EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

II — 1 OKTOBER 1968

INHOUD

Drs. B. W. van der Krogt: De betekenis van concreet materiaal voor het wiskundig leerproces 33
Prof. Dr. J. J. Seidel: Discrete meetkunde 38
Onderwijsvernieuwing in Scandinavië 45
Drs. L. van den Brom:
Modernisering Leerplan Wiskunde 51
Korrel 55
J. J. Harkema: Het laatjesprobleem 57
Boekbespreking 59
Liwenagel 62
Recreatie 63

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE BETEKENIS VAN CONCREET MATERIAAL VOOR HET WISKUNDIG LEERPROCES [1])

door

Drs. B. W. van der Krogt

Het onderstaande is de bespreking van een stukje uit het inmiddels zeer omvangrijke werk van Z. P. Dienes, momenteel hoogleraar in de psychomathematiek aan de universiteit van Sherbrooke (Canada).

Ik heb het onderwerp gekozen vanwege zijn belang op zichzelf en omdat ik hiermee de grondslagen kan illustreren van Dienes' didactische theorie. Vooraf wil ik opmerken, dat in de huidige ontwikkelingen in deze richting duidelijk parallellen zijn aan te wijzen met het werk van de Nederlandse pioniers op dit gebied: de heer en mevrouw Van Hiele.

Het experimenteren met concreet materiaal

1) We nemen een uit dik tekenpapier gevormd regelmatig viervlak en benoemen elk zijvlak door er een figuurtje op te tekenen bijv.: 'n huisje, 'n boompje, 'n paddestoel en een poppetje. We prikken nu een breinaald door het viervlak van een hoekpunt naar het centrum van de overstaande zijde. Door het viervlak te draaien om deze breinaald komt de volgende kring te voorschijn:

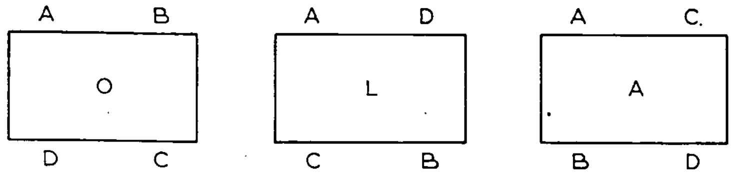
huisje — boompje — paddestoel — huisje, enz.

Nog drie andere kringen ontstaan door de breinaald door de drie overige hoekpunten te prikken.

We kunnen het viervlak ook draaien om een breinaald, gestoken door de middens van twee overstaande zijden. Zo ontstaan vier andere kringen, bijv. boompje — paddestoel — boompje, enz.

2) We gaan uit van de volgende situatie: Vier leerlingen: Anneke, Bart, Carla en Dolf die op een internaat studeren, zitten bij het ontbijt, de lunch en het avondeten samen aan dezelfde tafel. We zetten ze zo, dat er bij elke maaltijd geen twee leerlingen twee keer naast of tegenover elkaar zitten.

[1]) Verslag van een lezing gehouden voor de wiskundewerkgroep der W.V.O. op 17 februari 1968.

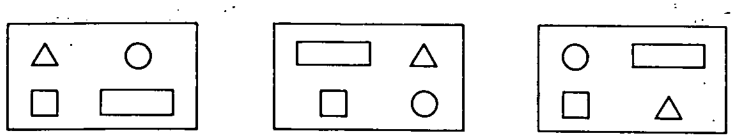


De leerlingen bedienen zelf aan tafel volgens toerbeurt en wel volgens een der volgende regels:

a) Bij elke volgende maaltijd bedient dezelfde ll. als bij de vorige. A (ontbijt) — A (lunch) — A (avondeten) enz.
b) Bij elke volgende maaltijd bedient de buurman(vrouw) van de vorige maaltijd, bijv.
A(o) → B(l) → C(a) → A(o) → B(l), enz.
c) Bij elke volgende maaltijd bedient de overbuurman.
d) Bij elke volgende maaltijd bedient de schuine overbuurman, bijv.: Ao → Cl → Da → Ao, enz.
e) Twee maaltijden verder bedient dezelfde ll., bijv.: Do → Da → Dl → Do enz.
f) Twee maaltijden verder bedient de buurman.
g) Twee maaltijden verder bedient de overbuurman.
h) Twee maaltijden verder bedient de schuine overbuurman.
i) Bij dezelfde maaltijd bedient dezelfde ll. bijv.: Ao → Ao → Ao, enz.
j) Bij dezelfde maaltijd bedient de buurman.
k) Bij dezelfde maaltijd bedient de overbuurman.
l) Bij dezelfde maaltijd bedient de schuine overbuurman.

Aldus ontstaan weer een twaalftal kringen.

3) Nu gaan we uit van een twaalftal blokjes:
drie driehoekjes: rood, blauw en geel.
drie rondjes: rood, blauw en geel.
drie vierkantjes: rood, blauw en geel.
drie rechthoekjes: rood, blauw en geel.
We plaatsen ze in drie groepjes, naar kleur gerangschikt, zodat elk tweetal vormen slechts eenmaal naast en tegenover elkaar staan.



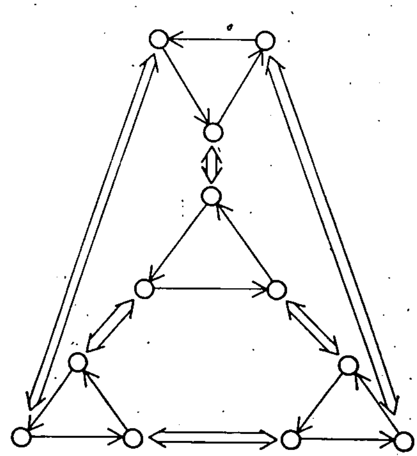
rood blauw geel

Ook nu kunnen we door van vorm en/of van kleur te wisselen twaalf kringen vormen.

Het bovenstaande is een samenvatting voor deskundigen. Het materiaal wordt de leerlingen, op werkkaarten genoteerd, aangeboden. Zij werken hier aan in groepjes. De werkkaarten worden zo geredigeerd, dat de lln. zelfstandig de gestelde opdrachten kunnen uitvoeren. De leraar heeft hierbij een organisatorische, animerende en begeleidende funktie. Dienes en zijn medewerkers hebben dit materiaal gebruikt bij kinderen van 10 tot 12 jaar met een normale intelligentie. De experimenten vonden, en vinden nog steeds plaats, aan de experimenteerscholen verbonden aan de universiteiten van Adelaïde (Australië) en Sherbrooke (Canada). Het werken met gestructureerd materiaal op lagere scholen is het experimentele stadium al gepasseerd. Vele scholen, bijv. in Engeland, de V.S. en Frankrijk werken al enige jaren in deze geest.

De opstelling van een schema

Zoals u gemerkt zult hebben zijn de lln. al spelend met materiaal bezig drie modellen op te bouwen van de draaiingsgroep van het regelmatig viervlak. De meeste lln. zien via de opgestelde kringen vanzelf dat hier iets bijzonders aan de hand is. De lln. worden uitgenodigd de spelletjes eerst twee aan twee en later alle drie te vergelijken. Daarbij wordt gesuggereerd de tweekringen door een dubbele en de driekringen door een enkele pijl te symboliseren. Via een aantal tussenstappen komen zij door het opstellen van „woordenlijsten" die de correspondenties aangeven tussen de elementen uit de verschillende modellen, tot het volgende schema:



(Er is nog een tweede schema mogelijk, maar dat laten we hier buiten beschouwing.)

Het opsporen van dit schema is een daad van abstractie: de lln. moeten nl. de concrete situaties ontdoen van alles wat niet wezenlijk is voor de te bestuderen structuur.

Dit schema krijgt voor de lln. een levensechte interpretatie door het geheel te beschouwen als een plattegrond van een stad, waarin de enkele en dubbele pijlen straten voorstellen met een- en tweerichtingsverkeer. De rondjes stellen daarbij de haltes voor van een busnet door die straten! We bekijken nu eens de volgende busdienst: e–e–d. (enkele pijl, enkele pijl, dubbele pijl). Zij zullen ontdekken dat de bussen na drie keer dit traject gereden te hebben op hun beginpunt terugkeren, waar ze ook beginnen!

Bewijzen in de geformaliseerde structuur

Na wat spelen met de busdiensten in onze stad ontdekken de lln. dat o.a. de volgende dienstregelingen de bussen weer op hun beginpunt doen terugkeren: e–e–e, d–d, d–e–d–e–d–e.

De abstractie is onderhand al ver voortgeschreden. De lln. opereren alleen nog maar in het schema en hebben geabstraheerd van viervlak, maaltijd enz. Zij kunnen echter ter verificatie altijd weer naar deze modellen terugkeren. De structuur ligt nu bloot. Zij wordt gekarakteriseerd door de volgende definiërende regels:

1) e–e–e staat gelijk met niet rijden.
2) d–d staat gelijk met niet rijden.
3) d–e–d–e–d–e staat gelijk met niet rijden.

Bij al dat „gebus" ontdekken de lln. dat o.a. e–d–e en d–e–e–d dezelfde stopplaatsen hebben. Is dit toeval of kunnen we dit bewijzen?

Bewijs: e–d–e
d–d–e–d–e–d–d
d–d–e–d–e–d–e–e–e–d
d– –e–e–d.

Aldus is een leercyclus afgesloten, die beginnend bij het spelen met concreet materiaal, via woordenlijsten de isomorfie der modellen opsporend, de structuur vastleggend in een schema uitmondt in een bewijs op basis van regels die de structuur definiëren.

Dienes' ideeën omtrent de opbouw van een wiskundig leerproces kunnen we in de volgende principes samenvatten:

1) Het dynamische principe: Het leerproces dient spiraalsgewijze opgebouwd te worden.

2) Het constructieprincipe: De leerlingen dienen zelf, al spelend met hun (gestructureerde) materiaal de begrippen te construeren waarmee ze wiskunde gaan bedrijven.

3) Het principe van de meervoudige concretisatie: Een echt abstractieproces kan alleen plaatsvinden, als de leerling de isomorfie van verschillende modellen inziet.

4) De deep-end strategy: De begripsvorming verloopt effectiever, indien we de leerling (voor zover zijn vermogens reiken) onderdompelen in een zo complex mogelijke situatie.

Opmerkingen

1) Het bovenstaande is slechts een momentopname uit een serie experimenten in deze geest. Succesvol onderwijs op deze basis lijkt alleen mogelijk in situaties, waarin zowel leerlingen als leraren overtuigd zijn van het belang van de activiteit van de leerling in het leerproces.

2) Vele van de onderzoekers die in een dergelijke benadering geloven zijn verenigd in: The International Study Group of Mathematics Learning. (I.S.G.M.L.).

3) De huidige ontwikkelingen in deze richting doen vermoeden, dat in de naaste toekomst een herziening nodig wordt van de leerstofindeling zoals die nu gepland wordt. Deze ontwikkeling pleit sterk voor een samenwerking tussen geïnteresseerden in lager en voortgezet onderwijs.

4) Graag zou ik een beroep doen op allen die in deze werkwijze belang stellen om zich met mij in verbinding te stellen. Mijn adres is:

Haringvlietstraat 9, Amsterdam, telefoon: 020-738912.

4) De volgende (dunne!) boekjes zijn als inleiding in deze materie geschikt. Veel ander materiaal is pas in stencilvorm beschikbaar.

Z. Dienes: *Building up mathematics*. Hutchinson, Londen, 1960.
Franse versie: La construction des mathématiques, P.U.F., Parijs.
Z. Dienes: *The power of mathematics*. Hutchinson, Londen, 1963.
Franse versie: Comprendre la mathématique, O.C.D.L., Paris.
Z. Dienes: *Thinking in structures*, Hutchinson, Londen, 1965.
Franse versie: Pensée et structure, O.C.D.L., Parijs.

DISCRETE MEETKUNDE [1])

door

Prof. dr. J. J. Seidel

Technische Hogeschool Eindhoven

1. *Hadamard matrices*

Uit de 8 hoekpunten van een kubus kan men er vier kiezen die de hoekpunten zijn van een regelmatig viervlak. Inderdaad, neem de oorsprong van een coördinatenstelsel in het middelpunt van een kubus met ribbe 2, neem de assen evenwijdig aan de ribben, dan voldoen de punten

$$\begin{array}{l}(\ 1,\ \ 1,\ \ 1)\\(\ 1, -1, -1)\\(-1,\ \ 1, -1)\\(-1, -1,\ \ 1)\ .\end{array} \qquad \text{De matrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

bevat slechts de getallen 1 en -1 en is orthogonaal. Zo'n matrix heet een Hadamard matrix van de orde 4.

Wij beschouwen het analoge probleem in de r-dimensionale Cartesische ruimte R_r. De *hyperkubus* γ_r wordt gedefinieerd door zijn 2^r punten $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$. Het *kruispolytoop* β_r wordt gedefinieerd door zijn $2r$ punten $(\pm 1, 0, \ldots, 0)$, etc. Het regelmatige *simplex* α_r wordt gedefinieerd door de $r+1$ punten $(1, 0, \ldots, 0, 0)$, etc. van R_{r+1}, die alle liggen in het hypervlak

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r + x_{r+1} = 1.$$

Wij stellen nu de vraag of het mogelijk is om uit de 2^{r-1} hoekpunten van een γ_{r-1} er r te kiezen, die de hoekpunten zijn van een α_{r-1}. Het antwoord op deze vraag is, zoals wij boven zagen, bevestigend voor $r = 4$. Voor $r = 3$, en evenzo voor $r = 5$, $r = 6$, $r = 7$, is het antwoord echter ontkennend. Een andere formulering van de vraag, in termen van matrices, is de volgende.

Def. Een *Hadamard matrix* H_r is een vierkante matrix van de orde r, waarvan alle elementen 1 of -1 zijn, die voldoet aan

$$HH^T = rI.$$

---

[1]) Tekst van een voordracht voor Wimecos dd. 28-12-1967.

De vraag is nu voor welke natuurlijke r er een Hadamard matrix van de orde r bestaat.
Voor $r = 2$ voldoet

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}. \quad \text{Daar} \quad \begin{bmatrix} \underbrace{+ \cdot\cdot +}_{} & + \cdot\cdot + & + \cdot\cdot + & + \cdot\cdot + \\ + \cdot\cdot + & + \cdot\cdot + & - \cdot\cdot - & - \cdot\cdot - \\ \underbrace{+ \cdot\cdot +}_{x} & \underbrace{- \cdot\cdot -}_{\frac{1}{2}r-x} & \underbrace{+ \cdot\cdot +}_{\frac{1}{2}r-x} & \underbrace{- \cdot\cdot -}_{x} \end{bmatrix}$$

zonder de algemeenheid te schaden kunnen worden genomen als drie rijen van H_r, volgt dat $r = 4x$ met x geheel, de enige bekende nodige voorwaarde voor het bestaan van een Hadamard matrix van de orde r. Voor alle $x < 39$ zijn Hadamard matrices gevonden. Het vermoeden, dat voor elk viervoud r een H_r bestaat, is noch bevestigd noch weersproken. Voor literatuur zij verwezen naar [5], [7], [3]. Voor bijzonderheden omtrent meerdimensionale polytopen zie [2].

2. *Gelijkhoekige rechten*

De vier diagonalen van een kubus hebben de eigenschap dat elk paar dezelfde hoek, nl. arccos $\frac{1}{3}$, maakt. De zes verbindingsrechten van diametraal gelegen hoekpunten van een icosaëder hebben de eigenschap dat elk paar dezelfde hoek, nl. arccos $\frac{1}{\sqrt{5}}$, maakt. Meer rechten met deze eigenschap zijn in R_3 niet te vinden. Wij beschouwen het analoge probleem in R_r.

Def. Een stelsel rechten door O in R_r heet *gelijkhoekig*, wanneer de hoek tussen elk paar der rechten dezelfde is.

Het probleem is nu het onderzoek van $n(r)$, dat is het maximum aantal gelijkhoekige rechten in R_r.

Stelling

$n(2) = 3$, $n(3) = 6$, $n(4) = 6$, $n(5) = 10$, $n(6) = 16$, $n(7) \geqq 28$.

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen wij naar [6]. Zie ook [4]. Meer waarden van $n(r)$ zijn niet bekend. In termen van matrices kan het probleem als volgt worden geformuleerd. Een stelsel van n rechten, gedragen door de R_r opspannende eenheidsvectoren $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \ldots, \underline{p}_n$, is gelijkhoekig als voor elk paar vectoren

$$\cos\varphi = \pm (\underline{p}_i, \underline{p}_j), \quad 0 < \varphi < \tfrac{1}{2}\pi,$$

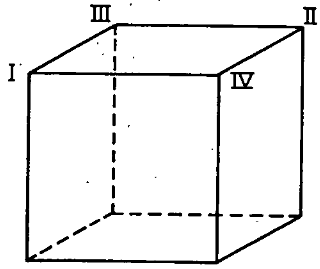
dezelfde waarde heeft. De matrix der inwendige produkten, de z.g. Gram matrix der vectoren,

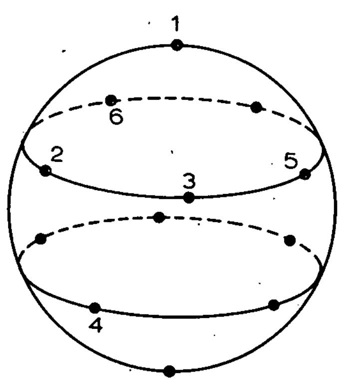
$$P = [(\underline{p}_i, \underline{p}_j)] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \pm\cos\varphi \\ & & \cdot & \\ \pm\cos\varphi & & & \cdot \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

heeft orde n, is symmetrisch en positief semidefiniet van rang r, dus heeft de kleinste eigenwaarde 0 met multipliciteit $n - r$. De matrix

$$A = \frac{1}{\cos\varphi}(P-I) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \cdot & & \pm 1 \\ & & \cdot & \\ \pm 1 & & & \cdot \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

heeft de kleinste eigenwaarde $-1/\cos\varphi$ met multipliciteit $n - r$. Het aantal n der gelijkhoekige rechten in R_r is groot wanneer een matrix A, symmetrisch, met diagonaal 0 en overige elementen ± 1 kan worden gevonden waarvan de kleinste eigenwaarde een grote multipliciteit heeft. De ons reeds ter beschikking staande voorbeelden uit R_3 lichten dit toe:





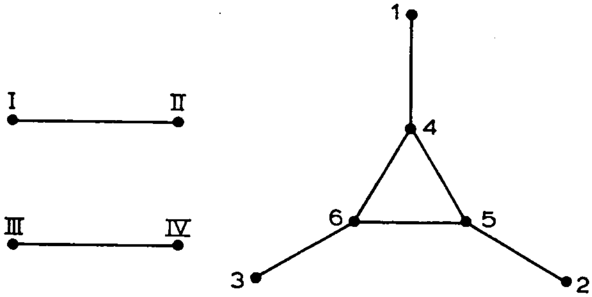
$$\begin{bmatrix} 0 & - & + & + \\ - & 0 & + & + \\ + & + & 0 & - \\ + & + & - & 0 \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} 0 & + & + & - & + & + \\ + & 0 & + & + & - & + \\ + & + & 0 & + & + & - \\ - & + & + & 0 & - & - \\ + & - & + & - & 0 & - \\ + & + & - & - & - & 0 \end{bmatrix}.$$

Eigenwaarden: 1,1,1,-3; $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\sqrt{5}$.

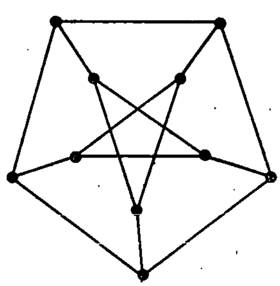
Merk op dat voor de matrix van de orde 6 geldt

$$A^2 = 5I.$$

Bij elke matrix van de orde n, die symmetrisch is met diagonaal 0 en overige elementen ± 1, behoort een graaf op n punten: verbindt i en j dan en slechts dan wanneer het corresponderende matrix-element $a_{ij} = -1$. Bij de hierboven genoemde voorbeelden behoren de grafen



De in de stelling aangekondigde tien gelijkhoekige rechten in R_5 corresponderen met de volgende graaf



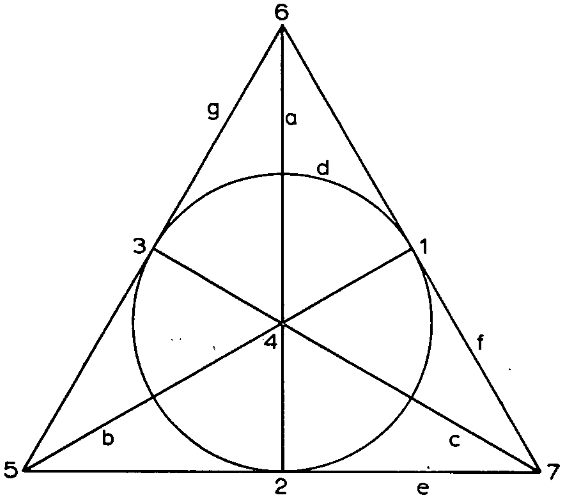
Inderdaad, de bijbehorende matrix A voldoet, naar men gemakkelijk narekent, aan $A^2 = 9I$, dus heeft de eigenwaarden 3 vijfmaal en -3 vijfmaal.

Opmerking In deze graaf, de z.g. Petersengraaf, kan de configuratie van Desargues worden herkend. Inderdaad, verbindt elk paar punten van deze configuratie wanneer zij niet op een rechte van de configuratie liggen.

Opmerking Met behulp van de bovengenoemde voorbeelden kunnen veelvlakken in R_3 worden geconstrueerd waarvan alle zijvlakken onderling congruente ruiten zijn. Met de zes diagonalen van het icosaëder kan het rhombentriakontaëder, met vijf van deze diagonalen het rhombenicosaëder, met vier van deze diagonalen een rhombendodecaëder worden geconstrueerd. Een ander rhombendodecaëder wordt gevonden met behulp van de vier diagonalen van de kubus. Zie [1].

3. *Block designs*

Het meest eenvoudige eindige projectieve vlak is dat van Fano. De incidenties van de zeven punten en de zeven rechten van deze meetkunde zijn die van de volgende figuur:



Eindige projectieve meetkunden zijn bijzondere block designs. Zij V een eindige verzameling van v elementen. De delen van V heten *blokken*. Een IBD, *incomplete block design*, is een verzameling van, zeg b, verschillende blokken.

Def. Een BIBD, *balanced* IBD, is een IBD met
(1) elk blok heeft evenveel, zeg k, elementen,
(2) elk paar van V ligt in evenveel, zeg λ, blokken,
(3) $0 < \lambda$ en $k < v-1$.

Uit de beschouwing van de $v-1$ paren uit V, die een gegeven $x \in V$ bevatten, volgt
(4) elk element van V ligt in evenveel, zeg r, blokken,
(5) $r(k-1) = \lambda(v-1)$ en $bk = vr$.

De $v \times b$ *incidentiematrix* N van een BIBD wordt gedefinieerd door zijn elementen

$$n_{ij} = 1 \text{ als } x_i \in V \text{ ligt in blok } B_j, \\ = 0 \text{ anders.}$$

In termen van N luiden de voorwaarden (1), (4), (2)

$$JN = kJ, \quad NJ = rJ, \quad NN^T = (r-\lambda)I + \lambda J,$$

waarin met J wordt bedoeld de matrix die uit louter elementen 1 bestaat.

Def. Een SBIBD, *symmetrische* BIBD, is een BIBD met $b = v$, d.w.z. $r = k$.

Voor de nu vierkante incidentiematrix N geldt

$$NJ = JN = kJ, \quad NN^T = N^TN = (k-\lambda)I+\lambda J.$$

Def. Een *eindig projectief vlak* van de orde n is een SBIBD met parameters $v = n^2 + n + 1$, $k = n + 1$, $\lambda = 1$.

Het bovengenoemde vlak van Fano is een eindig projectief vlak van de orde 2 volgens deze definitie. Bekende projectieve vlakken zijn die waarvan de orde de macht van een priemgetal is. Voor literatuur zie [7].

4. *Hadamard matrices en block designs*

Stelling ([7] p. 107) Een genormaliseerde Hadamard matrix van de orde $4t \geqq 8$ is equivalent met een SBIBD met parameters $v = 4t-1$, $k = 2t-1$, $\lambda = t-1$.

Een Hadamard matrix heet genormaliseerd wanneer de elementen van zijn eerste rij en eerste kolom alle 1 zijn. Schrijf de genormaliseerde Hadamard matrix als

$$H = \begin{bmatrix} 1 & j^T \\ j & R \end{bmatrix}$$

met $j^T = (1,1, \ldots, 1)$. Dan voldoet de vierkante matrix R van de orde $4t-1$ wegens $HH^T = 4tI$ aan

$$RJ = JR = -J, \quad RR^T = 4tI-J.$$

De incidentiematrix van de SBIBD met de verlangde parameters voldoet aan

$$NJ = JN = (2t-1)J, \quad NN^T = tI+(t-1)J.$$

Het verband tussen R en N wordt gegeven door

$$R = 2N-J.$$

Hiermee is de equivalentie der in de stelling genoemde begrippen aangetoond. Als toepassing construeren wij met behulp van de in 3. genoemde meetkunde van Fano een (symmetrische) Hadamard matrix van de orde 8:

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix}.$$

5. *Block designs en gelijkhoekige rechten*

De in de stelling van 2. aangekondigde 28 gelijkhoekige rechten in R_7 kunnen als volgt worden geconstrueerd ([6] p. 344). De vectoren

$$\begin{matrix} (+ & + & + & 0 & 0 & 0 & 0) \\ (+ & - & - & 0 & 0 & 0 & 0) \\ (- & + & - & 0 & 0 & 0 & 0) \\ (- & - & + & 0 & 0 & 0 & 0) \end{matrix}$$

van R_7 maken paarsgewijs de hoek $\pi - \arccos \frac{1}{3}$. De zeven rijen van de incidentiematrix van de in 3. genoemde meetkunde van Fano worden opgevat als vectoren; zij maken paarsgewijs de hoek $\arccos \frac{1}{3}$. Verviervoudig elk der zeven vectoren op de hierboven aangegeven wijze. De zo verkregen 28 vectoren spannen 28 rechten op die het gevraagde gelijkhoekige stelsel vormen.

6. *Gelijkhoekige rechten en Hadamard matrices*

De in de stelling van 2. aangekondigde 28 gelijkhoekige rechten in R_7 kunnen ook als volgt worden geconstrueerd ([6] p. 345). De acht rijen van de in 4. geconstrueerde Hadamard matrix van de orde 8 worden opgevat als vectoren in R_8. Hun eindpunten liggen in het hypervlak $x_1 = 1$ en vormen daarin een regelmatig simplex α_7. De 28 middens van de ribben van deze α_7 vormen, wanneer zij worden verbonden met het punt (1,0,0,0,0,0,0,0), een gelijkhoekig stelsel in het hypervlak R_7.

De in 2. voorkomende symmetrische matrices A van orde n, met diagonaal 0 en overige elementen $\pm$ 1, die voldoen aan

$$A^2 = (n-1)I,$$

werden door Paley gebruikt voor de constructie van Hadamard matrices ([5] p. 211, [3], [6]). Inderdaad, als A zo'n matrix is dan is

$$H = \begin{bmatrix} A+\mathrm{I} & A-\mathrm{I} \\ A-\mathrm{I} & -A-\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

een symmetrische Hadamard matrix van de orde 2n. Met behulp van deze constructie kunnen uit de in 2. voorkomende voorbeelden Hadamard matrices van de orde 12 en van de orde 20 worden gevonden.

Literatuur

[1] Bilinski, S., *Über die Rhombenisoeder*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. **15**, 251—262 (1960).
[2] Coxeter, H. S. M., *Regular polytopes*, second ed., (1963), Macmillan.
[3] Goethals, J. M. and J. J. Seidel, *Orthogonal matrices with zero diagonal*, Canad. J. Math. **19**, 1001—1010 (1967).
[4] Haantjes, J., *Equilateral point-sets in elliptic two- and threedimensional spaces*, Nieuw Arch. Wisk. **22**, 355—362 (1948).
[5] Hall, M., *Combinatorial theory*, (1967), Blaisdell.
[6] Lint, J. H. van and J. J. Seidel, *Equilateral point sets in elliptic geometry*, Kon. Akad. Wetensch. Amst. Proc. A. **69** (= Indag. Math. **28**), 335—348 (1966).
[7] Ryser, H. J., *Combinatorial mathematics*, Carus monograph No. **14**, (1963), Math. Assoc. of America.

ONDERWIJSVERNIEUWING IN SCANDINAVIË

Onlangs (eind 1967) is verschenen het rapport van de Scandinavische commissie voor vernieuwing van het wiskunde-onderwijs, getiteld: New School Mathematics in the Nordic Countries. De „Nordic" countries zijn Zweden, Noorwegen, Denemarken en Finland. Het rapport is de neerslag van vele jaren studeren en experimenteren; de experimenten hebben 3—5 jaar geduurd. Het merkwaardige van dit rapport is, dat het betrokken is op de gehele opleiding vanaf het begin van de lagere school tot het eind van het gymnasium. Het is in twee delen verdeeld: het eerste deel betreft de leerjaren 1—9 en houdt de leerstof in voor alle leerplichtige leerlingen ongeacht de studierichting, die zij daarna willen kiezen. Het tweede deel behelst het leerplan voor het gymnasium en is onderverdeeld in het programma voor gymnasium-B en voor gymnasium-A. In de literair-economische afdeling van het gymnasium behoort de wiskunde namelijk tot de verplichte vakken.

Ik vermoed, dat de lezers van Euclides het meest geïnteresseerd zijn in de voorstellen van de commissie t.a.v. het onderwijs op de lagere school. Hier wil ik dan ook het uitvoerigst bij stilstaan.

Leerjaar 1. Als eerste onderwerp wordt genoemd: verzameling, element, deelverzameling, lege verzameling. Het begrip verzameling wordt ingevoerd als voorbereiding voor de invoering van de natuurlijke getallen. Uiteraard zijn de verzamelingen hier concrete verzamelingen uit de sfeer van het kind. Het volgende stadium bestaat uit het vergelijken van twee verzamelingen. We gaan na of twee verzamelingen evenveel elementen hebben door de elementen twee aan twee te koppelen. Paren worden gevormd b.v. „by running threads between articles, drawing connecting lines on the paper or blackboard, or placing the articles together in twos". Nu wordt overgegaan tot het invoeren van getallen om de omvang van een verzameling te karakteriseren. Van meet af aan wordt daarbij ook het getal 0 gebruikt. Getallen worden vergeleken en daarbij worden de tekens $>$, $<$, $=$ en $\neq$ gebezigd. De eerste twee symbolen hebben daarbij aanvankelijk het meeste belang; $5 > 3$, want bij het koppelen van de elementen van een verzameling met 5 en een met 3 elementen blijven er elementen van de eerste verzameling over. Eerst bij de optelling en de aftrekking gaat het gelijkteken een meer actieve rol spelen.

De optelling wordt gebaseerd op de vereniging van verzamelingen, waarbij uitsluitend disjuncte verzamelingen beschouwd worden. Meteen wordt daarbij gewezen op de commutatieve eigenschap, die ook bij name genoemd wordt. Verschillende oefeningen hebben betrekking op het verdelen van een verzameling in deelverzamelingen en het uitvoeren van de hiermee corresponderende optellingen. Op dezelfde manier kan de aftrekking behandeld worden. Verdeel een verzameling met 8 elementen in twee delen; het ene deel bevat 5 elementen, hoeveel elementen bevat het andere?

Ook de meetkunde krijgt in het eerste leerjaar reeds haar deel. Echter alleen in die vorm, dat de leerling gewend wordt aan meetkundige figuren doormiddel van spel. Ze leren een driehoek, een vierhoek, een vierkant, een cirkel herkennen, leren een lijn te trekken langs een liniaal en de lengte van een lijnstuk in cm te meten.

In het eerste leerjaar wordt gerekend tot 100.

Leerjaar 2. Het rekenen geschiedt nu tot 1000. De getallen worden bij een getallenlijn geplaatst, waardoor een beter inzicht in de volgorde verkregen wordt. De vermenigvuldiging wordt met behulp van de getallenlijn voorbereid door b.v. de getallen om de ander, om de drie, om de vier, enz. te markeren. Zo kunnen we op de getallenlijn de getallen 3, 6, 9, . . . markeren en vragen van deze getallen het zevende te noemen. De getallenlijn kan ook benut worden om b.v. 9 of 10 in 3 gelijke delen te verdelen. Zo kan de deling voorbereid worden en het getalsysteem uitgebreid worden met de positieve gebroken getallen. Tevens wordt de getallenlijn gebruikt voor praktische metingen. Zo kan ze dienst doen bij het meten van temperaturen en ook om weer te geven leeftijden in jaren. Enerzijds komt hierbij dus de schaalverdeling ter sprake, anderzijds het voorstellen van een leeftijd door een punt op een getallenlijn.

Het spreekt vanzelf, dat het tijd wordt de leerling ook praktisch te laten rekenen: optellen en aftrekken op de gewone manier (onthouden, lenen) worden geoefend.

De officiële behandeling van de vermenigvuldiging volgt nu door middel van roosters. B.v. $4 \cdot 3$ is het aantal punten, dat we krijgen door 4 rijtjes van 3 punten te tekenen. Vierkantjes maken de zaak nog duidelijker. Met behulp van deze hokjes wordt de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging, die bij het rekenen zo'n grote rol speelt, uiteengezet. Ook worden vraagstukken gemaakt van het type: een jongen heeft vier truien en drie broeken. Op hoeveel verschillende manieren kan hij zich aankleden?

Met behulp van de vierkantjes kan de deling behandeld worden. Moeder heeft 12 taartjes voor haar 3 kinderen gekocht. Hoeveel krijgt ieder er, als ze elk evenveel krijgen? Zet de taartjes op rijen van 3 en er blijken 4 rijen te komen. De deling met rest geschiedt op dezelfde manier: bij het op rijen plaatsen ziet men vanzelf, wat er overblijft.

De meetkunde bouwt voort op de resultaten van leerjaar 1. Principieel nieuws is er niet; men kan alleen de taken iets gecompliceerder maken.

Leerjaar 3. Nu worden ook natuurlijke getallen groter dan 1000 beschouwd. Verder worden decimale breuken ingevoerd, weer met behulp van de getallenlijn, door te beginnen met het lijnstuk van 0 tot 1 in 10 gelijke delen te verdelen, enz.

Enkele van de meest elementaire logische begrippen worden ingevoerd, nl. uitspraak, ware en onware uitspraak, ,,open statement" (dus een uitspraak, waarin een vrije variabele voorkomt, zoals $3x + 7 = 13$). Verder wordt gebruik gemaakt van de notatie van een verzameling, waarbij de elementen opgesomd en tussen accoladen geplaatst worden. Na deze voorbereiding kunnen eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden, zoals $2+3x = 6$ en $2x < 9$ opgelost worden. Het aantal wortels moet eindig zijn.

In het technische vlak komt de staartvermenigvuldiging aan de orde.

Verder worden in dit stadium genoemd: het rechthoekige coördinatenstelsel en het in grafiek brengen van de oplossing van een eenvoudige vergelijking, zolas $x+y = 5$, enkele driedimensionale figuren (modellen van karton); in het vlak de lijnspiegeling en symmetrie, de translatie en de berekening van oppervlakten. Bij de lijnspiegeling wordt gebruikt gemaakt van het vouwen van een vel papier. De leerling leert de passer hanteren. Ten slotte worden eenheden en het overgaan van de ene eenheid op de andere besproken.

Leerjaar 4. Nader wordt ingegaan op de theorie van de verzamelingen aan de hand van concrete voorbeelden. De leerlingen maken maken kennis met de symbolen $\cap$, $\cup$, $\subseteqq$, $\in$. De meesten vinden het een leuke sport deze symbolen te gebruiken.

De thermometer blijkt een goede aanleiding om negatieve getallen in te voeren. Andere situaties, waarbij van twee tegengestelde richtingen sprake is, dienen om het inzicht te verstevigen. De negatieve getallen worden voorgesteld door punten op de getallenlijn. Optelling en aftrekking van gehele getallen zijn nu mogelijk, vermenigvuldiging en deling nog niet.

De techniek van het rekenen wordt verder geoefend: staartdeling en rekenen met decimale breuken komen ter sprake.

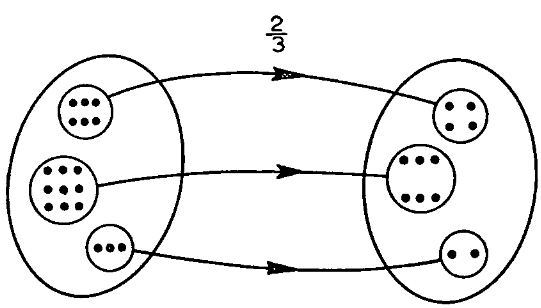
Hierna volgen talstelsels (neem een verzameling objecten en verdeel deze in vijftallen, verdeel de vijftallen weer in vijftallen, enz.).

In de meetkunde wordt de hoek geïntroduceerd, de gradenboog gebruikt, rotatie en puntspiegeling besproken.

Leerjaar 5. Allereerst veel oefening in rekenen.

Ter sprake komen relaties, zoals A is broer van B, toegelicht aan de hand van de bekende pijldiagrammen.

De breuken komen nu systematisch ter sprake. De getallenlijn kan weer goede diensten bewijzen. Maar de breuk kan ook gezien worden als „deel van", dus als relatie tussen een hoeveelheid en een bepaald deel ervan. Als illustratie van de betekenis van $\frac{2}{3}$ vinden we het volgende plaatje:



Deze laatste methode is van belang bij het uitleggen van de vermenigvuldiging van breuken. Overigens dient niet te veel tijd te worden besteed aan het rekenen met breuken, omdat het rekenen met decimale breuken toch veel belangrijker is. Wel van belang is het benaderen van een breuk door een decimale waarde.

Leerjaar 6. Machten worden besproken. Vooral van belang zijn machten van het grondtal 10 met gehele exponenten, dus ook met exponent 0 en met negatieve gehele exponenten, dit in verband met de schrijfwijze $3{,}5 \cdot 10^6$, $8{,}00 \cdot 10^{-3}$, e.d.

De staartdeling wordt opnieuw beoefend, ditmaal met het doel benaderingen te vinden, zoals $0{,}2 < \frac{2}{7} < 0{,}3$, $0{,}28 < \frac{2}{7} < 0{,}29$.

Verder komen aan de orde enkele beginselen van de beschrijvende statistiek (praktisch ontdekken van de stabiliteit van de relatieve frekwentie, opstellen van een frekwentietabel, tekenen van histogrammen, staafdiagrammen, e.d.), percentrekening, trainen van de ruimtevoorstelling, eenvoudige inhoudsberekeningen (rechthoekig blok, cilinder), intuïtief inzicht in gelijkvormigheid, tekenen van een vergroting.

Na deze zes jaar is een terugblik de moeite waard. Ieder zal zijn eigen positieve en negatieve kritiek op het voorgaande hebben. Om te beginnen is de weergave van het programma natuurlijk intellectueler getint dan de uitvoering bedoeld is. Bij de uitvoering wordt de nadruk gelegd op de concrete situatie en worden abstracties zoveel mogelijk vermeden. En als ik daaraan denk, moet mij toch van het hart, dat het kind op deze wijze een veel ruimere kijk krijgt op de structuur van zijn omgeving dan bij het huidige rekenonderwijs. Hij verliest zich niet in eindeloze berekeningen, die op de duur toch wel erg geestdodend moeten zijn en veelal niet verder leiden dan tot een schijntraining. Maar wat hij wel leert is de betekenis van het getal in de concrete situatie en van de elementaire hulpmiddelen, die ons ten dienste staan situaties te beschrijven. Deze hulpmiddelen zijn velerlei. Ik hoef ze hier niet te herhalen; ze zijn in het programma duidelijk genoemd. Te moeilijk? Natuurlijk niet; tenzij men het te moeilijk maakt. Belangrijk? Zonder enige twijfel. En een gelukkige bijomstandigheid is, dat ons later wiskundeonderwijs zo al een aardige fundering krijgt. Is dit eigenlijk wel een bijomstandigheid? Neen, want het onderwijs op de lagere school in „rekenen" en het wiskunde-onderwijs op de middelbare school hebben uiteindelijk toch hetzelfde doel.

Natuurlijk wilt u nu ook wel weten, hoe het verder gaat. Omdat het aantal nieuwe gezichtspunten hier veel geringer is, wil ik volstaan met een korte resumptie.

Leerjaar 7. Functies en grafieken, rekenliniaal, reële getallen, oppervlakteberekening meer algemeen beschouwd (ook driehoek, parallellogram, cirkel en cirkelsector), ekwivalentie, implicatie en negatie, systematische oplossing van vergelijkingen (met behulp van ekwivalenties).

Leerjaar 8. Congruente afbeeldingen, lineaire functies, evenredige afhankelijkheid, stelsels vergelijkingen, verdere oefeningen in het rekenen met percentages, ekwivalentierelaties en orderelaties, voortzetting beschrijvende statistiek (gemiddelde, kwartielen, standaardafwijking, in de praktijk verzamelen van statistisch materiaal), vectoren in het platte vlak, vermenigvuldiging van figuren, de goniometrische verhoudingen.

Leerjaar 9. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van polynomen, merkwaardige produkten, eenvoudige ontbindingen, groepen (in algebra en meetkunde), vierkantswortels en vierkantsvergelijkingen, kansdefinitie met toepassingen. (In dit leerjaar zullen niet alle leerlingen dezelfde stof kunnen volgen, zodat differentiatie zal optreden naar het intellectuele niveau.)

Over het programma voor de B-afdeling van het gymnasium kan ik kort zijn. Het behelst ons nieuwe programma voor de klasse 4B en voor wiskunde I en bovendien:

waarschijnlijkheidsrekening, normale verdeling, fundamentele begrippen uit de algebra (compositie, neutraal element, inverse, groep, isomorfie van groepen, ring en lichaam), complexe getallen, de vergelijking $z^n = a$ (z complex), de functie e^z (z complex).

Het A-programma is een gemitigeerd B-programma.

Sommige lezers van Euclides zullen weten, dat in Denemarken sinds 1963 op het gymnasium reeds met een nieuw programma gewerkt wordt. Dit programma gaat minder ver dan het hierboven voorgestelde, hetgeen zijn oorzaak daarin vindt, dat niet voortgebouwd kan worden op een gemoderniseerde vooropleiding. Men vindt een verslag hiervan in Euclides **40** (1964-5), p. 142—150.

P. G. J. Vredenduin

MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

door

Drs. L. van den Brom

Amsterdam

Antwoord aan Prof. Dr. H. Freudenthal.[1])

Hooggeleerde Freudenthal,

Prof. de Bruyn had slechts de indruk dat de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde niet of nauwelijks beïnvloed is door de verlangens die in niet-wiskundige kringen leven. U bevestigt die indruk: ,,Als men dezelfde bedrijven vandaag *zou*[2]) enquêteren, *zou*[2]) het advies *vermoedelijk*[2]) zijn: het hoofdrekenen en cijferen afschaffen, immers daar hebben we machines voor. Voor de wiskunde daarentegen koestert men daar een eerbied die wiskundigen soms doet schrikken. De eisen t.a.v. het wiskunde-onderwijs *zouden*[2]) bij zulk een enquête wel alle perken te buiten gaan."

Wat ik mij nu afvraag is het volgende: Als men meent dat men zich niet hoeft te laten beïnvloeden door de verlangens die in niet-wiskundige kringen leven, omdat die verlangens vermoedelijk alle perken te buiten gaan, is het dan toch niet nodig na te gaan welke van die verlangens reëel zijn en welke de werkelijke wiskundige noden zijn in niet-wiskundige kringen? Had de C.M.L.W. zich niet mede moeten laten leiden door de uitkomst van het in de vorige vraag gesuggereerde onderzoek?

U heeft van het begin af aan de kwestie van nieuwe leerstof als secundair beschouwd. Moderne programma's moeten naar Uw inzicht allereerst dienen om het onderwijs methodisch en didactisch te verbeteren.

Van Uw inzicht in deze was in het najaar 1967 kennelijk de C.M.L.W. nog niet doordrongen, gezien het antwoord: ,,Het zal *misschien* op de weg van de Commissie liggen meer aandacht aan methodiek en didactiek te schenken.", op een vraag mijnerzijds (Euclides **43**, blz. 105 en 106).

---

1) Euclides **43**, juli 1968, blz. 321.

2) Cursivering van de schrijver.

U hebt de indruk dat men in Nederland met voldoende beleid is gaan en gaat moderniseren, om op het punt van methodiek en didactiek werkelijk successen te behalen. Ik heb echter de indruk dat men in Nederland de wiskunde-leraar, tot nu, niet voldoende heeft weten te motiveren voor de modernisering om die successen te boeken. Maar dat is het stellen van een indruk tegenover een indruk. Weinig wetenschappelijk!

Het is trouwens een hachelijke zaak om het werk van de C.M.L.W. te bekritiseren. Diegenen, wier plannen worden uitgevoerd, zullen toch in het gelijk gesteld worden. Welk leerplan men ook opstelt, de leraren zullen zich aanpassen, de leerlingen zullen zich aanpassen, de ouders, de rectores, de gecommitteerden, de inspecteurs, de universiteiten, de technische hogescholen, de niet-wiskundige kringen, kortom een ieder die op enigerlei wijze met het wiskunde-onderwijs te maken heeft zal zich aanpassen. En omdat geen objectief toetsbare criteria voor hetgeen men bereiken wil zijn opgesteld, is het niet mogelijk om straks na te gaan of datgene wat bereikt is, ook werkelijk een verbetering is. Vanwege de aanpassing zal men altijd minstens kunnen zeggen: „Zie je wel, het gaat!"

Terzijde: Het is wellicht een onmogelijkheid dergelijke objectief toetsbare criteria op te stellen. Vooral ook omdat zowel de veranderende eisen van de maatschappij, als het voortschrijden der wetenschap, het nodig maken dat de bakens telkens verzet worden. Maar een poging was zeker nuttig geweest, een poging tot het opstellen van dergelijke criteria dwingt namelijk tot bezinning.

U staat uiterst aarzelend t.a.v. waarschijnlijkheid en statistiek. „Het is echter ook het vak om het ergste te worden verknoeid." Dat laatste licht U toe met een voorbeeld tussen haakjes. Dergelijke voorbeelden kan iedere docent bij ieder onderdeel van de wiskunde uit de praktijk citeren. Moeten we dan uiterst aarzelend staan t.a.v. wiskunde in het algemeen op de middelbare school?

Overigens, het achtergrondgeluid dat ik in de geciteerde zin meen te beluisteren, roept bij mij de herinnering op aan een uitspraak, die mij eens ter ore kwam en werd toegeschreven aan een universitaire docent: „Laat men op de middelbare school maar afblijven van het limietbegrip, differentiaal- en integraalrekening; *ze* verknoeien het *daar* toch maar!"

U stelt: „Het tegenwoordige rekenonderwijs is immers ook het resultaat van eeuwen experimenteren." Ik ben van mening dat het tegenwoordige rekenonderwijs het resultaat is van een historisch proces, waarbij nauwelijks bewust geëxperimenteerd is. In Azië wordt nog ijverig met een abacus gerekend, terwijl bij ons het telraam, zelfs op de lagere school nauwelijks wordt aangekeken. Als het rekenonderwijs dan het resultaat is van eeuwen experimenteren, dan is toch ergens in het verleden een experiment verschillend geïnterpreteerd.

In België wordt op het ogenblik weer propaganda gemaakt voor een soort abacus ten behoeve van het rekenonderwijs voor zes-jarigen. Deze abacus heeft men zeer modieus „minicomputer" gedoopt.

Het echtpaar Papy heeft gebruikmakend van een idee van Lemaitre (Calculons sans fatigue, uitgegeven bij Nauwelaerts te Leuven) een abacus uitgedacht waarbij de cijfers in ons tientallig positie-stelsel binair gerepresenteerd worden.

De laatste tijd hoort en leest men met betrekking tot de modernisering van het wiskundeonderwijs nogal eens de term „experiment". De wijze waarop die experimenten worden uitgevoerd doen mij sterk aan het volgende denken:

Enige jaren geleden werd aangekondigd dat men als experiment eerst gedurende zes maanden de Leidsestraat zou sluiten voor fietsers en brommers, daarna zou men voor een zelfde periode de auto's uit de Leidsestraat weren. Toen dit z.g. experiment ongeveer vijf maanden geduurd had werd medegedeeld dat men het afgesloten zijn van de Leidsestraat voor fietsers een zodanige verbetering had gevonden, dat men die toestand wenste te handhaven.

Het aangehaalde voorbeeld steekt nog gunstig af bij het geëxperimenteer bij het V.O. Kan men verkeersexperimenten nog redelijk objectief door middel van tellingen en statistieken benaderen, bij de onderwijsexperimenten zijn diegenen die de experimenten uitvoeren zodanig *in* het experiment betrokken, dat de objectiviteit ver te zoeken moet zijn.

Maar zo men het onderwijs als één voortdurend experiment wil zien, of misschien nog ruimer „het hele leven is een experiment", dan is met die betekenis Uw stelling: „Het tegenwoordige rekenonderwijs is het resultaat van eeuwen experimenteren" onomstotelijk.

Om de leerlingen een Ansatz te geven tot de z.g. computerwiskunde lijkt het mij dat men in de eerste plaats een grote precisie in formulering bij het V.O. moet nastreven en vaagheden moet vermijden.

Dat bij het tot stand komen van het Voorstel leerplan Rijksscholen de volledige inductie geschrapt is, in plaats van daarbij nog recurrente betrekkingen mede op het programma te stellen, onderstreept slechts de kritiek van Uw collega de Bruyn. Prof. de Bruyn gaf als zijn mening: Er moet een verbinding bestaan tussen de schoolwiskunde en de computer.

Terzijde nog een ander voorbeeld dat het maatschappelijk niet-aangepast-zijn onderstreept. In het leerplan-1958 komt voor:
„de begrippen benadering, absolute en relatieve fout" een onderwerp dat ten onrechte door vele leraren verwaarloosd wordt. Men had vanwege de niet alleen praktische waarde van dat onderwerp mogen verwachten dat het door de C.M.L.W. meer gepousseerd zou worden. Echter in de discussienota's komen slechts summiere aanwijzingen in die richting voor: „Het is niet de bedoeling, dat dit onderwerp uitvoerig wordt besproken; ..." blz. 30 toelichting onderbouw H.A.V.O. Bij het tot stand komen van het Voorstel leerplan Rijksscholen is men nog verder teruggetreden, het in de discussienota's aanbevolen hoofdstuk: „Rekenliniaal; benaderingen" voor H.A.V.O., is vervangen door „Gebruik van de rekenliniaal".

Het onderwerp „benadering en foutenrekening" kan mede bijdragen tot de verdieping van het begrip reëel getal. De praktische betekenis kan o.a. zijn dat men met dit onderwerp het gevaarlijke blinde vertrouwen in eigen waarneming en berekening, dat men soms aantreft in maritieme kringen, helpt voorkomen (Oosthoek, vijfde druk, deel 2, blz. 270: *astronomisch bestek* berust op de waarneming van de stand der hemellichamen, waaruit men de geografische lengte en breedte van de plaats met *zekerheid*[1]) kan vaststellen.)

Hooggeleerde Freudenthal, na het lezen van Uw antwoord heb ik het stukje van Prof. de Bruyn nog enige keren doorgekeken, daarbij heb ik er toch niet uit kunnen opmaken dat de Bruyn nieuwe programma's als wondermiddelen ziet. Prof. de Bruyn heeft aangegeven dat aan een zekere noodzakelijke eis, die men aan een leerplan moet kunnen stellen, n.l. het maatschappelijk aangepast-zijn, door het programma zoals dat in het Interimrapport is neergelegd, niet voldaan wordt.

Uw eis, die niet minder noodzakelijk is, dat het wiskundeonderwijs methodisch en didactisch verbeterd moet worden, kan men trachten te realiseren zonder daarbij uit het oog te verliezen, dat *wat* men onderwijst op de maatschappij moet zijn afgestemd.

[1]) Cursivering van de schrijver.

KORREL CXLIV

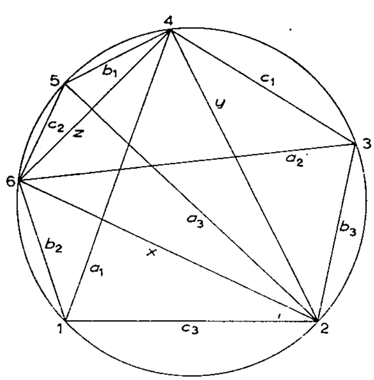
Veelhoeken met een omgeschreven cirkel

In de „American Mathematical Monthly" op blz. 642, 643 van jaargang 1940 wordt door H. E. Sandman en V. W. Graham het omgekeerde van een stelling van Führmann bewezen.

Deze stelling luidt:

Als om een zeshoek een cirkel kan worden beschreven, dan is: (zie figuur):

$$a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 \qquad (1)$$



Dit wordt bewezen door op de koordenvierhoeken 2461, 2463 en 2465 de stelling van Ptolemeus toe te passen: $a_1x = b_2y + c_3z$; $a_2y = b_3z + c_1x$; $a_3z = b_1x + c_2y$; daar dit stelsel homogene vergelijkingen een van nul verschillende opl. heeft is de determinant nul.

Dus
$$\begin{vmatrix} -a_1 & b_2 & c_3 \\ c_1 & -a_2 & b_3 \\ b_1 & c_2 & -a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Werkt men dit uit dan krijgt men (1).

Het buitengewoon merkwaardige is nu, dat voorwaarde (2) tevens *voldoende* is voor het bestaan van een omgeschreven cirkel van een zeshoek.

Voor het bewijs wordt gebruik gemaakt van de bekende stelling dat in elke vierhoek het produkt van de diagonalen kleiner dan of gelijk is aan de som van de produkten van de overstaande zijden.

Door dezelfde vierhoeken als boven te beschouwen ontstaan dan 3 ongelijkheden: de schrijvers elimineren dan x en y; in verband met het gegeven (1) volgt dan het gevraagde. Eenvoudiger kan men als volgt te werk gaan:
Stel:

$$-a_1x + b_2y + c_3z = p \tag{3}$$
$$c_1x - a_2y + b_3z = q \tag{4}$$
$$b_1x + c_2y - a_3z = r \tag{5}$$

p, q en r zijn dus groter dan of gelijk aan nul.
Uit (2) volgt dan dat er een u en een v zijn, zodat:

$$-ua_1 + vc_1 = b_1 \tag{6}$$
$$ub_2 - va_2 = c_2 \tag{7}$$
$$uc_3 + vb_3 = -a_3 \tag{8}$$
$$up + vq = r \tag{9}$$

$u > 0$ benevens $v > 0$ kan niet wegens (8)
$u > 0$ benevens $v < 0$ kan niet wegens (6)
$u < 0$ benevens $v > 0$ kan niet wegens (7)

Dus moet $u < 0$, $v < 0$. Dan volgt echter uit (9) $p = q = r = 0$.
Dit betekent dat de boven genoemde vierhoeken alle koordenvierhoeken zijn. Klaar!

Opmerking. Neemt men een 9-hoek dan is er blijkbaar één voorwaarde dat de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6 op een cirkel liggen en een tweede voorwaarde dat de punten 1, 2, 3, 7, 8, 9 op een cirkel liggen. Beide cirkels vallen dan samen; dus zijn er twee voorwaarden te vinden die voldoende zijn voor een cirkel om een 9-hoek. Algemeen: $n - 1$ voorw. voor een $3n$-hoek.

Eindhoven P. Bronkhorst

Gevolg. Laten a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ en x, y, z positieve getallen voorstellen. Laten verder de vectoren $(-a_1, b_1, c_1)$, $(a_2, -b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, -c_3)$ in één vlak V liggen, terwijl *geen* van hen een stompe hoek maakt met de vector $v = (x, y, z)$, dan is $v \perp V$. Dit moet *stereometrisch* te bewijzen zijn. Het is mij niet gelukt. U misschien?

P. B.

HET LAATJESPROBLEEM

door

J. J. HARKEMA
Breda

Naar aanleiding van Verscheidenheden LXXII en de daarin door Prof. Bottema aan het slot opgeworpen vraag moge ik hier het antwoord geven voor een zelfs iets algemener geval.

Vooropmerking: Alle letters in het navolgende stellen niet-negatieve gehele getallen voor.
Hulpstelling:

$$\sum_{s=0}^{t} \binom{a+s}{a} \binom{b+t-s}{b} = \binom{a+b+t+1}{a+b+1}$$

Bewijs: Noemen we het linkerlid ter afkorting $F(a, b, t)$, dan geldt:

$$F(a, b, t) = F(b, a, t) \tag{1}$$

Voorts:

$F(a, b, 0) = 1$; want er is maar 1 term die 1 is. (2)
$F(0, 0, t) = t + 1$; want er zijn $t + 1$ termen die alle 1 zijn. (3)
$F(a, b, t) = F(a-1, b, t) + F(a, b, t-1)$, mits $at \neq 0$; (4)
volgt uit (1) en (5).
$F(a, b, t) = F(a, b-1, t) + F(a, b, t-1)$, mits $bt \neq 0$. (5)

We kunnen immers voor $F(a, b, t)$ schrijven:

$$\sum_{s=0}^{t-1} \binom{a+s}{a} \left\{ \binom{b+t-s-1}{b} + \binom{b+t-s-1}{b-1} \right\} + \binom{b}{b} \binom{a+t}{a} =$$

$F(a, b, t-1) + F(a, b-1, t)$, waarbij benut is dat $\binom{b}{b} = \binom{b-1}{b-1}$.

De formules (2) tot en met (5) gaan alle over in identiteiten, indien de hulpstelling geldt en maken anderzijds volledige inductie naar $a + b + t$ mogelijk, waarmede de hulpstelling bewezen is.

Probleemstelling: We hebben n soorten munten elk in voldoend grote hoeveelheden; we hebben kastjes met m laatjes en in elk laatje 1 munt; elke samenstelling van de inhoud van zo'n kastje is één en slechts éénmaal gerealiseerd; van één der kastjes zijn k laatjes opengetrokken; hoe groot is de kans, dat de inhoud van dit kastje een bepaalde met de zichtbare munten verenigbare samenstelling heeft?

Oplossing: Laat in het betrokken kastje k_i munten van de ide soort zichtbaar zijn ($i = 1, 2, \ldots, n$) en laat de gevraagde samenstelling $k_i + h_i$ munten van die soort bevatten. Laat G het aantal manieren voorstellen, waarop de getoonde munten uit de gevraagde samenstelling hadden kunnen ontstaan en M het aantal manieren waarop dit had kunnen gebeuren uit alle kastjes samen. Het is dan triviaal, dat de gevraagde kans p is:

$$p = \frac{G}{M}. \tag{6}$$

Het is eveneens duidelijk, dat voor G geldt:

$$G = \prod_{i=1}^{n} \binom{k_i + h_i}{k_i}; \tag{7}$$

hier hebben de h_i de vaste waarde van de gevraagde samenstelling. Tenslotte geldt voor M:

$$M = \sum_{(h)} G; \tag{8}$$

hier moet worden gesommeerd over alle mogelijke grepen (h)

Reductie van het muntenaantal: We nemen alle mogelijke kastjes met gelijke $k_i + h_i$ ($i = 3, 4, \ldots, n$) samen. Voor deze kastjes (we nemen alleen met de k_i verenigbare kastjes) is $h_1 + h_2 = h'_2$ constant; we stellen $k_1 + k_2 = k'_2 - 1$. In de bij deze kastjes behorende produkten G zijn de laatste $n - 2$ factoren gelijk en de som van de produkten van de eerste beide factoren is:

$$\sum_{h=0}^{h'_2} \binom{k_1 + h}{k_1} \binom{k_2 + h'_2 - h}{k_2} = \binom{k'_2 + h'_2}{k'_2}$$

volgens de hulpstelling.

Het komt erop neer dat we voor onze som van produkten van n factoren één produkt van $n - 1$ factoren gekregen hebben; of dat we het aantal muntsoorten met 1 verminderd hebben en een aantal kastjes door één vervangen hebben met 1 laatje meer en dat geopend. Zo kunnen we alle toelaatbare kastjes samennemen en telkens door één vervangen. Daarna kunnen we op de nieuwe kastjes hetzelfde procedé toepassen en daarmee doorgaan totdat slechts één muntsoort overblijft en maar één kastje overblijft. Daar er $n - 1$ muntsoorten verdwenen zijn is het aantal open laatjes thans $k + n - 1$, terwijl de gesloten laatjes nog steeds $m - k$ zijn en het totaal aantal laatjes dus $m + n - 1$. De open laatjes kunnen hieruit op $\binom{m + n - 1}{k + n - 1}$

manieren gekozen worden. Dus:

$$M = \binom{m+n-1}{k+n-1} \tag{9}$$

Uit (6), (7) en (9) volgt nu:

$$\text{De gevraagde kans is: } \frac{(k+n-1)!\,(m-k)!}{(m+n-1)!} \prod_{i=1}^{n} \binom{k_1+h_i}{k_i} \tag{A}$$

In het geval van Prof. Bottema is voor elke i òf k_i òf $h_i = 0$ en de andere 1; dus het produkt is 1. In de factor ervoor is $m = n$, dus in zijn geval is de kans $\dfrac{(k+n-1)!\,(n-k)!}{(2n-1)!}$

BOEKBESPREKING

S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1967, XIII+398 blz., 85 sh.

De schrijver begint met een uiteenzetting van de uitsprakenrekening (propositional calculus) vanuit twee gezichtspunten: de toetsing van de geldigheid van uitspraken met behulp van waardetabellen en de bewijsbaarheid op grond van axioma's. Kleene gebruikt een gecompliceerd axiomastelsel, waarin $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\sim$ allemaal basissymbolen zijn (en dus niet gedefinieerd worden), maar dit axiomastelsel blijkt uitermate praktisch te zijn. De gelijkwaardigheid van geldigheid en bewijsbaarheid wordt aangetoond.

Op soortgelijke wijze wordt de predikatenrekening behandeld. Ook hier wordt geldigheid gedefinieerd met behulp van een waardering en bewijsbaarheid uitgaande van bepaalde axioma's. Ook nu leiden beide methodes tot gelijke resultaten, al blijkt dit eerst veel later in het boek.

Na deze logische inleiding volgt een uitnemend overzicht van de grondslagenproblemen van de wiskunde.

De tweede helft van het boek is gewijd aan belangrijke problemen uit de mathematische logica. Om enige voorbeelden te noemen: de theorie van Gödel over de volledigheid van de predikatenrekening (zie boven) en over de onvolledigheid van de axiomatische opbouw van de aritmetica, beslisbaarheid en berekenbaarheid, machines van Turing, de stelling van Skolem aangaande de mogelijkheid een aftelbaar model te geven van elk niet contradictoor axiomastelsel. Als bewijsmiddel wordt enige keren gebruik gemaakt van de semantische tableaus van Beth. Opvallend is, dat de auteur kans ziet bovengenoemde problemen grondig te behandelen zonder daarbij te vervallen in ellenlange series formules. De lezer merkt hier, dat Kleene ver boven de stof staat. Hij weet moeilijke problemen duidelijk te maken en op te lossen op een manier, die ze voor de lezer betrekkelijk gemakkelijk toegankelijk maakt. Het boek is voortreffelijk voor die lezers, die al enigszins met de wiskundige logica vertrouwd geraakt zijn.

P. G. J. Vredenduin

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Meetkunde voor de brugklas v.w.o.-h.a.v.o.*, 98 blz., *f* 4,50, J. B. Wolters, Groningen, 1968.

Nu zo langzamerhand de boekenstroom voor de brugklas begint aan te zwellen, ontstaat er behoefte aan evaluatie om zo verantwoord mogelijk een keuze te maken. Daar een nieuw leerboek evenwel eerst dan gedetailleerd beoordeeld kan worden nadat er minstens een cursus mee gewerkt is, zal iedere recensent uiterst voorzichtig zijn. Ik zal daarom volstaan met het vermelden van de m.i. belangrijkste aspecten van het leerboek.

Blijkbaar acht de auteur zijn meetkunde voor de brugklas niet geschikt voor een algemene brugklas.

De methode is dezelfde als in planimetrie I dat in 1956 verscheen, n.l. een intuïtieve inleiding gevolgd door een systematische cursus.

De verbinding tussen die twee gedeelten kan men zien in de hoofdstukken 6 en 7; het tekenen van driehoeken en congruente driehoeken.

De begrippen: spiegeling, translatie en rotatie worden ingevoerd en *ook gebruikt.*

Na de invoering van de transformaties wordt het begrip congruentie nog eens en nu wat meer algemeen benaderd.

Naar ik reeds geconstateerd heb zijn er vurige voorstanders van de genoemde methode maar ook taaie tegenstanders. Ook bestaat er een groep docenten die wel voelen voor een intuïtieve start maar dan graag al weer heel spoedig naar het oude spoor terug willen.

Vredenduin heeft natuurlijk gelijk als hij daarop antwoordt dat de traditionele methode een schijnexactheid kweekt. Hij vermijdt dan ook konsekwent een dergelijke opzet en zo kan het gebeuren dat op blz. 61 pas te lezen staat: ,,Een eigenschap waarvan we de juistheid bewijzen, heet een stelling". Uit het feit dat de auteur na 12 jaren nog steeds met dezelfde methode komt valt af te leiden dat het proberen van deze meetkunde geen groot risico inhoudt. Persoonlijk ben ik met Vredenduin ervan overtuigd, dat systematiek eerst dan kan beginnen als een flinke voorraad begrippen is aangebracht en als de motivatie voor het redeneren is geactiveerd.

Samenvattend: een reeds belegen methode met voldoende moderne injecties.

J. J. Wouters

Drs. H. Jansen, *Algebra voor de brugklas*, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1968, 88 blz., geb. *f* 4.25.

Volgens het voorwoord is bij de samenstelling uitgegaan van de leerstof, zoals die voorgesteld is in het Interimrapport van de commissie Modernisering leerplan wiskunde.

,,Elke les moet een gesprek zijn van de leerlingen met de leraar en het boek wil alleen maar het onderwerp en de hoofdlijn van dit gesprek aangeven".

Dit motto dient de recensent wel in acht te nemen en de auteur zal daardoor bepaalde kritiek misschien niet behoeven te aanvaarden.

Reeds in de eerste les worden de verzamelingen ingevoerd, gelukkig is de schrijver niet alvast met ,,wat verzamelingsalgebra" begonnen. Een duidelijk pluspunt. Op blz. 10 worden de voegwoorden *en* en *of* vervangen door $\wedge$ en $\vee$, zonder dat een eenvoudig hulpmiddeltje (dat niet ontbreekt bij $<$ en $>$) gegeven wordt deze te correleren. De moeilijkheid die leerlingen toch al hebben met het juiste gebruik van *en* en *of* wordt niet verholpen. Was het niet beter geweest deze symbolen na die van de vereniging ($\cup$, letter *v*) en doorsnede ($\cap$) in te voeren?

De getalverzamelingen krijgen elk hun eigen symbool (waarom wordt hier geen uniformiteit betracht?). Zo ontstaan de symbolen **N**, **Z** (waarom niet G?), **Q** (met twee haaltjes om consequent te blijven, waarom niet R, dan is later als de verzameling R wordt uitgebreid met de irrationele getallen het symbool **R** zinvol). Hinderlijk is de doorlopend voorkomende inconsequentie om te schrijven: „a behoort tot de verzameling **N**" (resp. **Z**, **Q**). Dit is dubbelop.

Natuurlijk, de auteur wil eenvoudige taal spreken, maar juist formuleren moet van begin af aan worden nagestreefd. Wat moet ik nu, om één voorbeeld te noemen, met de vetgedrukte volzin: „Een produkt met een oneven aantal minnetjes is negatief"? Slordige definities veroorzaken vermoedelijk heftige gesprekken. In les 5 b.v. wordt geleerd hoe men de opvolger van een natuurlijk getal kan vinden. Maar hoe moet ik dan de *drie* natuurlijke getallen bepalen, die op 38 volgen? (blz. 12).

Op blz. 53: „Elk getal heeft tenminste twee (verschillende?) delers, namelijk 1 en het getal zelf (en 0?). Sommige getallen hebben geen andere delers dan 1 en het getal zelf, b.v. 7. Zulke getallen noemen we priemgetallen". Is 1 dan een priemgetal?

Hierbij wil ik het laten. Misschien kan in een nieuwe druk alles nog eens bijgeschaafd worden.

Burgers

S. Slade, L. Margolis, J. Boyce, *Mathematics for technical and vocational schools*, Uitgave Wiley & Sons, New York.

Dit werk is geheel bedoeld voor de werktuigbouwkundige op een niveau dat beneden de H.T.S. ligt. Door het geven van zeer veel oefeningen worden berekeningen uitgevoerd, waarvan direct het nut blijkt uit de toepassing op allerlei machineonderdelen. Het eindeloos rekenen met breuken, waarvan de noemers machten van 2 zijn, komt voort uit de Engelse schroef-maten.

Het rekenen met procenten wordt gedaan met het oog op nauwkeurigheidseisen.

Allerlei oppervlakte- en inhoudsberekeningen worden gevraagd uit te voeren aan de hand van technische tekeningen van schroeven, moeren, etc.

Het werken met hoeken en het gebruiken van goniometrische tabellen wordt direct gebruikt bij tandwielconstructies, e.d.

Door deze m.i. didactisch zeer goede methode wordt veel rekenwerk omgezet in nuttig werk.

Het boek telt 500 bladzijden en is bijzonder goed verzorgd. Voor de wiskundige „pur sang" heeft het boek niets te bieden, laat staan dat er ook maar één greintje modernisering aan te pas komt.

B. Groeneveld

Prof. Dr. Ludwig Bieberbach, *Einführung in die konforme Abbildung*, 6. neubearbeitete Auflage (Sammlung Göschen Bd 768/768a). Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1967, br., DM 5.80.

Evenals in de andere boeken van prof. Bieberbach valt de zeer duidelijke betoogtrant op, die laat zien, hoe zeer de schrijver zich weet in te leven in de vragen, die tijdens zijn studie bij de lezer op zullen komen.

Het boekje is een uitstekende inleiding tot verdere studie, waarvoor verscheiden werken worden aanbevolen.

H. W. Lenstra

Morris Kline, *Calculus*, John Wiley and Sons, 1967. Deel 1, 574 bladzijden, 75 sh., deel 2, 415 bladzijden, 70 sh.

De ondertitel van dit kloeke werk met een kloeke prijs luidt: An Intuitive and Physical Approach. Deze titel is het boek volkomen waard. Maar de intuïtieve benadering van het onderwerp resulteert in een zeer gezapige breedsprakerigheid, die naar onze degelijke Hollandse begrippen al snel irritant werk. Dit is natuurlijk volkomen onsportief, want wij kunnen ons moeilijk voorstellen tegen welke strubbelingen een Amerikaanse professor aanloopt. Alle, maar dan ook werkelijk alle fundamentele begrippen moeten eerst heel voorzichtig aangebracht worden. Na 76 bladzijden kunnen we eindelijk beschikken over de vergelijking van een rechte lijn. Anderzijds is de benadering van de natuurkunde uit ook een beetje een tegenvaller naar onze maatstaven. Want zelfs binnen het bestek van dit boek is het onmogelijk om fundamentele fysische waarheden van de grond af op te bouwen. En daarom worden de wiskundige zaken alleen maar belicht aan de hand van natuurkundige kwesties, die praktisch zonder voorkennis begrepen kunnen worden. Dit alles klinkt akelig negatief, maar ik haast me opnieuw te verklaren dat dit alleen maar veroorzaakt wordt door het beoordelen van dit Amerikaanse boek naar Hollandse maatstaven. Maak ik me van dit standpunt los, dan moet ik verklaren dat Kline zichzelf een bijzonder moeilijke opdracht gegeven heeft en deze op een zeer bewonderenswaardige wijze vervuld heeft. Maar u moest maar liever niet een gulden of zeventig betalen om het met mij eens te worden.

A. v. Tooren

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op dinsdag 22 oktober 1968 om 14.00 uur
in het Evert Kupersoord, Stichtse Rotonde 11, Amersfoort.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in Euclides nr. IX van 1 juni 1967, in het Weekblad nr. 23 van 10 februari 1967 en in het Weekblad nr. 24 van 16 februari 1968.)
3. Verslag kascommissie.
4. Bestuursverkiezing. (Aan de beurt van aftreden is Dr. C. P. Koene, die zich herkiesbaar stelt. Tegenkandidaten kunnen vóór 15 oktober a.s. worden opgegeven bij de secretaris.)
5. Voordracht door de heer Ir. S. H. Wijnnobel, 's-Gravenpolder, over: „Hoe zoudt u een modern leerplan-natuurkunde opstellen?" (Uit de titel blijkt, dat van de aanwezigen een actief aandeel verwacht wordt in de bespreking van het moderniseren van een natuurkunde-leerplan.)
6. Rondvraag.
7. Sluiting.

D. Leujes,
secretaris,
Thorbeckestraat 47, Delft.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

204. Een opgave, op het mondeling eindexamen algebra-experimenteel gegeven, luidde als volgt. Los de differentiaalvergelijking

$$y^2y' = x^2 - 2x$$

op.

De kandidaat moest een lijnelementenveld tekenen, daaruit afleiden, hoe de integratiekrommen ongeveer zouden lopen.

De moeilijkheid ontstond echter pas (waar op het examen natuurlijk niet op werd ingegaan), toen het punt $x = 2$, $y = 0$ ter sprake kwam. Aan de vergelijking voldoet

$$x = 2,\ y = 0,\ y' = \text{willekeurig}.$$

Men krijgt de neiging hieruit te concluderen, dat alle (althans oneindig veel) integratiecurven door het punt (2, 0) gaan. Dit komt niet uit. Hoe zit dat?

205. Onder $S(x)$ verstaan we de som van de cijfers van het natuurlijke getal x. Beschouw de vergelijkingen van de vorm

$$x + S(x) = 10^n,$$

waarin n natuurlijk is.

Uit $5 + S(5) = 10$, $86 + S(86) = 100$, $977 + S(977) = 1000$ blijkt, dat de vergelijking voor $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ niet vals is. We vinden de eerste valse vergelijking voor $n = 6$. De volgende waarden van n, die een valse vergelijking leveren, zijn 16, 26, 36, 46, 57, . . .

Gevraagd: de kleinste op een 5 eindigende waarde van n, die een valse vergelijking oplevert.

(A. F. van Tooren)

OPLOSSINGEN

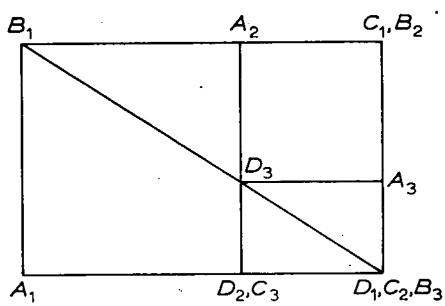
202. De afstand van twee velden op een schaakbord wordt gedefinieerd als het kleinste aantal koningszetten, waarin het ene veld bereikbaar is uitgaande van het andere. Op de gebruikelijke manier wordt uitgaande van deze afstandsdefinitie lijnstuk en (rechte) lijn gedefinieerd. Hoeveel lijnen zijn er op het schaakbord?

Uit de definitie van een lijnstuk volgt, dat $P_1P_2 \ldots P_n$ (elke twee opvolgende punten hebben een afstand 1) een lijnstuk is, dan en alleen als $d(P_1, P_n) = n - 1$. Verder kan $P_1P_2 \ldots P_n$ verlengd worden, als $n < 8$. Voor lijnen geldt dus, dat $n = 8$ ($n > 8$ is volgens het voorgaande niet mogelijk, omdat de afstand van twee velden op het bord maximaal 7 is). De lijnen zijn dus de banen, die een koning beschrijft, als hij in 8 zetten van een rand van het schaakbord de overstaande rand weet te bereiken.

Om het aantal van deze wegen te berekenen, gaan we als volgt te werk. In alle velden van de bovenrand van het bord zetten we het getal 1. In de rij daaronder zetten we in de velden resp. 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2. Zo gaan we verder naar beneden. In elk veld zetten we het getal, dat de som is van de getallen, die in de 3 (of 2) er-boven liggende velden staan. We krijgen zo

1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3	2
5	8	9	9	9	9	8	5
13	22	26	27	27	26	22	13
35	61	75	80	80	75	61	35
96	171	216	235	235	216	171	96
267	483	622	686	686	622	483	267
750	1372	1791	1994	1994	1791	1372	750

In elk veld staat nu het aantal manieren, waarop ervan uitgaande de bovenrand bereikbaar is. De som van de getallen in de onderste rij is 11814. Op 11814 manieren kan de koning dus van de onderrand naar de bovenrand komen. En ook op 11814 manieren van de linkerrand naar de rechter. Nu zijn 2 manieren (de hoofddiagonalen) dubbel geteld. Het gevraagde aantal lijnen is dus 23626.



203. In de figuur is $A_1B_1C_1D_1$ een rechthoek, waarvan $A_1B_1 : B_1C_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) : 1$. Van deze rechthoek is links een vierkant afgesneden. Van de rechts overblijvende rechthoek is boven een vierkant afgesneden. Enz., steeds rechtsom voortgaande. Wordt gevraagd de doorsnede van de zo resp. overblijvende rechthoeken.

De derde rechthoek $A_3B_3C_3D_3$ is gelijkvormig met de eerste. Dus zal D_3 op B_1D_1 liggen. Omdat de vijfde, zevende, . . . rechthoeken alle gelijkvormig met de eerste zijn, zullen alle punten B_i en D_i (i oneven) op B_1D_1 liggen. De gevraagde doorsnede P ligt dus op B_1D_1.

Beginnen we met de tweede rechthoek, dan zien we analoog, dat P ligt op B_2D_2. Verder is $B_2D_2 \perp B_1D_1$.

Dus: trek B_1D_1 en laat daarop een loodlijn neer vanuit C_1. Het voetpunt is het gevraagde punt P.