (zie bijv. opg. 19 van § 2).

Hoofdstuk XI bespreekt de reststelling, geeft regels om rationale wortels van hogere machtsvergelijkingen te vinden en laat zien hoe men irrationale wortels kan benaderen door lineaire interpolatie. De bekende transcendente functies op eenvoudig niveau besproken, besluiten de theorie van functies en vergelijkingen.

Het boek eindigt, na een hoofdstuk over permutaties, combinaties en binomium van Newton, met een summiere bespreking van de waarschijnlijkheidstheorie.

Conclusie: een keurig uitgevoerd, zeer overzichtelijk werk met veel vraagstukken ook op brugklasniveau. Betwijfeld moet worden of het in ons land voorziet in een behoefte. Voor de leraar is er weinig nieuws in te vinden, noch in wiskundig, noch in didactisch opzicht.

Voor een leerlingenbibliotheek zou ik aan een minder uitgebreid, maar diepgaander boek, over één of meer minder schoolse onderwerpen de voorkeur geven.

L. J. M. v. d. Zijden

Paul R. Halmos, *Naive Mengenlehre*, Van den Hoeck und Ruprecht, Göttingen, 1968, DM. 10,80, 132 blz.
Vertaling van: Naive set theory.

De originele Amerikaanse uitgave van 1960 is reeds gevorderd tot de zesde druk. Dit succes werd aanleiding tot de te bespreken vertaling, die als Band 6 werd opgenomen in de serie ,,Moderne Mathematik in elementarer Darstellung''.

We hebben hier te maken met een merkwaardig boekwerk, waarvan de titel direct al verklaring behoeft.

In de wiskundige wereld stelt men de z.g. naieve verzamelingenleer van Cantor tegenover de axiomatische verzamelingentheorie. Hieruit zou men kunnen afleiden dat Halmos zich bezig houdt met Cantor's leer. In werkelijkheid bedoelt de schrijver: axiomatische verzamelingenleer vanuit een naief standpunt. En dit wil dan zoveel zeggen als: niet de logische verbindingen tussen de axioma's worden bestudeerd, maar er wordt met behulp van de axioma's in zo eenvoudig mogelijke taal

Naive Mengenlehre is een compact geschreven werk over verzamelingen, opgezet

een collectie eigenschappen bewezen van en verband gelegd tussen de gedefinieerde begrippen. Hierbij moet ik dan direct aantekenen dat vele eigenschappen wel genoemd worden maar slechts met een korte schets van het bewijs vergezeld gaan. Enkele stellingen, zoals b.v. het lemma van Zorn en dat van Schröder-Bernstein worden geheel bewezen terwijl ook uitvoerig wordt ingegaan op de equivalentie van verscheidene beweringen met het z.g. keuze-axioma.
op basis van de Zermelo-axioma's, waarbij de lezer verondersteld wordt te weten dat de leer van Cantor vastloopt in een aantal paradoxen. Gaan we echter van die kennis uit dan ervaart men op meerdere plaatsen waarom geen z.g. al-verzameling bestaat en waarom zo véél axioma's nodig zijn voor een tegenspraakvrije opbouw van de theorie.

Stellig wordt niet alles meegedeeld wat de theorie omvat, maar naar mijn bescheiden mening kan elke wiskundige met de geboden stof ieder wiskundig gebied betreden waar de verzamelingenleer benut wordt.

Een mooi boekwerk, dat met zorg bestudeerd dient te worden maar dan ook alleszins bevredigt.

J. J. Wouters

John G. Kemeny and Thomas E. Kurtz, *Basic Programming*, 122 blz., John Wiley & Sons, Inc. New York, 1967, ing. 44 sh.

Dit is een handleiding voor het bestuderen van de programmeertaal BASIC. Deze taal is van eenvoudiger structuur dan ALGOL, is daardoor minder geschikt voor ingewikkelde mathematische berekeningen maar wel voor vele niet-wiskundige toepassingen. Het boek is overzichtelijk en duidelijk geschreven.

A. I. van de Vooren

P. L. de Vries, *Goniometrie, driehoeksmeting en boldriehoeksmeting voor hogere Zeevaartscholen*, J. Noorduyn en Zoon, N.V., Gorinchem, 1967. 187 blz. 13e druk. Prijs *f* 10,75.

Deze 13de druk is een herziene 12de druk door leden van de sektie N XVI. De behandeling is traditioneel.

Burgers

Dr. N. C. H. Wijngaards, *De beroepsopleiding van de leraar*; 16 blz., *f* 2,50, J. B. Wolters, Groningen, 1967.

Deze brochure bevat de tekst van de voordracht waarmee het cursusjaar 1967-1968 van de Gelderse Leergangen te Arnhem werd geopend.

De auteur onderscheidt „vakopleiding" en „beroepsopleiding" en beschouwt de laatste als de ruggegraat van de leraarsopleiding. Hij acht voldoende overeenkomstige trekken aanwezig in de functie, de plaats en de methodiek van bijvoorbeeld de wiskundeleraar en de leraar moderne talen of geschiedenis om voor allen het „leraarschap" in abstracto te behandelen. De auteur beschouwt de leraar als vakspecialist, als docent-leider en als opvoeder. Hij maakt waardevolle opmerkingen over de moedertaal als verplicht studievak in de leraarsopleiding. De aanstaande leraar zal de specifieke taal- en denkvormen van zijn eigen vak moeten leren kennen, herkennen en beheersen; hij zal in het gebruik ervan moeten worden geschoold. Gaarne aanbevolen.

Joh. H. Wansink

M. Kindt, Drs. A. J. Th. Maassen, dr. C. P. S. van Oosten, *Moderne Algebracursus*, Eerste deel: Brugklas, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1968, 160 blz., *f* 5.25.

Het doel, dat de schrijvers beogen is tweeërlei:
1) inzicht in de structuren van de verzameling **N** van de natuurlijke, de verzameling **Z** van de gehele en de verzameling **Q** van de rationale getallen.
2) inzicht in de betekenis van letters in de algebra.

De cursus zal uit twee delen bestaan.

Deel 1 behandelt in hoofdstuk 0 enkele verzameling-theoretische begrippen (element, $=$, $\neq$, $\{\ \}$, $\in$ en $\notin$, $\subseteq$ en $\supseteq$, $\cap$ en $\cup$).

Hoofdstuk 1 de verzameling $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ de ordening, getallenlijn, de bewerkingen die gesloten zijn in **N** en die niet gesloten zijn in **N**. De tabellen voor het uitvoeren van de operaties keren in elk hoofdstuk opnieuw, maar uitgebreid terug.

Hoofdstukken 2 en 3 behandelen de verzameling **Z** en de ,,algebra-taal", waarna de rekenwetten in **Z** geformuleerd worden met behoud van commutativiteit, associativiteit en distributiviteit.

Hoofdstuk 4 geeft ,,veelterm-algebra", met eenvoudige ontbindingen. Hoofdstuk 5, vergelijkingen en ongelijkheden, waarbij de interrogatieve kwantor goede diensten bewijst. Terecht ontbreken m.i. de woorden: vals en identiek. In hoofdstuk 6 tenslotte de rationale getallen (op blz. 138, 10de regel v.o. staat een keer: rationele).

De cursus is met zorg samengesteld. In elke paragraaf zijn opgaven voor meer pientere leerlingen. Deze cursus zal zijn weg wel vinden.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

216. Verdeel een regelmatige twaalfhoek in 24 congruente regelmatige veelhoeken zo, dat uit deze 24 veelhoeken twee congruente regelmatige twaalfhoeken gevormd kunnen worden. (B. Kootstra)

217. Na hun eindexamen vwo gaan vier meisjes en zeven jongens samen met vakantie. De tocht is zo goed bevallen, dat de jongens besluiten de meisjes elke dag te schrijven. Ze schrijven iedere werkdag, d.w.z. niet op zaterdag en niet op zondag. Elke dag schrijft elk van de jongens een brief aan één van de meisjes. Ze zorgen ervoor, dat geen enkele dag naar geen van de meisjes een brief verzonden wordt. Als a en b verschillende dagen zijn, dan zorgen ze er verder voor, dat op de dag b ten minste één jongen niet aan hetzelfde meisje een brief schrijft als op de dag a.

Op een gegeven moment bleken alle mogelijkheden uitgeput. Toen besloot een van de jongens een van de meisjes te trouwen. Wordt gevraagd hoeveel kinderen er uit dit huwelijk geboren werden.

OPLOSSINGEN

214. Vijf personen staan in een kring. Ieder geeft op een bepaald ogenblik elk van zijn buren de helft van zijn bezit. Dit proces wordt onbeperkt herhaald. Wat gebeurt er op den duur?

Noem de personen in cyclische volgorde A, B, C, D, E. We vereenvoudigen het probleem tot: A heeft een aanvangsbezit van 1 munteenheid, de overigen bezitten aanvankelijk niets. Het algemene probleem is hier direct uit afleidbaar.

Ter oriëntatie maken we een staatje van de verhouding, waarin de munteenheid over de vijf personen verdeeld wordt na 1, 2, . . ., 8 verdelingen.

A	B	C	D	E
1	.	.	.	.
.	1	.	.	1
2	.	1	1	.
.	3	1	1	3
6	1	4	4	1
2	10	5	5	10
20	7	15	15	7
14	35	22	22	35
70	36	57	57	36

Hier gebeurt iets, dat lijkt op de constructie van de driehoek van Pascal. We kunnen dit staatje overschrijven, maar nu met behulp van binomiaalcoëfficiënten. We schrijven daarbij c_k^n voor $\binom{n}{k}$.

A	B	C	D	E
c_0^0	.	.	.	.
.	c_1^1	.	.	c_0^1
c_1^2	.	c_2^2	c_0^2	.
.	c_2^3	c_0^3	c_3^3	c_1^3
c_2^4	c_0^4	c_3^4	c_1^4	c_4^4
$c_0^5 + c_5^5$	c_3^5	c_1^5	c_4^5	c_2^5
c_3^6	$c_1^6 + c_6^6$	c_4^6	c_2^6	$c_0^6 + c_5^6$
$c_1^7 + c_6^7$	c_4^7	$c_2^7 + c_7^7$	$c_0^7 + c_5^7$	c_3^7
c_4^8	$c_2^8 + c_7^8$	$c_0^8 + c_5^8$	$c_3^8 + c_8^8$	$c_1^8 + c_6^8$

Op een willekeurige rij komen in de vijf kolommen dus te staan

$$\sum c_{5i}^n, \quad \sum c_{1+5i}^n, \quad \sum c_{2+5i}^n, \quad \sum c_{3+5i}^n, \quad \sum c_{4+5i}^n,$$

waarbij van n zal afhangen, welke van deze vijf getallen in de eerste kolom komt te staan.

Hieruit volgt, dat de eindtoestand, waartoe de verdeling nadert, een gelijkmatige verdeling van het geld over de vijf personen is. Men kan dit bewijzen door ervan gebruik te maken, dat een binomiale verdeling, als $n \to \infty$, als limiet heeft een normale verdeling.

215. Een rechthoekig blok, waarvan de rechthoekszijden zich verhouden als $3:3:5$ is opgebouwd uit congruente kubussen. Een lichaamsdiagonaal gaat door 98 van deze kubussen. Uit hoeveel kubussen bestaat het blok?

Onderstel het blok bestaat uit $3 \cdot 3 \cdot 5$ kubussen. Een lichaamsdiagonaal snijdt dan 2 ribben en gaat dus door

$$1 + (3-1) + (3-1) + (5-1) - 2 = 7 \text{ kubussen.}$$

Het blok is dus opgebouwd uit

$$14 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 630 \text{ kubussen.}$$