EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

VIII — 1 MEI 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

ENKELE ASPECTEN VAN DE WISKUNDIGE OPTIMALISERING

door

Prof. Dr. J. F. BENDERS

1. De besliskunde omvat een aantal wetenschappelijke disciplines die zich bezighouden met het sturen van systemen. Men denke hierbij aan het industriële bedrijf (bedrijfs- en produktieplanning), aan het overheidsbedrijf (nationale en regionale planning), aan een school (opstellen van het lesrooster), aan een verkeersplein (vaststellen van een verkeersregeling), enz.

In de besliskunde speelt de wiskunde een uiterst belangrijke rol. Het is nl. mogelijk gebleken vele beslissingsproblemen te formuleren in een min of meer nauwkeurig wiskundig model van het betreffende bedrijf of van onderdelen daarvan. Hierdoor kon, door middel van logische en numerieke analyse, inzicht verkregen worden in de effecten die materiële, economische en financiële beperkingen of mogelijk beslissingen van de bedrijfsleiding hebben op het bereiken van het bedrijfsdoel. Vele onderdelen van de wiskunde worden hierbij betrokken: waarschijnlijkheidsrekening, statistiek, stochastische processen, optimalisering, speltheorie, discrete wiskunde, numerieke wiskunde, het ontwerpen en construeren van algemene software en van specifieke programma's voor rekenautomaten, enz.

In deze voordracht zullen we ons beperken tot het schetsen van enkele aspecten van de wiskundige optimalisering, in het bijzonder tot dat onderdeel daarvan dat aangeduid wordt met de naam „mathematische programmering". Het woord programma heeft hier de betekenis van een werkschema dat aangeeft hoe de belangrijke bedrijfsfactoren door de bedrijfsleiding moeten worden ingedeeld, wil het bedrijfsdoel zo goed mogelijk worden benaderd. Het heeft dus geen betrekking op het programmeren van rekenautomaten, hoewel praktische toepassing van mathematische programmering zonder gebruik van deze rekenhulpmiddelen doorgaans niet mogelijk is.

De mathematische programmering houdt zich bezig met het

[1]) Voordracht gehouden op de vakantiecursus augustus 1967 van het Mathematisch Centrum met het centrale thema „Besliskunde".

bepalen van de maximum- of minimumwaarde van een functie van eindig veel variabelen, welke tevens moeten voldoen aan eindig veel nevenvoorwaarden. Zij vindt in de besliskunde toepassing bij het bestuderen van systemen, waarvan het gedrag bepaald wordt door een eindig aantal kwantificeerbare factoren, waarbij tussen de niveaus van deze factoren expliciet bekende relaties bestaan. In een industrieel bedrijf zijn deze factoren b.v. grondstoffen, produktieprocessen, produkten, energie, geldmiddelen, voorraad, kwaliteit, opslagruimte; bij een school b.v. leraren, klassen, leerlingen, lestijden.

De tussen de kwantitatieve niveaus van deze factoren bestaande relaties kunnen van fysische of logische aard zijn, maar kunnen ook door genomen beslissingen aan het systeem zijn opgedrongen. Als voorbeeld moge dienen een magazijn waarin enerzijds orders van klanten en anderzijds produkten uit de fabriek binnenkomen. De aflevering aan klanten heeft plaats op periodieke tijdstippen. Zij t zo'n moment van aflevering, a_t de hoeveelheid op moment t afgeleverde produkten, v_t het aantal tot dat moment binnengekomen, maar nog niet uitgevoerde orders en p_t het aantal tot dat moment van de fabriek gekomen maar nog niet afgeleverde produkten. Tussen deze grootheden bestaat dan de fysische relatie

$$0 \leqq a_t \leqq \min\,(v_t, p_t).$$

De magazijnleiding is echter nog vrij in het vaststellen van het afleveringsniveau. Overweegt zij dat het niet voldoen aan de vraag van klanten zoveel mogelijk vermeden moet worden, dan zal zij geneigd zijn de beslissingsrelatie

$$a_t = \min\,(v_t, p_t)$$

te hanteren. Realiseert zij zich echter dat zo'n strakke regel aanleiding kan zijn tot ongewenste en kostbare fluctuaties in het produktieproces, dan zal zij wellicht een zwakkere beslissingsrelatie gebruiken, b.v.

$$0{,}9 \min\,(v_t, p_t) \leqq a_t \leqq \min\,(v_t, p_t).$$

De fysische en logische relaties bepalen de realiseerbare toestanden van het systeem; te zamen met de beslissingsrelaties bepalen zij de toegelaten toestanden daarvan. In het algemeen is het aantal toegelaten toestanden zeer groot en een keuze met behulp van de mathematische programmering is slechts mogelijk, als aan elke toegelaten toestand, op grond van het gestelde bedrijfsdoel, een waarde is toegekend. Gevraagd wordt dan naar toegelaten toestanden met zo hoog mogelijke waarde.

De besliskundige modelvorming omvat het opsporen van de essentiële bedrijfsfactoren, het formuleren van de daartussen bestaande fysische en logische relaties, het formuleren van de gewenste beslissingsrelaties en het vaststellen van een passende waardefunctie (object- of doelfunctie). Deze modelvorming is in de praktijk een zeer moeilijke taak. Op de problemen die zich daarbij voordoen kunnen we hier echter niet ingaan. Wij zullen ons in het volgende uitsluitend bezighouden met wiskundige hulpmiddelen die thans beschikbaar zijn voor de analyse van zulke modellen.

2. Zij G een deelverzameling van de reële n-dimensionale ruimte R^n en $f(x)$ een reële functie gedefinieerd op G.

Een punt $\hat{x} \in G$ heet globaal minimaal punt van $f(x)$ in G als

$$f(\hat{x}) \leqq f(x) \text{ voor elk punt } x \in G.$$

Een punt $\hat{x} \in G$ heet lokaal minimaal punt van $f(x)$ in G, als voor zekere omgeving H van $\hat{x}$ geldt:

$$f(\hat{x}) \leqq f(x) \text{ voor elk punt } x \in G \cap H.$$

In het volgende veronderstellen we dat G gedefinieerd is door

$$G = \{x | g_i(x) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m\},$$

waarbij de functies $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, gedefinieerd op R^n, zodanige eigenschappen bezitten dat G gesloten is. Ook $f(x)$ veronderstellen we gemakshalve gedefinieerd op de gehele R^n.

We gaan ons bezighouden met het programmeringsprobleem

$$\min \{f(x) | g_i(x) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Het gebied $G = \{x | g_i(x) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ is de verzameling van toegelaten punten; $f(x)$ is de objectfunctie.

Het hoofddoel van de mathematische programmering is het ontwikkelen van praktisch bruikbare methoden voor het oplossen van zulke problemen, d.i. voor het opsporen van globaal minimale punten van $f(x)$ in G. Dit oplossen omvat:

a) het nagaan of de verzameling G van toegelaten punten al dan niet leeg is. Dit kan in vele gevallen gebeuren door oplossing van het programmeringsprobleem

$$\min \{z | g_i(x) - z \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Leeg zijn van G betekent bij de toepassingen veelal een fout in de modelvorming. (Onjuiste fysische of logische relaties of een aantal beslissingsrelaties waaraan niet voldaan kan worden.)

b) indien G niet leeg is, het nagaan of $f(x)$ in G een eindig minimum bezit (eindig infimum). Het ontbreken van zo'n eindig minimum (infimum) betekent bij de toepassingen vaak een fout in de modelvorming.
c) indien $f(x)$ in G een eindig minimum (infimum) bezit, het op-opsporen van tenminste één minimaal punt van $f(x)$ in G of althans van een punt $\hat{x} \in G$, waarvoor $f(\hat{x})$ niet meer dan een vooraf gegeven bedrag van deze minimale waarde afwijkt.

Algemene oplosmethoden, bruikbaar voor willekeurige functies $f(x)$ en $g_i(x)$ zijn op dit moment niet bekend. De bestaande methoden vereisen speciale eigenschappen van deze functies, waaraan bij de toepassing echter vaak wordt voldaan.

Numerieke methoden zijn beschikbaar in het geval de functies $f(x)$ en $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ convex zijn in R^m. Men spreekt in dit geval van convexe programmering.

Convexiteit in R^n van de functies $g_i(x)$ houdt geslotenheid, convexiteit en samenhangendheid in van het gebied G. Afhankelijk van de oplosmethode moeten soms nog zwaardere eisen gesteld worden, zoals differentieerbaarheid van de objectfunctie $f(x)$ en van de functies $g_i(x)$. In sommige gevallen wordt geëist dat G een inwendig punt bevat, d.w.z. dat G een punt x^* bevat, zodat

$$g_i(x^*) < 0 \text{ voor } i = 1, \ldots, m.$$

Een van de voordelen van de convexiteitsveronderstellingen wordt uitgesproken in de volgende stelling.

Stelling 1. Is G convex en $f(x)$ convex op G, dan is elk lokaal minimum van $f(x)$ in G ook een globaal minimum van $f(x)$ in G. De verzameling G^* van globaal minimale punten van $f(x)$ in G is convex.

Bewijs. Is x^1 niet een globaal minimaal punt van $f(x)$ in G, dan is er een punt $x^2 \in G$ zodat $f(x^2) < f(x^1)$.
Voor $\lambda \in (0, 1]$ geldt nu:

$$x^1 + \lambda\,(x^2 - x^1) \in G$$

en

$$f(x^1 + \lambda(x^2 - x^1)) \leqq f(x^1) + \lambda(f(x^2) - f(x^1)) < f(x^1).$$

In elke omgeving van x^1 liggen dus punten behorende tot G met $f(x) < f(x^1)$, zodat x^1 niet een lokaal minimaal punt van $f(x)$ in G kan zijn. Zijn x^3 en x^4 globaal minimale punten van $f(x)$ in G dan is

$$f(x^3) = f(x^4),$$

terwijl voor $\lambda \in [0, 1]$ geldt

$$(1 - \lambda)x^3 + \lambda x^4 \in G$$

en

$$f((1 - \lambda)x^3 + \lambda x^4) \leqq (1 - \lambda)f(x^3) + \lambda f(x^4) = f(x^3),$$

d.w.z. elk punt van het verbindingssegment van x_3 en x_4 is globaal minimaal punt van $f(x)$ in G.

De kernvraag van de optimalisering is:
wanneer is een gegeven punt $\hat{x} \in G$ een globaal minimaal punt van $f(x)$ in G. Het volgende lemma levert een voldoende voorwaarde voor deze globale minimaliteit.

Lemma 1. S is een willekeurige deelverzameling van R^n. $f(x)$ en $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ zijn willekeurige functies gedefinieerd op S. Dan is een gegeven punt $\hat{x} \in S$ een globaal minimaal punt van $f(x)$ in

$$G = \{x | g_i(x) \leqq 0, i = 1, \ldots, m; x \in S\},$$

als m getallen $\hat{u}_i \geqq 0, i = 1, \ldots, m$ bestaan zodat

$$f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\hat{x}) \leqq f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i g_i(\hat{x}) \leqq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i g_i(x)$$
$$u \geqq 0 \qquad\qquad x \in S$$
$$i = 1, \ldots, m.$$

Bewijs. Uit de linker ongelijkheid volgt:

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i - \hat{u}_i) g_i(\hat{x}) \leqq 0 \text{ voor } u_i \geqq 0, \ i = 1, \ldots, m.$$

Dit is dan en slechts dan mogelijk als

$$\hat{u}_i g_i(\hat{x}) = 0 \qquad \text{voor } i = 1, \ldots, m$$

en

$$g_i(\hat{x}) \leqq 0 \qquad \text{voor die indices } i \text{ waarvoor } \hat{u}_i = 0.$$

Hieruit volgt direct dat

$$\hat{x} \in \{x | g_i(x) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m; x \in S\}.$$

Dit resultaat doet de rechter ongelijkheid overgaan in

$$f(\hat{x}) \leqq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i g_i(x) \text{ voor } x \in S,$$

dus

$$f(\hat{x}) \leqq f(x) \text{ voor } x \in \{x | g_i(x) \leqq 0, \quad i = 1, \ldots, m; x \in S\}.$$

Dit lemma is ook uit te spreken als een zadelpuntstelling. Zij $X \subset R^n$ en $U \subset R^m$, en zij de functie $\phi(x, u)$ gedefinieerd op $X \times U$. Het punt $(\hat{x}, \hat{u}) \in X \times U$ heet zadelpunt van $\phi(x, u)$ t.o.v. $X \times U$, als voldaan is aan

$$\begin{array}{c} \phi(\hat{x}, u) \leqq \phi(\hat{x}, \hat{u}) \leqq \phi(x, \hat{u}) \\ u \in U \qquad\qquad x \in X. \end{array}$$

Lemma 1 zegt nu: als $(\hat{x}, \hat{u})$ een zadelpunt is van de functie

$$\phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$$

t.o.v. $S \times \{u|u \geqq 0, u \in R^m\}$, dan is $\hat{x}$ een globaal minimaal punt van $f(x)$ in $\{x|g_i(x) \leqq 0, i = 1, \ldots, m; x \in S\}$.

De functie $\phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$ wordt Lagrangefunctie genoemd; de getallen u_i, $i = 1, \ldots, m$ heten Lagrangecoëfficiënten.

Lemma 1 stelt nauwelijks eisen aan de functies $f(x)$ en $g_i(x)$ en aan de deelverzameling $S \subset R^n$. Deze laatste mag o.a. een discrete deelverzameling zijn, b.v. bestaande uit de hoekpunten van de n-dimensionale eenheidskubus.

Tenzij anders vermeld zullen we in het volgende aannemen dat $S = R^n$. Ook onder deze aanname komen echter nog vele gevallen voor waarin een minimaal punt $\hat{x}$ bestaat, maar waarin de Lagrangefunctie

$$\phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$$

geen zadelpunt $(\hat{x}, \hat{u})$ heeft t.o.v. $R^n \times \{u|u \geqq 0, u \in R_m\}$.

Willen we het bestaan van zo'n zadelpunt garanderen, dan moeten nog bijzondere eisen gesteld worden aan de functies $f(x)$ en $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$,

Stelling 2. (Kuhn-Tucker). De functies $f(x)$ en $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ zijn convex op R^n en de verzameling

$$\{x|g_i(x) < 0, \ i = 1, \ldots, m\}$$

is niet leeg. Het punt $\hat{x} \in R^n$ is dan en slechts dan een (globaal) minimaal punt van $f(x)$ in $G = \{x|g_i(x) \leqq 0, 1 = 1, \ldots, m\}$ als m getallen $\hat{u}_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, m$ bestaan zodat

$$\begin{array}{ccc} f(\hat{x}) + \sum u_i g_i(\hat{x}) \leqq f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i g_i(\hat{x}) \leqq f(x) + \sum \hat{u}_i g_i(x) \\ u_i \geqq 0 \qquad\qquad\qquad x \in R^n \\ i = 1, \ldots, m \end{array}$$

(als de Lagrangefunctie $f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$ een zadelpunt $(\hat{x}, \hat{u})$ bezit t.o.v. $R^n \times \{u | u \geqq 0,\ u \in R^m\}$).

Deze stelling van Kuhn-Tucker vormt de sleutel tot de convexe programmering.

Uit voorbeelden blijkt dat het bestaan van zo'n zadelpunt niet gegarandeerd wordt door de convexiteitsveronderstellingen alleen. Het is nodig nog een z.g. regulariteitsconditie te stellen, waarvoor we in bovenstaande formulering het bestaan van een inwendig punt van G gekozen hebben.

Aan deze voorwaarde is bij veel toepassingen voldaan. Stelling 2 kan echter onder veel zwakkere regulariteitscondities bewezen worden. Zijn de functies $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ alle lineair (lineaire programmering) dan is geen nadere regulariteitsconditie vereist.

De stelling van Kuhn-Tucker neemt een meetkundig zeer doorzichtige vorm aan in het geval de functies $f(x)$ en $g_i(x)$ differentieerbaar zijn in R^n. In dat geval duiden we de respectievelijke gradiënten in het punt x aan met $\nabla f(x)$ en $\nabla g_i(x)$.

Stelling 2*. (Kuhn-Tucker). De functies $f(x)$ en $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ zijn convex en differentieerbaar op R^n en de verzameling

$$\{x | g_i(x) < 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

is niet leeg. Het punt $\hat{x} \in G = \{x | g_i(x) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ is dan en slechts dan een (globaal) minimaal punt van $f(x)$ in G als m getallen $\hat{u}_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, m$ bestaan zodat

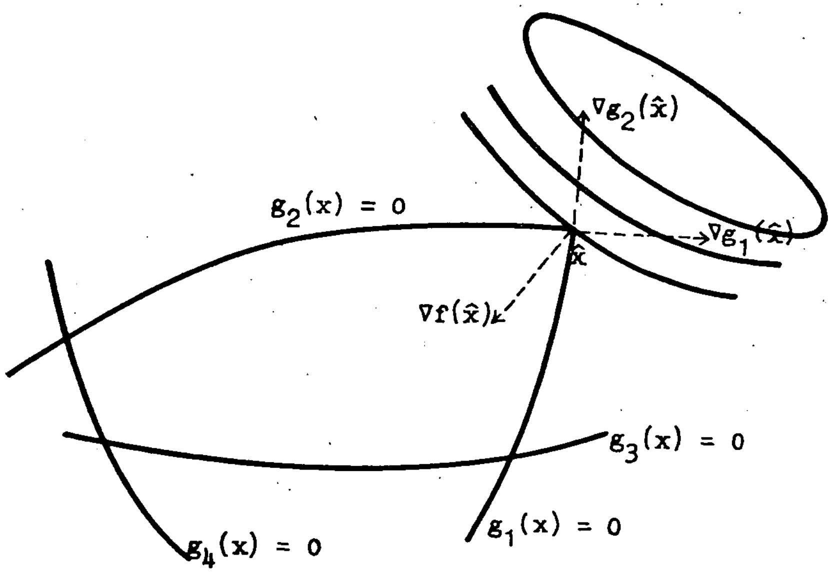
$$\nabla f(\hat{x}) = - \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \nabla g_i(\hat{x})$$

en

$$\hat{u}_i g_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Voor de minimaliteit van $\hat{x}$ is het dus nodig en voldoende dat de gradiënt van $f(x)$ in $\hat{x}$ een niet positieve lineaire combinatie is van de gradiënten in $\hat{x}$ van de $(n-1)$-dimensionale „zijvlakken" van G welke door $\hat{x}$ gaan.

In de voorwaarde van deze stelling 2* kan de convexiteit van $f(x)$ en $g_i(x)$ in R^n vervangen worden door convexiteit van deze functies in een omgeving van $\hat{x}$. De uitspraak heeft dan echter betrekking op een lokaal minimaal punt. Deze opmerking is van belang voor de toepassing op praktische problemen, waar het niet altijd mogelijk is de convexiteit van de voorkomende functies aan te tonen of waar het duidelijk is dat aan deze convexiteitseis niet voldaan is. (Deze convexiteitseis kan trouwens nog verzwakt worden).



Toepassing van numerieke oplosmethoden, gebaseerd op de theorie van de convexe programmering leidt ook in zulke gevallen vaak tot een minimaal punt. Het vaststellen van het globale dan wel lokale karakter daarvan is meestal nog een moeilijk werk, waarbij naast wiskundige ook fysische, technische of econometrische overwegingen een rol spelen.

3. We passen de stelling van Kuhn-Tucker nu toe in de lineaire programmering, d.i. in het speciale geval van convexe programmering waarin de functies $f(x)$ en $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ alle linear zijn. Zoals reeds opgemerkt hoeft thans niet voldaan te zijn aan de in stelling 2 en 2* genoemde regulariteitsconditie.

Elk lineair programmeringsprobleem kan geschreven worden in de volgende standaardvorm:

$$\max \{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n\}.$$

Voor de toepassing van de stelling van Kuhn-Tucker duiden we de Lagrangecoëfficiënt behorende bij de relatie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i$ aan met u_i, en die behorende bij de relatie $x_j \geqq 0$ met v_j. In elk punt

$x \in R^n$ geldt: de gradiënt van de objectfunctie $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ is de vector c met componenten $c_1, \ldots, c_n$; gradiënt van de functie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ is de vector a_i met componenten $a_{i1}, \ldots a_{in}$; gradiënt van de functie $-x_j$ is de vector e_j met componenten $e_{jk} = 0$ als $k \neq j$ en $e_{jk} = 1$ als $k = j$. Stelling 2* leidt nu tot het volgende resultaat: een punt

$$\hat{x} \in G\{x | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i, i = 1, \ \ldots, m; \ \ x_j \geqq 0, j = 1, \ldots, n\}$$

is dan en slechts dan een maximaal punt van $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ in G als m getallen $\hat{u}_i \geqq 0$, $i = 1, \ldots, m$ en n getallen $\hat{v}_j \geqq 0$, $j = 1, \ldots,$ n bestaan zodat

$$c = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i a_i - \sum \hat{v}_j e_j$$

$$\hat{u}_i (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j - b_i) = 0, \qquad \hat{v}_j \hat{x}_j = 0.$$

In een meer symmetrische vorm luidt deze uitspraak:

het punt $\hat{x} \in G = \{x | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i, \ i = 1, \ldots, m; \ x_j \geqq 0, j = 1,$ $\ldots, n\}$ is dan een slechts dan een maximaal punt van $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ in G als er een punt $\hat{u} \in H = \{u | \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \geqq c_j, j = 1, \ldots, n; u_i \geqq 0,$ $i = 1, \ldots, m\}$, waarmee de volgende relaties bestaan

$$\hat{u}_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j - b_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

$$\hat{x}_j (-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{u}_i + c_j) = 0; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

De laatste relaties worden complementaire slackrelaties genoemd.

Beschouw nu het lineaire programmeringsprobleem

$$\min \{\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \mid \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqq c_j, j = 1, \ldots, n; u_i \geqq 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Dit minimaliseringsprobleem wordt het duale probleem genoemd van het hierboven beschouwde maximaliseringsprobleem. Men toont makkelijk aan dat deze dualiteitsrelatie wederkerig is, d.w.z. dat het maximaliseringsprobleem het duale is van het minimaliseringsprobleem.

Uit de symmetrie van de complementaire slackrelaties volgt: een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een optimale oplossing van een lineair programmeringsprobleem is, dat ook het duale probleem een optimale oplossing heeft. Bovendien geldt dat de optimale waarden van de respectievelijke objectfuncties van deze duale problemen aan elkaar gelijk zijn.

Deze laatste bewering volgt onmiddellijk uit de complementaire slackrelaties:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{u}_i \hat{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{u}_i .$$

De Lagrangecoëfficiënten behorende bij een optimale oplossing van een lineair programmeringsprobleem zijn dus zelf weer de componenten van een optimale oplossing van een ander (van het duale) lineair programmeringsprobleem.

De Lagrangecoëfficiënten bevatten voor de analyse van bedrijfsmodellen zeer belangrijke informatie. Wij zullen dit illustreren aan een mengprobleem. Hiermee wordt dan tevens een band gelegd tussen de wiskundige analyse van een wiskundig model en de econometrische interpretatie van de analyseresultaten. De behandeling heeft een heuristisch karakter. Zo wordt het begrip „waarde" gebruikt, zonder dit nader te definiëren, terwijl ook op voor de hand liggende vragen niet wordt ingegaan.

We beschouwen een bedrijf dat zich bezighoudt met het mengen van grondstoffen tot bepaalde produkten. De grondstoffen nummeren we van 1 tot m (lopende index i), de mogelijke produkten van 1 tot n (lopende index j). Van grondstof i is de hoeveelheid b_i beschikbaar. De grondstoffen kunnen zonder verdere bewerking verkocht worden voor de prijs q_i per eenheid. Ze kunnen ook verwerkt worden tot produkten. Het produkt j brengt bij verkoop het bedrag p_j per eenheid op. Om een eenheid van produkt j te verkrijgen zijn a_{ij} eenheden van grondstoffen i nodig (de mengrecepten voor de mogelijk te fabriceren produkten zijn dus bekend). Het produktniveau van produkt j is x_j, de hoeveelheid niet voor de produktie gebruikte grondstof i is y_i. Produktiekosten e.d. zijn in de genoemde prijzen verwerkt en worden verder niet expliciet beschouwd. Het bedrijf wenst in eerste instantie te weten, welk produktieschema een zo hoog mogelijke opbrengst geeft. Dit schema wordt verkregen door oplossing van het volgende lineaire programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \;\;= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \;\;= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \\
\qquad x_j \geqq 0 \qquad\qquad y_i \geqq 0
\end{array}
$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + q_1y_1 + q_2y_2 \ldots + q_my_m \text{ maximaal.}$$

Men leidt gemakkelijk af dat het duale van dit probleem luidt:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m & & & \geqq p_1 \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m & & & \geqq p_2 \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m & & & \geqq p_n \\
\quad u_1 & & & \geqq q_1 \\
\qquad\qquad u_2 & & & \geqq q_2 \\
 & & & \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_m & & & \geqq q_m \\
b_1u_1 + b_2u_2 \quad + \ldots + \quad b_mu_m & & & \text{minimaal.}
\end{array}
$$

De complementaire slackrelaties luiden:

$$
\begin{array}{lll}
x_j(a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{mj}u_m - p_j) = 0, & & j = 1, \ldots, n \\
\qquad\qquad y_i(u_i - q_i) \qquad\qquad\qquad = 0, & & i = 1, \ldots, m.
\end{array}
$$

Het is voor de bedrijfsleiding niet alleen van belang te weten, hoe ze met de gegeven produktiemiddelen, de beschikbare grondstoffen en bij de geldende prijzen voor grondstoffen en produkten een zo hoog mogelijke opbrengst kan krijgen, zij wenst ook indicaties te krijgen of zij door eigen ingrepen in het systeem de situatie nog kan verbeteren. Veranderingen in het produktieproces zijn meestal pas op langere termijn mogelijk, de prijzen van produkten en grondstoffen zijn meestal ook niet op korte termijn te veranderen (hierin spreekt de concurrent ook een woordje mee). Wat zich wel leent voor verandering zijn de hoeveelheden beschikbare grondstof; deze kunnen door aankoop verhoogd worden. De vraag is nu: welke grondstofhoeveelheid kan met voordeel verhoogd worden en welke prijs wil het bedrijf maximaal voor een additionele eenheid daarvan betalen. In feite vragen we naar een „intern waardensysteem" voor de grondstoffen (per eenheid).

Stel de interne waarde van de i-de grondstof is $\hat{u}_i$. Onder aanname van een optimaal werkschema $(\hat{x}, \hat{y})$ moet nu gelden:

a) $\hat{u}_i \geqq q_i$ De interne waarde van grondstof i (per eenheid) is tenminste gelijk aan de verkoopwaarde.

b) $\hat{u}_i = q_i$ als $\hat{y}_i > 0$. Als niet alle beschikbare grondstof i in het produktieproces gebruikt wordt, dan is de interne waarde (per eenheid) niet hoger dan de verkoopwaarde.

c) $p_j \leqq \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i$ Het rechterlid is de totale interne waarde van de per eenheid van produkt j verwerkte grondstoffen. Het $>$ teken in deze relatie zou betekenen dat het interne waardensysteem tot een onderschatting van de waarde van produkt i zou leiden. Dit is in strijd met het intuïtieve waardebegrip.

d) $p_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i$ als $\hat{x}_j > 0$. Het teken $<$ zou betekenen dat het bedrijf, gemeten in het interne waardensysteem verlies zou lijden op produkt j. Ook dit zou wijzen op een onjuist intern waardensysteem.

Opmerkingen: In bovenstaand betoog is aangenomen dat de marginale waarde van grondstof i (d.i. het bedrag dat het bedrijf maximaal wenst te betalen voor een additionele eenheid daarvan) ook de waarde voorstelt van elke reeds beschikbare eenheid. In een niet-lineair bedrijfsmodel is deze aanname niet meer gerechtvaardigd.

Uit bovenstaande volgt dat het gewenste interne waardensysteem $\{\hat{u}_i\}$ moet voldoen aan de relaties

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i \geqq p_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\hat{u}_i \geqq q_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

terwijl tevens moet gelden

$$\hat{x}_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i - p_j\right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\hat{y}_i(\hat{u}_i - q_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Uit de voorafgaande lineaire programmeringstheorie volgt dat zo'n intern waardensysteem inderdaad bestaat, mits een optimaal produktieschema bestaat. Noemen we het lineaire programmeringsprobleem waaruit het optimale produktieschema berekend wordt het „produktie probleem", dan is het interne waardensysteem een optimale oplossing van het duale lineaire programmeringsprobleem daarvan.

Ook bij meer ingewikkelde lineaire programmeringsproblemen dan het hier behandelde mengprobleem heeft de optimale oplossing van het duale probleem een soortgelijke econometrische interpretatie.

De meest bekende methode voor het oplossen van lineaire programmeringsproblemen, de z.g. „simplex methode", lost simultaan het gegeven probleem en zijn duale op. Zij levert daarmee aan de bedrijfsleiding dus niet alleen een optimaal werkschema, maar, wat vooral bij de grovere en langere termijn planning vaak veel belangrijker is, levert tevens indicaties voor de gevolgen van ingrepen van de bedrijfsleiding op de bedrijfsresultaten.

Literatuur

1. G. Hadley, „*Linear Programming*" Addison-Wesley, Reading Mass., 1962.
2. G. Hadley, „*Non-linear and Dynamic Programming*" Addison-Wesley, Reading Mass, 1964.

WIMECOS

MEDEDELING AAN DE LEDEN

Met ingang van augustus van dit jaar zal er een nauwe samenwerking zijn tussen de leraren van het vwo, het havo en het mavo. Het bestuur van Wimecos meent, dat het wenselijk is in het verenigingsleven rekening te houden met de daaruit voortvloeiende behoefte aan nauwer contact. Het heeft zich daarom in verbinding gesteld met vertegenwoordigers van de mavo-leraren om na te gaan op welke wijze het mogelijk zou zijn de vereniging Wimecos open te stellen voor alle wiskundeleraren en er bovendien zorg voor te dragen, dat de belangen van de verschillende groepen voldoende tot hun recht komen. Een commissie bestaande uit leden van Wimecos en mavo-leraren zal voorstellen in deze richting voorbereiden.

Zodra de plannen uitgewerkt zijn, zullen ze de ledenvergadering voorgelegd worden. Het leek het bestuur echter gewenst nu reeds de leden te doen weten, dat een dergelijk voorstel tegemoet gezien kan worden.

Het bestuur

DE DISCUSSIENOTA'S IN HET INTERIMRAPPORT VAN DE COMMISSIE LEERPLAN WISKUNDE

(voor zover betreft het mavo) [1])

door

Dr. P. M. van HIELE
Voorburg

1. Men zal mij straks kunnen vragen, met welk recht ik de vrijheid neem het gesprek te openen over een kwestie, die het mavo aangaat, terwijl ik nooit les heb gegeven aan een ulo-school. Het is om die reden, dat ik mij angstvallig zal onthouden van een oordeel, of leerstof al of niet geschikt is voor het mavo. Toch meen ik, dat ik wel iets belangrijks over de voorgestelde programma's kan vertellen, omdat ik al tamelijk lang met moderne programma's bij het v.h.m.o. gewerkt heb en ik bovendien nogal goed op de hoogte ben van de onderwijsdoelen, die met wiskundeleerstof beoogd worden.

2. De voorgestelde programma's voor het mavo stellen de docenten voor enorme problemen. Deze zijn voor het mavo veel groter dan voor het vwo, omdat daar in 1958 al een vernieuwing heeft plaats gevonden. Een vernieuwing, die weliswaar veel minder sterk is dan de nu voorgestelde, maar die toch al een gewijzigde instelling bij de docenten heeft ten gevolge gehad. Ik heb het zeer betreurd, dat het niet mogelijk is geweest de ulo-scholen toentertijd althans tendele aan deze vernieuwing te laten deelnemen. Doordat het ulo-onderwijs zich niet aangepast heeft bij het v.h.m.o. is het de ulo-leerlingen, die verder wilden in de h.b.s. moeilijker geworden daar het onderwijs te volgen en konden ook de scholen, die hun leerlingen gedeeltelijk betrokken van het ulo, zoals kweekschool en h.t.s. hun wiskunde-onderwijs niet goed moderniseren.

3. Er zal dus op de mavo-scholen straks een onderwijs in de wiskunde gegeven worden, dat slechts heel weinig overeenkomsten heeft met dat, wat men thans vindt op de ulo-scholen en de docenten zullen in zeer veel gevallen niets hebben aan hun vroegere ervaringen. Dikwijls zal men een omslachtige weg kiezen, terwijl het eenvoudiger en duidelijker kan. Men zal vaak moeten zoeken naar een geschikte uitleg en men zal soms een betoog houden, dat wel past in de vroegere, maar niet meer in de moderne methode. Naar mijn ervaring duurt het wel vijf jaar, voor men in de didactiek van de moderne leerstof thuis is geraakt en in de eerste jaren moet men dan ook met belangrijke vertragingen in het programma rekening houden.

---

[1]) Inleiding gehouden op 26-10-67 voor de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O.

4. Het nieuwe programma verlangt een volledig nieuwe instelling van de docent. Wanneer we in het leerplan zien staan „verzamelingen", dan is dat niet een nieuw te behandelen onderwerp. Het betekent, dat de docent zich bewust moet zijn en ook moet laten blijken, dat men de hele wiskunde door bezig is met verzamelingen. Precies zo geldt het voor andere onderwerpen, zoals relaties en afbeeldingen.

5. Het komt mij voor, dat de programma's, die in de discussienota's voor het mavo worden voorgesteld, te uitgebreid zijn. Ik meen, dat de leerplancommissie aan die mogelijkheid wel heeft willen denken, maar de voorgestelde onderwerpen zo mooi en zo belangrijk vindt, dat zij niet heeft kunnen besluiten, wat er geschrapt zou kunnen worden. Inderdaad zijn de onderwerpen mooi en belangrijk. Maar men zal toch een antwoord moeten hebben, als het blijkt, dat het programma onuitvoerbaar blijkt te zijn. In ieder geval zal men tal van onderwerpen, die in het oude programma zeer tijdrovend waren, sterk moeten besnoeien. Het rekenen met en herleiden van wortelvormen kan waarschijnlijk tot op een vierde worden teruggebracht. Alle vraagstukken over bewijzen met behulp van congruenties van driehoeken kunnen vervallen (men kan zich beperken tot die congruenties, die in de theorie voorkomen). In het kort: men zal bij ieder opgegeven vraagstuk eerst overlegd moeten hebben of het voor déze leerlingen zinvol is. De nieuwe stof kost heel veel ruimte, deze ruimte moet gemaakt worden.

6. Het voorgestelde programma voor het brugjaar begint met verzamelingen. Er wordt in genoemd: element van een verzameling, gelijkheid van verzamelingen, deelverzameling, doorsnede, lege verzameling en eventueel venn-diagram. Men doet er goed aan zich te realiseren, wat men met deze begrippen in de wiskunde denkt te gaan doen. Men kan voorbeelden uit het dagelijks leven kiezen, maar moet dan deze voorbeelden met zorg kiezen. De elementen, die in aanmerking komen voor een verzameling (die behoren tot een zekere al-verzameling) moeten herkenbaar zijn, men moet uit kunnen maken, of het al dan niet tot de verzameling behoort en men moet ook weten, of men het element al gehad heeft. De verzameling, die als elementen heeft a en nog eens a heeft slechts één element a. Het criterium voor de gelijkheid van twee verzamelingen voert tot de twee bewijzen, die nodig zijn bij de „meetkundige plaatsen". Doorsnede en lege verzameling treft men aan in de meetkunde, maar evenzeer in de stelsels van vergelijkingen. Men kan dus met de behandeling van deze begrippen heel goed wachten tot de gelegenheid zich in de meetkunde of de algebra voordoet.

7. Het voortdurend noemen van commutatieve, associatieve en distributieve wetten wekt de indruk, dat men aan een tamelijk theoretische ontwikkeling van het getalbegrip heeft gedacht. Tegen een dergelijke opzet zou ik willen waarschuwen: evenmin als de meetkunde leent zich de algebra voor een axiomatische begripsbenadering. Het eerste jaar kan beter dienen voor een verkenning van het terrein. Tot die verkenning behoort dan het constateren van het al of niet gelden van deze wetten.

8. De opsomming in punt 1 van de discussienota-mavo voor de tweede en derde klasse wekt ook de indruk, dat men streeft naar een abstracte benadering van nieuwe leerstof. Immers, als er gesproken wordt van „relatie als deelverzameling van het produkt van twee verzamelingen", dan wordt daarmee gesuggereerd, dat eerst over het produkt van twee verzamelingen gesproken wordt, dan over de relatie en dan het bijzondere geval, dat men te maken heeft met geordende getallenparen. Tegen deze gang van zaken kan men ernstige didactische bezwaren hebben: de methode van de verkenning van het terrein zal bijvoorbeeld kunnen beginnen met speciale functies, zoals drie bijtellen, kwadrateren, daarna kan het begrip functie wat veralgemeend worden, men kan er de geordende getallenparen in ontdekken, vervolgens kan men in een afbeelding in de meetkunde overeenkomst zien met de functie. De laatste stap is dan de deelverzameling van het produkt van twee verzamelingen. Het is waar, dat deze gang van zaken in de discussienota niet wordt uitgesloten, maar zij wordt toch bemoeilijkt, doordat het produkt van twee verzamelingen in het tweede en derde leerjaar en niet in het vierde zijn plaats vindt. Men ziet hier de bezwaren van het overhaast invoeren van een nieuw programma: men verzuimt de leerstof, die men in de heroriënteringscursus ontmoet heeft, zo om te werken, dat zij aan didactische normen voldoet.

9. Een van de onderwerpen, waar men tegenwoordig het grote belang bijna algemeen van inziet, is de statistiek. We vinden dit onderwerp in punt 2 van de tweede en derde klas en in punt 2 van de vierde klas. Mijn collega, die dit vak in de α-afdeling van het gymnasium behandelt, schat dat voor het eerste deel ongeveer 14 lessen nodig zijn, voor het tweede ongeveer 25 lessen. Ik heb er dan rekening mee gehouden, dat de leerlingen in de tweede en derde klasse niet en in de vierde klas wel geselecteerd zijn.

10. Het invoeren van de rekenliniaal kan een einde maken aan heel veel vervelende berekeningen in de goniometrie en de natuurkunde. De wortel uit een getal krijgt een veel grotere realiteit, wanneer hij op een rekenliniaal kan worden afgelezen. Het leren

aflezen van de schalen, het leren vermenignuldigen, delen, het toepassen van de sinusregel vergt met elkaar toch nog vrij veel tijd, men moet wel rekenen met een twintig lessen.

11. Het gebruik van vectoren in de goniometrie en de meetkunde wordt door de leerlingen bij het v.h. en m.o. over het algemeen zeer toegejuicht. Het is een onderwerp, dat er in gaat als koek. Maar de opbouw van de begrippen kost veel tijd. Het programma, dat voor de tweede en derde klas mavo wordt voorgesteld, kost in IV en V gymnasium ongeveer 8 lessen. Het lijkt mij daarom niet fout om dit aantal voor het mavo op 16 te stellen.

Hiermee heb ik mij nog niet uitgesproken over de vraag, of dit onderwerp geschikt is voor een behandeling in het mavo. Leerlingen bij het v.h. en m.o. nu vinden het begin behoorlijk moeilijk. Het heeft mij veel tijd gekost uit te vinden waar de knelpunten zitten en men moet telkens heel wat oefeningen geven voor men naar een volgend onderdeel van het programma vectoren kan overgaan. Als het waar is, dat dit onderwerp geschikt is voor het mavo, dan is het verschil tussen mavo en vwo veel kleiner dan ik mij voorstel.

12. De leerplancommissie meent, dat er tijd voor nieuwe onderwerpen gevonden zal kunnen worden door te besnoeien op de vraagstukkencultus zoals bij wortelvormen e.d. Het zal zeker toe te juichen zijn, als men geen tijd meer besteedt aan onnutte vraagstukken. Men moet echter wel bedenken, dat er heel wat nieuwe begrippen in het voorgestelde programma genoemd worden en dat het leggen van begrippen de meeste tijd kost. Bovendien: neemt men niet vaak zijn toevlucht tot een ongebreidelde stroom van vraagstukken, omdat men er niet in gelooft, dat de leerlingen tot een goed begrip te brengen zijn? Wanneer nu een leerling met eindexamen mulo onderzocht wordt op zijn geschiktheid voor een voortzetting bij het v.h. en m.o., dan gaan wij na, of hij beschikt over een zekere grondslag van functies, grafieken en het is dan niet heel belangrijk, of hij moeilijke vraagstukken daarover kan maken. Heeft hij geen enkel begrip van deze onderwerpen, dan zijn zijn kansen voor een geslaagde studie zeer gering, omdat juist het aanbrengen van deze begrippen veel te veel tijd kost naast het gewone programma. Ik zie dus in het besnoeien van de vraagstukken wel een belangrijke en zeer nuttige tijdwinst, maar deze lijkt mij toch zeer ontoereikend voor de uitvoering van alle nieuwe onderwerpen.

13. Het moet voor iedereen duidelijk zijn, dat bij het voorgestelde programma de vraag, of het niet te veel is, een zeer belangrijke is. Men zal dus met zeer grote zorgvuldigheid moeten uitzoeken, of ieder in het programma genoemd onderwerp ook werkelijk de

moeite waard is. Daarom treft het mij, dat het programma toch een aantal dubieuze onderwerpen bevat. De ontbinding van a^2+pa+q kan best uitgesteld worden tot na het brugjaar, het functioneert daar in het geheel niet. Lineaire ongelijkheden zijn in het brugjaar erg moeilijk en het is onbegrijpelijk dat men ze aan de orde stelt terwijl de grafieken in het brugjaar niet genoemd worden. Was het de commissie dan onbekend, dat het oplossen van ongelijkheden zonder grafiek een lichtzinnig bedrijf is? Wat is het nut van het kunnen bewijzen van de concurrentie van de hoogtelijnen in een driehoek? Als vraagstukje bij de vectoren vierde klasse zou het nog kunnen dienen, maar dan behoeft het niet in het programma te staan.

14. Ik zou willen eindigen met nog iets te zeggen over de ,,Schotse methode". Zoals ieder wel zal weten volgt deze experimentele uitgave vrij nauwkeurig het voorgestelde leerplan, soms zelfs zo nauwkeurig, dat men zich afvraagt: Is de Schotse methode gemaakt naar het leerplan, of heeft men het leerplan samengesteld met de ,,Schotse methode" er naast? Nu mag ik persoonlijk mij niet beklagen over de wijze van behandeling van de onderwerpen: het vroege gebruik van coördinaten, het gebruik van roosterpaper, het beginnen met ruimtefiguren, de transformaties in het platte vlak, het heeft allemaal mijn sympathie. Maar naar mijn smaak legt het boek de docenten te veel aan banden, zelfs te veel voor deze pioniersfase. De keuvelende betoogtrant in het boek laat aan de docent niet de gelegenheid ook nog zelf met iets naar voren te komen, aan meer voorbeelden heeft de leerling werkelijk geen behoefte. Dit boek nodigt de leraar uit er voorlopig maar het zwijgen toe te doen, laat de leerlingen maar uit het boek werken. Straks kan hij dan de samenvatting geven. Hiermee heeft men de betekenis van het gesproken woord onderschat. En men heeft onderschat de betekenis van het overzichtelijk opgeschreven betoog. Ik had dus liever gezien, dat men aan de leraar het praatje met de voorbeelden had gelaten en dat het boek zo overzichtelijk was opgesteld, dat men daar direct de weg in vindt. Daaraan ontbreekt nu wel heel veel.

15. In de ,,Schotse methode" vindt men ook in de eerste twee delen (bestemd voor het brugjaar) niets over functies. Dit is in overeenstemming met de discussienota van het brugjaar. Met deze planning ben ik het geheel oneens. De ontwikkeling van het functiebegrip zou heel sterk bindend kunnen werken voor de verschillende onderwerpen, die in het brugjaar in de algebra aan de orde komen. Doordat deze bindende factor ontbreekt, maakt het geheel een chaotische indruk. Deze opzet is gekozen, omdat men de abstracte

benadering van het functiebegrip wenst. Dit nu is mij volkomen onbegrijpelijk. Wat heeft de opstellers van het Schotse boek en die van het leerplan bezield om bij de meetkunde te kiezen voor een intuïtieve inleiding, maar bij de algebra de abstracte ontwikkeling voor te schrijven. Deze twee keuzen zijn zo met elkaar in strijd, dat ik vrees, dat men toch nog niet veel begrepen heeft van het verschil tussen een begripsontwikkeling bij de mens en het neerschrijven van een logisch patroon van een wiskundeonderdeel. Ik meende, dat men begrepen had, dat dit laatste het eindpunt was van de begripsontwikkeling. Men schijnt het echter niet begrepen te hebben. Wat heel jammer is.

16. Nu ik aan het eind van mijn inleiding gekomen ben, zal het misschien velen teleurstellen, dat ik niet nader op de behandeling van de nieuwe leerstof ben ingegaan. In plaats daarvan heb ik eigenlijk maar over een paar onderwerpen gesproken: de overlading, de onjuiste volgorde en de moeilijkheden, die de docenten te wachten staan. Men moet hierbij echter in aanmerking nemen, dat deze inleiding maar een begin is. Wij hebben ons voorgesteld in volgende bijeenkomsten op de behandeling van nieuwe leerstof dieper in te gaan. Op het moment staan wij echter voor een belangrijke beslissing, die nog niet genomen is. Voor ons ligt een leerplan, dat zeer grote verdiensten heeft, dat wijzigingen brengt, waar wij jaren op gewacht hebben. Er kleven echter tekortkomingen aan, die als zij blijven, ons misschien de invoering van dit leerplan zouden doen betreuren. Dit te trachten te voorkomen leek mij mijn eerste en belangrijkste taak.

BOEKBESPREKING

Lawrence A. Ringenberg, *Informal Geometry*, John Wiley and Sons, Inc., New York/London/Sydney, 1966.

Dit boek is bedoeld voor de aanstaande Amerikaanse onderwijzer en geschreven in overeenstemming met aanbevelingen van het CUPM (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics). Het verschil tussen „informal geometry" (intuïtieve meetkunde) en „formal geometry" wordt vooraf duidelijk uiteengezet. Daarna komen de voornaamste zaken van de planimetrie en de stereometrie op intuïtieve manier aan de orde. In de laatste hoofdstukken echter worden enkele onderwerpen nader onder de loep genomen en de leerling duidelijk gemaakt, hoe een formele (deductieve) opbouw behoort te zijn.

Moderne begrippen en notaties worden van het begin af gebruikt.

Het komt me voor, dat dit ook voor wiskundeleraren aan Nederlandse kweekscholen een interessant boek is.

Leujes

MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

door

Prof. dr. N. G. de BRUIJN

Eindhoven

Van de secretaris van de „Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde" vernam ik dat de discussienota's bij het interimrapport van die commissie waren gepubliceerd met de bedoeling, dat alle geïnteresseerden daarover in open discussie zouden kunnen treden met deze commissie, en hij beval daartoe publikatie van zulke discussies in „Euclides" aan.

Het is niet gemakkelijk discussie over het interimrapport te voeren op grond van de gedetailleerde discussienota's. Van de in het interimrapport gegeven motiveringen is namelijk weinig of in het geheel niets terug te vinden in de lijsten van onderwerpen in de discussienota's. Het interimrapport zegt:

„Bij het opstellen van een programma voor de verschillende vormen van onderwijs, is het zaak te trachten een motivering van dit programma aan te geven. Dit is in het algemeen geen gemakkelijke opgave en in ieder geval niet voor het vak wiskunde. Vele, meermalen door traditie bepaalde factoren, spelen hierbij een rol. Het zal zonder verdere toelichting duidelijk zijn dat de maatschappelijke betekenis van de wiskunde door velerlei toepassingen in de eerste plaats in de natuurwetenschappen en de techniek, maar ook daar buiten, in de laatste decennia sterk is toegenomen. In ieder geval zal er dus bij het concipiëren van een programma rekening mee moeten worden gehouden, dat de leerlingen bruikbare kennis moet worden overgedragen. Daarnaast is het een noodzakelijk doel van het onderwijs in de wiskunde, de leerlingen inzicht bij te brengen in de culturele betekenis van dit vak."

Wat komt hiervan terecht? De discussienota's wekken de indruk, dat het voorgestelde wiskunde-programma voor de verschillende schooltypen minder op de maatschappij is afgesteld dan zulks 50 jaar geleden het geval was. Ik spreek over een tijd waarin het rekenen nog werd beoefend, de goniometrie een nuttige scholing was voor ingenieurs, landmeters, astronomen (en niet alleen voor schrijvers van goniometrie-boekjes!), waarin de beschrijvende meetkunde nog werd gedoceerd in het bewustzijn dat dit vak werd gebruikt door architecten en ontwerpers, waarin logaritmen behandeld werden om hun praktisch nut.

Ik wil niet beweren dat deze onderwerpen me erg ter harte gaan, en deel met velen de erkenning dat de maatschappelijke waarde ervan is overgenomen door andere onderwerpen. De wiskundeleraar verheugt zich er natuurlijk in dat deze onderwerpen zijn verdwenen of tot een minimum zijn teruggebracht. Er zijn nl. zoveel andere onderwerpen die hem meer de gelegenheid geven zich in wiskundige elegantie en wiskundige strengheid te verlustigen, en die dichter staan bij de wiskunde die hij bij zijn opleiding heeft geleerd.

Op dit punt komen wij tot de kern van de zaak: Het blijkt dat nog steeds, of zelfs meer dan vroeger het geval was, de wiskundeprogramma's als uiterst ideaal hebben om de middelbare scholier op te leiden tot student in de wiskunde om daar via een zo zuiver mogelijke opleiding te worden gevormd tot leraar in de wiskunde, die vervolgens een nieuwe generatie van leerlingen op dezelfde wijze probeert te beïnvloeden. Hoewel wij juist in een tijdperk zijn aangekomen waarin de wiskunde grote maatschappelijke betekenis heeft gekregen en getreden is buiten de traditionele toepassingsgebieden, vinden wij dat niet weerspiegeld in de voorgestelde programma's.

Men krijgt de indruk dat de commissie niet of nauwelijks is beïnvloed door verlangens die in niet-wiskundige kringen leven. Ik kan mij ook niet herinneren dat de commissie zich om inlichtingen heeft gericht tot de instanties, die de afgeleverde leerlingen zullen gaan gebruiken of verder zullen gaan opleiden. Men had bijvoorbeeld kunnen denken aan industrielaboratoria en instellingen van hoger onderwijs (zonder beperking wat betreft afdeling of faculteit). Eén uitzondering wil ik maken op deze kritiek. De commissie heeft een ernstige poging gedaan om de a.s. volwassen wereldburger in aanraking te brengen met het begrip waarschijnlijkheid en met de statistische denkwereld, hoewel naar het mij voorkomt nog lang niet met het gewicht dat deze onderwerpen verdienen.

De enige verwijzing die men in de discussienota's kan vinden naar de computerrevolutie in onze maatschappij ligt in een klein hoekje bij de keuzeonderwerpen van Wiskunde-II bovenbouw V.W.O. Dat een dergelijk tekort bij een in 1966 of 1967 tot stand gekomen voorstel mogelijk is, moet voor buitenstaanders onbegrijpelijk zijn. Het betekent een duidelijk distantie nemen van de maatschappelijke betekenis van de wiskunde. Aangezien zulke programma's doorgaans een lang en taai leven leiden, dreigt door dit interimrapport de noodzakelijke en gewenste ontwikkeling voor lange tijd te worden tegengehouden. De commissie werd ingesteld in 1961, toen het computertijdperk reeds volop was aangebroken. Daar er geen sprake van kan zijn dat de commissie zich dit niet heeft gerealiseerd, moeten wij aannemen dat zij de verbinding tussen schoolwiskunde en computer bewust heeft willen afsnijden. Men kan argumenten bedenken die deze gewichtige beslissing van de commissie verdedigen, maar dat het interimrapport de schijn wekt dat deze kwestie geheel is genegeerd, stemt tot grote verwondering. Misschien is de verklaring gedeeltelijk te vinden in de samenstelling van de commissie, die bijna uitsluitend bestaat uit wiskunde-leraren, oud-wiskunde-leraren en opleiders van wiskunde-leraren, kortom uit deskundigen op het gebied van de bestaande situatie.

En wat komt er terecht van het bijbrengen van inzicht in de culturele betekenis van de wiskunde? Het interimrapport zegt niet wat daaronder te verstaan valt. Het komt mij voor dat deze culturele betekenis voor een deel kan liggen in de wisselwerking tussen dit vak met andere vakken, zowel in het heden als in het verleden. Ook zou het te maken kunnen hebben met de manier waarop die wiskundige denkwijze met stapjes en sprongen is ontstaan. Het kan iets te maken hebben met estetica. Maar zoals het thans in het interimrapport is vermeld, is het een lege zinswending.

MEDEDELING

In verband met het artikel van Prof. Dr. N. G. de Bruijn in dit nummer, deelt de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde mede:

1. In het cursusjaar 1967—1968 is door de Commissie een heroriënteringscursus gehouden, getiteld „*Computerwiskunde*". Aan deze cursus werd deelgenomen door ca. 600 leraren.

Docenten waren: Prof. Dr. A. van der Sluis, Prof. Dr. F. van der Blij, Prof. Dr. H. Freudenthal, Prof. Dr. E. W. Dijkstra, Prof. Dr. Ir. A. van Wijngaarden, Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Prof. Dr. Ir. A. I. v. d. Vooren, Dr. D. W. Smits, Prof. Dr. J. J. Seidel, Prof. Dr. G. W. Veltkamp, Prof. Dr. E. van Spiegel, Prof. Dr. E. J. Kruseman Aretz, Dr. Th. J. Dekker.

2. Door de Commissie is in oktober 1967 ingesteld een werkgroep, die zich zal uitspreken over de wenselijkheid en mogelijkheid

„Computerwiskunde” op de scholen in te voeren.

Leden van deze werkgroep zijn: Prof. Dr. J. J. Seidel, Prof. Dr. M. Euwe, Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Prof. Dr. A. van der Sluis, Prof. Dr. E. van Spiegel.

3. In het cursusjaar 1968—1969 zal vanwege de Commissie onder meer een heroriënteringscursus geörganiseerd worden onder de titel *„Computerwiskunde”*.

Docent op deze cursus zal zijn Prof. Dr. N. G. de Bruijn.

4. In het voorstel leerplan Rijksscholen, komt bij het onderdeel v.w.o. wiskunde I voor: „Een nog nader vast te stellen toepassing van de wiskunde”.

In de toelichting op dit leerplan staat te lezen:

„In het verplichte programma voor B-leerlingen en voor die A-leerlingen die wiskunde als examenvak kiezen is gezocht naar een leerstof die vooral bruikbaar zal zijn voor degenen die in hun universitaire opleiding wiskunde als hulpvak nodig zullen hebben, zoals bijvoorbeeld bij de propedeuse van medische, economische en psychologische studies. Daarom is dit programma gevuld met analyse. De behandeling van de goniometrische functies maakt deel uit van dit grotere geheel en moet niet als een afzonderlijk vak worden gezien.

Het getal e en de natuurlijke logaritme worden ingevoerd. Hierdoor is het toepassingsgebied van de analyse aanzienlijk uitgebreid, o.a. door de behandeling van eenvoudige differentiaalvergelijkingen. Naast de analyse is gezocht naar een ander nuttig onderwerp. Hierbij kan worden gedacht aan mathematische statistiek, maar bijvoorbeeld ook aan een vak dat kan worden aangeduid als computerwiskunde. Hierover kunnen experimenten worden ondernomen. Om op de ontwikkeling niet vooruit te lopen is de tekst van het leerplan op dit punt voorlopig nog vaag gehouden. Het ligt echter wel in de bedoeling tijdig duidelijke voorschriften te publiceren.”

In de toelichting op het programma Bovenbouw h.a.v.o. staat te lezen:

„Ook hier wordt door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde nog onderzocht of computerwiskunde naast of in plaats van de statistiek op het h.a.v.o. moet worden onderwezen.”

9e INTERNATIONALE WISKUNDE-OLYMPIADE

Het Joegoslavische wiskunde- en natuurkundetijdschrift voor leerlingen van middelbare scholen, *Matematičko Fizički List* (nummer 1 van de lopende, 18de jaargang) geeft een verslag over de negende internationale wiskunde-olympiade, die dit jaar in de Montenegrijnse stad Cetinju gehouden werd (5 en 6 juli 1967).

Er namen 13 ploegen deel, elk uit 8 jongelui bestaande (behalve de Franse ploeg van 5 en de Italiaanse van 6). Het maximale te behalen aantal punten was 7 per vraagstuk, zodat er per deelnemer 42 punten waren te verdienen en per ploeg een score van 336 bereikt kon worden.

Het ploegenresultaat was Rusland 275 punten, D.D.R. 257, Hongarije 251, Groot-Brittannië 231, Roemenië 214, Bulgarije en Tsjechoslowakije elk 159, Joegoslavië 136, Zweden 135, Italië 110, Polen 101, Mongolië 87, Frankrijk 41 (de Fransen arriveerden een dag te laat en hebben dus maar drie vraagstukken kunnen maken).

Eén Bulgaar, twee Oostduitsers en een Rus behaalden het maximale aantal van 42 punten, een Engelsman kwam tot 41, een Oostduitser en een Rus volgden daarop met 39, twee Hongaren en een Rus met 38.

Wij laten hieronder de opgaven volgen.

Opgave 1: Van het parallellogram $ABCD$ heeft de zijde AB de lengte a, de zijde AD de lengte 1 en de hoek DAB de grootte α. De driehoek ABD is scherphoekig. Om elk van de vier hoekpunten van het parallellogram wordt een cirkel beschreven met dat hoekpunt tot middelpunt en met een straal van de lengte 1. Bewijs dat die vier cirkels het parallellogram dan en slechts dan volledig bedekken, wanneer

$$a \leqq \cos\alpha + \sqrt{3} \,.\, \sin\alpha.$$

Opgave 2: Van een viervlak heeft één en slechts één ribbe een lengte groter dan 1. Bewijs dat de inhoud van dat viervlak ten hoogste gelijk is aan 1/8.

Opgave 3: Laat k, m, n natuurlijke getallen zijn, waarbij $m+k+1$ een priemgetal is dat groter is dan $n+1$. Onder c_s verstaan we het getal $s(s+1)$. Bewijs dat het produkt

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \ldots (c_{m+n} - c_k)$$

deelbaar is door het produkt $c_1c_2 \ldots c_n$.

Opgave 4: Er zijn twee scherphoekige driehoeken $A_0B_0C_0$ en $A'B'C'$ gegeven. Construeer een van de driehoeken ABC, die gelijkvormig zijn met driehoek $A'B'C'$ en beschreven zijn om driehoek $A_0B_0C_0$, zodat AB door C_0 gaat en BC door A_0 gaat en CA door B_0 gaat.

Construeer vervolgens van al die driehoeken ABC degene, die de grootste oppervlakte heeft.

Opgave 5: We beschouwen de rij, waarvan de n-de term t_n voor elke waarde van n gedefinieerd wordt door

$$t_n = a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n + a_5^n + a_6^n + a_7^n + a_8^n.$$

Hierin zijn $a_1, a_2, \ldots, a_8$ reële getallen, die niet allemaal gelijk zijn aan nul. Gegeven is dat er onder de termen van die rij oneindig veel zijn, die gelijk aan nul zijn. Bepaal van die termen de rangnummers.

Opgave 6: Op een sporttoernooi, dat n dagen duurt ($n > 1$) worden m medailles uitgereikt. Op de eerste dag wordt er 1 medaille uitgereikt plus een zevende deel van de resterende $m-1$ medailles. Op de tweede dag worden er twee medailles uitgereikt plus een zevende deel van de medailles die daarna nog overblijven, en zo verder. Tenslotte worden er op de laatste, n-de dag precies n medailles uitgereikt en daarmee zijn dan alle medailles op. Hoe groot zijn de getallen m en n?

BOEKBESPREKING

P. Jonckheere & A. Vanhoutte, *Beginselen van Wiskundige Statistiek, Op Middelhoog Niveau*, Standaard Wetenschappelijke Uitgeverij, Antwerpen enz., 1966, VI+388 blz., F 320.

De meest opvallende woorden uit de titel zijn: „Op Middelhoog Niveau". Als men van het werk kennis neemt, bemerkt men, dat deze woorden betekenen:

a. het boek is niet bestemd voor diegenen, die een eerste kennismaking met de statistiek wensen,

b. een theoretische fundering van het vak, die ook maar enigermate scherp is, treft men in het boek niet aan.

Men maakt kennis met een groot aantal begrippen, groter dan in de meeste inleidingen in de statistiek. Uitvoerig worden verschillende waarschijnlijkheidsverdelingen behandeld en hun eigenschappen opgespoord, soms echter zonder dat men enig inzicht krijgt in de reden, waarom ze van belang zijn. Ook aan de statistische problemen (schatters, toetsing van een hypothese) is veel aandacht besteed. Men krijgt echter de indruk, dat het boek vooral van belang is voor degene, die het als naslagwerk wil gebruiken. Voor wie het vak eruit leren wil, is de behandeling nogal droog.

P. G. J. Vredenduin

KORREL CXLI

Een eigenschap van een rekenkundige rij

Guus Jan Westra, leerling van het Lorentz-Lyceum te Eindhoven en één der winnaars van de wiskunde-olympiade, kwam bij mij met het volgende vermoeden. Bij de termen van een rekenkundige rij van gehele getallen, met verschil een oneven getal, komen er oneindig veel voor die te schrijven zijn als de som van twee kwadraten. Dit vermoeden bleek onjuist voor een willekeurig oneven getal, maar juist voor een oneven priemgetal. Immers $9k + 3 = x^2 + y^2$ kan nooit. Stel nu: $x^2 + y^2 = kp + a$; p is een oneven priemgetal.

Als nu a een kwadraatrest is modulo p (dat betekent dat er een getal x is zodanig, dat $x^2 = a + p$-voud), zijn we klaar; we stellen $y = 0$; $(x + np)^2 + 0^2 = x^2 + 2nxp + n^2p^2 = a + p$-voud.

We nemen nu aan dat a geen kwadraatrest is, zodat we moeten aantonen dat er bij ieder zodanig getal a een x en een y te vinden zijn, zodat $x^2 + y^2 \equiv a \pmod{p}$.

Stel $y \equiv bx \pmod{p}$; b is niet deelbaar door p ondersteld. Dan moet $x^2(1 + b^2) \equiv a \pmod{p}$.

Kiezen we b nu zó, dat $b^2 + 1$ geen kwadraatrest is mod p, dan staat in het linkerlid het produkt van een kwadraatrest en een niet-rest; dus is het linkerlid een niet-rest [1]). Laten we nu x de getallen $1, 2, 3, \ldots, p - 1$ doorlopen, dan ontstaan $\frac{1}{2}(p - 1)$ verschillende niet-resten, zoals als volgt blijkt: $x_1^2(1 + b^2) \equiv x_2^2(1 + b^2) \pmod{p}$ geeft $x_1 \equiv x_2$ of $x_1 \equiv -x_2$. We krijgen dus *alle* $\frac{1}{2}(p - 1)$ niet-resten mod p. Hiermee zijn we klaar. Stel nl. dat we een x_0 en een y_0 gevonden hebben met $x_0^2 + y_0^2 \equiv a \pmod{p}$, dan schrijven we: $(x_0 + np)^2 + (y_0 + mp)^2 = a + p$-voud.

Eindhoven — P. Bronkhorst

[1]) Zie b.v. Euclides 42, blz. 13.

UIT HET EXAMENVERSLAG 1967 VAN HET STAATSEXAMEN GYMNASIUM

Voor het onderdeel algebra (in enkele gevallen aangevuld met geschiedenis van de wiskunde of statistiek) behaalden de A-kandidaten gemiddeld 6,0 (v.j. 5,1); voor het onderdeel meetkunde (planimetrie of stereometrie) eveneens 6,0 (v.j. 5,3).

Het doet de subcommissie genoegen, dat er dit jaar weinig A-kandidaten slecht voorbereid op het examen kwamen.

Evenals vorig jaar wijst de subcommissie er op dat ook de aan de vierkantsvergelijkingen voorafgaande hoofdstukken van de algebra tot de examenstof behoren. Voor een opsomming van belangrijke onderwerpen uit dit gedeelte van de algebra verwijst de subcommissie naar de verslagen van vorige examens.

De kandidaten moeten het extremum van een kwadratische functie kunnen bepalen door middel van het afsplitsen van een kwadraat. Met het klakkeloos toepassen van een formule voor de uiterste waarde kan de subcommissie geen genoegen nemen.

De kandidaten die met behulp van de differentiaalrekening de extreme waarden van een functie willen bepalen, wordt aangeraden daarbij geen gebruik te maken van de tweede afgeleide, maar te letten op het tekenverloop van de eerste afgeleide.

Op grond van de ervaringen met de kandidaten die als keuzeonderwerp voor de algebra opgaven: ,,enkele hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde", meent de subcommissie er op te moeten wijzen dat de omschrijving van dit onderwerp niet luidt: ,,enkele hoofdstukken uit *een boek over* de geschiedenis van de wiskunde". Grondige bestudering van deze stof is beslist nodig en vergt wellicht nog meer tijd dan de bestudering van andere keuzeonderwerpen eist.

De kennis van de goniometrie liet helaas bij vele A-kandidaten te wensen over. Herhaaldelijk bleek dat zij de sinusregel niet kennen. Voor de straal van de omgeschreven cirkel van een driehoek moeten de kandidaten de formule

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

kennen. De formule

$$R = \frac{abc}{4\sigma}$$

is in vele gevallen onbruikbaar; het heeft geen zin deze formule te leren.

Bij de B-kandidaten was het gemiddelde cijfer voor de algebra 6,1 (v.j. 5,7); voor de stereometrie 6,0 (v.j. 5,9) en voor de goniometrie en analytische meetkunde 5,8 (v.j. 5,4).

Bij het schriftelijk examen in de algebra bleek dat ook sommige B-kandidaten de aard van de extreme waarden met behulp van de tweede afgeleide vaststelden, inplaats van daarbij te letten op het tekenverloop van de eerste afgeleide. Velen zagen over het hoofd dat het niet-absoluut zijn van het extreem afzonderlijk moest worden bewezen.

Bij het mondeling examen in de stereometrie constateerde de subcommissie vaak dat de kandidaten onvoldoende inzicht hadden in de wijze waarop een stereometrische figuur ontstaat. De kandidaten behoren te weten dat de projectie van het midden van een lijnstuk het midden is van de projectie van dat lijnstuk; dat de projectie van een rechte hoek niet altijd een rechte hoek is, enz.

Bij de analytische meetkunde bleken vele kandidaten de definitie van gelijkvormige figuren niet (meer) te kennen. Het bewijs van de stelling dat alle parabolen gelijkvormig zijn, konden deze kandidaten dan ook niet leveren.

Tenslotte wijst de subcommissie er op dat het berekenen van de extreme waarden van de functie

$$a \sin x + b \cos x$$

niet noodzakelijk met behulp van de differentiaalrekening behoeft te geschieden. De herleiding $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \sin (x+\varphi)$ voert eenvoudiger tot het gewenste resultaat.

COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

„Bij het sekretariaat van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Budapestlaan Utrecht (telefoon 030 511411), zijn zolang de voorraad strekt, de volgende werken gratis verkrijgbaar:

1. New Thinking on School Mathematics; een verslag van een internationale conferentie in Royaumont, 1959, over modernisering van het wiskundeonderwijs. (uitgegeven door de O.E.E.C.)

2. Synopsis for modern secondary school mathematics; een verslag van een conferentie in Joegoslavië waar de resultaten van de bijeenkomst in Royaumont nader werden uitgewerkt tot aanbevelingen voor het leerplan. (uitgegeven door de O.E.E.C.)

3. Internationaal Mathematisch Congres te Stockholm, 1962 Verslag van voordrachten in sectie VIII (education) (overdruk Euclides).

4. Brandenburg, Meetkunde met vectoren voor U.l.o.-leraren; verslag van een cursus in Groningen met de tekst ervan.

5. Van Rootselaar en Vredenduin: The use of the axiomatic Method in Secondary School Teaching.

6. Topologie, cursus voor wiskundeleraren, 1964.

7. Groepentheoretische aspecten van de elementaire meetkunde, (cursus voor wiskundeleraren 1966—1967).

9. Interimrapport met discussienota van de C.M.L.W.

Tegen betaling van kostprijs zijn verder verkrijgbaar:

10. Kuijpers e.a.: Proeve van een gemoderniseerde Meetkunde I (brugklasse) ad f 4,40.

11. Maassen, Kindt: Proeve van een gemoderniseerde algebra deel I (brugklasse) ad f 2,50.

BOEKBESPREKING

V. E. Howes, *Pre-calculus Mathematics*, John Wiley and Sons, London 1967, 3 delen, 1800 blz., 38/- per deel.

Met belangstelling heb ik kennis genomen van deze geprogrammeerde cursus, die de elementaire algebra op moderne wijze, én in definities én in notaties, behandelt.

De theorie van relaties en functies steunt dan ook op die van de verzamelingen, waaraan in deel I een 140 blz. gewijd is. Successievelijk komen aan bod: de natuurlijke getallen N, $(N; 0) : N^*$, de gehele getallen I, de rationale getallen R, de reële getallen R^* en de complexe getallen C. Daarna worden veeltermen gedefinieerd over elk van deze verzamelingen. Bij het oplossen van stelsels vergelijkingen wordt geautomatiseerd m.b.v. van determinanten en komen matrices om de hoek kijken.

Boek II is hoofdzakelijk gewijd aan relaties en functies, terwijl Boek III de gonio- en trigonometrie omvat. De handleiding is met zorg samengesteld en kan zeker ouders aanbevolen worden, die wel eens klagen, dat ze hun kinderen niet meer bij hun wiskundestudie kunnen begeleiden.

Het komt me voor, dat ze het wel een groot financieel offer zullen vinden, als ze voor de wiskundeboeken van hun pupillen ruim *f* 50,— op tafel moeten leggen. Deze pupillen mogen dan hun boeken wel met grote zorg behandelen, want het formaat van elk deel zal stellig meewerken het boek spoedig losbandig te maken, wat bij losbandige leerlingen dan een dubbele ramp is.

Burgers

Franz von Kutschera, *Elementare Logik*, Springer Verlag, Wien - New York, 1967, VIII + 392 blz.

Hoofdschotel van dit boek vormt de behandeling van de uitsprakenrekening (Aussagenkalkül) en van de predikatenrekening van de eerste orde. Korte beschouwingen worden gewijd aan de predikatenrekening van de tweede orde (waarin behalve objectvariabelen ook predikatenvariabelen gebonden voorkomen) en aan enkele verspreide onderwerpen.

De behandeling van de uitsprakenrekening en van de beide predikatenrekeningen wordt gevolgd door een uitvoerige analyse van deze systemen, waarin gebruik gemaakt wordt van geschikt gekozen interpretaties, dus van (wetenschappelijke) semantiek. Verder wordt de behandeling voorafgegaan door een voorwetenschappelijke semantiek (naïeve betekenisleer), die dient om de gekozen axioma's begrijpelijk en aanvaardbaar te maken.

Naast vele goede kwaliteiten heeft dit boek helaas het nadeel van formuleringen, die niet geheel scherp of niet geheel correct zijn.

Enkele voorbeelden. Op p. 14 zegt de auteur

Ein Satz ist ein sprachlicher Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist.

En op p. 76

Jede Satzvariabele von $\mathfrak{A}$ ist ein (Atom-)Satz von $\mathfrak{A}$. ($\mathfrak{A}$ is de Aussagenkalkül.)

Op p. 103 staat, dat alle ware Sätze uit $\mathfrak{A}$ bewijsbaar zijn. Nu zou, als we al deze uitspraken combineren, p (Atomsatz, die uit een Satzvariabele bestaat) of $\neg p$ bewijsbaar zijn, en dit is niet juist. Oorzaak van deze tegenstrijdigheid is de wisselende betekenis van het woord „waar". Als de auteur hierop niet expliciet wijst, wordt de leesbaarheid van zijn boek niet bevorderd.

Op p. 13 expliceert de auteur het quotatieteken aan de hand van het voorbeeld: „München" ist ein zweisilbiges Wort. Vaak wordt het teken echter op onjuiste wijze gebruikt. B.v. op p. 42 in

„Primzahl" = „Zahl, die nicht durch eine von 1 verschiedene kleinere Zahl ohne Rest teilbar ist".

Het meest storend is het foutieve gebruik ervan in K(„*p*", „*q*") = „*pq*".

Hierin betekent K(A, B) het resultaat, dat men krijgt door de symbolen of symboolcombinaties A en B achter elkaar te zetten. Eén van tweeën: of „*p*" en „*q*" behoren niet tot de verzamelingen van originele paren van K en dan staat er onzin, òf ze behoren er wel toe en dan is het resultaat „*p*" „*q*".

Op p. 113 wil de auteur uit onvolledig gedefinieerde predikaten volledig gedefinieerde maken door uitdrukkingen als „17 rookt" tot foute Sätze te verklaren. Maar ook „rookt niet" is een predikaat en „17 rookt niet" wordt dan ook een foute Satz, met alle nare gevolgen van dien.

De definitie van de waarheidsfunctie op p. 30 is niet in overeenstemming met het gebruik ervan. De formulering van de conditie c1 op p.138 is niet correct. In axioma A9 op p.284 is onvoldoende gelet op de mogelijkheid, dat $x_1, \ldots, x_n$ reeds gebonden zijn in B.

Ook de helderheid van het betoog laat nogal eens te wensen over. De behandeling van de predikatenrekening in de vorm $\mathfrak{P}2$ is onoverzichtelijk. En ten slotte, en laat dit een troost voor de auteur zijn, de recensent is er niet in geslaagd de functie van de kwantor π (p. 278) te doorgronden. Hij vermoedt, dat de functie overeenkomt met die van λ op p. 303.

Al met al een boek, waarin weliswaar veel wetenswaardigs staat, maar dat men niet moet gaan lezen om in het vak ingeleid te worden.

P. G. J. Vredenduin

M. E. Kok en J. H. Slump, *Algebra voor de bovenbouw havo*, J. B. Wolters, Groningen, prijs f 6,50.

Kok en Slump hebben voor de bovenbouw een algebraboek geschreven, dat het wel zal gaan doen; het doorlezende, komt men tot de conclusie, dat het voor VHMO ook wel bruikbaar zou zijn, al zou dan de integraalrekening moeten worden toegevoegd. Het is op de techniek afgestemd; veel sommen, veel uitgewerkte voorbeelden; wat mij betreft kan er wel wat van af en lijken de voorbeelden nogal eens op elkaar. Er wordt veel aan de bekende functies gedaan en dat gebeurt helder en overzichtelijk. Opvallend is de aandacht voor limieten van goniometrische functies. Aan „saaie" theorie doet men niet zo veel, men „bewijst" het wel aan voorbeelden. Daarmee ga ik graag akkoord. Tenslotte een paar opmerkingen:

1. Het begint met een voortreffelijk hoofdstuk „verzamelingen". De verwachtingen zijn hoog gespannen t.a.v. het gebruik daarvan in de volgende hoofdstukken. Dat gebruik is nergens te constateren; het hoofdstuk staat op zichzelf. Ik vrees daarvoor al. Wat wil men nu eigenlijk bij de vernieuwingen in onze wiskunde: verzamelingen als doel óf als middel? Naar mijn mening hebben ze weinig zin als ze nergens gebruikt worden; venn-diagrammen mogen als fröbelmateriaal gepast zijn, doel kan ik er niet in waarderen.
2. De redactie is niet overal correct.

   „Het linkerlid en het rechterlid van een ongelijkheid mag men met hetzelfde getal vermeerderen". Inderdaad zal het Wetboek van Strafrecht er zich niet tegen verzetten. Maar zou een formulering met behulp van het begrip gelijkwaardigheid van ongelijkheden niet meer voor de hand liggen? Men kan er zelfs de verzamelingen bijhalen!

„Als men het linkerlid en het rechterlid van een ongelijkheid met een negatief getal vermenigvuldigt, verandert het ongelijkheidsteken". Ik zeg dan altijd tegen een leerling: „waarin verandert dat ongelijkheidsteken? In een vraagteken of in een uitroepteken?"

3. De behandeling der extrema met differentiaalrekening is goed; duidelijk komt tot uitdrukking $f'(x) = 0$ *niet voldoende is*. Dat $f'(x) = 0$ ook *niet nodig is*, bood mij nieuwe perspectieven. De auteurs bepalen bijv. het minimum van $f(x) = |x - 1|$ ook met behulp van de tekenwisseling van $f'(x)$ bij $x=1$. Men kan daartegen weinig inbrengen, al is het wat zwaar op de hand. Of het gebruikte kunstje altijd opgaat, durf ik niet zeggen.
4. De uitgave is niet bijzonder fraai; grauwig papier; cursief gedrukte zinnen springen niet naar voren; het kaft zal niet lang houden. Kennelijk heeft men geprobeerd de prijs te drukken — een prijzenswaardig streven. Helemaal gelukt is dat niet. De figuren zijn goed.

Als bewijs van eerlijke belangstelling, geef ik een drukfout onderaan op pag. 56; als $f(x) = 3x^4$ is $f'(x) = 4x^3$. Bedoeld zal zijn $f(x) = x^4$. Verder vond ik geen drukfouten en las ik het boek met genoegen. Ondanks mijn opmerkingen zou ik het er met dit boekje best op willen wagen.

Groenman

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

196. Zo men weet, geldt niet voor elke a en b, dat $a^b = b^a$. Natuurlijk is dit wel het geval, als $a = b$. En ook is b.v. $2^4 = 4^2$. Zijn er nog andere paren natuurlijke getallen, waarvoor $a^b = b^a$? En andere paren positieve rationale getallen?

197. Van vijf munten hebben vier hetzelfde gewicht en de vijfde een afwijkend gewicht. Gevraagd de gewichten van de vijf munten te bepalen zonder een weging uit te voeren.

Omdat de opgave zo uitzonderlijk moeilijk is, willen we ditmaal breken met de traditie de oplossing eerst in het volgende nummer te publiceren. Hier volgt ze dus.

Noem de gewichten x, y, z, u en v. Dan is

$$(x - y)(z - u) = 0 \tag{1}$$
$$(x - y)(z - v) = 0. \tag{2}$$

Verder is

$$(x - z)(y - u) = 0. \tag{3}$$

Nu wordt het echter tijd ons erop te bezinnen, of deze vergelijking misschien afhankelijk van de beide vorige is. Onderstel, dat $x = y$, $x \neq z$ en $y \neq u$, dan is aan (1) en (2) voldaan, echter niet aan (3). En dus is (3) onafhankelijk van (1) en (2). Als vierde vergelijking kiezen we

$$(y - z)(u - v) = 0, \tag{4}$$

die van (1) — (3) onafhankelijk blijkt door te kiezen $x = y = u$, $y \neq z$ en $u \neq v$. En ten slotte is nog

$$(x - u)(z - v) = 0. \tag{5}$$

Deze vergelijking is onafhankelijk van (1) — (4), hetgeen we zien door te kiezen $x = y = z$, $x \neq u$ en $z \neq v$.

We hebben dus vijf onafhankelijke vergelijkingen met vijf onbekenden. Het zal u nu zonder moeite lukken deze onbekenden te vinden.

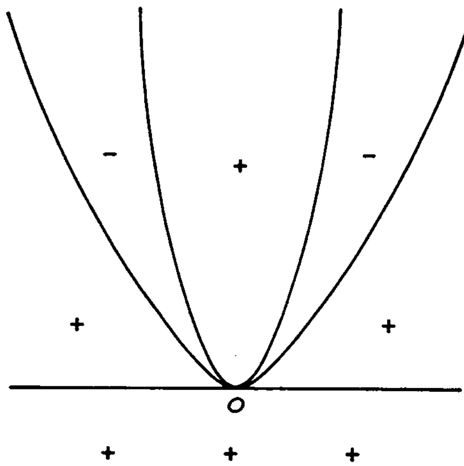
OPLOSSINGEN

194. Enige kinderen hebben elk één bal. Ze staan op onderling alle verschillende afstanden. Elk gooit zijn bal naar het dichtstbijstaande kind. Is het mogelijk, dat een kind vier, zes, nul ballen toegegooid krijgt?

Onderstel, dat A en B beide hun bal naar P gooien. Dan is $AP < AB$ en $BP < AB$. Dus is $\angle APB > 60°$. Hieruit volgt, dat geen enkel kind meer dan vijf ballen kan krijgen. Er moet bij zes dus fraude gepleegd zijn.

Nul kan wel. Groepeer maar zeven kinderen in de hoekpunten van een regelmatige zevenhoek, in welks midden P staat. Maak nu door zeer kleine verschuivingen de onderlinge afstanden ongelijk. Je ziet dan, dat geen enkel kind zijn bal naar P zal werpen.

195. $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ heeft op elke lijn door de oorsprong een minimum in de oorsprong. Heeft de functie in de oorsprong een minimum?



In de figuur zijn de grafieken getekend van $y - x^2 = 0$ en van $y - 3x^2 = 0$. Het teken van $f(x, y)$ is in de figuur aangegeven. Men ziet hieruit:

1°. Op elke lijn door de oorsprong is er een omgeving van O, waarin de functie buiten O positief is; op deze lijn heeft de functie dus een minimum in O.

2°. In elke tweedimensionale omgeving van O bevinden zich punten, waar $f(x,y)$ negatief is. De functie heeft dus geen minimum in O.