EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

I — 1 SEPTEMBER 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET EXPERIMENT ALGEBRA EN ANALYSE ENKELE INDRUKKEN OP HET RIJNLANDS LYCEUM TE OEGSTGEEST

door

Drs. J. van DORMOLEN

In Euclides **43**, 1967–68, blz. 1–10 schreef Van Lint over zijn indrukken bij de uitvoering van het experiment Algebra en Analyse in de klassen die in 1967 eindexamen deden. Dit artikel is min of meer een vervolg op dat van hem. Het behandelt enige gedeelten uit de leerstof die voor de experimenteerklassen van het eindexamenjaar 1968 is vastgesteld. We hebben ons in deze klassen bezig-gehouden met de vraag, wat er van het onderwerp differentiaalvergelijkingen behandeld kan worden, en in de toekomst zal moeten worden. Veel nut hebben we hierbij gehad van de waardevolle adviezen van de hoogleraren Van der Blij en Visser, die lid van de werkgroep ,,Algebra en analyse'' zijn.

A. *Parametervoorstellingen*

Voor een goed gebruik van differentiaalvergelijkingen leek het nuttig leerlingen te leren werken met differentialen en als inleiding hierop dachten we dat het nuttig zou zijn enige aandacht te besteden aan parametervoorstellingen van relaties en de grafieken daarvan. Invoering van de parameter als tijdvariabele blijkt hierbij verstandig te zijn. De grafiek wordt dan beschouwd als de baan van een bewegend massapunt.

Voorbeeld 1.

$$K = \{(x, y) \mid x = t^2 + 2,\ y = t^2 + 2t,\ t \in \mathbf{R}\}$$

De verzameling K legt een afbeelding $t \to (x, y)$ van $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vast.

a. Bereken de coördinaten van de beeldpunten van -3, $-2\frac{1}{2}$, -2 $-1\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2 en teken zo goed mogelijk de grafiek van K.

b. Is y op te vatten als functie van x? Is x op te vatten als functie van y?

c. Is er een waarde van t waarvoor $x = y$? Idem waarvoor $x + y = 2$? Idem waarvoor $x + y = 0$? Wat is de meetkundige betekenis van deze vragen?

d. Welke waarden kan x aannemen? Welke waarden kan y aannemen? Wat is de meetkundige betekenis van deze vragen?

Het doel van vragen als deze, die ook bij andere voorbeelden worden gesteld, is de leerlingen in te leiden op vragen uit de differentiaalrekening, waarbij nu eens niet één van de veranderlijken een functie is van de andere.

Vervolgens wordt bewezen, dat de raaklijn in een punt $(f(a), g(a))$ van een kromme die gegeven is door de parametervoorstelling $x = f(t)$, $y = g(t)$, de vergelijking

$$g'(a)(x - f(a)) = f'(a)(y - g(a))$$

heeft. (Hier en bij alle volgende theorie komen alleen die functies f en g in aanmerking, die in hun gemeenschappelijke definitiegebied differentieerbaar zijn en waarvan de afgeleiden voor geen enkele waarde van t uit dat definitiegebied tegelijk de waarde nul aannemen.) Aanknopingspunten met de snelheid van een punt in zijn baan liggen hier voor de hand en zijn ook gebruikt. Bij overgang op een andere parameter blijkt de raaklijn in een punt van de baan dezelfde te zijn. Intuïtief is dit te benaderen door op te merken dat twee punten met verschillende snelheden dezelfde baan kunnen doorlopen.

Voorbeeld 2.

Kies in het vorige voorbeeld een andere parameter door te definiëren $t = 2u - 1$. Wat worden dan de nieuwe parametervergelijkingen? Bepaal de richting van de raaklijn in het punt (3,3) bij beide parametervoorstellingen.

Later zal blijken, dat de differentialen dx en dy zich verhouden als de afgeleiden van de parameterfuncties en door dit soort oefeningen wordt bereikt, dat de leerlingen opmerken dat het er niet toe doet welke parameter men neemt. De verhouding van dx en dy in een bepaald punt van de kromme is onafhankelijk van de gekozen parameter.

De leerlingen hebben weinig moeite dit hoofdstukje te begrijpen. Het sluit mooi aan bij hetgeen ze in de analytische meetkunde hebben gehad of nog zullen krijgen, al is daar de doelstelling een andere. Ik heb me uitdrukkelijk beperkt tot parametervoorstellingen van de vorm $x = f(t)$, $y = g(t)$. De verleiding om ook vergelijkingen als $x + ty = 2t - 1$, $(t - 1)x + y = 5$ te behandelen heb ik weer-staan. Ze zijn voor het onderhavige onderwerp niet van belang en komen bij de analytische meetkunde meer dan genoeg aan de orde.

B. *Differentialen*

Al vroeger hebben de leerlingen leren werken met de betrekking

$$f(t+h) = f(t) + h \cdot f'(t) + h \cdot \varepsilon(h), \text{ met } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Zij hebben de meetkundige betekenis ervan leren kennen bij de grafiek van f. Deze formule wordt trouwens ook gebruikt bij de afleiding van de onder A. genoemde raaklijnvergelijking. In samenhang met het behandelde onder A. worden nu differentialen gedefinieerd met behulp van de betrekking $\mathrm{d}x = f'(t) \cdot \mathrm{d}t$. Nu pas wordt het woord differentiaalquotiënt ingevoerd. Er wordt besproken, dat, als y een functie van x is, de afgeleide y' gelijk is aan het differentiaalquotiënt $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Maar men kan heel goed over het differentiaalquotiënt spreken als y niet een functie van x is, maar door een andere relatie met x is verbonden. Immers: $x = f(t)$, $y = g(t)$, en $f'(a) \neq 0$ voor $a \in D$ (D is de gemeenschappelijke definitieverzameling van f en g) dan is in het punt $(f(a),g(a))$ het differentiaalquotiënt $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ gelijk aan $g'(a)/f'(a)$. Hierbij wordt natuurlijk weer uitgebreid van grafieken gebruik gemaakt.

Het liefst spreek ik bij differentialen van aangroeiingen of storingen. Ik heb telkens aansluiting gezocht bij de natuurkunde. Er zijn genoeg voorbeelden te bedenken, waarbij ik mijn natuurkundecollega niet in de wielen rijd door niet over de fysische aspecten te spreken, maar alleen het mathematische gedeelte van het probleem te behandelen. Een van de eenvoudige voorbeelden hiervan is het radioactief verval.

Geleidelijk aan worden de bekende differentieerregels vervangen door andere:

$\mathrm{d}a = 0$ als a een constante is („De aangroeiing van een constante is nul.");

$\mathrm{d}(x+y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$;

$\mathrm{d}(xy) = y \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}y$ („De aangroeiing van de oppervlakte van een rechthoek met zijden x en y.");

$\mathrm{d}(x/y) = (y \cdot \mathrm{d}x - x \cdot \mathrm{d}y)/y^2$;

enzovoort.

Deze regels worden aangetoond door te veronderstellen dat x en y functies zijn van de een of andere (anonieme) parameter. De vraag of dit steeds het geval is heb ik in het midden gelaten. De leerlingen hebben nu weinig moeite met de aangroeiingen van ingewikkelder functies.

Voorbeeld 3.

$$d(x \cdot e^y) = d(x) \cdot e^y + x \cdot d(e^y) = e^y \cdot dx + x \cdot e^y \cdot dy$$

Voorbeeld 4.

$$\begin{aligned} d(\sqrt{x^2+3x-6}) &= d(z^{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} \cdot dz \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+3x-6)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(x^2+3x-6) \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+3x-6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (d(x^2)+d(3x)+d(-6)) \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+3x-6)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x \cdot dx + 3 \cdot dx) = \\ &= \frac{(2x+3) \cdot dx}{2\sqrt{x^2+3x-6}} \end{aligned}$$

Voorbeeld 5.

Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (1,1) aan de cirkel $\{(x, y) | x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0\}$.

Oplossing:

$$d(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4) = d(0),$$

dus

$$2x \cdot dx + 2y \cdot dy - 4dx + 6dy = 0 \text{ of } (x-2)dx + (y+3)dy = 0.$$

In het punt (1,1) geldt dus $-1 \cdot dx + 4 \cdot dy = 0$ of $dy/dx = -\frac{1}{4}$.

Duidelijk bleek hier mijn totaal gebrek aan ervaring in het lesgeven in dit onderwerp. Telkens doken moeilijkheden op, die achteraf moesten worden gecorrigeerd, terwijl ze door een andere aanbieding van de leerstof misschien niet of in veel mindere mate zouden zijn opgetreden. Zo moet ik er bijvoorbeeld steeds op hameren dat dx en dy geen „zelfstandige" getallen zijn, maar dat ze moeten worden gezien als verhoudingsgetallen op soortgelijke wijze als de getallen 1, 2, $\sqrt{3}$ bij de bekende tekendriehoek. Een vraag als: In welk punt van de kromme met parametervoorstelling $x = 2t^2 - t$, $y = t^2 + 3t$ is $dx = 0$? bleek in dit verband tot veel misverstand aanleiding te geven. Toch moeten dergelijke vragen gesteld worden. In het vervolg zeg en schrijf ik bij de eerste kennismaking met differentialen daarom $dx = 0 \cdot dy$ in plaats van $dx = 0$.

Een ander probleem was het gevolg van het feit dat mijn leerlingen bij de introductie van dit onderwerp al tamelijk goed kunnen differentiëren. Ze zien de letter d dan als een operator en schrijven steeds $d(x^2) = 2x$. Dat ze achter $2x$ nog dx moeten schrijven beschouwden zij als een gril van hun leraar. Dit heb ik proberen te ondervangen door te beginnen met functies van twee en meer variabelen zoals in voorbeeld 3 en pas later $d(x^2)$ te laten uitwerken. Hier blijkt ook het veelvuldig gebruik van de woorden aangroeiing en storing zijn nut af te werpen: „De aangroeiing van x^2 kan niet $2x$ zijn, maar is $2x$ maal de aangroeiing van x".

Het overschakelen van het werken met afgeleiden met hun accentennotatie op het werken met differentialen gaf vooral bij de zwakkere leerlingen nogal wat moeilijkheden. Zij voelden er niets voor „hetzelfde op een andere manier" te gaan doen, waar ze er net in geslaagd waren met veel moeite het „gewone" differentiëren onder de knie te krijgen. Toch zijn er een paar argumenten die ervoor pleiten om door te zetten. In de eerste plaats een praktisch argument. Het blijkt gewoon veel eenvoudiger te zijn om op deze wijze primitieven van ingewikkelde functies te berekenen (zie onder C.) en bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen speelt de gelijkwaardigheid van de optredende variabelen een belangrijke rol bij het herkennen van de juiste oplossingsmethode. Een principieel argument is gelegen in de gedachte dat differentialen andere begrippen zijn dan afgeleiden en dat men er vooral bij functies van twee en meer veranderlijken vrijwel niet onderuit kan differentialen te gebruiken. Ik heb in dit verband klassikaal voorbeelden als de volgende besproken:

Voorbeeld 6.

Hoe zou je de richting van een raakvlak aan de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ kunnen vastleggen?

Voorbeeld 7.

Hoe zouden we de invloed van een kleine storing in het volume van een ideaal gas op de spanning en de temperatuur kunnen onderzoeken?

Deze voorbeelden kunnen prachtig dienst doen om aan te tonen dat men niet altijd kan spreken over een onafhankelijk veranderlijke en een afhankelijk veranderlijke. (Dit is een spraakgebruik, dat gelukkig aan het verdwijnen is, maar dat wil niet zeggen dat het idee wel leeft bij leerlingen die steeds maar weer y als functie van x hebben zien optreden.)

Ik zoek nog naar een didactisch verantwoorde manier om differentialen eerder in te voeren teneinde het bezwaar van het overschakelen te ondervangen, maar ik ben er nog niet uitgekomen.

C. *Primitieve functies*

Ik heb differentialen ingevoerd vóór de behandeling van de integraalrekening, omdat ik dacht op deze manier eenvoudiger te kunnen werken. In het voorgaande was al gelegenheid genoeg de leerlingen primitieve functies te laten uitrekenen, zonder over dat woord of over integreren te spreken. Daardoor vloeien de verschillende hoofdstukken geleidelijk in elkaar over.

Voorbeeld 8.

$x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\frac{1}{3}x^3)$, dus is $x \to \frac{1}{3}x^3$ een primitieve van $x \to x^2$

Voorbeeld 9.

$2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1) = z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}(\frac{2}{3}z^{1\frac{1}{2}}) = \mathrm{d}(\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1})$

Het woord substitutiemethode wordt hier niet gebruikt. Dat geeft maar onnodige frustraties omdat het weer een nieuw hoofdstuk schijnt te zijn. Ik noem het ,,een toepassing van de kettingregel" en dat is het ook. De methode werd ook niet in een afzonderlijke paragraaf behandeld, maar verscheen tussen de andere vraagstukken. Aanvankelijk staan er aanwijzingen voor de oplossingen bij de opgave.

Voorbeeld 10.

Bepaal een primitieve van $x \to x\,\mathrm{e}^x$.
De oplossing van dit probleem geschiedt, evenals alle problemen over het zoeken naar primitieve functies, volgens het principe van ,,proberen en corrigeren":
Probeer eens of $x\,\mathrm{e}^x$ in aanmerking komt. Dit is niet zo'n vreemde gedachte, want bij e^x gaat het goed.

$$\mathrm{d}(x\,\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}(x\,\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{d}(x\,\mathrm{e}^x) - \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \\ &= \mathrm{d}(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat $x \to x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ een der gezochte primitieven is. De woorden partieel integreren worden om dezelfde reden als bij het vorige voorbeeld niet gebruikt. Ik noem het ,,een toepassing van de produktregel" en dat is het ook.
Ik heb ook nog een andere methode geprobeerd:

Veronderstel dat de primitieve iets is van de vorm $x \to (ax + b)e^x$. De afgeleide hiervan is $x \to (ax + a + b)e^x$. Deze is gelijk aan de gegeven functie voor $a = 1$ en $b = -1$. Merkwaardig genoeg sloeg dit niet zo erg aan. Vooral de zwakkere leerlingen hebben een diep wantrouwen tegen het invoeren van nieuwe letters en doen het liever zonder als ze daar de kans toe zien.

Voorbeeld 11.

Nog een toepassing van de kettingregel:

$$\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln x)\mathrm{d}(\ln x) = z\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}(\tfrac{1}{2}z^2) = \mathrm{d}(\tfrac{1}{2}\ln^2 x)(\text{mits } x > 0)$$

Voorbeeld 12.

Nog een toepassing van de produktregel:

$$\begin{aligned}\ln x\cdot\mathrm{d}x &= \mathrm{d}(x\cdot\ln x) - x\,\mathrm{d}(\ln x) = \mathrm{d}(x\cdot\ln x) - \mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{d}(x\cdot\ln x - x)(\text{mits } x > 0)\end{aligned}$$

De stap van $\mathrm{d}(F(x)) + \mathrm{d}x$ naar $\mathrm{d}(F(x) + x)$ bleek voor sommigen een merkwaardige moeilijkheid op te leveren. Er waren verschillende leerlingen die schreven: $\mathrm{d}(F(x)) + \mathrm{d}x = \mathrm{d}(F(x) + 1)$ omdat ze, naar ze me later probeerden duidelijk te maken, niet goed wisten wat ze met dat aanhangsel $\mathrm{d}x$ moesten aanvangen. Uitdrukkingen als $x\cdot\mathrm{d}x$ en $5\cdot\mathrm{d}x$ konden ze wel baas en daarom schreven ze voor $\mathrm{d}x$ in gedachten even $1\cdot\mathrm{d}x$. Ze hadden daarbij vaag iets in hun hoofd van de ontbinding in factoren van $x^2 + x$ en de omstandigheid dat ze dat vraagje vroeger zo vaak fout behandelden, maakte ze blijkbaar extra (kritiekloos) voorzichtig.

D. *Differentiaalvergelijkingen*

Een mooie aansluiting op het voorgaande vormen de differentiaalvergelijkingen, terwijl de integralen veel meer een hoofdstuk apart vormen. Op aandringen van de natuurkundecollega moest ik de integralen echter wel eerder behandelen. Tussen twee haakjes: Er bestond in de werkgroep grote overeenstemming over het feit dat er maar één integraal voor onze leerlingen bestaat en dat is de „bepaalde" integraal. „Onbepaalde integralen" kennen onze leerlingen niet. Wel primitieve functies. Ze kunnen dan ook niet in de war raken.

Van Lint schreef in zijn artikel al over differentiaalvergelijkingen. Een inleiding met behulp van richtingsvelden voldoet uitstekend. Deze zijn trouwens al eerder ter sprake gekomen bij de afgeleide van de exponentiële functie. Ook bij de sommetjes over differentialen kwamen ze regelmatig ter sprake. Hierbij werden steeds richtingsvelden getekend die bij een gegeven relatie behoren. Nu moeten de leerlingen over het omgekeerde proces gaan nadenken: bij een gegeven richtingsveld moet worden gezocht naar een of meer relaties, waarvan de grafiek in het richtingsveld past. Dit richtingveld wordt door eèn differentiaalvergelijking vastgelegd. Het tekenen van richtingsvelden is een tijdrovend werk, maar het is de moeite waard. Er blijkt duidelijk uit waarom een differentiaalvergelijking verschillende oplossingen kan hebben, en eenvoudige opgaven over isoclinen en isogonale trajectoriën geven niet zo erg veel moeite als er maar over richtingsvelden gedacht en gesproken wordt. (Zie ook opgave 2 van het eindexamen 1968 (Euclides **43**, 1967-1968, p. 298) dat hiervan een uitstekend geslaagd voorbeeld is, zij het dat onderdeel 2b wat minder geschikt bleek voor schriftelijke behandeling).

Voorbeeld 13.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 2$$

a. Bewijs, dat alle oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen monotoon stijgende functies zijn.
b. Bewijs, dat alle integraalkrommen de x-as onder gelijke hoeken snijden.
c. Substitueer $z - 1$ voor y in de differentiaalvergelijking en los deze vervolgens op.

(De leerlingen kennen de functie arctg en zijn afgeleide.)
Oorspronkelijk had ik in de opgave y' geschreven in plaats van dy/dx en toen kreeg ik een paar maal de volgende fouten te zien:

$$y' = y^2 + 2y + 2 \text{ dus } y = \tfrac{1}{3}y^3 + y^2 + 2y + C$$
$$y' = y^2 + 2y + 2 \text{ dus } y = \tfrac{1}{3}y^3 + y^2 + 2x + C$$

Mijn leerlingen hebben echter geleerd om haast automatisch beide leden met dx te vermenigvuldigen en als er staat

$$dy = (y^2 + 2y + 2)dx$$

schijnt de kans op deze fouten veel kleiner te zijn.

Voorbeeld 14.

Los op: $xy \cdot dy = (1 + x)dx$ $(x > 0)$

Voorbeeld 15.

Los op: $\cos x \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}y = \sin x \cdot \mathrm{d}x$ (Denk aan de kettingregel!)

Voorbeeld 16.

Los op: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y + 1 = 0$

Voorbeeld 17.

Los op: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy + 1 = 0$

Voorbeeld 18.

Los op: $x \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 2x^4$

Er is in de werkgroep veel gediscussieerd over de vraag welk type differentiaalvergelijkingen eindexamenkandidaten moeten kunnen oplossen. We waren van mening, dat een uitgebreide classificatie van verschillende oplossingsmethoden niet noodzakelijk en zelfs niet gewenst is. We besloten ons tenslotte te beperken tot twee typen:

I. De differentiaalvergelijking met gescheiden variabelen, zoals in de voorbeelden 14 t/m 16.

II. De lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. (Voorbeelden 16, 17, 18)

Ook is er in de werkgroep lang gesproken over de vraag of er ook vergelijkingen van de tweede orde moesten worden behandeld. Dit vooral in verband met het optreden hiervan in de mechanica. We werden het er tenslotte over eens, dat het een onjuiste voorstelling van zaken zou zijn, als we alleen die vergelijkingen van de tweede orde zouden bespreken, die geen kennis van complexe getallen vereisen. We hebben deze soort daarom niet systematisch behandeld. Enkele ervan kunnen voorkomen als het toegelaten type III: Vergelijkingen die met een aanwijzing kunnen worden opgelost, zoals voorbeelden 13 en 19.

Voorbeeld 19.

$$y'' \cdot y' = 1, \text{ waarin } y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x \text{ en } y'' = \mathrm{d}y'/\mathrm{d}x.$$

Vervang y' door z en los de vergelijking op.
(Tegen de notatie $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ hadden we allen grote bezwaren.)

De vergelijking van de harmonische trilling kan met de klas worden behandeld. Zij heeft een prachtige meetkundige oplossing:

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (y' = dy/dt,\ y'' = dy'/dt,\ k > 0)$$

Stel $y' = kx$, dan volgt uit de gegeven vergelijking: $x' = -ky$, waarin $x' = dx/dt$.
Hieruit volgt:

$$x : y = y' : -x' \tag{1}$$

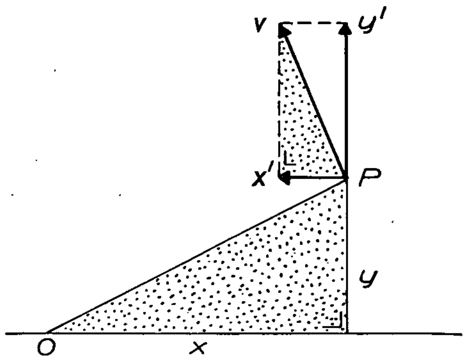
$$\begin{aligned} d(x^2 + y^2) &= 2x\,dx + 2y\,dy\ 2x\,x'\,dt + y\,y'\,dt = \\ &= 2y'/k(-ky)dt + y\,y'\,dt = 0\cdot dt \end{aligned} \tag{2}$$

Dus $x^2 + y^2$ is onafhankelijk van t.

$$(x')^2 + (y')^2 = k^2y^2 + k^2x^2 \tag{3}$$

Wegens (2) is ook $(x')^2 + (y')^2$ onafhankelijk van t.

We kunnen nu x' en y' opvatten als de componenten van de snelheid van een punt P dat zich op het tijdstip t in het punt (x, y) bevindt. Uit (1) blijkt met een figuurtje gemakkelijk dat de snelheidsvector loodrecht staat op de voerstraal. Uit (2) blijkt dat de voerstraal constant is en uit (3) blijkt dat de snelheid constant is. Het punt P heeft dus een eenparige cirkelbeweging. Dus zijn er getallen a, b, c te vinden zodanig dat $y = a \sin(bx + c)$ een oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking. Door substitutie blijkt nu dat $b = \pm k$.



Met de behandeling van de lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde heb ik nogal wat staan modderen. Ik heb wel drie verschillende oplossingsmethoden geprobeerd, totdat ik van Prof. Van der Blij een tip kreeg voor een methode die tenslotte het beste aansloeg: Laten we eerst eens proberen of we de wat eenvoudiger vergelijking $dy/dx + f(x)\,y = 0$ kunnen oplossen. Dat lukt inderdaad. We hebben vroeger al gevonden, dat de algemene oplossing is:

$$y = A \cdot e^{-F(x)}$$

waarin A een constante en F een primitieve van f is. Bij deze vergelijking (de woorden particuliere oplossing, gereduceerde vergelijking hebben geen functie in het geheel en werden dan ook vermeden) blijkt dus dat het produkt $y \cdot e^{F(x)}$ constant is. Dit brengt ons dan op de gedachte om eens te onderzoeken hoe dit produkt zich bij de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\, y = g(x)$$

gedraagt. We vinden dan

$$\begin{aligned} d(y \cdot e^{F(x)}) &= e^{F(x)} \cdot dy + d(e^{F(x)}) \cdot y = \\ &= e^{F(x)} \cdot dy + e^{F(x)} \cdot d(F(x)) \cdot y = \\ &= e^{F(x)} \cdot dy + e^{F(x)} \cdot f(x) \cdot y \cdot dx = \\ &= e^{F(x)} \cdot (dy + f(x) \cdot y \cdot dx) \end{aligned}$$

Met de gegeven vergelijking blijkt dan:

$$d(y \cdot e^{F(x)}) = e^{F(x)} \cdot g(x) \cdot dx$$

De kunst is nu alleen nog een primitieve van $e^F \cdot g$ te vinden. Hierna volgt dan als samenvatting het constateren van het „recept'' voor de oplossing van de differentiaalvergelijking van de eerste orde en de eerste graad.

In de volgende problemen komen differentiaalvergelijkingen ter sprake. Sommige ervan zijn van een moeilijkheidsgraad die wel het maximum genoemd kan worden van wat een gemiddelde leerling moet kunnen begrijpen. Ze zijn dan ook niet alle geschikt voor zelfstandige behandeling door de leerling. Ook door het klassikaal bespreken van een wat moeilijker probleem kan men echter een juiste manier van denken aankweken.

Voorbeeld 19.

Stel de differentiaalvergelijking op van de krommen die elke kromme met vergelijking $y^2 = 2px$ loodrecht snijden. Los de differentiaalvergelijking op.

Voorbeeld 20.

Als de bevolking van een land in 50 jaar verdubbeld is, en aangenomen mag worden dat de groeisnelheid van de bevolking evenredig is met het aantal inwoners, na hoeveel tijd zal dan de bevolking driemaal zo groot geworden zijn?

Voorbeeld 21.

Een heet lichaam koelt af in stromende lucht met een temperatuur van 20° C. Aangenomen mag worden dat de afkoelsnelheid evenredig is met het verschil tussen de temperatuur van het lichaam en de omringende lucht. De begintemperatuur is 100° C. Na 5 minuten is de temperatuur van het lichaam 30° C. Na hoeveel minuten is de temperatuur van het lichaam 20,1° C?

Voorbeeld 22.

Bepaal de vergelijking van een kromme met de eigenschap dat de oppervlakte van de driehoek, gevormd door de raaklijn, de loodlijn uit het raakpunt op de x-as en x-as een constante waarde heeft.

Voorbeeld 23.

De kettinglijn.

Voorbeeld 24.

Het bewijs, dat een spiegel die een bundel evenwijdige lichtstralen zodanig reflecteert, dat de teruggekaatste stralen alle door één punt gaan, parabolisch is.

Conclusies.

Het gebrek aan ervaring bij het onderwijzen van deze onderwerpen bleek duidelijk. Telkens moest ik reeds behandelde gedeelten overdoen, omdat ze nog niet duidelijk waren, of omdat een andere behandelingsmethode geschikter leek. Ook is hier het gevaar dat de leerlingen zich gaan verliezen in technische manipulaties zonder te begrijpen waar het om gaat, bij lange na niet denkbeeldig.

Veel van de moeilijkheden bleken terug te voeren te zijn op een onvoldoende voorstelling van de oplossing van een differentiaalvergelijking. In het begin van hun middelbare schoolloopbaan hebben de leerlingen bij het woord oplossing leren denken aan een getal ($2x + 3 = x - 6$). Later moesten ze aan een getallenpaar denken ($x^2 + y^2 = 25$) en nu moeten ze wennen aan een nieuw „soort'' oplossing: een kromme. Ik geloof zeker dat deze moeilijkheid verminderd kan worden door vanaf de brugklas niet de oplossing van een vergelijking centraal te stellen, maar de verzameling oplossingen van een vergelijking.

Direct hiermee in verband staat het behandelen van de alkwantor in de onderbouw. De volgende soort fout kwam namelijk nogal eens voor:

Opgave: Bepaal de integraalkromme door (1,1) van

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1.$$

Oplossing: In het punt (1,1) is

$$\frac{dy}{dx} = 1, \text{ dus } dy = dx, \text{ dus } y = x + c.$$

De kromme moet door (1,1) gaan, dus $c = 0$. De gevraagde integraalkromme heeft dus als vergelijking $y = x$. Bij de proef op de som blijkt het antwoord nog goed te zijn ook!

In de klas heb ik ook nog een paar lessen besteed aan een numerieke methode. De leerlingen moeten vooral niet de indruk krijgen dat van iedere differentiaalvergelijking een oplossing in de vorm van een vergelijking is te vinden als de wiskundigen maar knap genoeg zijn. Uitgebreidere toepassingen hiervan zullen wel moeten wachten tot de computerwiskunde op de school wordt ingevoerd.

Hoewel het experiment nog lang niet is afgerond, en het tasten naar betere didactiek en het zoeken naar geschikte leerstof nog niet is afgelopen, kunnen we nu al wel zeggen dat we onze eindexamenkandidaten een stuk wiskunde meegeven, dat ze in hun voortgezette opleiding met vrucht zullen gebruiken. We moeten daarbij steeds bedenken, dat het er in de eerste plaats om gaat ze de elementaire begrippen te leren begrijpen. Technische vaardigheden zullen ze voor zover nodig in die voortgezette opleiding wel krijgen.

HET NIEUWE PROGRAMMA

Het nieuwe wiskundeprogramma heeft thans zijn intrede gedaan in ons onderwijs. Wijziging van de leerstof brengt voor de leraren met zich mee, dat zij nieuwe methoden moeten vinden om hun leerlingen wiskunde bij te brengen. Het spreekt vanzelf, dat Euclides graag artikelen zal opnemen, die betrekking hebben op de didactische verwerking van de nieuwe stof. De redactie wekt dan ook allen, die een positieve bijdrage in deze richting kunnen geven, op dit te doen. Ook korte mededelingen, eventueel als „korrel" op te nemen, zijn welkom.

De problemen zijn vaak verschillend voor de verschillende schooltypen. Inzendingen, die meer in het bijzonder verband houden met het onderwijs bij het mavo of het havo, zijn even welkom als vwo-gerichte bijdragen.

Redactie

PAPY, MATHÉMATIQUE MODERNE 3

door

P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

In deel 6 is een overzicht gegeven van de axiomatische opbouw van de vlakke meetkunde. Deze was erop gericht zo snel mogelijk te komen tot het inzicht, dat de gehele planimetrie gefundeerd kan worden door het „enige" axioma: het platte vlak is een tweedimensionale vectorruimte met inprodukt. Hetgeen in deel 6 samengevat werd, kan men in extenso uiteengezet vinden in de delen 1 en 2 en verder in dit deel 3. [1])

Deel 3 bouwt voort op de delen 1 en 2. Om een juist inzicht in dit deel te verkrijgen, is het dan ook noodzakelijk te resumeren, welke resultaten uit de delen 1 en 2 bekend verondersteld worden. We weten reeds, dat het platte vlak een tweedimensionale vectorruimte is. Dit houdt in, dat na keuze van een basis elk punt gekarakteriseerd kan worden door een geordend paar coördinaten. Ten gevolge daarvan is het mogelijk verhoudingen te bepalen van lijnstukken op dezelfde of op evenwijdige lijnen. Een inprodukt is nog niet gedefinieerd. Lengte van een lijnstuk is evenmin gedefinieerd en lijnstukken op niet-evenwijdige lijnen gelegen zijn onvergelijkbaar. De meetkunde is nog geheel in het affiene stadium. In één opzicht is de theorie echter reeds boven het affiene stadium uitgegroeid: er is een loodrechte stand gedefinieerd. Dit is geschied door middel van het axioma: loodrecht is een bijectie, die de verzameling van alle richtingen op zichzelf afbeeldt en anti-reflexief is.

Doel van deel 3 is allereerst te komen tot een metrische meetkunde. Dit doel zal pas na een serie voorbereidingen bereikt worden. De eerste stap in deze richting is het definiëren van puntspiegelingen. Dit geschiedt op de traditionele manier. Dat dit mogelijk is, hoewel gelijkheid van lijnstukken in het algemeen nog zinloos is, komt doordat hierbij alleen lijnstukken op een zelfde lijn vergeleken worden. Puntspiegelingen worden samengesteld en daarbij blijkt het, dat de samenstelling een translatie oplevert [2]). Puntspiegelingen en translaties samen vormen een groep.

---

[1]) Voor een bespreking van de delen 1, 2, 5 en 6 zie resp. Euclides **39**, VIII, p. 237—246, **42**, III, p. 90—94, **42**, VI, p. 161—166, **43**, IV, p. 124—135.

[2]) Vgl. Puntspiegeling, een les gegeven door R. Holvoet, Euclides **41**, VII, p. 202—207.

De volgende stap is eigenlijk een zijstap. Hoofdstuk 2 is namelijk gewijd aan de algemene (scheve of orthogonale) lijnspiegeling. De lijnspiegeling is, zoals men weet, alleen maar een congruente transformatie, als ze orthogonaal is. De niet-orthogonale lijnspiegeling zal ons dus niet nader brengen tot een voorbereiden van het begrip afstand. Dat Papy toch hier de algemene lijnspiegeling behandelt, heeft een didactische reden. Juist doordat de algemene lijnspiegeling geen congruente transformatie is, is er meer aan te beleven. Een voetbal heeft als beeld een rugbybal; het is niet zonder meer duidelijk, dat het beeld van een rechte lijn weer een rechte lijn is. Men aanvaardt daardoor gemakkelijker de noodzaak eigenschappen van transformaties te bewijzen.

Als bijzonder geval van de algemene lijnspiegeling volgt de orthogonale lijnspiegeling (kortweg: spiegeling). Doordat we reeds over orthogonaliteit beschikken, is het mogelijk deze te definiëren. Voor een behandeling van de spiegeling is een axioma vereist: een figuur, die bestaat uit twee gesloten halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt, heeft precies één symmetrieas.

Nu kunnen we de volgende voor ons doel essentiële definitie geven: een isometrie is een transformatie, die het resultaat is van de samenstelling van een aantal spiegelingen. We moeten ons echter nog niet laten verleiden aan de term isometrie een inhoud te verlenen, die hij op taalkundige overwegingen schijnt te hebben. Puntspiegelingen kan men verkrijgen door samenstelling van twee spiegelingen met onderling loodrechte assen en translaties door samenstelling van puntspiegelingen. En dus zijn zowel puntspiegelingen als translaties isometrieën. Verder blijkt, dat de isometrieën een groep vormen.

De verplaatsingen zijn per definitie de transformaties, die men verkrijgt door een even aantal spiegelingen samen te stellen. De rotaties zijn, eveneens per definitie, de transformaties, die ontstaan door samenstelling van twee spiegelingen met assen, die ten minste één punt gemeen hebben. De verplaatsingen zijn dus samenstellingen van rotaties en translaties.

In hoofdstuk 6 wordt bewezen, dat er bij elk geordend paar gesloten halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt een rotatie bestaat, die de eerste afbeeldt op de tweede. In een axioma wordt vastgelegd, dat er slechts één dergelijke rotatie bestaat. De rotaties met vast centrum blijken een groep te vormen. Verder is in het bijzonder elke puntspiegeling een rotatie.

Nu volgt een uitvoerig onderzoek van de isometrieën. Samenstelling van twee rotaties geeft een rotatie of een translatie, samenstelling van een rotatie met een translatie of omgekeerd geeft een rotatie. De verplaatsingen vormen dus een groep. Elke isometrie, die geen verplaatsing is, blijkt een schuifspiegeling te zijn. Samenstelling van twee schuifspiegelingen levert een verplaatsing. En ten slotte: zijn $\bar{A}$ and $\bar{B}$ twee gesloten halve rechten, dan is er precies één verplaatsing en precies één schuifspiegeling, waarbij $\bar{B}$ het beeld van $\bar{A}$ is.

En nu is de ontwikkeling rijp voor het definiëren van de afstand van twee punten. Kies een willekeurige halve getallenlijn $\bar{A}$, aan welks punten de reële getallen $\geqq 0$ toegevoegd zijn. Laat a en b willekeurige punten zijn. Beschouw de gesloten halve rechte $[a\, b$ (met a als eindpunt). Voer een isometrie uit, waarbij het beeld van $\bar{A}$ de halve lijn $[a\, b$ is. Er zijn twee dergelijke isometrieën, volgens de zojuist vermelde stelling. Bij beide isometrieën is b beeld van hetzelfde punt p van de getallenlijn $\bar{A}$. Aan p is een getal toegevoegd. Dit getal is per definitie de afstand van a en b. Een direct gevolg van deze definitie is, dat $\mathrm{d}(a, b) = \mathrm{d}(c, d)$ gelijkwaardig is met: er is een isometrie, waarbij (c, d) beeld is van (a, b). Verder is $\mathrm{d}(a, b) = \mathrm{d}(b, a)$. Verandering van „meter" levert verandering van de afstanden, maar zo dat hun verhoudingen onveranderd blijven. Nu de afstand van een puntenpaar gedefinieerd is, kan zonder moeite de norm (lengte) van een vector gedefinieerd worden. Bij scalaire vermenigvuldiging van een vector met k wordt zijn norm vermenigvuldigd met $|k|$. Bij een homothetie met factor k worden alle afstanden vermenigvuldigd met $|k|$.

De gedachtengang is dus als volgt geweest. Ga uit van de kennis van loodrechte stand en van de vergelijkbaarheid van lijnstukken op een zelfde rechte. Definieer met behulp daarvan een groep transformaties, de groep van de isometrieën. Puntenparen hebben dezelfde afstand, als er een isometrie bestaat, waarbij het ene paar beeld van het andere is. Om deze afstand in een getal te kunnen uitdrukken, is het noodzakelijk een „standaardmeter" te kiezen.

Hoofdstuk 10 gaat over de cirkel. In dit hoofdstuk worden een aantal resultaten afgeleid, die in elk traditioneel meetkundeboek voorkomen. Men vindt, dat de middelloodlijn van het puntenpaar $\{a, b\}$ de verzameling van de punten c is, waarvoor $\mathrm{d}(c, a) = \mathrm{d}(c, b)$. Door drie punten, die niet collineair zijn, gaat precies één cirkel. Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt, en elke dergelijke loodlijn raakt de cirkel. De cirkel met middellijn ab is de verzameling van de punten c, waarvoor $ac \perp bc$. Uit deze laatste eigenschap volgt dan, dat bij elke isometrie orthogonale lijnen in orthogonale lijnen overgaan. (Wie zich erover verbaast, dat deze uitspraak de moeite van het formuleren waard is, moet zich realiseren, dat hoeken nog niet gedefinieerd zijn. Dat bij een isometrie de grootte van een hoek niet verandert, is op dit moment dus nog een zinloze uitspraak.) Verder vormen de bissectrices van de snijdende lijnenparen $\{A, B\}$ de verzameling van de punten x, waarvoor $\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(x, B)$. (En wie zich nu verbaast over het woord bissectrice, terwijl men nog niet weet, wat een hoek is, moet eraan denken, dat de bissectrices van het snijdende lijnenpaar $\{A, B\}$ de symmetrieassen zijn van de spiegelingen, die A in B doen overgaan. Dat deze symmetrieassen bestaan is hierboven als axioma aanvaard.)

Als men uitgaat van het „enige'' axioma, volgens hetwelk het platte vlak een vectorruimte met inprodukt is, zal men zonder twijfel de lengte van een vector afleiden uit het inprodukt. Zover zijn we echter nog niet. We zijn juist bezig het inzicht voor te bereiden, dat het platte vlak een dergelijke vectorruimte is. Vandaar, dat hier de omgekeerde weg bewandeld wordt en het inprodukt van twee vectoren gedefinieerd wordt met behulp van afstanden. We beperken ons daarbij eerst tot vectoren met dezelfde drager.

Laat $\vec{x}$ en $\vec{y}$ vectoren zijn op een drager D. Leg de standaardmeter langs D zo, dat het getal 0 bij de vector $\vec{0}$ komt. Komt nu bij $\vec{x}$ het getal x en bij $\vec{y}$ het getal y, dat is per definitie $\vec{x} \cdot \vec{y} = x \cdot y$. De lengte van de vector $\vec{x}$ is dan $||\vec{x}|| = \vec{x} \cdot \vec{x}$. Het zo verkregen inprodukt wordt uitgebreid tot het inprodukt van twee willekeurige vectoren door te definiëren: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{py}$, waarin $\vec{py}$ de projectie is van de vector $\vec{y}$ op de drager van $\vec{x}$.

De cosinus van een geordend paar vectoren is per definitie:

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \cdot \frac{\vec{y}}{||\vec{y}||}.$$

En natuurlijk is er nog geen sprake van de cosinus van een hoek.

Het zo gedefinieerde inprodukt blijkt bilineair te zijn (d.w.z. $\vec{x} \cdot (a\vec{y} + b\vec{z}) = a \cdot \vec{x}\vec{y} + b \cdot \vec{x}\vec{z}$ en $(a\vec{x} + b\vec{y}) \cdot \vec{z} = a \cdot \vec{x}\vec{z} + b \cdot \vec{y}\vec{z}$), commutatief en strikt positief (d.w.z. $\vec{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$).

Hiermee is een hoogtepunt bereikt: het platte vlak blijkt alle eigenschappen te hebben van een tweedimensionale vectorruimte met inprodukt.

Vervolgens kunnen we van het inprodukt een goed gebruik maken voor het afleiden van verschillende bekende meetkundige resultaten. Allereerst blijkt, dat $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ (vgl. de boven gegeven definitie van inprodukt). Verder is in een rechthoekige driehoek met hypotenusa $\vec{c}$ en rechthoekszijde $\vec{a}$: $||\vec{a}|| = ||\vec{c}|| \cos(\vec{a}, \vec{c})$. Ook worden de formules $a^2 = pc$, $h^2 = pq$ afgeleid. Het is leuk zelf te proberen deze formules te vinden met behulp van de definitie van het inprodukt.

Dan volgen de stelling van Pythagoras en een groot aantal eigenschappen van parallellogrammen, rechthoeken en ruiten.

Ten slotte spreekt het haast vanzelf, dat de bekende ongelijkheden worden afgeleid:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \leqq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leqq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}|| \qquad \text{(Minkowski)}$$

uit welke laatste ongelijkheid de driehoeksongelijkheid volgt.

Hoeken. We zeggen, dat de rotatie s een getransformeerde van de rotatie r is, als de rotatie r door een translatie in s kan overgaan. Nauwkeuriger geformuleerd: s is getransformeerde van r wil zeggen, dat er een translatie t bestaat met de eigenschap:

$$\forall a : b = s(a) \Leftrightarrow t(b) = (t \circ r)(a).$$

Of, nog anders:

er is een translatie t zo, dat $s = t \circ r \circ t^{-1}$.

De relatie „is getransformeerde van" tussen rotaties blijkt een ekwivalentierelatie te zijn. De bijbehorende ekwivalentieklassen heten hoeken.

Een hoek is dus een ekwivalentieklasse van rotaties, die alle elkaars getransformeerde zijn. Of, zoals Papy het geestig uitdrukt: een hoek is een rotatie, die zijn centrum verloren heeft.

De hoek van een geordend paar gesloten halve rechten $\bar{A}$ en $\bar{B}$ met hetzelfde eindpunt is per definitie de hoek, waartoe de rotatie behoort, die $\bar{A}$ in $\bar{B}$ doet overgaan. Per axioma is er slechts één zo'n rotatie.

Met samenstellen van rotaties correspondeert optellen van hoeken. Is namelijk $\hat{r}$ de hoek, waartoe de rotatie r behoort en $\hat{s}$ de hoek, waartoe de rotatie s behoort, dan is $\hat{s} + \hat{r}$ de hoek, waartoe $s \circ r$ behoort. De rotaties met bepaald centrum vormen een groep t.a.v. de samenstelling. De hoeken vormen dus een groep t.a.v. de optelling.

Uit het voorgaande volgt, dat elke hoek precies twee helften heeft. D.w.z. als α een hoek is, dan zijn er precies twee verschillende hoeken β, waarvoor geldt $\beta + \beta = \alpha$. De twee helften van de hoek 0 zijn de hoek 0 en de gestrekte hoek. De twee helften van de gestrekte hoek worden rechte hoeken genoemd. De twee rechte hoeken zijn elkaars tegengestelde; ze worden genoteerd δ en $-\delta$.

Papy bewijst hierna, dat het spiegelbeeld van een hoek gelijk is aan het tegengestelde van de hoek. Daaruit volgt, dat bij verplaatsingen hoeken onveranderd blijven.

We weten, wat de cosinus van een geordend paar vectoren is. Neem nu twee gelijke hoeken, $\widehat{\bar{A}\bar{B}}$ en $\widehat{\bar{C}\bar{D}}$. Kies vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$, die langs $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ resp. $\bar{D}$ vallen. Omdat $\widehat{\bar{A}\bar{B}} = \widehat{\bar{C}\bar{D}}$, kan door verplaatsing $\bar{A}$ in $\bar{C}$ en $\bar{B}$ in $\bar{D}$ overgaan. Hieruit leidt men af, dat $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{c}, \vec{d})$. Dit is aanleiding te definiëren, dat onder $\cos(\widehat{\bar{A}\bar{B}})$ hetzelfde verstaan wordt als onder $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

De sinus wordt gedefinieerd volgens:

$$\sin \alpha = \cos(\delta - \alpha).$$

Om aan deze definitie zin te geven is het noodzakelijk eerst af te spreken, welke van de twee rechte hoeken we δ en welke we $-\delta$ noemen. Anders gezegd: het is eerst nodig het vlak te oriënteren. Het afspreken welke van de beide rechte hoeken positief genoemd en dan δ genoteerd wordt, is namelijk niets anders dan het oriënteren van het vlak.

Het heeft dus in een niet-georiënteerd vlak zin om te spreken van de cosinus van een hoek. We kunnen echter eerst over de sinus spreken, zodra het vlak georiënteerd is.

In grote lijnen is hiermee de inhoud van dit fraaie boek weergegeven. Voor wie zich wil verdiepen in de materie, die we onder het mammoetregime zullen gaan onderwijzen, is dit boek van grote waarde.

WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden hun contributie voor het verenigingsjaar 1968-1969 ten bedrage van f 9.— (inclusief abonnement op Euclides) te storten of over te schrijven op postrekening 143917 ten name van Wimecos, Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen betalen een contributie van f 3.50.

LIWENAGEL

Abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel, wordt vriendelijk verzocht het abonnementsgeld voor de 44e jaargang (f 5.50) een dezer dagen over te maken op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. Bottema
Delft

LXXIII. *De uiterste waarden van een lijnstuk.*

Het is aannemelijk, dat de vraag, door een gegeven punt P een rechte l te trekken waarvan door twee gegeven snijdende lijnen l_1 en l_2 een stuk S_1S_2 van extreme lengte wordt afgesneden (fig. 1), meermalen zal zijn gesteld.

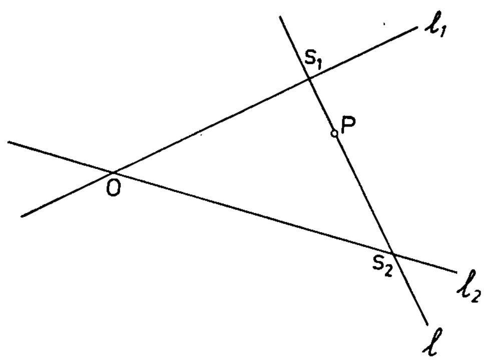


Fig. 1.

In elk geval gebeurde dat door L'Huilier in zijn in 1795 verschenen leerboek der infinitesimaalrekening.[1]) In een van de vele voorbeelden ter illustratie van de methode om uiterste waarden te bepalen, beschouwt hij (p. 270, voorbeeld 7) de algemenere figuur van een convexe boog K met een er binnen gelegen punt P; rechten door P snijden K in S_1 en S_2. Op een vernuftige wijze (die overigens niet voldoet aan meer moderne eisen van gestrengheid) laat de schrijver zien dat de rechte door P, waarvoor S_1S_2 een extreme waarde heeft, K zodanig snijdt dat de tangenten van de hoeken die l met K maakt zich als PS_1 en PS_2 verhouden. In 1811 kwam

[1]) L'Huilier, Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tubingae (1795).

L'Huilier in de *Annales* van Gergonne [1]) op het probleem, terug (zonder nochtans zijn vorige onderzoekingen te vermelden) waarbij dan nu in plaats van K de figuur van twee snijdende rechten wordt genomen. Hij neemt het punt binnen de door de twee rechten gevormde hoek, toont aan dat de vraag naar de uiterste waarde van S_1S_2 tot een vergelijking van de derde graad leidt en bepaalt de oplossing door een cirkel en een parabool met elkaar te snijden. Een belangwekkende en men kan wel zeggen definitieve behandeling van het probleem werd veel later, in 1888, door de Finse mathematicus E. Neovius [2]) gegeven, die aan de ligging van P geen beperkingen oplegde en aantoonde dat d onder bepaalde omstandigheden niet één, maar *drie* uiterste waarden heeft Dit onderzoek wordt vermeld in de *Encyklopädie* [3]); latere literatuuropgaven zijn ons niet bekend.

Neovius legt, evenals L'Huilier de ligging van P vast door scheefhoekige coördinaten t.o.v. l_1 en l_2 en voert de afstand $OS_1 = x$ als veranderlijke in. Het stuk S_1S_2 is dan een (irrationale) functie van x, die nader onderzocht wordt.

In het volgende worden de gevonden resultaten wat overzichtelijker afgeleid met behulp van poolcoördinaten. Dat was in een redactionele noot bij L'Huilier's artikel al aangeraden door Gergonne, die een vergelijking geeft gelijkwaardig met de hieronder volgende onder (4), maar zonder verdere discussie.

Wij kiezen de pool O in het snijpunt van l_1 en l_2, de as langs de bissectrice van een der door deze lijnen gevormde, niet-stompe hoeken en bepalen P door r en ϑ (fig. 2). Voorts zij de genoemde hoek gelijk aan 2α en φ, onze variabele, de hoek van l met de as. Er geldt dan $0 < \alpha \leqq \pi/4$, terwijl wij ons blijkbaar kunnen beperken tot $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ en $-\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2$. Wij hebben in fig. 2

$$PS_1 = \frac{r \sin(\vartheta - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)}, \quad PS_2 = \frac{r \sin(\vartheta + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

---

[1]) L'Huilier, Solution d'un problème de géométrie, dépendant de la théorie des maximis et minimis, Annales de Mathématiques pures et appliquées, T. 2 (1811), 17–22.

[2]) Neovius, Ueber eine spezielle geometrische Aufgabe des Minimums, Mathem. Annalen, 31 (1888), 359–362. De schrijver was een telg uit het uitgebreide geslacht van Finse mathematici, waartoe ook de gebroeders F. en R. Nevanlinna behoren. Zie de biografie van de laatste in H. P. Künzi und A. Pfluger, Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna (Berlin, Heidelberg, New York, 1966), p. 1.

[3]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III, 1, 6 (1921) (*Zacharias*), 1133.

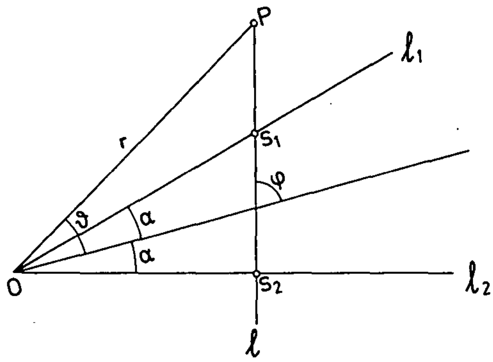


Fig. 2.

zodat

$$d = S_1S_2 = PS_2 - PS_1 = r \sin 2\alpha \cdot \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{\sin(\varphi + \alpha) \cdot \sin(\varphi - \alpha)} \tag{1}$$

Men gaat gemakkelijk na dat d gelijk is aan de *modulus* van het rechterlid, ook bij andere ligging van P ten opzichte van l_1 en l_2. Het gedrag van d in zijn afhankelijkheid van φ wordt dus bepaald door het verloop van de functie:

$$f(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{\sin(\varphi + \alpha) \cdot \sin(\varphi - \alpha)} \tag{2}$$

De *absolute* uitersten van d zijn triviaal: voor $\varphi = \pm\, \alpha$ is f oneindig groot (l is evenwijdig aan een der rechten l_1 of l_2); voor $\varphi = \vartheta$ is $f = 0$ (l gaat door O). De vraag is of f voor andere waarden van φ een *relatief* extreem vertoont.

Daarvoor bepalen wij de afgeleide van f naar φ:

$$f'(\varphi) = \frac{(\cos 2\alpha - \cos 2\varphi)\cos(\varphi - \vartheta) - 2\sin(\varphi - \vartheta)\sin 2\varphi}{2\sin^2(\varphi + \alpha) \cdot \sin^2(\varphi - \alpha)} \tag{3}$$

waaruit volgt dat (voor $\varphi \neq \pm\, \alpha$) de afgeleide gelijk aan nul is als

$$tg(\varphi - \vartheta) = \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\varphi}{2 \sin 2\varphi} \tag{4}$$

Wij stellen $\operatorname{tg} \varphi = u$, zodat $\cos 2\varphi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $\sin 2\varphi = \frac{2u}{1 + u^2}$

en krijgen dan, als nog $\operatorname{tg} \vartheta = t$ en $\cos 2\alpha = k$:

$$\frac{u - t}{1 + ut} = \frac{(k + 1)u^2 + (k - 1)}{4u}$$

waaruit voor de onbekende u de vergelijking volgt:

$$F(u) = (k+1)tu^3 + (k-3)u^2 + (k+3)tu + (k-1) = 0 \qquad (5)$$

Voor $t = 0$, dus $\vartheta = 0$ (m.a.w. als P op de bissectrice ligt) heeft (5) behalve de wortel $u = \infty$ nog twee imaginaire wortels, daar $k - 3 < 0$ en $k - 1 < 0$. Voor dat geval heeft $f(\varphi)$ alleen een extreme waarde voor $\varphi = \pi/2$, dus als l loodrecht op de bissectrice staat; men gaat gemakkelijk na dat dit extreem een minimum is. Wij kunnen nu verder $t > 0$ aannemen. De cöefficiënten van (5) zijn dan afwisselend positief en negatief en haar reële wortels (drie of één) dus alle positief. Wij bevrijden (5) op de bekende wijze van de tweede term door te stellen

$$3t(k+1)u = x - (k-3) \qquad (6)$$

waardoor zij overgaat in

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (7)$$

met

$$\begin{aligned} p &= 9(k+1)(k+3)t^2 - 3(k-3)^2 \\ q &= 18(k+1)(k^2+3)t^2 + 2(k-3)^3 \end{aligned} \qquad (8)$$

Voor $D = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$, de discriminant van (7) krijgen wij

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{27}D = {} & (k+1)^3\,(k+3)^3t^6 + 2(k+1)^2(k^4 + 18\,k^2 - 27)t^4 \\ & + (k+1)(k^2-1)(k-3)^3t^2 \end{aligned}$$

zodat het teken van D overeenstemt met dat van de in t^2 kwadratische functie

$$D' = (k+1)(k+3)^3t^4 + 2(k^4 + 18k^2 - 27)t^2 + (k-1)(k-3)^3 \qquad (9)$$

De nulpunten van D' hebben een onverwacht eenvoudige vorm, nl.

$$t^2 = w_1 = \frac{1-k}{1+k} \text{ en } t^2 = w_2 = \frac{(3-k)^3}{(3+k)^3} \qquad (10)$$

Men heeft $w_1 > 0$, $w_2 > 0$, $w_1 = w_2$ (voor $k = 0$), $w_1 < w_2$ (voor $k \neq 0$). De wortels van (7) zijn alle drie reëel als $D < 0$, één wortel is reëel en de beide andere zijn imaginair als $D > 0$, twee wortels zijn gelijk als $D = 0$. Wegens $k = \cos 2\alpha$ heeft men $w_1 = \mathrm{tg}^2\alpha$ en $\dfrac{3-k}{3+k} = \dfrac{1+\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$, zodat wij het volgende resultaat bereikt hebben: *de afstand d vertoont bij veranderlijke φ drie extreme waarden als ϑ voldoet aan*

$$\mathrm{tg}^2\alpha < \mathrm{tg}^2\,\vartheta < \mathrm{tg}^2\,\vartheta_1 = \left(\frac{1+\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\right)^3 \qquad (11)$$

Als $\text{tg}^2 \vartheta < \text{tg}^2 \alpha$ of $\text{tg}^2 \vartheta > \text{tg}^2 \vartheta_1$, *dan heeft d slechts één extreme waarde.* Voor onze figuur betekent dat: door O gaan twee lijnen m_1 en m_2, die met de as de hoeken $\pm\vartheta_1$ maken, waarbij ϑ_1 van α afhangt. Voor een tussen l_1 en m_1 of tussen l_2 en m_2 gelegen punt P heeft d drie extrema, voor een punt buiten de door l_i en m_i gevormde hoeken heeft d één extreem (fig. 3). Om de aard van de extrema

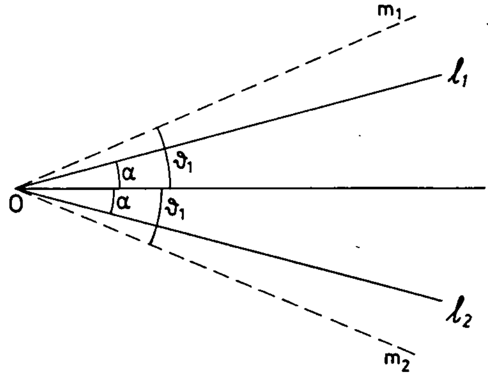


Fig. 3.

vast te stellen, onderzoeken wij nader de functie $f(\varphi)$ uit (2) voor verschillende waarden van ϑ. Voor $-\pi/2 \leqq \varphi < -\alpha$ is f voor elke waarde van ϑ negatief en daar extrema op dit traject niet kunnen voorkomen neemt f monotoon af tot $-\infty$. Voor de overige waarden van φ moeten wij verschillende gevallen onderscheiden.

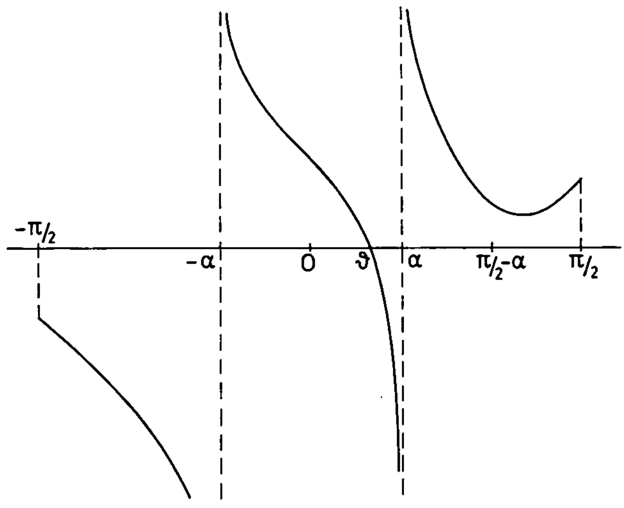


Fig. 4.

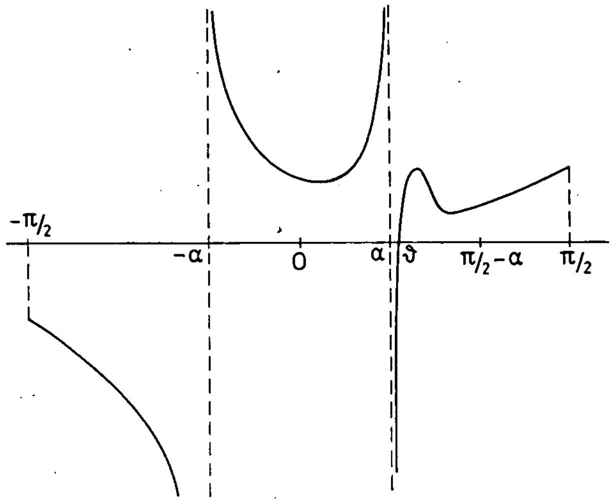


Fig. 5.

Als $0 < \vartheta < \alpha$ heeft $F(u)$ zoals wij zagen één reële, positieve wortel. Nu is $F(\operatorname{cotg}\alpha) = 2\cos\alpha/\sin^3\alpha\ (\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\alpha)$ en dus in ons geval negatief, waaruit volgt dat voor de enige reële wortel u_1 geldt $u_1 > \operatorname{cotg}\alpha$, zodat voor de bijbehorende waarde φ_1 voldaan is aan $\pi/2 - \alpha < \varphi_1 < \pi/2$. Voor $-\alpha < \varphi < \alpha$ komt dus geen uiterste waarde van f voor. De grafiek ziet er uit als fig. 4 en het extreem van f is een minimum. Voor $\vartheta = \alpha$ heeft (5) drie reële wortels waarvan er twee samenvallen met $\varphi = \alpha$ en de derde gelijk is aan $\pi/2 - \alpha$.

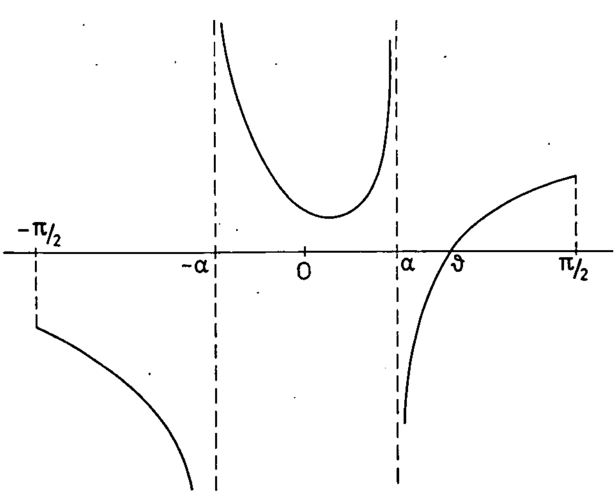


Fig. 6.

Als ϑ toeneemt, dan splitst de dubbele wortel zich in twee enkelvoudige, één groter dan α en één kleiner dan α. Voor $\alpha < \vartheta < \vartheta_1$ krijgen wij het in fig. 5 geschetste verloop; d heeft twee minima en één maximum.

Voor $\vartheta = \vartheta_1$ vallen het maximum en het rechtse minimum samen in een buigpunt van de grafiek; voor $\vartheta \geqq \vartheta_1$ heeft d alleen het tussen 0 en α gelegen minimum (fig. 6).

KORREL CXLIII

Over de afstand $d(P, l)$ van een punt P en een rechte l.

Stelt men de gegeven rechte l voor door de vergelijking

$$ax + by + c = 0$$

dan is de vergelijking

$$bx - ay = bx_0 - ay_0$$

een voorstelling van de rechte n door $P(x_0, y_0)$ die l loodrecht snijdt.

Zij $S(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)$ het snijpunt van l en n, dan stellen we vast

1° $d(P, l) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (1)

2° $S \in l$ d.w.z. $a(x_0 - \Delta x) + b(y_0 - \Delta y) + c = 0$
oftewel $a\Delta x + b\Delta y = ax_0 + by_0 + c \stackrel{\text{def}}{=} L_0$ (2)

3° $S \in n$ d.w.z. $b(x_0 - \Delta x) - a(y_0 - \Delta y) = bx_0 - ay_0$
oftewel $b\Delta x - a\Delta y = 0$ (3)

Uit (2) en (3) volgt

$$\Delta x = \frac{aL_0}{a^2 + b^2} \text{ en } \Delta y = \frac{bL_0}{a^2 + b^2}$$

Substitutie hiervan in (1) levert dan

$$d(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Amstelveen

R. H. Plugge

AUGUST FERDINAND MÖBIUS

Een eeuw geleden, op 26 september 1868, is te Leipzig August Ferdinand Möbius gestorven. Op 17 november 1790 was hij te Schulpforta geboren. Hij bezocht daar de school, waarna hij in 1809 aan de universiteit te Leipzig rechten ging studeren. Al spoedig echter ging hij over op de wiskunde. In 1813—1814 studeerde hij een jaar te Göttingen bij Gauss, voornamelijk astronomie. Daarna studeerde hij nog korte tijd te Halle. In 1814 promoveerde hij te Leipzig, waar hij in 1815 privaatdocent werd en in 1816 buitengewoon hoogleraar in de astronomie en tevens directeur der sterrenwacht. In 1844 werd hij tot gewoon hoogleraar benoemd.

Zijn verzamelde werken, uitgegeven in de jaren 1885—1887 (en opnieuw in 1966) beslaan vier banden met in totaal ruim 2600 pagina's. Een deel is aan astronomie en hemelmechanica gewijd maar het belangrijkste zijn zijn werken op wiskundig, en dan speciaal meetkundig, gebied. Het bekendste is wel *Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Leipzig 1827 (als afzonderlijk werk ook weer in 1966 heruitgegeven). Plaatst men in de hoekpunten van een vaste driehoek de gewichten p_1, p_2 en p_3, dan krijgt het zwaartepunt ervan de „barycentrische" coördinaten p_1, p_2, p_3. Deze coördinaten zijn homogeen: de punten (p_1, p_2, p_3) en (ap_1, ap_2, ap_3) zijn identiek. De voorwaarde $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ geeft aan, dat het punt $P(p_1, p_2, p_3)$ op de oneindig verre rechte ligt. Lengtes en oppervlakten voorziet Möbius van een teken, + of —. Hoewel dit idee niet van hem zelf stamt is het toch pas sinds zijn *Barycentrische Calcul* algemeen bekend en aanvaard geworden. Uitvoerig behandelt hij de dubbelverhouding van vier op één lijn gelegen punten.

Een ander terrein waarop Möbius veel verdiensten heeft is de topologie, toen nog een jonge wetenschap. Hij vond, dat er oppervlakken met één zijde mogelijk zijn. De bekende „band van Möbius" is een voorbeeld van een eenzijdig niet-oriënteerbaar oppervlak. De vinding dateert hoogstwaarschijnlijk van 1858. In zijn nagelaten geschriften lezen we erover: „Eine Vorstellung von einer Zone der letzteren Art kann man sich mit Hülfe eines Papierstreifens in Form eines Rechtecks ABA'B' verschaffen . . . Indem man nun die Seite AB festhält, drehe man den Streifen um seine mit AB' parallele Mittellinie um einen Winkel von 180°, bis A'B' mit AB gleichgerichtet ist, und führe sodann A'B' bis zur Coïncidenz mit AB fort." Met deze gesloten band, die bij doorknippen in een richting evenwijdig met AB' één gesloten band blijft, van dubbele lengte, heeft Möbius zijn naam bij een breder publiek dan van alleen wiskundigen onsterfelijk gemaakt.

A. J. E. M. Smeur

UIT HET EXAMENVERSLAG 1967 VAN HET STAATSEXAMEN H.B.S.

Wiskunde

H.B.S.-A. Het aantal kandidaten, dat voor het schriftelijk examen extreem lage cijfers behaalde, was dit jaar aanmerkelijk kleiner dan gewoonlijk.

Op het mondeling examen blijkt nog steeds, dat een aantal kandidaten de gonio- en trigonometrie — voor zover die volgens het programma 1958 in de eerste drie jaren van de h.b.s. dient te worden onderwezen — niet heeft bestudeerd.

Meer aandacht dient te worden besteed aan het oplossen van eenvoudige ongelijkheidsopgaven.

De subcommissie is van mening, dat de gewoonte van enkele kandidaten om bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen en het bepalen van uiterste waarden van kwadratische functies steeds gebruik te maken van formules, geen aanbeveling verdient.

In het algemeen dienen de kandidaten meer aandacht te besteden aan een duidelijke formulering van hun antwoorden.

Algebra

H.B.S.-B. De resultaten van het schriftelijk examen waren dit jaar bepaald teleurstellend. De subcommissie heeft de indruk, dat vele kandidaten onmiddellijk aan het werk gaan zonder de moeite te nemen een opgave eerst nauwkeurig te lezen. Daardoor werden belangrijke gegevens slecht of helemaal niet gebruikt (bv. 1ste opgave: $0 < x < 1$, 3de opgave: de grafiek van de functie f snijdt de X-as in drie verschillende punten enz.) Dit haastwerk betekent tijdverlies i.p.v. tijdwinst, verhoogt het aantal doorhalingen, waardoor het schrift vaak onleesbaar wordt en brengt een onoverzichtelijke uitwerking der opgaven met zich mede. Een gebrek aan rekenvaardigheid speelt vele kandidaten parten; dit bleek onder meer bij de oplossing van opgave 1c voor vele waarden van k is $(T_{k+1} - T_k) < 0{,}001$.

De subcommissie vraagt zich af, of de verslagen van voorafgaande jaren wel nauwkeurig worden gelezen, daar steeds weer dezelfde tekortkomingen worden geconstateerd. Ook nu weer begripsverwarring als functie-vergelijking-grafiek of vergelijking-ongelijkheid enz. Vele kandidaten weten niet te formuleren wat sommeerbaar betekent, wat een stijgende functie is, wat een differentiaalquotiënt is, enz. Het onderzoek naar de extrema dient te geschieden met de eerste afgeleide (de subcommissie hecht geen waarde aan het mechanische gebruik van de tweede afgeleide). Ook bij het mondeling onderzoek laat de rekentechniek veel te wensen over.

Ten slotte kan de subcommissie geen waardering opbrengen voor het systeem van sommige kandidaten, die mondeling examen doen om „examenervaring" op te doen, terwijl ze de gehele stof nog niet hebben bestudeerd.

Stereometrie

Het schriftelijk gedeelte van het examen gaf geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

Wat betreft het mondeling gedeelte moet het de commissie van het hart dat

1. veel kandidaten zelfs de meest eenvoudige begrippen en lichamen niet in behoorlijk Nederlands weten te definiëren; daarbij wordt niet van de kandidaten verwacht, dat zij een volkomen gaaf en in de studeerkamer gewikt en gewogen bepaling geven, doch wel, dat zij in hun eigen taal een duidelijke en redelijke definitie weten te geven;
2. veel kandidaten geen enkele projectie-methode blijken te hebben bestudeerd;
3. veel kandidaten zelfs met de meest eenvoudige vragen omtrent het netwerk van een viervlak geen weg weten.

Goniometrie en Analytische meetkunde

De wijze, waarop men zich op dit onderdeel had voorbereid, liet veel te wensen over. Het komt maar zelden voor, dat een kandidaat bij de analytische meetkunde eerst een plan maakt en dit vervolgens uitvoert. Vele kandidaten slagen er niet in, de draad van hun eigen betoog vast te houden.

Dat men bij een verzamelingsvraagstuk een betrekking dient te zoeken tussen de x en de y van een punt van de verzameling en dat deze betrekking onafhankelijk moet zijn van eventuele parameters, is voor de meeste examinandi onbekende stof.

Enige kennis van cirkelbundels, met name van cirkelbundels zonder reële basispunten, is bij de meesten afwezig. Het op de juiste wijze interpreteren van een bundelvergelijking lukt nagenoeg geen enkele kandidaat.

Wat betreft de goniometrie komt het de subcommissie voor, dat men wel een aantal werkwijzen heeft aangeleerd, doch dat het begrip hierbij meestal ontbreekt.

Bij de herleidingsmethode met hulphoek tracht men dikwijls te bewijzen, dat de hulphoek scherp is, terwijl deze hoek scherp gekozen is.

Velen zijn er ten onrechte van overtuigd, dat het nul zijn van de afgeleide functie de aanwezigheid van een uiterste waarde voor de betreffende waarde van x impliceert. Bij de goniometrische ongelijkheden worden functies als $\sin x$, $\cos x$ enz. vaak „zonder blikken of blozen" als monotoon stijgende functies in ieder interval opgevat, hetgeen blijkt uit redeneringen als $\sin x$ is groter dan $\sin a$, dus x is groter dan a.

De subcommissie spreekt de welgemeende hoop uit, dat het voornoemde onderdeel in de toekomst met wat minder luchthartigheid zal worden aangepakt.

BOEKBESPREKING

A. Kertész, *Vorlesungen über Artinsche Ringe*, Hongaarse Academie van Wetenschappen, Budapest, 1967, $ 7.50.

Een uitvoerig, zeer algemeen werk over de zgn. ringen van *Artin*, d.w.z., ringen met een minimum-conditie voor rechtsidealen, waarin men veel kan vinden van wat hierover bekend is geworden sedert het verschijnen van het bekende boekje van Artin, Nesbitt en Thrall in 1944. De eerste helft van het boek bevat, na de tegenwoordig blijkbaar onvermijdelijk geachte inleiding over verzamelingen, algemene ringtheorie. Hierna begint in hoofdstuk VI de speciale theorie van de ringen van Artin.

Het verbaasde ons dat we in het boek niets aantroffen over representaties van ringen, noch over eindige algebra's, omdat in onze ogen de representatie-theorie van eindige groepen nog steeds de voornaamste rechtvaardiging is voor de bestudering van ringen van Artin (de groepenalgebra is een bijzonder geval van zo'n ring). Juist door deze omissie krijgt het boek wel een wat erg specialistisch karakter.

Een groot aantal opgaven, met bij de moeilijker problemen aanwijzingen voor de oplossing, verhoogt de waarde van het boek, dat zijn weg wel zal vinden naar de boekenkast van de „ringspecialist".

A. Menalda

Kam-Tim Leung and Doris Lai-Chue-Chan, *Elementary Set Theory*, parts I and II. Hong Kong University Press, Oxford University Press, 1967, 37/6, paper covers.

Het eerste deel verscheen reeds in offset (zie Euclides **41**, blz. 221), het tweede verschijnt voor het eerst.

Het tweede deel bevat de hoofdstukken: 5. Families; 6. Natural numbers; 7. Finite and infinite sets; 8. Ordered sets; 9. Ordinal numbers and cardinal numbers.

De schrijvers definiëren de natuurlijke getallen volgens Von Neumann als verzamelingen, waarbij de „opvolger" x^+ van een natuurlijk getal (verzameling) x is bepaald door $x^+ = x \cup \{x\}$. Het „eerste" natuurlijke getal is $0 = \emptyset$, het „tweede" $1 = \{\emptyset\}$.

De inleidingen ter introductie van nieuwe begrippen zijn niet zo uitvoerig als in het eerste deel.

Naar mijn mening is het gehele werk een zeer geslaagde poging de aansluiting tussen middelbaar en hoger onderwijs in de wiskunde meer soepel te laten verlopen.

H. W. Lenstra

A. S. Hall and R. W. Woodhead, *Frame analysis*, second edition, XVI + 329 p. John Wiley & Sons, Inc., New York and London, 1967, 96 sh.

Het verwondert niet dat van dit uitstekende leerboek na betrekkelijk korte tijd een herdruk nodig bleek. De theorie der vakwerken wordt er op heldere en overzichtelijke wijze in behandeld. De gebruikelijke beperking tot de lineaire theorie bood de schrijvers de gelegenheid tot een aantrekkelijke systematische opzet, waarbij het dualisme tussen de (gegeneraliseerde) kracht enerzijds en de verplaatsing anderzijds zich duidelijk afspiegelt in de twee stukken waarin het boek is gesplitst en die resp. het ene of het andere begrip als uitgangspunt kiezen. De reciprociteit der daaruit volgende methodieken wordt nog door consequente notaties verstrekt. Al spoedig komen de voordelen van een toepassing der matrixrekening op een natuurlijke wijze naar voren en het boek leidt daarmee op overtuigende wijze in tot de moderne principes der technische mechanica, die dank zij de computer de numerieke beheersing van gecompliceerde constructies mogelijk maken.

O. Bottema

J. Chover (editor), *Markov Processes and Potential Theory*, Proceedings of an Advanced Symposium Conducted by the Mathematics Research Center, United States Army, at the University of Wisconsin, Madison, May 1—3, 1967; John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1967, X + 235 blz., 75 s.

Dit boekje bevat de op schrift gestelde weergave van de dertien voordrachten, gehouden op het bovengenoemde symposium. De inhoud der voordrachten leent zich niet voor korte bespreking; zoals in de titel aangegeven, handelen de voordrachten in hoofdzaak over het verband tussen Markovprocessen (uit de waarschijnlijkheidsrekening) en de abstracte potentiaaltheorie. Vermeld zij dat de sprekers afkomstig waren uit de Ver. Staten, Duitsland, Japan, Frankrijk en Polen.

A. C. Zaanen

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

202. De afstand $d(P, Q)$ van de velden P en Q op een schaakbord definiëren we als het kleinste aantal koningszetten, waarin Q bereikbaar is uitgaande van P.

Onder een lijnstuk verstaan we een serie velden $P_1, P_2, \ldots, P_n$, waarvoor geldt $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_3) = \ldots = d(P_{n-1}, P_n) = 1$,

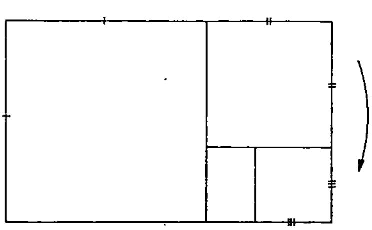
voor elke $i, j, k \leqq n$ geldt: $i < j < k \rightarrow d(P_i, P_j) + d(P_j, P_k) = d(P_i, P_k)$.

Onder een lijn verstaan we een lijnstuk, dat geen echt deel is van een ander lijnstuk.

Wordt gevraagd hoeveel lijnen er op het schaakbord zijn.

203. De zijden van een rechthoek verhouden zich als $1 : \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. Teken de langste zijde horizontaal. Snijd aan de linkerkant van de rechthoek een vierkant af. Snijd van de rechts overblijvende rechthoek aan de bovenzijde een vierkant af. Daarna van de onder overblijvende rechthoek aan de rechterzijde een vierkant. Enz., steeds in de richting van de pijl voortgaande. Gevraagd wordt het punt, dat de doorsnede is van alle achtereenvolgende overblijvende rechthoeken. De bedoeling is dit punt zonder berekening te vinden en twee lijnen aan te geven, waarvan het het snijpunt is.

(P. Bronkhorst)



OPLOSSINGEN

200. Als $A \Leftrightarrow B$ niet geldt en evenmin $B \Leftrightarrow C$, dan geldt $A \Leftrightarrow C$. Dit werd toegepast op:

„x is even $\Leftrightarrow$ x is een drievoud" is niet juist,
„x is een drievoud $\Leftrightarrow$ x is een vijfvoud" is niet juist,

dus

„x is even $\Leftrightarrow$ x is een vijfvoud" is juist.

Gevraagd werd de fout in de redenering.

Uit de opgave blijkt, hoe nodig het is een goede symboliek te gebruiken. De bewering:

x is even $\Leftrightarrow$ x is een drievoud

is slordig opgeschreven. De volledige symbolische weergave van de bedoeling is:

$(\forall x)$ (x is even $\Leftrightarrow$ x is een drievoud),

waarin $(\forall x)$ betekent: voor elke x. Nu is

$(\forall x)$ (x is even $\Leftrightarrow$ x is een drievoud) niet juist,
$(\forall x)$ (x is een drievoud $\Leftrightarrow$ x is een vijfvoud) evenmin.

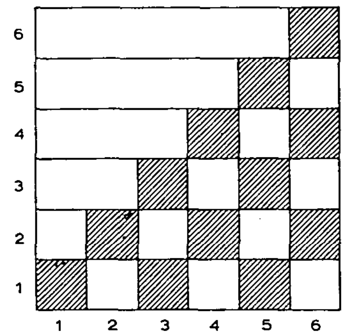
Verder weten we:

als $A \Leftrightarrow B$ onjuist is en $B \Leftrightarrow C$ onjuist is, dan is $A \Leftrightarrow C$ juist.

Maar dit laatste kunnen we niet op het voorgaande toepassen, omdat we daar niet te maken hebben met twee beweringen van de vorm $P \Leftrightarrow Q$.

201. Neem een „schaakbord" met $(2n)^2$ velden. Nummer de rijen van 1 tot en met $2n$ en de kolommen ook. Elk veld kan nu bepaald worden door een getallenpaar (p, q), waarin p het nummer van de rij en q van de kolom is, waarin het veld voorkomt. Laat alle velden, die links boven de hoofddiagonaal $(1, 1)$-$(2n, 2n)$ zich bevinden, weg.

Nummer ook de spelers van 1 tot en met $2n$. Onderstel speler p speelt tegen speler q en $p < q$. Bepaal de kleur van het veld (p, q) en laat speler p met deze kleur spelen. Men ziet nu gemakkelijk in, dat aan de gestelde eis voldaan is.



In de figuur is het geval $n = 3$ weergegeven. Men ziet, dat hier b.v. 2 tegen 3 speelt met wit, tegen 4 met zwart, tegen 5 met wit, tegen 6 met zwart en tegen 1 met zwart (want 1 speelt tegen 2 met wit). Dus speelt 2 twee keer met wit. Hetzelfde geldt voor 4 en 6. Daarentegen spelen 1, 3 en 5 drie keer met wit.