

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

IX — 1 JUNI 1968

INHOUD

Drs. J. van Dormolen: De nutteloosheid van venn- diagrammen	273
Dr. Anna Zofia Krygowska: Développement de l'activité mathématique des élèves; rôle des problèmes dans ce développement II	279
Korrel	293
A. van Tooren: Decline and fall	294
De eindexamens - 1968	298
Boekbespreking	301
Kalender	303
Recreatie.	304

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127, voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516, secretaris;

Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Béguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;

Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;

Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Julianaweg 25, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;

Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;

Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;

Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;

E. H. SCHMIDT, Amstelveen;

Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;

Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;

Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron. Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage; P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van *Wimecos*, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van *Liwenagel* te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de *Wiskunde-werkgroep W.V.O.* te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE NUTTELOOSHEID VAN VENN-DIAGRAMMEN

Opmerkingen naar aanleiding van het nieuwe leerplan

door

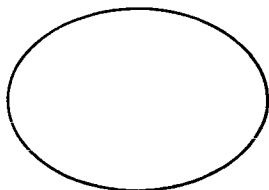
Drs. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest

Venn-diagrammen

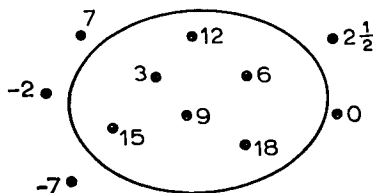
Pogingen om leerlingen zaken als doorsnede, deelverzameling, element van een verzameling duidelijk te maken met behulp van Venn-diagrammen blijken minder succesvol te slagen dan ik verwachtte. Dit is voor een deel te wijten aan mijn gebrek aan ervaring met deze onderwerpen, maar ook vloeit het voort uit de aard van het onderwerp zelf.

Mijn eerste pogingen kwamen in grote trekken neer op het volgende. Ik begon met het tekenen van een ovaal op het bord



en zei dan zo iets als: „Dit stelt een verzameling voor en elk element van die verzameling komt binnen die ovaal te staan.”

Als ik bijvoorbeeld de verzameling van alle gehele positieve getallen kleiner of gelijk aan 20 en deelbaar door 3 wilde suggereren, dan tekende ik wat stippen binnen de ovaal en wat stippen er buiten en schreef daar dan een getal bij



en ik zei dan zo iets van: Deze stip stelt het getal 6 voor; dat getal behoort tot de verzameling. Deze stip stelt het getal 7 voor; dat getal behoort niet tot de verzameling. Vervolgens vroeg ik dan leer-

lingen getallen te noemen die wel en getallen die niet binnen de ovaal geschreven moesten worden.

Nadelen van deze manier van behandelen zijn onder andere:

a. De aandacht wordt gericht op de ovaal, niet op het kenmerk dat de elementen van die verzameling bij elkaar doet horen.

b. Niet alle punten van het vlak van tekening worden gebruikt om een getal voor te stellen. Dit bezwaar is veel groter dan ik eerst dacht. De leerling heeft tijd nodig om zich te realiseren, dat het een bezwaar is. Hij voelt er wel iets van, maar is zich niet bewust waar het om gaat. Als hij over deze barrière heen gekomen is, is hij achter geraakt. Het eist extra inspanning om mij weer in te halen. Nu ik dit eenmaal weet, zal ik daar in mijn onderwijs rekening mee houden en mijn leerlingen voortaan de tijd geven zich over deze barrière heen te werken, maar liever wil ik de barrière vermijden door de zaak op een andere manier aan te pakken.

c. De elementen van mijn verzameling staan slordig door elkaar. Hoe slordig mijn leerlingen ook zelf zijn, zij stellen het op prijs als zij bij mij orde en regelmaat zien. En die regelmaat bestaat: ik behoef mijn leerlingen niet te vertellen, dat de getalverzamelingen die zij kennen geordend zijn. Dat weten zij al. Hoogstens moet ik ze het woord ervoor nog leren en moet ik ze leren er nuttige zaken uit af te leiden. Maar op het bord staan de getallen niet geordend. Dit bezwaar is niet zeer groot, maar het roept even een weerstand op die mijn leerlingen moeten overwinnen en daar moet ik rekening mee houden.

d. Het kan gebeuren dat mijn ovaal leeg blijft. Ik heb dan iets getekend wat ik helemaal niet nodig heb en wat er in feite niet is.

e. Als ik kortere of langere tijd na deze les de verzameling van punten van het vlak van tekening wil tekenen, die op een gegeven afstand van een gegeven punt liggen, krijg ik ook zo'n figuur. Maar nu is de rand zelf de verzameling en niet de dingen die er binnen liggen. En dan zal ik nog niet eens praten over de verzameling van punten die op een afstand van een gegeven punt liggen, die groter is dan een gegeven afstand.

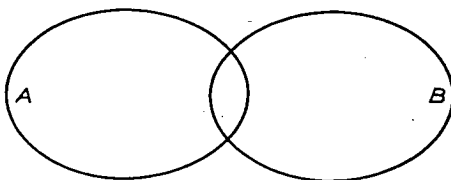
Ik kan twee voordelen bedenken:

a. De bewijskracht die ik kan ontleen aan de figuur als ik stellingen ga bewijzen als $A \cap B = B \cap A$;

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C); A \subset B \Rightarrow A \cap B = A.$$

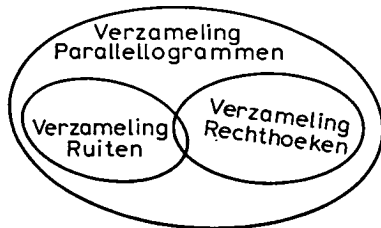
Als ik dit soort stellingen zou willen behandelen, dan is het zeker de moeite waard de hierboven genoemde weerstanden bij de leerlingen op te roepen en ze leren deze te overwinnen. Ik heb ze dan een klein beetje geholpen zich te leren realiseren dat plaatjes geen

begrippen zijn, maar voorstellingen ervan, die dienen om onze redeneringen in het rechte spoor te houden. Ik moet dan bij het bewijzen van deze stellingen wel afspraken maken over het tekenen van de ovalen. Ik zal ze steeds op dezelfde manier moeten tekenen. Bij twee verzamelingen bijvoorbeeld



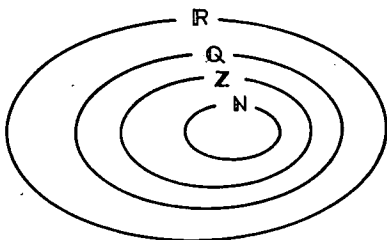
Hierbij zal ik er rekening mee moeten houden dat sommige stukken leeg zullen kunnen blijven. (Zie ook het artikel van Vredenduin: De bewijskracht van de diagrammen van Venn en de implicatie, Euclides, 42, p. 33—41, dat overigens geen pleidooi voor het invoeren van Venn-diagrammen inhield, maar een geslaagde poging was om ons leraren duidelijk te maken, dat op deze manier wel degelijk bewijskracht aan figuren zou kunnen worden ontleend.) Het leeg laten van een of meer stukken leidt echter tot absurde situaties: ook als A een deelverzameling is van B , zal ik de ovalen op bovenstaande manier moeten tekenen. Dat kan nooit de bedoeling van de heer Venn geweest zijn en mijn leerlingen hebben weer een argument om aan te tonen, dat wiskunde het vak is waarin je eenvoudige zaken moeilijk moet maken. Een heel andere zaak is, dat ik helemaal geen behoefte heb aan dit soort stellingen. De verzamelingen en aanhangende begrippen dienen om bij passende gelegenheden het taalgebruik te vereenvoudigen en overzichtelijk te maken en daardoor die situatie helder te laten uitkomen. Stellingen als hierboven genoemd horen thuis bij een inleidend paragraafje over verzamelingenleer en die willen wij op school niet invoeren. Vooral de eerste en de derde stelling zijn voor onze leerlingen zo vanzelfsprekend, dat we alleen maar verwarring scheppen als we er over gaan spreken.

b. Bij het geven van algemene overzichten kan ik mijn leerlingen door gebruik te maken van begrippen als doorsnede duidelijk maken,



dat bijvoorbeeld de eigenschappen van een parallellogram ook gelden voor een ruit; en dat een vierkant zowel de eigenschappen van de ruit als die van een rechthoek heeft.

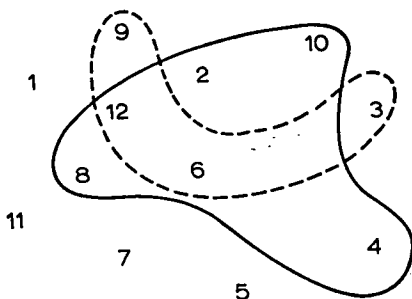
Iets dergelijks kan bijvoorbeeld bij een overzicht van veel genoemde getalverzamelingen.



Maar ook hier treden bovengenoemde bezwaren onverkort op (een stip binnen de ovaal „RUITEN” stelt niet een punt, maar een ruit voor) en zelfs als ik mijn overzicht op deze manier zou willen geven, dan nog zou dat moeten gebeuren bij een recapitulatie. Niet aan het begin van mijn lessen over vierhoeken resp. getallen.

Samenvattend zou ik willen opmerken, dat het gebruik van Venn-diagrammen op deze manier te verwerpen is.

Een verbetering trad op toen ik mijn vragen op een andere manier ging inrichten. Ik begon ervoor te zorgen dat het universum eindig was, bijvoorbeeld alle gehele positieve getallen kleiner dan 13. Ik schreef dan alle elementen op het bord. Niet als puntjes met een



label, maar de label zelf. Daarbij zorgde ik ervoor dat de getallen zo gearrangeerd waren, dat mijn volgende vraag gemakkelijk beantwoord kon worden. Ik vroeg dan bijvoorbeeld: Trek nu eens een gesloten lijn om de even getallen. Ook een gesloten lijn, met een andere kleur, om de getallen die deelbaar zijn door 3. Wat is de doorsnede van de verzameling van de even getallen en van de verzameling van de getallen die deelbaar zijn door 3?

Nadelen: *a.* Ook hier worden niet alle punten van het vlak gebruikt, maar dit bezwaar wordt overwonnen doordat de kringen pas worden getrokken nadat de leerlingen kennis hebben gemaakt met het universum. De leerlingen weten dat de objecten die zij zien alle elementen vertegenwoordigen die in aanmerking zouden kunnen komen.

b. Ook hier zijn de getallen niet geordend.

c. Ik kan geen lege verzameling tekenen. Ik heb wel eens gezien dat men probeerde duidelijk te maken wat men met een lege verzameling bedoelde door een kring om een hoopje popcorn te tekenen en vervolgens de popcorn op te eten. Een origineel idee, maar ik kan toch geen getallen opeten?

d. Meetkundige verzamelingen kan ik zo niet tekenen. (Zie boven bij *e*).

e. De verzameling moet eindig zijn. (En niet te veel elementen bevatten, anders moet ik zoveel schrijven voordat ik aan het eigenlijke werk kan beginnen.)

Voordelen: *a.* De aandacht wordt niet afgeleid van datgene waar het werkelijk om gaat: het gemeenschappelijke kenmerk waardoor de elementen bij elkaar behoren. De gesloten kromme fungeert duidelijk als „hekje” om de elementen heen. Het gevaar voor identificatie van de verzameling met de ovaal is verdwenen. Ik heb in dit verband ook wel eens horen spreken over een touw, waarmee de elementen van een verzameling worden samengebonden. Mijn eerste reactie hierop was: Het touw zit niet strak, dadelijk vallen ze er uit. Een kinderachtige reactie natuurlijk, maar een die zeker ook bij de leerlingen optreedt. Niet zo vreselijk erg, want je kan er gemakkelijk even over nadenken, maar de aandacht wordt intussen weer even afgeleid van de kern van het betoog. En dat wil ik liever niet. Zie ook de opmerkingen over het overwinnen van weerstanden hierboven.

b. De leerlingen blijven het gevoel houden, dat ze op elk gewenst moment een ander hekje kunnen trekken als er soms behoefte aan een andere verzameling mocht bestaan.

c. Ik kan geen lege verzameling tekenen. Ik heb dat ook als een nadeel genoemd, maar het is eigenlijk een voordeel. Als er niets is, wil ik ook niets tekenen. Elke voorstelling van een lege verzameling is onjuist. Ook een leeg lucifersdoosje is een slechte voorstelling. Alsof een verzameling een doos zou zijn, waar je al dan niet iets in kan stoppen. Een klas met leerlingen is niet het lokaal, waar de kinderen in zijn gestuurd. Niemand kan een klas met kinderen aanwijzen. Men kan alleen de elementen van die klas aanwijzen. Het

lokaal is hooguit het „hekje” om de kinderen heen. De lege verzameling gebruiken we alleen om het onszelf gemakkelijk te maken bij het taalgebruik. We behoeven dan in voorkomende gevallen geen afzonderlijke situatie te onderzoeken. Iets dergelijks doen we als we oneindig verre punten gaan „invoeren”. Het is gemakkelijk om steeds over het snijpunt van twee lijnen te kunnen spreken. We behoeven dan niet steeds afzonderlijke gevallen van evenwijdige lijnen te onderzoeken.

Samenvattend zou ik kunnen opmerken, dat ik Venn-diagrammen in de zojuist beschreven situaties van eindige verzamelingen met vrucht zou kunnen gebruiken. Maar deze situatie komt zo weinig voor, dat ik als het te pas komt best even een lijntje kan trekken zonder er verder een woord aan vuil te maken. In het algemeen zal ik het plaatje van een verzameling zo tekenen als het in een bepaalde situatie het beste past en dat is bijna nooit een Venn-diagram.

Ik gebruik geen Venn-diagrammen bij:

het tekenen van de verzameling van punten die even ver van twee gegeven punten afliggen;

het oplossen van de vraag naar de doorsnede van de verzamelingen $\{x|x > 2\}$ en $\{x|x < 4\}$;

het bepalen van het aantal roosterpunten binnen of op de vierhoek die gevormd wordt door de punten $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 5)$ en $(2, 4)$;

het bepalen van de gemeenschappelijke oplossingen van de vergelijkingen $x^2 + y^2 = 25$ en $x + y = 1$;

de verzameling lijnen die gelijke hoeken maken met twee gegeven snijdende lijnen en door het snijpunt van die gegeven lijnen gaan.

En zo zou ik nog wel een poosje door kunnen gaan.

Er is één argument dat door een voorstander van Venn-diagrammen in ons onderwijs zou kunnen worden gebruikt: de leerlingen leren er abstract door denken. Voor mij is dat nog de vraag en zelfs als het waar mocht zijn, dan kan ik nog wel een paar onderwerpen opnoemen die daar beter voor geschikt zijn en die niemand op de scholen, althans niet in de onderbouw, zou willen zien ingevoerd. Er zijn genoeg onderwerpen in ons leerplan die de leerlingen beter abstract leren denken — als ik tenminste begrijp wat ik daar mee bedoel — zonder Venn-diagrammen.

DÉVELOPPEMENT DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES; RÔLE DES PROBLÈMES DANS CE DÉVELOPPEMENT II ¹⁾

par

Dr. ANNA ZOFIA KRYGOWSKA

Kraków

4. Conditions favorables ou défavorables au développement de l'activité mathématique de l'élève.

Quels sont les facteurs qui entravent la mise en œuvre du postulat si évident et si indiscutable? Quels sont au contraire les facteurs qui stimulent particulièrement le développement de l'activité mathématique de l'élève?

Des réponses directes et plus détaillées à ces questions ont été données seulement par deux sous-commissions. Certaines remarques disséminées dans d'autres rapports ne complètent ces réponses que partiellement.

La première question concerne l'influence du contenu et de la construction du programme sur le développement de l'activité mathématique de l'élève.

En formulant ce problème dans mon questionnaire j'espérais une confrontation objective et concrète – faite de ce point de vue – des programmes modernes avec les programmes traditionnels. Malheureusement, cette question a été, dans la majorité des rapports, passée presque sous silence ou traitée très superficiellement.

Le rapport hongrois (16) constate que le contenu du programme n'a pas d'influence décisive sur le développement de l'activité mathématique des élèves. Ce qui est avant tout important – selon ce rapport – c'est la méthode. Le contenu traditionnel peut être et a été élaboré en classe d'une manière dogmatique ainsi que par des procédés activants la pensée mathématique des élèves.

Beaucoup d'exemples cités dans les rapports en tant qu'illustration des situations problématiques particulièrement favorables au développement de l'activité mathématique de l'élève, concernent justement des questions tout à fait traditionnelles.

¹⁾ I, voir Euclides, 43, p. 65 (nov. 1967).

D'autre part, les expériences récentes prouvent que, dans le programme moderne, le professeur trouve une base extrêmement riche pour l'activité créatrice de l'enfant; néanmoins, il arrive encore souvent que ce programme est traité en classe d'une manière dogmatique, autoritaire, formelle.

Dans le dossier présenté par les Sous-Commissions de la CIEM nous trouvons une seule position concrètement documentée qui montre des perspectives ouvertes à l'activation de la pensée mathématique de l'élève par le contenu nouveau des programmes. Je pense aux compte-rendus détaillés des cycles de leçons de George Steiner (2), basés sur des recherches mathématiques véritables faites par les élèves en classe, concernant les domaines différents des idées mathématiques très abstraites, développées dans un esprit tout-à-fait moderne, et néanmoins procédant par des voies génétiques et inductives. Nous connaissons aujourd'hui beaucoup d'exemples de conceptions analogues très ingénieuses (p.ex. dans le Centre Belge elles se transforment déjà dans un système cohérent de la pédagogie nouvelle des mathématiques, englobant les problèmes du contenu et de sa construction de la pratique scolaire, du langage etc.; malheureusement les rapports de ce pays ainsi que ceux d'autres pays très actifs dans la modernisation des mathématiques n'ont pas été transmis au rapporteur).

Ces perspectives sont soulignées fortement dans certains rapports. On met en évidence presque partout le rôle particulier de la vision et du langage ensemblistes, qui facilitent l'accès actif des élèves, même des plus jeunes, aux idées abstraites modernes. Mais, d'autre part, on exprime la crainte p.ex. dans l'article de N. Fine de la Sous-Commission des Etats-Unis – que cette source riche en situations mathématiques potentiellement si intéressantes et instructives, ne se soit égarée trop facilement par des problèmes stériles inutiles, banals.

Selon l'opinion de Georg Polya (12) c'est justement cette situation négative qu'on constate dans beaucoup de manuels dits modernes. Les manuels traditionnels étaient „surpeuplés” par les problèmes d'un seul schéma, c'est-à-dire par des problèmes dont la solution n'exigeait que l'application d'un seul schéma bien connu. Les manuels modernes – selon l'opinion de George Polya – se limitent aussi aux problèmes de routine mais d'un autre type, à savoir aux problèmes de la terminologie. Les problèmes d'un seul schéma ainsi que les problèmes de la terminologie peuvent être utiles et même nécessaires en ce qui concerne les habiletés et les connaissances mécaniques, mais leur contribution au développement de l'activité ma-

thématique des élèves est minime. Beaucoup de notions modernes abstraites ne sont pour les élèves que des symboles et des termes, car elles ne sont pas assez profondément et largement enracinées dans leurs expériences personnelles et dans leurs intuitions. C'est pourquoi l'élève ne peut pas les appliquer dans de véritables situations problématiques. En conséquence, il est exercé dans la solution des simples problèmes de routine, dont la majorité concerne l'utilisation correcte du langage et qui ne méritent même pas d'être considérés comme problèmes mathématiques.

De ce point de vue on défend aussi dans certains rapports (anglais, américain) la géométrie comme un domaine très favorable à l'activité multilatérale des élèves, orientée par ses expériences spatiales, donc pénétrée par des intuitions, et en même temps ordonnée par des rigueurs logiques. Il faut avouer que les problèmes géométriques, même surannés, ont un caractère spécifique, grâce évidemment à cette synthèse de l'intuition naturelle, de l'expérience spontanée, de la vision et du raisonnement. La géométrie peut être le domaine d'essais de différents types et à des niveaux divers. Ces recherches dans le monde géométrique peuvent être aussi naïves que raffinées, aussi concrètes, liées aux manipulations, que formelles. Il peut donc se mouvoir librement à chaque âge dans ce domaine si facile à concrétiser dans un modèle ou dans un dessin.

La conscience de cette spécificité s'exprime p.ex. dans le programme de Nuremberg qui conserve encore, dans l'enseignement des mathématiques au cours de la 5-ème, 6-ème et 7-ème année de la scolarité, des constructions géométriques classiques, éliminées en tant que bizarreries dans beaucoup de programmes modernes. Evidemment, ce bannissement a été justifié avant tout du point de vue de la méthodologie de la science même. Les constructions classiques n'étaient, dans le système axiomatique d'Euclide, que des démonstrations de théorèmes d'existence. Elles perdent ce sens avec le changement de l'axiomatique de la géométrie et même dans la théorie équivalente logiquement à la théorie d'Euclide, des problèmes de construction-clefs pour Euclide deviennent des problèmes marginaux, artificiellement construits, des bizarreries véritables.

Aux idées d'Euclide se réfère la motivation présentée dans le rapport allemand. On y écrit expressément: „les constructions géométriques des triangles dans le style ancien, donc l'apprentissage dégénéré à la solution mécanique de certains problèmes, paralysent l'intérêt et l'activité des élèves. Mais si les constructions de base sont liées conceptuellement aux théorèmes de base, alors les propriétés des figures se révèlent aux élèves comme des implications

inévitables de la traduction dans le langage conceptuel des opérations manuelles, effectuées avec le compas, le linéal etc. Cette méthode est appropriée à la tendance des élèves à agir concrètement. Pour cette raison et dans ce sens le programme de Nuremberg conserve encore les constructions de triangles".¹⁾

La liaison profonde des opérations concrètes du dessin avec les idées abstraites, basée sur l'intériorisation des manipulations dans la pensée, est très importante pour la pédagogie des mathématiques, science de caractère particulièrement „opératif”.

Ce problème exige évidemment une recherche profonde et il n'est pas du tout négligé dans la réforme récente des mathématiques élémentaires. Il suffit de mentionner ici les travaux systématiques du Centre Belge sur la méthode des schémas et des graphes, dont le rôle dans le développement de l'activité mathématique des élèves est particulièrement souligné dans les rapports allemand et suédois.

Le développement de l'activité mathématique des élèves instruits selon le programme obligatoire est conditionné évidemment par l'arrangement juste et psychologiquement correct des niveaux consécutifs concernant le type des activités mathématiques des élèves; cette idée est développée largement dans les rapports allemand et hongrois.

Sous cette condition, le contenu moderne du programme scolaire peut-être une source beaucoup plus abondante d'activités mathématiques, que le contenu traditionnel; de plus, ces activités peuvent être beaucoup plus différenciées et d'autant plus intéressantes et excitantes pour les élèves. Ce sont des faits constatés objectivement dans des pays divers, même dans ceux qui – comme p.ex. la Pologne – réalisent la réforme basée sur la „petite modernisation”, une modernisation partielle.

Le surchargement du programme par les matières ainsi que le minimalisme dans ce domaine peuvent entraver le développement de l'activité mathématique des élèves, comme le prouvent les expériences de certains pays (Pologne, Hongrie).

Dans le premier cas le professeur, sous la pression de l'étendue des matières qui doivent être assimilées dans une durée définie, ne laisse pas aux élèves le temps nécessaire à la réflexion indépendante. Le minimalisme conduit à l'inertie et à l'ennui. D'autre part, les méthodes actives s'avèrent finalement plus économiques, même du point de vue de l'étendue du contenu. Le temps consacré aux questions fondamentales, élaborées avec l'engagement person-

¹⁾ [1] p. 4.

nel des élèves, n'est pas à fonds perdu; certaines connaissances sont souvent acquises presque gratuitement grâce à l'expérience mentale profonde des élèves acquise précédemment. Ce qui est mauvais, c'est le calcul mécanique des horaires et des pages du manuel, qui décide de la distribution du contenu dans le temps chez beaucoup de professeurs n'ayant pas une conception d'ensemble du développement de l'attitude active des élèves.

Nous avons touché maintenant à un point très important et très difficile: la préparation du maître à l'enseignement actif des mathématiques.

Dans le rapport de la Sous-Commission des Etats-Unis, George Polya (12) exprime l'opinion que la méthodologie de l'enseignement n'est pas une science et ne le deviendra pas dans l'avenir prochain, car l'enseignement n'est qu'une espèce d'art; on ne peut parler de la meilleure méthode dans l'enseignement, de même qu'on ne peut pas parler de la meilleure interprétation d'une sonate de Beethoven.

Il faut néanmoins faire face à la réalité. Dans les cadres des professeurs les mathématiciens de talent manquent de plus en plus, car le développement rapide des sciences techniques et le progrès social ouvrent des carrières plus attirantes et très différentes. Le même processus a augmenté le nombre des élèves qui fréquentent les écoles primaires et secondaires et a créé le besoin urgent d'un recrutement augmenté des maîtres. Dans cette situation on ne peut pas espérer que le corps d'enseignants soit composé d'artistes et de virtuoses, et que l'enseignement soit comparable à l'interprétation d'une sonate de Beethoven. Le maître d'aujourd'hui n'est le plus souvent qu'un artisan plus ou moins habile, plus ou moins honnête, ou moins ouvert aux idées nouvelles.

D'autre part, les tendances actuelles dans l'enseignement des mathématiques augmentent les exigences concernant les connaissances scientifiques, pédagogiques et psychologiques des maîtres et concernant leur talent et leur initiative créatrice.

La situation dans l'enseignement des mathématiques est donc aujourd'hui paradoxale. Dans la majorité des rapports on constate expressément que les méthodes actives n'ont pas pénétré dans l'enseignement des mathématiques, car elles sont trop difficiles et trop embarrassantes pour les professeurs. De ma part, je voudrais attirer l'attention sur le danger de la dégénération novice de ces idées provoquée par des maîtres qui ont terminé des études supérieures, mais dont l'esprit mathématique est limité. D'autre part, de bons mathématiciens n'ont qu'une connaissance presque nulle de la psychologie de l'élève.

Dans ces conditions la préparation des professeurs pour l'enseignement actif devient une tâche particulièrement urgente pour les Ecoles Supérieures et pour toutes les institutions qui s'occupent de l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

Cette tâche urgente est mise en évidence dans tous les rapports, où l'on mentionne aussi différentes démarches déjà en cours, ou des projets à réaliser.

Il faut souligner le grand travail dans ce domaine, présenté par le rapport anglais, ainsi que des propositions intéressantes faites par N. J. Fine (7) concernant les séminaires organisés au sein des études supérieures de mathématiques et consacrées à la méthodologie et à la stratégie de la solution des problèmes.

Je voudrais souligner pour ma part l'importance de l'initiation des futurs professeurs à la recherche méthodologique théorique et pratique organisée parallèlement à leurs études mathématiques. Ces travaux exécutés p.ex. dans mon séminaire par les étudiants concernant l'enseignement actif des mathématiques ont été non seulement extrêmement utiles pour les étudiants eux-mêmes, mais ont apporté aussi certains résultats qui méritent d'être répandus et qui se trouvent maintenant en élaboration synthétique.

Malgré tous ces efforts, le problème de la préparation des maîtres à l'enseignement actif des mathématiques reste ouvert et exige une solution plus générale et plus rapide. Si cette tâche ne sera pas réalisée sans tarder, nos grandes idées de réforme peuvent même, au contraire, provoquer une régression dans les mathématiques scolaires. Et les signaux de ce danger sont déjà mentionnés dans certains rapports.

Parmi les facteurs entravant le développement de l'activité des élèves on met particulièrement en relief les méthodes de l'évaluation du progrès des élèves et les examens.

Il est facile d'apprécier les connaissances et l'habileté des élèves, il est au contraire très difficile d'évaluer objectivement le niveau de leur activité mathématique.

C'est pourquoi l'élève obtient le plus souvent des notes adéquates à ses connaissances et à son habileté, ce qui influence sa manière d'apprendre et fausse son opinion concernant ce qui est important en mathématiques. La situation s'empire si les prescriptions administratives dans ce domaine sont trop rigides. Comme le constate le rapport hongrois, il arrive dans certaines conditions que l'évaluation de l'élève et les notes deviennent le problème central de l'enseignement, que les professeurs aussi bien que les élèves traitent le contenu du programme comme „matière pour l'interrogation”.

Dans les autres rapports on souligne l'influence nocive des examens de fin de cours et des examens d'entrée aux écoles supérieures. Les problèmes qui y sont posés sont souvent typiques et – comme le constate p.ex. le rapport suédois – beaucoup de temps précieux de l'enseignement est consacré à la solution de problèmes du même type, donc non pas à une éducation mathématique approfondie, mais bien à la préparation directe de l'élève à l'examen. Le rapport japonais (17) attire l'attention sur l'influence nocive des examens écrits basés sur des tests à choix multiple. Les élèves dont l'effort est dirigé avant tout à se bien préparer à ces examens ne sont pas aptes à formuler correctement une explication ou un raisonnement mathématique.

Je voudrais accentuer ici la responsabilité des écoles supérieures dans ce domaine. Le genre et l'esprit des problèmes posés au cours des examens d'entrée conditionnent dans un degré considérable l'esprit de l'enseignement dans l'école secondaire. C'est le problème qui se trouve aussi au centre de la discussion en Pologne.

D'autre part, l'enseignement pseudo-actif des mathématiques basé sur un libéralisme exagéré et le contrôle trop superficiel des progrès des élèves, causé souvent par la crainte du schématisme, de l'ennui, du „piochement mécanique”, court le danger contraire: connaissances superficielles, manque de l'habileté la plus primitive chez les élèves. On ne peut pas s'intéresser aux problèmes dans le vide mathématique. Nos observations prouvent que le manque d'intérêt pour les mathématiques chez beaucoup d'élèves et leur attitude passive sont causés par des lacunes trop grandes dans leurs connaissances et dans leur habileté. Et en mathématiques, science si cohérente intérieurement, le manque d'une brique importante peut renverser toute la construction mentale.

Parmi les facteurs défavorables à l'enseignement actif liés à l'organisation scolaire, on souligne avant tout les classes surpeuplées. Selon le rapport allemand (1) l'effectif de la classe ne doit pas dépasser 20 élèves, si l'on veut réellement développer l'activité personnelle de l'élève. Evidemment, ce postulat est tout à fait irréal dans beaucoup de pays.

Le travail organisé en petits groupes s'avère être, selon des expériences nombreuses, très favorable au développement de l'activité mathématique des participants. On souligne aussi les grandes valeurs pédagogiques résidant dans la variété de forme des travaux exécutés individuellement ou en groupes par les élèves, p.ex. l'élaboration d'un thème plus large, („Jahresarbeiten” en Allemagne), les exposés des élèves en classe présentant soit les résultats de

leurs travaux, soit le compte-rendu de la lecture mathématique, les travaux organisés en corrélation avec les autres disciplines enseignées à l'école etc. On met en évidence l'influence particulière des clubs mathématiques, des olympiades et des revues mathématiques, dont les lecteurs et les collaborateurs actifs sont les élèves eux-mêmes. L'organisation de l'activité des élèves est facilitée si l'école dispose d'un laboratoire bien équipé en livres et en matériaux concrets. Dans les pays où l'école secondaire de l'éducation générale est – comme p.ex. en Pologne – unitaire, le rôle qui active particulièrement les élèves les plus doués, peut être accompli par les séminaires organisés dans le cadre de l'enseignement obligatoire en groupant les élèves selon leurs goûts et leurs intérêts personnels.

5. Problème et situation problématique.

Tous les auteurs des rapports constatent que la solution des problèmes est la forme la plus efficace non seulement du développement de l'activité mathématique des élèves, mais aussi de l'apprentissage des connaissances, des habiletés, des méthodes et des applications mathématiques. De plus, l'attitude de l'élève par rapport aux mathématiques est conditionnée avant tout – comme N. Fine le constate dans le rapport américain – par les types des problèmes mathématiques auxquels il fait face en classe et dans son travail personnel. C'est pourquoi la méthodologie de la solution des problèmes mathématiques dans l'enseignement primaire et secondaire se trouve au centre même de l'intérêt pédagogique.

Ces questions ont été traitées très largement, surtout dans les rapports américain et anglais. Il serait impossible même d'esquisser ici tous les problèmes considérés par les collaborateurs très nombreux de ces rapports. Je vais donc, dans la suite, signaler seulement les idées principales et particulièrement les questions encore ouvertes.

La plus grande partie des travaux présentés dans les rapports est consacrée à l'essai d'une analyse du problème mathématique vu dans l'aspect de l'enseignement, analyse relative à la définition, aux objectifs, à la classification, aux critères „d'un bon problème”, aux stratégies de la solution du problème, etc. Mais tout cela se trouve encore dans un état de cristallisation.

Les différentes considérations concernant la définition du problème mathématique peuvent être finalement résumées dans la forme de l'explication donnée par Philip S. Jones (9) et contenue dans le rapport américain: Le problème mathématique, c'est la question mathématique à laquelle la réponse n'est pas immédiate

et ne peut pas être obtenue par l'application directe des schémas connus.

Cette définition relativise évidemment les aspects du problème. Une question mathématique n'est un problème que relativement à une personne qui ne connaît pas encore sa solution, relativement à ses connaissances et à ses expériences antérieures.

Le problème se distingue de la situation problématique. Dans le premier cas, la question est formulée avec précision, dans le second elle n'est pas encore cristallisée. La situation problématique est la base, la source, le stimulant de la construction des problèmes mathématiques. H. O. Pollak (11) dans le rapport des Etats Unis souligne avec force que c'est justement la situation problématique qui est essentielle pour l'activité mathématique; les applications des mathématiques consistent au fond dans la formulation d'une question mathématique surgissant d'une situation problématique qui se pose en dehors des mathématiques. L'auteur postule l'utilisation la plus large des situations problématiques dans l'enseignement. Au lieu d'encourager les élèves: „Voici un problème – cherchez la solution”, „voici un théorème, cherchez la démonstration”, il faudrait plutôt leur dire souvent: „Voici une situation – réfléchissez - y.

Ce postulat est exprimé aussi dans le rapport anglais, où l'on développe largement les aspects éducatifs des questions et des problèmes posés par les élèves eux-mêmes.

En résumant, parmi les considérations très incohérentes d'ailleurs, disséminées dans tous les rapports, sur le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques, on peut discerner des remarques concernant

- 1°. l'organisation du processus de l'enseignement, et
- 2°. les aspects psychologiques de la participation active de l'élève dans ce processus.

Cette division n'a de sens particulier que dans l'analyse théorique, mais elle facilite la présentation claire de la question.

Le problème et la situation problématique interviennent dans le processus de l'enseignement des mathématiques à toutes ses étapes, à savoir:

- 1°. introduction de nouvelles matières (notion, théorèmes, méthodes, algorithmes, schémas); ici la solution des problèmes formulés à priori ou ceux qui se sont manifestés au cours de l'analyse d'une situation problématique peut conduire ou à la découverte et à la création, ou à la compréhension du contenu transmis à l'aide de

cette solution;

2°. apprentissage, consolidation, habiletés, mémorisation, synthèses etc;

3°. contrôle de la compréhension ainsi que contrôle du degré de la domination des notions, des théorèmes, des méthodes; on peut discerner ici un autocontrôle continu, où le rôle des problèmes est particulièrement important, et le contrôle antérieur fait par le professeur, tous les deux conçus dans le sens profond, caractérisé de cette manière par František Wolf (14): malgré qu'un chapitre de la théorie a été déjà élaboré à fond et que les nouvelles idées ont été introduites, ni le professeur ni l'élève ne peuvent être sûrs, que tout ait été saisi correctement, que tous les fils nouveaux aient été bien enlacés dans les connaissances antérieures. La preuve ne peut être faite autrement que par la solution des problèmes.

Parmi les aspects psychologiques du rôle des problèmes mathématiques, on met en évidence d'un côté leur influence qui stimule l'activité mathématique des élèves, développe leur intérêt pour les mathématiques, et de l'autre celui qui développe leur conception des mathématiques en tant que science et son rapport à la réalité; les facteurs affectifs, les valeurs éducatives ayant un caractère plus général comme p.ex. la patience, l'exactitude, la technique du travail intellectuel etc.

On s'efforce dans la suite d'esquisser les critères de la construction d'un „bon problème mathématique” et d'une „bonne collection de problèmes mathématiques”, des critères considérés des deux points de vue que je viens de mentionner.

J'ai dit „qu'on s'efforce”, car cette recherche se trouve évidemment encore dans les langes.

On se concentre le plus souvent sur les critères d'un „bon problème de l'introduction”; l'analyse du „bon problème de l'apprentissage” dans le sens le plus profond, ainsi que du „bon problème de contrôle” n'a été touchée que très superficiellement dans les rapports.

R. P. Dilworth (6) dans le dossier américain formule certains principes de la construction des bons problèmes vus dans l'aspect du processus de l'enseignement p.ex.:

1°. la compréhension de la notion qui doit être introduite par le problème donné est essentielle pour la solution;

2°. la notion ou la propriété envisagée sont mises en évidence par la recherche de la solution la plus simple ou la plus élégante;

3°. les connaissances et les méthodes déjà connues sont appliquées dans les situations non habituelles;

4°. la solution du problème exige la généralisation des concepts et

des opérations connus;

5°. la solution la plus rationnelle du problème exige l'élimination consciente des procédés stéréotypiques obstinés et le choix de la voie nouvelle la plus directe;

6°. le problème donne à l'élève l'occasion de la perception du système des relations qui n'est pas fermé, mais qui ouvre le chemin à une variété de conclusions non évidentes et non banales.

Concernant le rôle du problème dans le contrôle des acquisitions mathématiques des élèves, J. Brookes (15) dans le rapport anglais, postule l'introduction des situations problématiques ouvertes dans les questions des examens. Cette proposition très intéressante évidemment, n'est pas facile à réaliser, mais néanmoins mérite d'être expérimentée.

En analysant du point de vue psychologique la question de l'activation de la pensée mathématique de l'élève on souligne avant tout les caractères suivants d'un bon problème:

1°. il doit être intéressant pour l'élève et provoquer sa volonté à l'effort et à la recherche; il doit avoir un sens pour l'élève. Les opinions concernant l'interprétation de ce sens sont souvent totalement opposées. La majorité des auteurs soulignent la nécessité d'utiliser comme point de départ des situations réelles, familières aux élèves, ayant un sens pratique. D'un autre côté on constate que les enfants jusqu'à l'âge de 15 ans ne s'intéressent pas du tout à des problèmes pratiques et, qu'au contraire, le domaine de la fantaisie et des devinettes est ici le plus favorable à éveiller leur intérêt pour les mathématiques et motiver leur travail intellectuel. Il semble que cette opposition si frappante découle du fait que l'attitude des enfants dépend essentiellement des conditions extérieures sociales et culturelles, ainsi que de l'esprit général de l'éducation, qui n'est le même ni dans les divers pays, ni dans les divers groupes sociaux du même pays.

Le problème peut avoir aussi pour l'élève un sens lié aux mécanismes intérieurs des mathématiques mêmes, parmi lesquels la recherche d'un schéma en globant les cas particuliers et éliminant les exceptions, la rationalisation et la simplification du procédé déjà connu, la recherche d'une issue pour une contradiction frappante, etc., sont accessibles pour les élèves même très jeunes.

L'esprit des programmes modernes suggère aussi des motivations mathématiques intérieures basées sur la vision structurelle des mathématiques. La motivation de ce genre a été attaquée par Peter D. Lax dans le rapport américain. L'auteur écrit: ... „selon la tendance actuelle dans les nouveaux manuels élaborés dans les Etats-

Unis, on introduit les opérations sur les fractions et sur les nombres négatifs par le processus algébrique. La devise est: assurer la structure du système de nombres. Cette devise me semble très simpliste; peut-on espérer que l'élève aperçoive dans la structure du système de nombres le bien suprême de la société? . . ."¹⁾ demande l'auteur.

De l'autre côte on observe le grand intérêt porté par beaucoup d'élèves justement à des procédés tout à fait abstraits et méthodologiques. La question devrait être étudiée d'une manière objective. Les comptes-rendus détaillés de leçon contenant la description des réactions des élèves comme celles p.ex. qui ont été présentés par George Steiner dans le rapport allemand sont évidemment extrêmement instructifs au point de vue de cette recherche.

2^o. Le second caractère du bon problème considéré du point de vue de l'élève même, c'est l'adaptation des difficultés de la solution à ses possibilités. L'élève doit non seulement vouloir mais aussi pouvoir résoudre le problème. Le découragement des enfants provoqué par des questions mathématiques trop difficiles est évidemment une de causes principales des échecs de notre enseignement dans le même degré que le freinage de leur développement par des problèmes de routine et par le dilettantisme mathématique nocif basé sur des devinettes n'exigeant ni des connaissances solides ni de l'habileté. En rapport avec cette question George Polya (12) accentue la nécessité d'un ordre psychologique dans la suite des problèmes dont les types particuliers sont mieux adaptés à certains niveaux qu'à d'autres.

La question de l'appréciation à priori des difficultés caractéristiques pour certains types de problèmes est extrêmement compliquée. Cette question est posée expressément dans le rapport anglais, où l'on propose même la recherche d'un genre de mesure qu'on pourrait utiliser dans ce domaine. Ces projets sont encore peu précis. Le rapport anglais présente aussi des esquisses de classifications de problèmes mathématiques faites sous divers points de vue.

Malheureusement, la question très importante de l'enseignement des stratégies dans la solution des problèmes n'a pas été suffisamment développée. Certains auteurs mettent même en doute la possibilité de cet enseignement. Mais, d'autre part, on souligne avec force la nécessité de recherches dans ce domaine, malgré toutes les difficultés fort bien connues qui concernent avant tout la méthode de cette recherche. L'analyse des mathématiques mêmes, la con-

¹⁾ [10] p. 5.

frontation des solutions différentes des mêmes problèmes dans leur développement historique, l'auto-observation du professeur, l'aide des mathématiciens créateurs d'un côté et l'observation du travail spontané et dirigé des élèves de l'autre, peuvent apporter certains résultats utiles. L'enseignement des méthodes et des stratégies est – selon nos expériences – non seulement possible, mais absolument nécessaire. Les recherches en cours sous ma direction révèlent déjà des perspectives très intéressantes pour la méthodologie de l'enseignement. La popularité des livres de George Polya prouve que le besoin de cette aide est ressenti par les professeurs et par les élèves – bien que les exemples qui y sont utilisés en tant que matières d'illustration des remarques générales appartiennent au contenu traditionnel.

Le problème urgent, dont j'avais déjà l'occasion de parler, c'est l'élaboration des collections de problèmes adaptés aux programmes modernisés et avant tout à leur esprit.

Cette question se trouve, avant toutes les autres, au centre des considérations dans le rapport américain. On constate que les auteurs de manuels nouveaux se sont concentrés sur le développement des parties théoriques; ils négligent l'élaboration de collections de problèmes de type nouveau, mais ayant toutes les valeurs pédagogiques des collections traditionnelles. En conséquence l'élève qui ne peut pas utiliser les collections anciennes adaptées à un autre contenu et à un autre esprit reste sans cette aide si importante dans son travail personnel. C'est pourquoi – comme le constate Peter Lax, dans le rapport américain – „la solution des problèmes mathématiques par les élèves aux Etats-Unis est en déclin”.¹⁾

6. *Conclusions.*

Les rapports des Sous-Commissions de la CIEM mettent en évidence que le problème pédagogique que nous étudions aujourd'hui est encore en grande mesure ouvert et exige une recherche particulièrement profonde, qui ne pourra pas avoir lieu sans la collaboration des savants mathématiciens et des pédagogues;

Les objectifs les plus pressants de ce travail semblent être les suivants:

- 1^o. développement de la recherche fondamentale concernant la méthodologie de l'enseignement de la solution des problèmes,
- 2^o. composition de collections de problèmes adaptés aux programmes et à l'esprit nouveaux;

¹⁾ [10] p. 2.

3^o. élaboration des moyens et des formes de la préparation consciente des futurs maîtres à „l'enseignement par les problèmes” au cours de leurs études;

4^o. recherche et expériences relatives à la question de l'évaluation des progrès faits par les élèves en vue d'éliminer l'influence paralysant la véritable activation de la pensée mathématique de l'élève, qui s'exprime dans l'enseignement „pour les examens” et non dans l'éducation mathématique.

Les matériaux envoyés par les Sous-commissions Nationales de la CIEM au rapporteur.

Allémgne Fédérale

1. H. Athen: Die Aktivität der Schüler im Mathematikunterricht.
2. H. G. Steiner: Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie, Der Mathematikunterricht, 11, (1962).
3. H. G. Steiner: Mathematisierung und Axiomatisierung einer politischen Struktur, Der Mathematikunterricht, 12, (1966).
4. M. Wagenschein: Pädagogische Aufsätze zum mathematischen Unterricht, Der Mathematikunterricht 4, 1962.

Espagne

5. Informe de la Subcomission Espanola par a el mejoramiento de la ensenza de la matemática en el grado medio. (P. Abellanas)

Etats Unis

6. R. P. Dilworth: The role of problems in Mathematical Education.
7. N. J. Fine: Some thoughts on problem solving.
8. F. D. Jacobson: Remarks of mathematical activity.
9. Ph. S. Jones: The role of problems in secondary School Mathematics.
10. P. Lax: The role of problems in the High School Mathematics Curriculum.
11. H. O. Pollak: On individual exploration in mathematics education.
12. G. Polya: On teaching problem-solving.
13. P. C. Rosenbloom: Problem making and problem solving.
14. F. Wolf: Problems in the teaching of mathematics.

Grande Bretagne

15. The development of mathematical ability in children, the place of the problem in this development.
A problem to the British Subcommittee on Mathematical Instruction. (O. Giles, C. T. Daltry, R. C. Lyness, J. Bumell, H. M. Cundy, A. E. Pope, A. W. Bell, D. S. Fielker, L. R. Rogers, D. E. Mansfield, R. Aktin, D. H. Wheeler, J. E. Harris, G. A. E. Longmore, V. Underwood, C. Bauwell, G. Beaumont, W. Cowderoy, D. Tahta, J. Oliver, W. M. Brookes, E. E. Biggs, R. M. Fype, R. S. Skemp, B. T. Bulis, compendium from Nottingham College of Education, papers from Abbey Wood School).

Hongrie

16. Rapport de la Sous-commission nationale Hongroise de la CIEM; Le développement de l'activité mathématique des élèves. (I. Reiman).

Norvège

17. Rapport de la Sous-commission norvégienne de la CIEM sur l'activité des élèves (Kay Piene).

Japon

18. Rapport de la Sous-commission Nationale Japonaise de la CIEM (S. Iyanaga).

Suède

19. Rapport de la Sous-commission Nationale Suédoise de la CIEM sur le développement de l'activité mathématique des élèves. (M. Hästad).

Suisse

20. Information de la Sous-commission Nationale Suisse de la CIEM (M. Rueff).

KORREL CXLII

Apollonios zou niet gekwadraterd hebben.

In zijn opstel „Over de gebroken ongelijkheid”, (Euclides 43, blz. 79) schrijft Kooistra omstreeks het midden van de laatste bladzijde:

„Men ontkomt, als a een functie is van x , echter niet, aan kwadratering van de beide leden. We kiezen een voorbeeld: $\left| \frac{2x-1}{3x+2} \right| < \frac{3}{2}$ etc.” De auteur bedoelde, gezien de context: als men de oplossing formeel moet opschrijven ontkomt men niet aan kwadratering.

Laten wij het nu eens proberen zonder kwadratering en niet zo formeel. We schrijven de opgave, waarbij wij onmiddellijk stellen

$x \neq -\frac{2}{3}$, in de gedaante $\frac{|x - \frac{1}{2}|}{|x + \frac{2}{3}|} < \frac{9}{4}$. Daarna lossen we eerst de

overeenkomstige vergelijking $\frac{|x - \frac{1}{2}|}{|x + \frac{2}{3}|} = \frac{9}{4}$ op. Dat wil zeggen we

moeten op de getallenlijn twee punten zoeken, die het lijnstuk met uiteinden de beeldpunten van $-\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{2}$, inwendig en uitwendig verdelen in stukken, die zich verhouden als 4 : 9. Dat zijn de beeldpunten van $-\frac{4}{13}$ en $-\frac{8}{5}$. Als we nu terugkeren naar de opgave, dan is zonder meer nu duidelijk dat aan $|x - \frac{1}{2}| : |x + \frac{2}{3}| < 9 : 4$ wordt voldaan voor *alle* $x : x < -\frac{8}{5} \vee x > -\frac{4}{13}$.

Deze oplossing is niet erg formeel, maar we hebben toch het gevoel dat met veel huisvlijt deze oplossing wel is te formaliseren. Hij, die zich groepen voelt, hij neme deze taak op zich.

De traditioneel-geschoolde mathematicus zal in de door mij gegeven oplossing de „cirkel” van Apollonios (ca. 260—ca. 200 v. Chr.) herkennen.

Amsterdam

L. van den Brom.

DECLINE AND FALL . . .

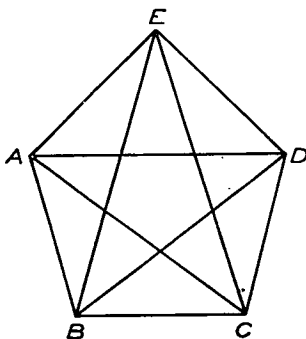
door

A. VAN TOOREN

's-Gravenhage

Bij de tweede ronde van de wiskunde-olympiade 1967 werd het volgende vraagstukje opgegeven:

In de convexe vijfhoek $ABCDE$ zijn de zijden AB , BC , CD en DE elk evenwijdig met een der diagonalen. Bewijs dat de zijde EA eveneens evenwijdig is met een diagonaal.



De oplossing ervan kunt u volgen aan de hand van de figuur. Kijkt u maar eens naar de rij driehoeken EAB , ABC , BCD , CDE , DEA . Twee burens in die rij hebben gelijke oppervlakte op grond van de stelling over driehoeken met gemeenschappelijke basis en gelijke hoogte. Het eerste schaap EAB en de hekkesluiter DEA hebben dus gelijke oppervlakte. Maar die twee hebben ook een gemeenschappelijke zijde. Op grond van de omgekeerde stelling concluderen we dus tot het gelijk zijn van de hoogten, dus tot het evenwijdig zijn van EA en BD .

U merkt wel, dat de benodigde theoretische voorkennis zeer gering is en dat is ook beslist de bedoeling bij olympiade-vraagstukken. De clou van de oplossing is natuurlijk het leggen van het verband tussen evenwijdigheid en oppervlakte. De meeste van onze leerlingen zullen wel gaan zoeken naar gelijkheid van hoeken of naar gelijkheid van verhoudingen, maar daarmee komt men hier niet ver.

Ik wilde u vertellen, hoe dit vraagstuk door de deelnemers gemaakt is. Voor een goed begrip echter eerst het volgende: er zullen zo ongeveer 3000 leerlingen aan de eerste ronde van de olympiade deelgenomen hebben; uit dit op zich zelf al vrij selecte gezelschap zijn 61 excellentelingen op grond van hun goede prestaties in de eerste ronde toegelaten tot de tweede ronde.

Welnu, van die wiskundige hope des vaderlands zijn er twee hypertopfiguren in geslaagd het genoemde vraagstuk volledig op te lossen en een derde bereikte een als voldoende te waardenen deelscore. De rest was gewoonweg „nergens”, leverde blanco papier in of ging ten onder in een zelf geschapen moeras van evenredigheden en gelijkheidsrelaties tussen hoeken.

Nu is het natuurlijk helemaal niet erg, dat een willekeurige eind-examenklasser dit vraagstuk niet kan oplossen. Laten we de situatie echter eens als volgt stellen: „Heren hoogleraren, wees gewaarschuwd; onder de paar honderd studenten, die in het najaar 1968 een wiskundestudie beginnen, bevinden er zich niet meer dan twee die het genoemde vraagstuk de baas kunnen; houd er dus rekening mee dat zij op het gebied van inventiviteit en creativiteit nog alles moeten verwerven”. Of denkt u zich eens in dat de olympiade-kandidaten van nu jonge collega's zijn over een jaar of tien. Slaat de schrik u dan niet een beetje om het hart?

Het is na de voorgaande insinuaties wel het juiste ogenblik om de argeloze lezer van dit artikel even er op te wijzen dat hij de auteur niet al te serieus moet nemen. Kennelijk wenst deze auteur gekakel te horen en begint dus met knuppels te smijten. Vergist hij zich echter niet in het hok? (Noot van de auteur).

Laten we de ontwikkeling van ons wiskunde-onderwijs in de laatste decennia dus maar eens nader bekijken. Wellicht valt er dan een verstandig woord te zeggen over de ontwikkeling, zoals we die in de toekomst zouden willen hebben.

Dertig jaar geleden bijvoorbeeld was de toestand nog bijzonder rustig en eigenlijk bijna ideaal. Aan de leerlingen werd een degelijke dosis kennis bijgebracht en bovendien verwierven zij een ruime vaardigheid in het hanteren en gebruiken van die kennis (ik spreek hier uit ervaring en mag dus op mijn woord geloofd worden). Een moeilijke planimetriesom werd door zo'n leerling van toen als een uitdaging beschouwd. Hij zat er met rode oren aan te zwoegen. Hij liet daarbij het hele arsenaal van goed geleerde stellingen en eerder gemaakte vraagstukken in zijn geest een parade vormen en toetste elk wapen op mogelijke bruikbaarheid. Hij zocht ijverig in opgave en in eigen ervaring naar aanwijzingen voor het vinden van de slimme

hulplijn, die alles tot eenvoudige relaties terug kon brengen. En na dit systematische zoeken en werkelijk geestelijk actief bezig zijn kwam dan tenslotte het resultaat. Dit werd zorgvuldig en in goed Nederlands geredigeerd en pas dan gaf die leerling zich over aan het welverdiende gevoel van stille triomf.

Inderdaad, *kennis* en *vaardigheid*, dat waren onze doelen in die jaren waarin onze geest gevormd werd. Ook in de planimetrie, al stond dat vak toen evenmin als nu op het eindexamenprogramma (althans bij de hbs).

Er is wel veel veranderd intussen. Maar laat ik dat nu meteen even scherp stellen: die veranderingen zitten vrijwel niet in de omvang van de (planimetrische) kennis. Natuurlijk is er wel wat dood hout verdwenen in die tijd. Zo is bijvoorbeeld de *s*-formule voor de oppervlakte van een driehoek wel voorgoed verdwenen, voorafgegaan door de formule $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ waarmee naar ik meen de oppervlakte van een koordenvierhoek berekend kon worden. En ook de projectiestelling is van ons heengegaan. Maar alles bij elkaar weegt dit toch nauwelijks genoeg om van vermindering van de kennis te gaan spreken.

Nee, in de vaardigheid, daar zitten de grote veranderingen. En ook dat vereist nadere precisering. Die vaardigheid van toen was een steriele zaak, dat weten we nu heel zeker. Die vaardigheid van toen diende alleen maar om gekunstelde vraagstukken op te lossen, die op de keper beschouwd geen enkele zin hadden. Het is volkomen terecht dat die zinloze vaardigheid verdwenen is. We hebben er trouwens iets veel en veel beters voor in de plaats gekregen, namelijk *begrip*. De leerlingen van vandaag moeten ongeveer evenveel kennen als die van dertig jaren geleden, ze behoeven vrijwel niets meer te kunnen, ze moeten echter wel alles begrijpen. *Kennis* en *begrip*, dat zijn de doelen van het wiskunde-onderwijs vandaag.

En dat begrip is al weer machtig sterk aan het evolueren. Een jaar of tien geleden werd er nog gesproken over het deductieve karakter van de wiskunde, dat moesten de leerlingen leren begrijpen. Zelfs nu nog zijn er stereometrieboeken, die beginnen met een axiomastelsel (al begint dat toch wel een sterk verouderde indruk te maken). Dat diende dan, ik voel me verplicht om dat aan de jongere lezers uit te leggen, om de leerlingen duidelijk te maken welk een schoon deductief vak de meetkunde is; men achtte de leerlingen van eerste klassen nog te jong om deze diepe waarheid te kunnen doorgronden.

Inmiddels is echter het modeverschijnsel van het zich vergapen aan deductieve schoonheid al weer passé. En dat is eigenlijk ook geen wonder, want in die andere wetenschappen waar men probeer-

de een deductieve opbouw van het vak tot stand te brengen in navolging van het wiskundige schoonheidsideaal is dat niet gelukt.

Nee, wat we nu hebben is veel fundamenteler van karakter. We kweken nu begrip voor het begrip „structuur”. Ik kan daar niet zo goed over meepraten omdat ik niet met structuren grootgebracht ben. En de bescheidenheid is een van mijn meest kenmerkende eigenschappen. Wel durf ik daar nog dit over te zeggen dat alles, wat over de op handen zijnde leerplanwijzigingen uitgelekt is er op wijst, dat dat met die structuren een blijvertje is.

Ik ben de redactie van Euclides bijzonder dankbaar dat ze mij in staat gesteld heeft om met enige min of meer wrange opmerkingen min of meer duidelijk te maken, dat ik als degelijk wiskundeleraar van de oude stempel in de ontwikkelingen, die ik meemaak, een duidelijke „decline” zie en dat ik vrees voor de daarop volgende „fall” van ons imperium.

Met deze dankbetuiging wil ik de voorgaande (de)raillerende tirade afsluiten en nu tot slot nog even serieus worden. U zult het toch met me eens zijn, geachte collega, dat wij niet opgericht door het leven kunnen blijven gaan wanneer wij al onze energie verspillen aan het bijbrengen van kennis en begrip, die niet functioneren, die niet gebruikt kunnen worden, die niet passen in de persoonlijkheid van de volwassen mens die onze leerling toch naar alle waarschijnlijkheid eens zal moeten worden. De maatschappelijke ontwikkeling heeft tot gevolg gehad dat er op bijna elk terrein behoefte bestaat aan mensen, die iets kunnen doen met *hun* wiskundekennis en met *hun* wiskundige denkmethoden en met *hun* wiskundig begrip. Zij moeten in staat zijn om van een complexe situatie in natuurwetenschap of techniek of economie of noem maar op wat een wiskundig model te maken. Zij moeten kunnen mathematiseren, zonder mathematici te zijn. Tegenwoordig is dat de weg, waarlangs problemen worden opgelost.

Hoogdravende woorden zijn er overal te beluisteren, die eisen dat er een nieuwe didactiek komt waarin aan deze moeilijke eisen voldaan wordt. En, vergun mij deze kleine woordspeling, een discussie daarover moeten we niet van Pythagoras verwachten en wel van Euclides. Naar mijn mening is het hoog tijd, dat die discussie op gang komt. Niet het uitlokken van gekakel, maar wel van die discussie, dat beoogt deze knuppel in uw en mijn hoenderhok.

DE EINDEXAMENS 1968

Dit jaar voor de tweede maal¹⁾ werd aan kandidaten van de vhm-scholen die deelnemen aan het experiment *algebra en analyse* van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde een „modern” stel opgaven voorgelegd ²⁾.

Voor de eerste maal waren er eveneens andere opgaven voor de kandidaten van de scholen waar deelgenomen werd aan het experiment *meetkunde-bovenbouw*. Zij kregen dus afwijkend werk zowel voor stereometrie als voor goniometrie-analytische meetkunde ³⁾.

Tenslotte was er voor het eerst eindexamen-*havo*.

Het leek de redactie goed om alle „nieuwe” opgaven af te drukken opdat de lezers zich kunnen oriënteren.

ALGEBRA-vhmo(2½ uur)

1. a. Bereken $\int_0^1 xe^x dx$.

b. Los op de differentiaalvergelijking $x \frac{dy}{dx} = 2y$.

c. XOY is een rechthoekig assenstelsel.

Op het in het eerste kwadrant gelegen gedeelte van de kromme $y = x^n$, waarin n een natuurlijk getal groter dan 1 is, kiest men een punt P .

De raaklijn in P verdeelt de figuur begrensd door de kromme, de x -as en de loodlijn uit P op de x -as in twee delen.

Bewijs dat de verhouding van de oppervlakten van deze delen onafhankelijk is van de keuze van P .

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 4x$.

a. Gevraagd de verzameling van de punten (x, y) waarin het door de differentiaalvergelijking bepaalde lijnelement de richtingscoëfficiënt 0 heeft.

b. Onderstel dat $y = f(x)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking en dat $f'(a) = 0$.

Voor welke waarde van a is $f(a)$ geen extreme waarde van de functie?

Voor welke waarden van a is $f(a)$ een maximum?

Voor welke waarden van a is $f(a)$ een minimum?

c. Welke tweedegraadsfunctie voldoet aan de differentiaalvergelijking?

¹⁾ Voor de opgaven 1967 zie Euclides, 42, p. 281 (juni 1967).

²⁾ Voor een verslag over het experiment (J. van Lint) zie Euclides, 43, p. 1 (sept. 1967). Ook van Drs. J. van Dormolen ontving de redactie een artikel over dit experiment; het zal binnenkort geplaatst worden.

³⁾ De gonio-opgave wijkt niet af.

3. XOY is een rechthoekig assenstelsel.

Een kromme is bepaald door $x = t^2 - 2t$

$$y = e^t,$$

waarin t de verzameling van de reële getallen doorloopt.

a. Bepaal de snijpunten van de kromme met de assen.

Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan de kromme in deze punten.

b. Bepaal het punt waar de raaklijn aan de kromme evenwijdig is aan een as.

c. Bepaal de extreme waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme.

d. Bepaal het gedrag van de raaklijn als $t \rightarrow \infty$ en als $t \rightarrow -\infty$.

e. Heeft de kromme één of meer asymptoten? Zo ja, welke?

f. Teken de kromme.

GONIOMETRIE EN ANALYTISCHE MEETKUNDE-vhmo

(2½ uur).

1. De in dit vraagstuk gebruikte coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig coördinatenstelsel in het vlak.

De lijn l gaat door de punten $A: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $B: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Stel een vergelijking op van de lijn m die door A gaat en loodrecht staat op l .b. Bepaal de coördinaten van de punten P die op m liggen en de afstand 5 hebben tot B .

2. De in dit vraagstuk gebruikte coördinaten hebben betrekking op een rechthoekig coördinatenstelsel in het vlak.

Gegeven zijn de punten $A: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $C: \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

De lijn l gaat door de punten A en B .

a. Bepaal de coördinaten van de projectie van het punt $O: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ op l .b. Bepaal de coördinaten van de punten P die even ver van A en C liggen en de afstand $\sqrt{5}$ tot l hebben.3. $\underline{i} = \{\underline{i}_1, \underline{i}_2\}$ is een basis van het vlak.

De lijn l heeft ten opzichte van de basis $\underline{i}$ een parametervoorstelling:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a. Bewijs dat $\underline{i}' = \{-\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2, 4\underline{i}_1 - 3\underline{i}_2\}$ ook een basis van het vlak is.b. Bepaal de coördinaten van het op l gelegen punt P waarvoor geldt dat $\underline{i}(P) = \underline{i}'(P)$.4. De functie f is voor $0 \leq x \leq 2\pi$ gedefinieerd door

$$f(x) = \sin 2x - 2 \cos x.$$

a. Los op de vergelijking $f(x) = 0$.b. Bepaal de horizontale raaklijnen aan de grafiek van f met hun raakpunten. Teken de grafiek van f .c. Bereken de oppervlakte van het gesloten vlakdeel dat begrensd wordt door de x -as en de grafiek van f .

STEREOMETRIE-vhmo ($2\frac{1}{2}$ uur)

In de volgende vraagstukken zijn de gebruikte coördinatenstelsels positief georiënteerd orthonormaal.

De afkorting p.v. betekent: parametervoorstelling.

1. Gegeven zijn een vlak V met vergelijking $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
 een vlak W met vergelijking $7x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$
 en de lijn l met p.v. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bepaal de onderlinge ligging van de lijn l en de snijlijn van V en W .

2. Gegeven zijn een vlak V met p.v. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 een vlak W met p.v. $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 en de punten $A: \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $B: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bepaal de coördinaten van het punt P dat op de snijlijn van V en W ligt en dat gelijke afstanden tot A en B heeft.

3. Gegeven zijn een vlak V met p.v. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 en een vlak W met p.v. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Voor welke waarden van m is de hoek van V en W gelijk aan $\frac{1}{3}\pi$?

b. Bewijs dat voor alle waarden van k het punt $P: \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ k-3 \end{pmatrix}$ in V ligt.

4. Bepaal een p.v. van de lijn die door het punt $P: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gaat en die de lijn l met p.v. $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en de lijn m met p.v. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ snijdt.

5. Gegeven zijn de punten $O: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $C: \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De lijn l gaat door de punten O en A , de lijn m door de punten B en C .

Bepaal een p.v. van de loodrechte transversaal van l en m .

WISKUNDE-havo (3 uur)

1. De functie f is gedefinieerd door $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

Bereken de uiterste waarden van deze functie en ga na van welke aard deze uiterste waarden zijn.

2. De functies f en g zijn voor $0 \leq x \leq \pi$ gedefinieerd door

$$f(x) = -\sin x \text{ en } g(x) = \cos 2x.$$

a. Teken in één figuur de grafieken van de functies f en g .

b. Bewijs dat deze grafieken elkaar raken.

3. In een kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6 is P het midden van de ribbe AE .
 - a. Bereken de hoek van de kruisende lijnen CP en EH .
 - b. Bereken de afstand van de kruisende lijnen BF en CP .
 - c. Construeer de lijn x door A die CP en FH snijdt.
4. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$ en de lijn met vergelijking $y = 2x - 4$.
 - a. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de parabool en de lijn.
Teken in één figuur de parabool en de lijn.
 - b. Beschouw de verzameling V van de punten waarvan de coördinaten gehele getallen zijn.
Teken die punten van de verzameling V waarvan de coördinaten voldoen aan de beide voorwaarden: $y^2 < 4x$ en $y > 2x - 4$.
Bepaal de coördinaten van deze punten.
5. De termen van een rekenkundige rij zijn gehele getallen.
De eerste term is -39 .
De som van de eerste 13 termen is negatief en de som van de eerste 15 termen is positief.
 - a. Bewijs dat het verschil van de rij 6 is.
 - b. De som van de eerste n termen wordt voorgesteld door s_n .
Druk s_n uit in n en bereken de minimale waarde van s_n .
6. Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven het punt $P(1, -3)$ en de lijn met vergelijking $4x - 3y + 12 = 0$.
Stel de vergelijking op van de kleinste cirkel die door P gaat en die de gegeven lijn raakt.

BOEKBESPREKING

H. P. Küenzi, H. G. Tzschach, C. A. Zehnder, *Numerische Methoden der mathematischen Optimierung*, mit ALGOL- und FORTRAN-Programmen, Teubner-Stuttgart, 1967, 151 blz., DM. 28,60.

Door de ontwikkeling van de elektronische rekenmachines is het zinvol geworden, aandacht te geven aan de wiskundige optimaliseringsproblemen die voortkomen uit praktische problemen (industrie, bedrijfsvoering, organisatie in het algemeen). Het gaat er daarbij om, een of andere objectfunctie van een — dikwijls groot — aantal variabelen te optimaliseren, onder een — ook dikwijls groot — aantal beperkende voorwaarden voor de variabelen. Voor deze problemen bestaan gedeeltelijk fraaie oplosmethoden, geschikt voor numerieke behandeling en computergebruik, voor een ander deel moet men zich nog tevreden stellen met stelselmatige zoekmethoden, eveneens met de computer.

Het hier te bespreken boek geeft zowel een samenvatting van de theorie van enkele belangrijke methoden van mathematische programmering als, van het eerste deel gescheiden, voor elke van de in de theorie beschreven algoritmen een ALGOL- en een FORTRAN-programma. Voor ieder die met een van deze beide symbolische talen vertrouwd is, is hierdoor de praktische toepassing van de verschillende methoden toegankelijk geworden. Aan het gedeelte met de programma's gaat een hoofdstuk vooraf met alle toelichtingen die voor het gebruik van de programma's onontbeerlijk zijn.

Bij de theoretische behandeling van de methoden, waarvoor de eerste van de drie schrijvers tekent — de beide anderen verzorgden het gedeelte over en met de programma's —, wordt men geconfronteerd met een goed begrijpelijke, wiskundig zuivere, kort en helder geformuleerde uiteenzetting. (Een drukfoutje: in het middelste lid van de ongelijkheid (2.3) op bladzijde 62 te lezen u i.p.v. u .) De niet te omvangrijke bewijzen worden gegeven, voor de grotere wordt naar de literatuur verwezen. Vooral de behandeling van de lineaire programmering (optimalisering van een lineaire objectfunctie onder lineaire beperkingen) is uitvoerig. De zg. degeneratie wordt opgevangen door het verschuivingsstelsel van Charnes. Uiteraard wordt ook de van Kuenzi afkomstige duoplexalgoritme opgenomen. De programmering in gehelen geschiedt volgens de methode van Gomory. Een aantal voorbeelden licht de algoritmen toe.

Ten aanzien van de niet-lineaire programmering is het boek wat korter van uitwerking dan over de lineaire. Na de theorie over convexiteit, de voorwaarden van Kuhn-Tucker en de kwadratische optimalisering worden de methoden van Beale en van Wolfe numeriek uitgewerkt en geprogrammeerd. Ten slotte wordt nog gewezen op de gradiëntmethoden, o.a. die van Zoutendijk, zonder numerieke uitwerking.

Hoewel het boek voor een eerste kennismaking met de stof misschien minder geschikt lijkt, bevat het zo veel samenvattende informatie, juist ook door de rekenprogramma's en niet in het minst door de uitvoerige literatuurlijst, dat het ook voor beginners interessant is. Voor de gebruiker van de methoden is het een waardevol naslagwerk.

D. Kijne

Wiskunde in de 20e eeuw, Internationale post-universitaire cursussen voor docenten en licentiaten in de wiskunde, vierde jaar, Brussel, 26—31 augustus 1963; uitgave van het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur.

E. M. Barth onderzoekt in een artikel over machinale bewijsvoering, welke mogelijkheden er voor een rekenmachine zijn bewijzen voor stellingen te vinden. Zoals te verwachten is, zijn de resultaten in hoofdzaak negatief. Het artikel geeft echter tevens inzicht in logische methoden, i.h.b. in de methode der semantische tableaux van Beth.

A. Borgers gaat uitvoerig in op de logica van de klassen. Opmerking verdient, dat dit juist het deel der logica is, dat te maken heeft met hetgeen wij bij ons onderwijs verzamelingen plegen te noemen. Het artikel eindigt met een axiomatische fundering van de klasse logica en een uiteenzetting van het verband tussen klasse logica en propositie logica.

Wie het artikel van G. Hirsch over homotopiegroepen wil lezen, moet vertrouwd zijn met de homotopie klassen van continue afbeeldingen van een cirkelomtrek. In deze boeiend geschreven verhandeling vindt men het belang uiteengezet van homotopie klassen van afbeeldingen van sferen met dimensie groter dan 1.

J. Teghem bespreekt beslissingsproblemen van Markov, die continu in de tijd zijn.

In het artikel van P. J. van Albada over axiomata van Boolese algebra's maakt men kennis met elementaire methoden om axiomastelsels te onderzoeken.

En tot slot vertelt F. van der Blij een en ander over homologische algebra. Vooral de exacte rijen spelen in dit artikel een rol. ($A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ is een exacte rij wil zeggen, dat A , B en C groepen zijn en u en v homomorfismen, waarvoor geldt: beeld u = kern v .)

Hoewel verschillende artikelen voortzettingen zijn van publikaties uit de voorgaande jaren, kunnen ze zelfstandig gelezen worden, behoudens de restrictie vermeld bij het artikel van Hirsch.

P. G. J. Vredenduin

M. Moons en R. Bollens, *De Pijl* I, tweede druk, Plantijn N.V., Antwerpen, z.j., 366 blz.

De schrijvers zijn kennelijk geïnspireerd door het werk van Papy. Ze hebben gepoogd veel van wat in *Mathématique Moderne* I voorkomt weer te geven in voor de leerling gemakkelijk te bevatten taal. Deze methode heeft uiteraard zijn voordelen, maar ook zijn nadelen. De uitdrukkingwijze is soms minder scherp dan bij Papy en m.i. soms ook wel eens minder gelukkig. Zo lijkt het me niet verstandig de lege verzameling een onechte deelverzameling van een niet lege verzameling te noemen. Minder gelukkig is de definitie van een niet-reflexieve relatie als een relatie, waarbij voor sommige elementen wel xRx en voor sommige niet xRx geldt. Een relatie, die niet reflexief is, behoeft dan nog niet niet-reflexief te zijn. Hetzelfde bezwaar geldt tegen de definitie van een niet-symmetrische relatie. De antisymmetrische relatie is per definitie ook antireflexief, in tegenstelling met de gebruikelijke definitie. Ook de afspraak: een partitie van A noteren we $\mathcal{P}(A)$, lijkt me niet correct.

Aan de andere kant is geen moeite de schrijvers te veel geweest om hun boek aan te passen aan zorgvuldig onderwijs. De tekst is doorspekt met door de leerling in te vullen open plaatsen. De bedoeling hiervan moet zijn, dat deze open plaatsen opgenomen worden in de theorie en onder leiding van de docent ingevuld worden, want veelal zal de leerling niet uit zichzelf het goede antwoord weten te vinden. Deze methode kan leiden tot verhoging van concentratie bij de behandeling.

Het boek is uitgegeven in de vorm van een cahier met ringband. De gebezigde driekleurendruk is zeer doelmatig voor een gemakkelijk begrijpen van de tekst.

In begin november is er in de Belgische dagbladen een mededeling verschenen van de minister, volgens welke nu definitief bepaald is, dat 1 september 1968 alle Belgische scholen verplicht zijn in hun zesde klasse het moderne programma te volgen. In het kader van deze mededeling krijgt het boek van Moons en Bollens extra belang. We wensen het een goede toekomst toe.

P. G. J. Vredenduin

Ontvangen

Wiskundige tafels,

Prisma boek No. 1267, bevattend:

Gewone logaritmen in 4, 5 en 7 decimalen, natuurlijke logaritmen in 5 decimalen, goniometrische verhoudingen (boog, sinus, tangens en cosinus) met het argument in graden en radialen.

Exponentiële en hyperbolische functies. Kwadraten, reciproken, machten en wortels, factorentafel, intresttafels (6) en discontotafels (4).

KALENDER

HAAGS GEMEENTEMUSEUM 8 juni — 21 juli

Tentoonstelling „*De werelden van M. C. Escher*”. Overzicht over het werk van Escher ter gelegenheid van diens 70ste verjaardag. Prenten en tekeningen zullen daar zowel chronologisch, als naar onderwerp, als in relatie tot andere kunstuitingen, als in toepassingen gegroepeerd worden.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

198. Wat is het laatste cijfer van $777 \dots 7$, als hier 1001 zevens staan (decimaal geschreven)? (H. Cohen, Israel)

199. Gegeven is een vijfhoek. Verdeel deze in $2n$ delen, waarvan er n zeshoeken en n zevenhoeken zijn. Geen hoekpunt van een van de delen mag een zijde van een ander deel of van de gegeven vijfhoek in twee delen verdelen. Voor welke waarden van n is dit mogelijk? (B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

196. Voor welke paren natuurlijke resp. positieve rationale getallen geldt $a^b = b^a$?

$a^b = b^a$ is gelijkwaardig met $b \log a = a \log b$, dus met $\frac{\log b}{\log a} = \frac{b}{a}$. Stel $b = a^p$.

Dan is $\frac{\log b}{\log a} = \frac{b}{a}$ gelijkwaardig met $p = a^{p-1}$, of met $a = p^{1/(p-1)}$

We moeten dus de positieve rationale waarden van p vinden, waarvoor het rechterlid rationaal is. Duidelijk is, dat aan deze eis voldoen alle getallen

$$p = 1 + \frac{1}{u} \quad (u \text{ geheel, } \neq -1 \text{ en } \neq 0).$$

Dit levert

$$a = p^u = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \text{ en } b = p^{p^u} = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

Andere mogelijkheden zijn er niet. Onderstel namelijk, dat $p = \frac{q}{r}$ (q en r natuurlijk en relatief priem). Dan zou

$$\left(\frac{q}{r}\right)^{r/(q-r)}$$

rationaal moeten zijn. Dus zou $\frac{q}{r}$ de $|q - r|$ e macht van een rationaal getal moeten zijn. Dan zouden q en r moeten zijn

twee kwadraten, die 2 verschillen, of

twee derdemachten, die 3 verschillen, of . . .

En twee dergelijke natuurlijke getallen bestaan niet.

Tevens zien we hieruit, dat er geen andere oplossingen zijn met a en b natuurlijk dan in de opgave reeds vermeld zijn.

Ad nr. 197. Verschillende lezers hebben mij er op attent gemaakt, dat er toch een fout was geslopen in de gegeven oplossing. Vergelijking (1) was namelijk afhankelijk van (2)-(5). Ik hoop deze fout nu niet meer te maken.

Opgave. Gegeven zijn drie munten, die even zwaar zijn. Bepaal hun gewicht zonder ze te wegen.

Oplossing. Noem de gewichten x , y en z . Dan is

$$(x - y)(x - z) = 0$$

$$(x - y)(y - z) = 0$$

$$(x - z)(y - z) = 0.$$

Nu zijn de vergelijkingen heus onafhankelijk. U ziet dit door te kiezen

$x = y \neq z$, $x = z \neq y$, resp. $y = z \neq x$. U kunt dus nu x , y en z wel vinden.

Zojuist verschenen:

WISKUNDE VOOR DE BRUGKLAS

**C.J. ALDERS • K. H. COHEN • J. R. F. VAN DUYNEN
IR. C. VAN VLIET • L. WIJNOLTS**

De leerstof is gesplitst in twee deeltjes:

een algebra- en een meetkundedeeltje.

Deel I A Algebra + rekenen f 2,90 / geb. f 4,15

Deel I B Meetkunde f 3,25 / geb. f 4,50

WOLTERS-NOORDHOFF

nieuw in de reeks

Empirische studies over onderwijs

Prof. Dr. S. Wiegersma
en Dr. M. Groen

Resultaten van wiskunde-onderwijs

Empirische studies over onderwijs 8

XII + 142 blz. f 13,50

Een verslag van het internationale onderzoek naar de wiskunde-prestaties van 13- en 17-jarige leerlingen van verschillende onderwijsinstellingen. Aan de orde komen successievelijk het 'International Educational Achievement Project', het Nederlands onderwijs in internationaal kader, verschillen tussen schooltypen in Nederland, sociale factoren en leerprestaties, de eindexaminandi VMO, opinies en attitudes per schooltype, en opinies en attitudes en wiskunde-prestaties

Wolters-Noordhoff

REKENEN TUSSEN BASISONDERWIJS EN VOORTGEZET ONDERWIJS

door Dr. J. H. Raat en
B. J. van der Veen

Dit werkschrift bevat in gecomprimeerde vorm de leerstof van de l. s. Daarnaast bevat het paragrafen, zoals 'Letterrekenen', die een overgang vormen tussen het rekenen en de algebra en een bepaalde behandelingswijze van verhoudingen, die het geschikt maken voor die leerlingen,

die na de l. s. naar ulo, lyceum, hbs of gymnasium gaan.

De uitvoering als werkschrift maakt een snelle manier van werken mogelijk; de uitgave is ook als gewoon werkboek te gebruiken.

Omvang 48 pag. Formaat 19,5 x 27 cm.
2e druk; f 2,90

WOLTERS-NOORDHOFF
