

# EUCLIDES

MAANDBLAD  
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN  
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL  
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN  
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

VII — 1 APRIL 1968

## INHOUD

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Dr. Ir. J. S. Folkers: Het lesrooster als beslissings-<br>probleem . . . . .           | 209 |
| Openingsrede tot de algemene vergadering van Wime-<br>cos door de voorzitter . . . . . | 225 |
| Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden . . . . .                                       | 229 |
| Kalender . . . . .                                                                     | 231 |
| De Wimecos-leesportefeuille . . . . .                                                  | 232 |
| Zeventiende congres van leraren in de wiskunde en de<br>natuurwetenschappen . . . . .  | 234 |
| Boekbespreking . . . . .                                                               | 236 |
| Recreatie. . . . .                                                                     | 239 |

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

---

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127, voorzitter;  
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516, secretaris;

Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;

Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;

Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;

Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;

Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;

Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;

Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;

E. H. SCHMIDT, Amstelveen;

Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;

Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;

Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron. Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage; P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van *Wimecos*, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van *Liwenagel* te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB). *Boeken ter bespreking* en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

*Artikelen ter opname* aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

*Opgaven voor de „kalender”* in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

---

# HET LESROOSTER ALS BESLISSINGSPROBLEEM <sup>1)</sup>

door

dr. ir. J. S. FOLKERS

(T. H. Delft, leerstoel Operationele Analyse)

## 1 *beslissingsproblemen*

De term „beslissingsprobleem” veronderstelt een vraagstuk met betrekking tot een bepaalde activiteit, die op verschillende wijzen kan worden uitgevoerd. De beslissing is dan het eigenlijke probleem: de keuze van de *optimale* uitvoeringsvorm, op grond van een in de probleemstelling opgenomen *criterium*. Daartoe dient de eigenschap, waarop dat criterium betrekking heeft, voor elk van de alternatieven bepaald te kunnen worden; fundamenteel is daarbij ook de vraag, of alle mogelijke alternatieven worden gepresenteerd. Daarom gaat aan de toepassing van het criterium de bepaling van die mogelijke uitvoeringsvormen vooraf: „mogelijk” hier in de letterlijke zin, dat aan alle *nevenvoorwaarden* van de probleemstelling voldaan moet zijn.

Deze beslissingsproblemen onderscheiden zich duidelijk van die vraagstukken, die slechts één oplossing toelaten, en waarbij het meestal de natuur is, die de betreffende activiteit voor haar rekening neemt. De oplossing van dergelijke vraagstukken, uit het gebied van de mathematische fysica, is gedetermineerd door de wetten die voor het betrokken gebied van de natuurkunde gelden. Deze natuurwetten zijn niet anders dan door de mens verzonnen omschrijvingen van het onveranderlijke natuurgebeuren. De natuur zelf kent die wetten niet, en behoeft dus evenmin een beslissing te nemen, om een natuurlijk proces zus of zo te laten verlopen, of de een of andere spanningstoestand in een kunstmatige constructie te bereiken. Dat neemt niet weg, dat bij sommige probleemstellingen in dit vlak het natuurgebeuren wordt beschreven als de optimale uitvoeringsvorm, binnen strikte nevenvoorwaarden, met betrekking tot een zeker criterium, zoals bijvoorbeeld met behulp van de principes van Maupertuis en Hamilton.

---

<sup>1)</sup> Voordracht, gehouden in het kader van de Vakantiecursus 1967: „Besliskunde”, van het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

In tegenstelling tot dergelijke natuurlijke processen betreft de categorie van beslissingsproblemen menselijke bezigheden; het gaat daarbij om de organisatie van kunstmatige processen, die zeer gedeeltelijk of in het geheel niet door eenvoudige wetten worden beheerst. Daarbij is dus de vrijheid aanwezig, om zulk een bezigheid op soms vele verschillende manieren aan te pakken. Als schaduwzijde van die vrijheid ontbreekt echter tevens de feilloze zekerheid van het natuurlijke proces, en dit brengt de noodzaak met zich van een verantwoorde keuze, van een beslissing of reeks van beslissingen.

Een dergelijke beslissingsnood ervaart de menselijke samensteller van een lesrooster. Zijn taak bestaat uit de toewijzing van een *tijds-eenheid* en een *plaats* aan elke *les*, te definiëren als de bijeenkomst van een *docent* en een of meer *groepen* van leerlingen, gewijd aan een bepaald *vak*. Er dient een groot aantal van deze lessen, zoals aangegeven in het leerplan, over de cyclus van lesuren te worden verdeeld; gegeven de beschikbare accommodatie, en wel zodanig, dat er aan velerlei eisen en wensen van organisatorische, didactische en individuele aard wordt voldaan. Deze eisen en wensen kunnen worden opgevat als de nevenvoorwaarden van het lesroosterprobleem.

De samenstelling van een lesrooster vormt een reeks van opeenvolgende beslissingen; het geheel kan beschouwd worden als een spel, waarbij elke zet bestaat uit de keuze van een uur en een lokaal voor een bepaalde les. De vele nevenvoorwaarden vormen de regels van het spel; binnen deze spelregels is er een zekere vrijheid ten aanzien van de keuze van de volgende zet. Er moet dus naast de spelregels een zekere speltactiek zijn, die de opeenvolging van de zetten bepaalt; het is daarbij ondenkbaar, dat de gevolgen van alle mogelijke zetten worden overzien, bij elke gegeven stand van het spel. Het ligt voor de hand, in het kader van het beslissingsprobleem te vragen of, en zo ja, op welke wijze deze speltactiek op een beslissingscriterium is gebaseerd; en vervolgens, of het lesroosterprobleem geformuleerd kan worden in de zin van optimalisering onder nevenvoorwaarden.

## 2 oplossing „at random”?

Een beslissingsprobleem wordt in principe gekenmerkt door een groot aantal mogelijke oplossingen, die aan de nevenvoorwaarden voldoen, doch uiteraard lang niet alle optimaal zullen zijn ten opzichte van het gestelde criterium. In eerste instantie is het niet duidelijk, wat er onder een optimaal lesrooster moet worden ver-

staan. Zou het probleem als zodanig een groot aantal oplossingen bezitten, dan ligt het voor de hand, de beslissingen omtrent de opeenvolgende toewijzing van lesuren zo eenvoudig mogelijk te realiseren.

Wat is er dan op tegen om bij elke zet een willekeurig, nog onbezet uur voor een willekeurige, nog niet geplaatste les te kiezen? Zou die toewijzing in strijd zijn met de een of andere nevenvoorwaarde, dan kan opnieuw geloot worden. Een dergelijke methode, om „at random” een oplossing van het probleem te construeren, leent zich bovendien bijzonder goed voor toepassing van de elektronische rekenmachine. Er zijn al heel wat problemen op deze wijze opgelost, waarvan de structuur te gecompliceerd was voor een meer wiskundige benadering. Toch is er in de overvloed van publikaties omtrent pogingen tot automatisering van de constructie van lesroosters geen enkele toepassing van dit principe te vinden. Een proeve van verklaring daarvan is te vinden in de vergelijking van de volgende *gestileerde* roosterproblemen.

Beschouw een school met  $m$  docenten, elk met  $m$  verschillende vakken. Er zijn  $m$  klassen, elk met een eigen lokaal, en  $m$  schooluren; het lesrooster omvat dus in dit geval  $m^2$  lessen. De leraren zijn ondeelbaar, en staan evenmin tegelijkertijd voor eenzelfde klas; verder zijn er geen nevenvoorwaarden, met uitzondering van een leerplan:

- a) het leerplan van een lagere school: elke klas heeft zijn eigen docent. Worden diens *vakken* genummerd, dan bestaat het rooster uit  $m$  willekeurige permutaties van de getallen  $1, \dots, m$ ; er zijn dus  $(m!)^m$  oplossingen, voor  $m = 7$ : ca.  $10^{26}$ . Alle oplossingen voldoen aan de nevenvoorwaarden; de kans op een „mogelijke” oplossing bij constructie „at random” is gelijk aan 1.
- b) het leerplan van een middelbare school: elke klas heeft juist één uur les van elke docent. Worden nu de *docenten* genummerd, dan zijn er weer  $(m!)^m$  combinaties. Hiervan voldoen echter alleen dié aan de nevenvoorwaarden, waarvan de permutaties een Latijns vierkant vormen: in elke rij en elke kolom moet elk getal  $1, \dots, m$  juist eenmaal voorkomen. Voor  $m = 7$  bestaan er nu slechts ca.  $10^{14}$  „mogelijke” oplossingen; de kans daarop bij constructie „at random” is dus  $10^{-12}$ . Een snelle rekenmachine zou per sec. 1000 combinaties kunnen onderzoeken, en er dan gemiddeld een eeuw voor nodig hebben om één „mogelijke” oplossing te vinden. Let wel: er is inderdaad een groot aantal oplossingen, doch de methode schiet volledig te kort om er ook

maar één te construeren. Uit dit voorbeeld blijkt ook de zinloosheid van een volledig enumeratieve methode, dwz. van een procedure die alle „mogelijke” combinaties zou produceren, om dan daarop het eventuele optimaliseringscriterium toe te passen!

### 3 *heuristisch programmeren*

Het blijkt dus noodzakelijk om bij de opeenvolgende beslissingen van het roosterspel op een meer selectieve wijze te werk te gaan; in eerste instantie schijnen er voor dit probleem echter geen beslissingsregels te bestaan! Vooral bij de eerste opzet van het rooster ondergaat de samensteller een soort „horror vacui”: ondanks de grote vrijheid bij de eerste toewijzingen is hij bevreesd voor de hem onbekende gevolgen daarvan voor latere plaatsingen. Zijn eerste (en ook latere) zetten kunnen hem naderhand duur komen te staan, en zelfs de voltooiing van een bruikbaar rooster onmogelijk maken. Naarmate het aantal geplaatste lessen toeneemt, schijnen de beslissingen eenvoudiger te worden, doordat het aantal keuzemogelijkheden afneemt. In feite worden echter alleen de oorspronkelijke nevenvoorwaarden steeds méér expliciet, en dit schijnt de keuze in deze fase te verlichten. Maar op een gegeven moment wordt een spelstand bereikt, waarop een bepaalde les niet meer geplaatst kan worden. Dan treedt de marteling in een volgende fase: er moeten toewijzingen ongedaan worden gemaakt, om hoe dan ook verder te kunnen spelen. Ook bij dit afbreken van het tot dusver bereikte resultaat is er weer een zeer grote vrijheid, met onbekende consequenties van daarbij te nemen beslissingen!

Wat is nu de speltactiek van de geoefende rooster-samensteller, die hem aan het begin de pleinvrees ontnemt, en hem verder vrijwaart van een eindeloos toegepaste „trial-and-error”? Blijkbaar komt daarbij heel wat intuïtie, ervaring en ook combinatie-vermogen te pas; maar is er niet een meer concrete beslissingsregel aan te geven?

Uit praktische ervaring blijkt, dat bijna altijd de weg van de *meeste* weerstand wordt gekozen: bij de volgende zet wordt de meest urgente les toegewezen, dwz. de les, die in dat stadium van het spel het meest gevaar loopt, naderhand niet meer geplaatst te kunnen worden. De eenvoudigste tactiek is wel die, waarbij voorafgaand aan het spel, de lessen in een „statische” urgentie-volgorde worden geplaatst. Een meer verfijnde tactiek bepaalt tijdens het spel een „dynamische” volgorde, afhankelijk van een *evaluatie* van de spelsituatie na elke zet. Dit vergt dus de vaststelling van de momentane

urgentie van de nog niet geplaatste lessen. Deze evaluatie is meestal meer gegrond op intuïtie en ervaring, dan op combinatorisch inzicht in de consequenties van een bepaalde zet. De geschetste methode is dan ook in hoge mate *heuristisch* van karakter.

Het beslissingsprincipe van de meeste weerstand, veelvuldig waargenomen als praktische regel voor de samenstelling van lesroosters met de hand, ligt ook ten grondslag aan vrijwel alle methoden, die voor automatische constructie zijn voorgesteld, en met meer of minder succes zijn beproefd. Dit principe vertoont enige overeenkomst met de basisgedachte van het *dynamisch programmeren*. Daarbij wordt immers beoogd, bij elke stap een zodanige beslissing te nemen, dat daardoor de optimaliteit van de volgende beslissing(en) zoveel mogelijk wordt gediend. Bij de toepassing van dynamisch programmeren wordt echter gebruik gemaakt van wiskundige hulpmiddelen, waarmee de opeenvolgende beslissingen worden „berekend”; bij het lesroosterprobleem betreft het daarentegen vrij primitieve kwantitatieve benaderingen van heuristische aard.

#### 4 de existentie van oplossingen

Ondanks de toepassing van het geschetste principe loopt het spel zowel met de hand als met de machine in de meeste gevallen vast. Er is dan geen volgende zet mogelijk binnen de gegeven spelregels, terwijl het lesrooster nog niet is voltooid. Zoals reeds aangeduid, kan dan door verwisseling van toewijzingen worden getracht, het spel weer op gang te brengen; ook deze procedure is in sommige lesroosterprogramma's opgenomen. Nochtans is het dikwijls voor het bereiken van een volledig rooster noodzakelijk, af te wijken van bepaalde nevenvoorwaarden, of deze zelfs geheel te negeren. Dat deze gang van zaken bij manuele samenstelling meer regel dan uitzondering is zullen velen uit eigen ervaring kunnen beamen. In feite betekent dit, dat het probleem tijdens de oplossing vele malen „ad hoc” wordt gewijzigd en aldus aangepast aan de schijnbaar beperkte mogelijkheden, om hoe dan ook een resultaat te verkrijgen.

Dit lijkt in grove tegenspraak met het algemene uitgangspunt, dat de klasse van beslissingsproblemen gekenmerkt wordt door de existentie van méér dan één, dan wel zelfs véle oplossingen. Er treedt hier een fundamenteel aspect van het lesroosterprobleem aan het licht:

het staat bij een willekeurig probleem, met gegeven leerplan, staf, aantal klassen, accommodatie en schooltijden geenszins vast, of er hoe dan ook een lesrooster bestaat, dat aan alle gestelde didactische en organisatorische eisen, en tevens aan alle wensen van

de docenten voldoet! - anderzijds dringt het vermoeden zich op, dat indien er een dergelijk rooster mogelijk is, er dan zeker wel een aantal alternatieven bestaat, waarvoor dat eveneens geldt (zoals ook geïllustreerd aan het gestileerde voorbeeld).

Het onderzoek naar de existentie van oplossingen van het les-roosterprobleem is uitgangspunt van de methode van GOTLIEB. Ter inleiding daarvan een zeer globale schets van de structuur van het probleem, die ook naderhand nog van nut zal blijken te zijn. Het probleem is af te beelden op een 5-dimensionaal „rooster”, als ook de vakken als onafhankelijke elementen worden beschouwd, hetgeen inderdaad dikwijls noodzakelijk is. Gotlieb brengt hierop een vereenvoudiging aan door vakken en lokalen als zodanig buiten beschouwing te laten. Elk roosterpunt van de „kubus”, die zo ontstaat, correspondeert met een uur  $h$ , een docent  $i$ , en een klas  $j$ . Aan elk zodanig punt wordt een tweewaardige variable  $x_{hij}$  toegevoegd;  $x_{hij} = 1$  betekent, dat de betreffende bijeenkomst is gepland,  $x_{hij} = 0$ , dat dit niet het geval is. Nu kunnen een aantal primaire nevenvoorwaarden worden geformuleerd:

- elke docent geeft hoogstens één les per uur:  $\sum_j x_{hij} \leq 1, \forall h, \forall i;$
- elke klas volgt hoogstens één les per uur:  $\sum_i x_{hij} \leq 1, \forall h, \forall j;$
- aantal lessen van docent  $i$  voor klas  $j$ :  $\sum_h x_{hij} = r_{ij}, \forall i, \forall j.$

Het leerplan wordt hier dus voorgesteld door de matrix  $(r_{ij})$ ; verder kan de beschikbaarheid van docenten en klassen nog nader worden gespecificeerd door vectoren met tweewaardige componenten  $v_h$ . Daarbij betekent  $v_h = 0$ , dat de betreffende docent of klas op uur  $h$  (nog) beschikbaar is, en  $v_h = 1$ , dat dit niet (meer) het geval is. Als aanvangsgegevens stellen deze vectoren de planningsmogelijkheden van docenten en klassen voor; tijdens de planning kunnen de componenten overeenkomstig de toewijzingen worden gewijzigd.

Gotlieb vergelijkt nu systematisch alle klasse-vectoren met de vectoren van de betrokken docenten. Treedt daarbij het geval op, dat er voor de combinatie van docent  $i$  met klas  $j$  nog juist  $r_{ij}$  gemeenschappelijke uren zijn, waarop beide beschikbaar zijn, dan worden de betreffende toewijzingen geëffectueerd. Een combinatie waarvoor dit geldt wordt „tight” genoemd: in feite is dit een voorzichtige variant van het principe van de meeste weerstand: niet méér plannen dan wat „absoluut” urgent is.

Met deze methode is reeds op grote schaal geëxperimenteerd;

de belangrijkste beperking in de praktijk blijkt het aanzienlijke tijdsbeslag op de rekenmachine bij problemen van reële omvang. Dit zal uiteraard nog veel sterker gelden bij uitbreiding van het onderzoek tot lokalen en vakken als onafhankelijke elementen, hoewel dat principiëel wel zou kunnen. Het is daarentegen niet mogelijk, bij deze methode nevenvoorwaarden in rekening te brengen met betrekking tot onderlinge relaties van toewijzingen, zoals voor de realisering van dubbeluren, of voor het verkrijgen van een goede „spreiding” van vakken. Algemener gesteld: de kwaliteit van de oplossing is hierbij nog volledig niet in het geding.

### 5 de kwaliteit van een lesrooster

Zou de vraag naar de existentie van oplossingen bevestigend kunnen worden beantwoord, dan is er geen reden meer om tijdens de constructie van zulk een oplossing water in de wijn te doen; zou dat wel gebeuren, dan kan men zich van het resultaat terecht afvragen, of er geen betere oplossing mogelijk is — een ook nu gebruikelijke reactie. Er kan dus in het algemeen van de *kwaliteit* van een rooster gesproken worden: maar het is bijzonder moeilijk, om daarvan een objectieve, kwantitatieve definitie te geven! Toch kan op deze wijze misschien een algemene doelstelling worden geformuleerd, die zelfs de vraag naar de existentie impliceert:

de opdracht is, een lesrooster te construeren, dat zo goed mogelijk aan de primaire nevenvoorwaarden voldoet — of, indien deze volledig kunnen worden bevredigd, volgens secundaire criteria het optimum voorstelt van eventuele alternatieve oplossingen. Er wordt op deze wijze als het ware een glijdende schaal ingesteld voor de waardering van de kwaliteit van de oplossing, met boetefactoren voor onvoldoende honorering van de oorspronkelijke eisen, en premiefactoren voor het bevredigen van secundaire wensen. Dit principe zal nog nader met een voorbeeld worden toegelicht. Het is duidelijk, dat het onderling afwegen van de vele eisen en wensen met betrekking tot het rooster niet tot de eigenlijke technische vraagstelling behoort, doch een afzonderlijk probleem vormt in het beleidsvlak!

Op deze wijze kan het lesroosterprobleem inderdaad worden beschouwd als een vraagstuk van optimalisering onder nevenvoorwaarden: de wiskundige probleemstelling van de Operationele Analyse of, met een groot woord, de Besliskunde. Maar de vraag is daarmee nog niet beantwoord, of het aldus gestileerde probleem in een oplosbaar wiskundig model kan worden ondergebracht. Het is merkwaardig, dat er nog zo weinig pogingen in deze richting

zijn ondernomen. De moeilijkheden die zich daarbij voordoen kunnen worden aangeduid door enkele bekende modellen uit het gebied van het *mathematisch programmeren* nader te beschouwen om te trachten, het lesroosterprobleem daarin te „vertalen”. In het algemeen moet gesteld worden, dat het probleem nog niet op exact-wiskundige wijze is geformuleerd; het moet zelfs betwijfeld worden, of het hoe dan ook mogelijk zal zijn een convergerende algoritmische methode te vinden voor de oplossing van een dermate complex en omvangrijk probleem.

## 6 *mathematisch programmeren*

Beschouw opnieuw de primaire nevenvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0} x_{hij} &= 1 \quad (,,\text{klas'' } 0: \text{ docent geeft geen les op uur } h); \\ \sum_{i=0} x_{hij} &= 1 \quad (,,\text{docent'' } 0: \text{ klas heeft geen les op uur } h); \\ \sum_h x_{hij} &= r_{ij} \quad (x_{hij} = 0|1). \end{aligned}$$

Per afzonderlijk uur levert elk vlak van docenten en klassen een bekend probleem van het mathematisch programmeren op, als er voor elke combinatie  $(i, j)$  van docent en klas voor dat uur een waarderingsfactor  $c_{ij}$  gegeven wordt: het z.g. „assignment problem” luidt:

$$\max! \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}; \sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} = 1, x_{ij} = 0|1.$$

Voor dit probleem bestaat er een fraaie oplossingsmethode. Met dit model wordt er voor gezorgd, dat docenten niet worden gesplitst, en klassen geen dubbele lessen krijgen. Verder wordt per uur de beste combinatie van docenten en klassen nagestreefd; daarbij bestaat ook de mogelijkheid, gewenste en ongewenste uren voor een bepaalde klas of docent te onderscheiden. Er is een uitbreiding mogelijk, waarbij door invoering van factoren  $d_{ijkl}$  relaties tussen verschillende combinaties  $(i, j)$  en  $(k, l)$  — op eenzelfde uur! — worden gewaardeerd; dit leidt tot het kwadratische „assignment problem”. De te optimaliseren functie heeft daarbij de gedaante:

$$\max! \left( \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} + \sum_{ij} \sum_{kl} d_{ijkl} x_{ij} x_{kl} \right)$$

Voor dit model bestaan nog slechts benaderingsmethoden.

In de vlakken waarin de uren variëren liggen de sub-roosters per docent en per klas; daarbij zijn de sommen over alle uren niet gelijk aan 1, doch aan  $r_{ij}$ . Daarmee vervalt tevens het karakter

van het „assignment problem”, doch slechts gedeeltelijk, want de variabelen behouden hun tweewaardige aard. Zou dit niet het geval zijn, dan ontstaat voor elk van de genoemde vlakken een lineair „transportation problem”:

$$\max! \sum_p \sum_q c_{pq} x_{pq}; \sum_q x_{pq} = a_p, \sum_p x_{pq} = b_q.$$

Voor dit klassieke probleem bestaan vele algorithmen; gezien het speciale karakter van de variabelen is dit model echter onbruikbaar. De beperking  $x_{pq} = 0|1$  kan namelijk vervangen worden door de eis  $x_{pq}(x_{pq} - 1) = 0$ , en is dus duidelijk niet-lineair. (Dat het „assignment problem” opgelost werd is eigenlijk een klein wonder). Hetzelfde bezwaar geldt ten aanzien van het drie-dimensionale „transportation problem”, waarvoor ook oplossingsmethoden zijn gepubliceerd. Evenzo kan ook het kwadratische „transportation problem” worden opgelost, maar ook dat is om dezelfde reden minder bruikbaar, al zou de genoemde principiële beperking in de te optimaliseren functie kunnen worden opgenomen. Het blijkt dus, dat de structuur van het lesroosterprobleem tot fundamentele moeilijkheden leidt, weer afgezien van de praktische moeilijkheden, die ook hier het gevolg zullen zijn van de omvang van het probleem.

## 7 *pseudo-logisch programmeren*

Een zeer algemeen kenmerk van de structuur van het probleem is het feit dat de formulering onveranderlijk gebruik maakt van tweewaardige variabelen. Toch is het geen zuiver logisch vraagstuk, zoals uit de voorbeelden is gebleken. Het ligt dan ook voor de hand, te onderzoeken of de toepassing mogelijk is van het zogenaamde pseudo-logisch programmeren. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het feit, dat tweewaardige variabelen enerzijds als logische grootheden kunnen worden behandeld, doch in hetzelfde probleem tevens kunnen optreden in functies met reële waarden. Daarbij kunnen de logische operaties zo nodig algebraïsch omschreven worden. Het zou te ver voeren, een en ander nader uiteen te zetten; wel dient gewezen te worden op het principiële verschil met het mathematisch programmeren in het algemeen. Terwijl de methoden daarvan hoofdzakelijk gefundeerd zijn op de lineaire algebra, is de basis van het pseudo-logisch programmeren de tweewaardige Boolse algebra.

Er is nog weinig ervaring opgedaan met de toepassing van deze methode op het lesroosterprobleem; wel blijkt reeds uit het nog te geven voorbeeld, dat met dit soort modellen veel realistischer

gewerkt kan worden; de meest uitlopende nevenvoorwaarden kunnen in rekening worden gebracht. Het reeds eerder geschetste principe van de optimalisering van de kwaliteit van de oplossing komt daarbij volledig tot zijn recht. Een bezwaar van een dergelijke formulering is weer het grote aantal variabelen, maar dit is in feite inhaerent aan het probleem. Bij toepassing van pseudo-logisch programmeren is het aantal variabelen in principe gelijk aan het aantal lessen maal het aantal uren.

Om het aantal dimensies van het probleem tot twee te reduceren is het essentieel, de formulering te concentreren op de toewijzing van een *uur* aan een *les* (= docent + vak + klas + lokaal). Deze kunstgreep is hier volledig acceptabel, omdat de vele extra nevenvoorwaarden, die van deze transformatie het gevolg zijn en de interrelaties van de elementen tot uitdrukking brengen, op eenvoudige wijze in rekening kunnen worden gebracht in de te optimaliseren pseudo-logische functies. Bij het mathematisch programmeren leidt dit tot niet-lineaire functies, die tot onoplosbare modellen aanleiding geven. In het volgende voorbeeld ligt de nadruk op de te optimaliseren functie: in overeenstemming met het geschetste principe wordt getracht er het beste van te maken door invoering van premie- en boete-factoren, waarbij existentie-kwesties op een vanzelfsprekende wijze in het geheel worden opgenomen. Naast een dergelijke functie kunnen ook nevenvoorwaarden in de vorm van afzonderlijke vergelijkingen of ongelijkheden worden toegevoegd; ter wille van de eenvoud zijn deze bij het voorbeeld weggelaten.

*Voorbeeld:* gevraagd te maximaliseren de pseudo-logische functie:

$$- 2x_{11} - 3x_{22} + 7x_{33} + 5x_{11}x_{22}x_{33} - 3x_{22}x_{41} - 9x_{41}x_{51} + 2x_{11}x_{51}$$

*Interpretatie:* er zijn 5 lessen 1, 2, ..., 5 (eerste index), die op 3 uren 1, 2, 3 tweede index) gepland kunnen worden. De lessen 1, 2, 3 zijn van docent P. (natuurkunde), lessen 4 en 5 van docent G. (lich. oef.).

Docent P. wenst zijn lessen op drie achtereenvolgende uren te geven: dezelfde demonstratie voor drie verschillende klassen; dit is uitgedrukt in de term  $+ 5x_{11}x_{22}x_{33}$ . Voorts heeft P. bezwaar tegen het eerste uur:  $- 2x_{11}$ , en vindt hij het tweede uur minder geschikt voor les 2, omdat de betreffende klas dikwijls het eerste uur gymnastiekles heeft:  $- 3x_{22}$ . Tenslotte prefereert hij het 3e uur voor les 3, omdat deze voor een examenklas bestemd is:  $+ 7x_{33}$ . Docent G. zou graag op het eerste uur lesgeven als dat ook voor P. zou gelden, omdat hij dan met P. mee kan rijden:  $+ 2x_{11}x_{51}$  (het is aan

deze formulering niet te zien wie de wens uit!). De Rector vindt het didactisch ongewenst, dat les 2 op les 4 volgt: —  $3 x_{22}x_{41}$ ; dit is hetzelfde argument als van docent P., maar nu in wat algemener vorm. Tenslotte geldt organisatorisch, dat de vakken 4 en 5 niet mogen samenvallen, aangezien dat splitsing van docent G. zou betekenen: —  $9x_{41}x_{51}$ .

Hiermee is de gehele functie verklaard; het is uiteraard slechts een elementje van de volledige formulering!! De optimale oplossing wordt gegeven door de waarden:  $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{51} = 1$ ,  $x_{41} = 0$ , met totale waardering  $-2 - 3 + 7 + 5 + 2 = +9$ . De wensen van docent P. zijn slechts gedeeltelijk gerealiseerd; de oplossing als zodanig is acceptabel, „mogelijk”. Toevallig is er hier slechts één oplossing; in het algemene geval geeft de methode *alle* alternatieven met dezelfde optimale waardering. Dit blijkt uit de volgende variant van het vraagstukje:

Docent G. verhuist, en rijdt niet meer met P. mee; de term  $+ 2x_{11}x_{51}$  vervalt en dus krijgt P. meer kans om uit te slapen. Er blijken nu vijf equivalente oplossingen te zijn:

| $x_{11}$ | $x_{22}$ | $x_{33}$ | $x_{41}$ | $x_{51}$ | waarde          |
|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------|
| 0        | 0        | 1        | 0        | 0        | + 7             |
| 0        | 0        | 1        | 0        | 1        | + 7             |
| 0        | 0        | 1        | 1        | 0        | + 7             |
| 1        | 1        | 1        | 0        | 0        | - 2 - 3 + 7 + 5 |
| 1        | 1        | 1        | 0        | 1        | - 2 - 3 + 7 + 5 |

Het is duidelijk dat „locaal” beschouwd, de laatste oplossing „beter” is dan de overige, omdat daarbij het totaal aantal geplaatste lessen maximaal is — een geheel ander criterium! In het grote geheel geniet misschien toch een der andere oplossingen de voorkeur.

Een groot bezwaar is wel, dat positieve en negatieve waarderingen tegen elkaar worden afgewogen: vergelijk de wensen van de beide docenten ten aanzien van het eerste uur! In principe is het daardoor niet onmogelijk, dat docent G. toch gesplitst wordt, ondanks de hoge boetefactor  $-9$ . Het is uiteraard mogelijk, eerst de negatieve termen afzonderlijk te optimaliseren, om in ieder geval de absolute onmogelijkheden te elimineren. In dit geval zou deze benadering leiden tot  $x_{11} = x_{22} = x_{41} = 0$ ,  $x_{51} = 1|0$ . Bij optimalisering van de resterende term volgt dan  $x_{33} = 1$ ; dit levert de eerste twee oplossingen van de vorige variant.

## Literatuur

- Lesrooster-samenstelling met elektronische apparatuur: rapport van de Studiecommissie Lesroosters, Amsterdam, jan. '63, Stichting Studiecentrum voor Administratieve Automatisering.
- Gotlieb, C. C., The Construction of Class-Teacher Time-Tables, Proc. I.F.I.P. 1962, München; Amsterdam 1963.
- Gotlieb, C. C. en Csima, J., Tests on a Computer Method for Constructing School Timetables. Comm. A.C.M., vol. 7 (mrt '64) 3, 160—163.
- Ivanescu, P. L. en Rudeanu, S., Pseudo-Boolean Methods for Bivalent Programming. Berlin 1966.
- Folkers, J. S., Research and Management Aspects of Time-Table Automation for Schools and Universities. O.E.C.D.- Meeting on Systems Analysis Techniques in Educational Planning, Paris, jan. '67.

## EVALUATIE VAN HET SAMENSTELLEN VAN EEN LESROOSTER.

Ter gelegenheid van de lezing: „Het Lesrooster als Beslissingsprobleem”, gehouden door dr. ir. J. S. Folkers in het kader van de Vakantiecursus 1967 van het Mathematisch Centrum te Amsterdam, werd bij de deelnemers, wiskundeleraars een onderzoek ingesteld met betrekking tot de belangrijkste aspecten van het samenstellen van lesroosters. De bedoeling hiervan was, een indruk te krijgen van de hoeveelheid werk, die het rooster telkenjare vergt, van de wijze waarop het resultaat wordt gewaardeerd, en van de te verwachten invloed van de invoering van de Mammoetwet. Uit deze gegevens zou impliciet de eventuele behoefte kunnen blijken met betrekking tot een mogelijke automatisering van de lesrooster-samenstelling.

De desbetreffende *vragen* zijn hierbij afgedrukt, met een globaal overzicht van de *procentuele* resultaten van deze enquête. Met betrekking tot de opstelling van de vragenlijst zij de medewerking vermeld van ir. G. H. Huizinga, van de leerstoel voor Bedrijfspsychologie van de T. H. te Delft.

Teneinde de invloed van de school-omvang tot uiting te brengen werden de scholen onderscheiden in „kleinere”, „middelgrote” en „zeer grote” scholen. Maatgevend was hierbij het totaal *aantal klassen* (inclusief parallelklassen), dat - bij een vrijwel constant aantal lessuren per week - evenredig is met het totaal aantal *lessen* per week, dat de omvang van het lesrooster bepaalt. In tweede instantie zullen het aantal docenten en het aantal lokalen - in verhouding tot het

aantal klassen - mede bepalend zijn voor de moeilijkheden bij het samenstellen van het rooster; dit aspect is niet nader onderzocht. Wel volgen hieronder ter oriëntatie de bedoelde verhoudingsgetallen, zoals bepaald uit de resultaten van *vraag 0*) van de enquête, betreffende de totale aantallen docenten, klassen en leslokalen (inclusief vaklokalen en dependances):

|                          | kleinere scholen | middelgrote scholen | zeer grote scholen | totaal |
|--------------------------|------------------|---------------------|--------------------|--------|
| aantal docenten per klas | 2,08             | 1,81                | 1,67               | 1,83   |
| aantal lokalen per klas  | 1,29             | 1,09                | 1,08               | 1,13   |
|                          | ≤ 15 klassen     | 16-30 klassen       | 31-60 klassen      |        |

| categorie: aantal klassen                                            | ≤ 15 | 16-30 | 31-60 | tot. |
|----------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|------|
| perc. van totaal = 143 scholen                                       | 22   | 51    | 27    | 100  |
| 1) wie stelt het lesrooster samen?                                   |      |       |       |      |
| — een van de docenten                                                | 10   | 25    | 8     | 17   |
| — de rector en/of conrector                                          | 84   | 72    | 87    | 79   |
| — iemand anders                                                      | 6    | 3     | 5     | 4    |
| 2) hoeveel tijd kost het samenstellen van het rooster ongeveer?      |      |       |       |      |
| — onbekend                                                           | 10   | 10    | 8     | 9    |
| — 2 dagen                                                            | 13   | —     | 2     | 4    |
| — 1 week                                                             | 55   | 42    | 28    | 42   |
| — 2 weken                                                            | 19   | 36    | 31    | 30   |
| — 3 weken of meer                                                    | 3    | 12    | 31    | 15   |
| 3) wanneer wordt het rooster gemaakt?                                |      |       |       |      |
| — onbekend                                                           | 3    | 3     | —     | 2    |
| — in vrije uren in schooltijd                                        | 10   | 7     | 2     | 6    |
| — in avonduren en/of weekend                                         | 3    | 3     | —     | 2    |
| — in de vakantie                                                     | 84   | 87    | 98    | 90   |
| 4) hoe wordt het maken van een rooster door de samensteller opgevat? |      |       |       |      |
| — als een jaarlijks terugkerende ontspanning                         | 6    | 7     | 8     | 7    |
| — als een zonder bezwaar geaccepteerde taak                          | 29   | 34    | 36    | 33   |
| — als een jaarlijks terugkerende zorg                                | 49   | 36    | 31    | 37   |
| — als een jaarlijks toenemende belasting                             | 16   | 23    | 25    | 23   |

| categorie: aantal klassen                                                                 | ≤ 15 | 16-30 | 31-60 | tot. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|------|
| perc. van totaal = 143 scholen                                                            | 22   | 51    | 27    | 100  |
| 5) hoe ontwikkelt zich de bereidheid tot het maken van het rooster in de nabije toekomst? |      |       |       |      |
| — onbekend                                                                                | 10   | 10    | 5     | 8    |
| — neemt toe                                                                               | —    | 1     | —     | 1    |
| — blijft gelijk                                                                           | 45   | 34    | 38    | 37   |
| — neemt af                                                                                | 45   | 55    | 57    | 54   |
| 6) waarmee wordt bij het samenstellen van het rooster het meest rekening gehouden?        |      |       |       |      |
| — met organisatorische aspecten (accommodatie etc)                                        | 32   | 37    | 49    | 39   |
| — met didactische overwegingen (spreiding vakken)                                         | 36   | 23    | 18    | 25   |
| — met individuele wensen van de docenten (eigen uren)                                     | 32   | 40    | 33    | 36   |
| 7) wat was de oorzaak van onvolkomenheden van het rooster van het afgelopen jaar?         |      |       |       |      |
| — onvoldoende rekening met organisatorische aspecten                                      | 6    | 4     | 5     | 5    |
| — onvoldoende rekening met didactische overwegingen                                       | 13   | 14    | 26    | 17   |
| — onvoldoende rekening met individuele wensen                                             | 3    | 8     | —     | 5    |
| — niet genoeg tijd voor het maken van het rooster                                         | —    | 3     | 5     | 3    |
| — het programma was te vol om aan alle wensen te voldoen                                  | 42   | 33    | 38    | 36   |
| — geen moeilijkheden                                                                      | 36   | 38    | 26    | 34   |
| 8) hoe was het oordeel over het rooster aan het begin van het afgelopen jaar?             |      |       |       |      |
| — van de <i>docenten</i>                                                                  |      |       |       |      |
| — heel goed                                                                               | 3    | 18    | 5     | 11   |
| — goed bruikbaar                                                                          | 74   | 59    | 67    | 64   |
| — matig                                                                                   | 23   | 20    | 20    | 21   |
| — onbevredigend                                                                           | —    | 3     | 8     | 4    |
| — van de <i>leerlingen</i>                                                                |      |       |       |      |
| — goed                                                                                    | 22   | 15    | 31    | 21   |
| — matig                                                                                   | 22   | 39    | 20    | 30   |
| — slecht                                                                                  | —    | 4     | 5     | 4    |
| — onbekend                                                                                | 56   | 42    | 44    | 45   |
| 9) moest het rooster voor het afgelopen jaar worden gewijzigd?                            |      |       |       |      |
| — geen wijzigingen, cq. incidentele veranderingen                                         | 42   | 42    | 26    | 38   |

| categorie: aantal klassen                                                                                  | ≤ 15 | 16-30 | 31-60 | tot. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|------|
| perc. van totaal = 143 scholen                                                                             | 22   | 51    | 27    | 100  |
| — onmiddellijke wijziging wegens tegenstrijdigheden                                                        | —    | 6     | 10    | 6    |
| — eenvoudige verbeteringen door gebruiks-ervaring                                                          | 19   | 10    | 15    | 13   |
| — tijdrovende veranderingen wegens mutaties                                                                | 39   | 42    | 49    | 43   |
| 10) wat is de invloed van de invoering van de Mammoetwet op het samenstellen van het rooster? — dit wordt: |      |       |       |      |
| — gemakkelijker                                                                                            | 3    | —     | —     | 1    |
| — niet beïnvloed                                                                                           | 3    | 3     | —     | 2    |
| — niet wezenlijk moeilijker                                                                                | 7    | 3     | —     | 3    |
| — wel moeilijker                                                                                           | 58   | 68    | 57    | 53   |
| — bijna onmogelijk                                                                                         | 23   | 18    | 33    | 23   |
| — geen oordeel                                                                                             | 7    | 8     | 10    | 8    |

Ten aanzien van deze resultaten kan nog het volgende worden opgemerkt.

*vraag 1:* Het rooster wordt in 79 % van de gevallen door de rector en/of conrector samengesteld. Het valt op, dat dit percentage voor de *middelgrote* scholen duidelijk *lager* is dan voor de kleinere en zeer grote scholen: 72 %, tegen 84 resp. 87 %.

*vragen 2 en 3:* Het samenstellen van het lesrooster is bij uitstek een vakantie-bezigheid, en wel des te meer, naarmate de omvang van de school toeneemt. Uit de resultaten kan worden afgeleid, dat voor maken van het rooster gemiddeld resp. 1, 1½ en 2 weken vergt het een kleinere, middelgrote, resp. zeer grote school.

*vragen 4 en 5:* Het maken van het rooster is het meest een zorg cq. belasting voor de kleinere scholen: 65 % tegen 56 en 56 %. Wel zien de grotere scholen het meer als een toenemende belasting dan als een jaarlijkse zorg, maar daartegenover wordt deze taak ook wel vaker zonder bezwaar geaccepteerd dan bij de kleine scholen. Tenslotte is er een kleine doch constante minderheid (7 %), die het samenstellen van het rooster als een hobby beschouwt. Hierbij moet nader worden opgemerkt, dat slechts 5 % van de rectoren/conrectoren er zo over denkt, terwijl 25 % van de overige docenten die deze taak vervullen haar als een ontspanning zien.

*vragen 6 en 7:* Op kleinere scholen wordt met de drie onderscheiden groepen van lesrooster-voorwaarden *gelijkelijk* rekening gehouden, met een gering accent op het *didactische* aspect. Bij toenemende school-grootte gaan de zg. *organisatorische* aspecten duidelijk over-

wegen: 32—37—49 %, en wel uitsluitend ten koste van de didactische: 36—23—18 %. De relatieve verwaarlozing van didactische overwegingen blijkt ook uit het resultaat van vraag 7: 13—14—26 %. Met de *individuele* wensen van de docenten wordt het meeste rekening gehouden op de middelgrote scholen (40 % tegen 32 en 33 % voor de kleinere en zeer grote scholen). Dit zou kunnen samenhangen met het feit, dat voor de middelgrote scholen de rector/conrector relatief minder vaak als rooster-samensteller optreedt (vraag 1). Het blijkt nl. verder uit de resultaten van vraag 6, dat terwijl de individuele wensen globaal in 36 % van de gevallen als primair worden gezien, 46 % van de docenten-roostermakers dit aspect het belangrijkste vinden. Merkwaardig is daarbij het betreffende resultaat van vraag 7, waaruit blijkt dat er op de middelgrote scholen *toch* relatief de meeste klachten bestaan ten aanzien van de individuele wensen.

Als belangrijkste oorzaak van onvolkomenheden in het rooster wordt opgegeven, dat het programma te zeer is gevuld; dit geldt weer relatief sterker voor de kleinere en zeer grote scholen (42—33—38 %). Daarnaast neemt de beperking van het in rekening brengen van diverse eisen en wensen duidelijk toe met de omvang van de school (22—26—31 %).

*vraag 8:* Het oordeel van de *docenten* ten aanzien van het lesrooster is vrij constant met betrekking tot de school-grootte: 23—28 % betitelt het resultaat met matig tot onbevredigend, 77—72 % vindt het rooster goed bruikbaar tot heel goed. Deze laatste kwalificatie komt hoofdzakelijk voor in gevallen waarbij niet de rector, doch een docent het rooster heeft samengesteld; dit hangt waarschijnlijk samen met de reeds genoemde nadruk op de individuele wensen in die gevallen. Het is opvallend, dat het oordeel van de *leerlingen* over het rooster in 45 % van de gevallen *onbekend* was. Voorzover bekend, blijkt het voor de middelgrote scholen relatief het minst gunstig te zijn.

*vraag 9:* Waarschijnlijk is er samenhang tussen de resultaten van vraag 7: „geen moeilijkheden” (36—38—26 %) en die van vraag 9: „geen wijzigingen” (42—42—26 %). Het blijkt, dat *tijdrovende wijzigingen* gedurende het cursus-jaar veelvuldig voorkomen, en wel in toenemende mate bij grotere scholen.

*vraag 10:* Het oordeel over de invloed van de Mammoetwet op het samenstellen van een lesrooster is vrijwel unaniem „wel moeilijker” tot „bijna onmogelijk” (tezamen 81—86—90 %, dus weer toenemend met de omvang van de school). Dit houdt waarschijnlijk ook verband met de vrij algemene klacht over een te vol programma (vraag 7).

OPENINGSREDE VAN DE VOORZITTER VAN WIMECOS  
DR. IR. B. GROENEVELD TOT DE ALGEMENE  
LEDENVERGADERING OP 28 DECEMBER 1967.

Dames en Heren,

Op deze algemene ledenvergadering heet ik u allen van harte welkom en in het bijzonder

de ereleden Prof. Dr. O. Bottema, P. Wijdenes, Dr. J. H. Wansink,

de inspecteurs Dr. D. N. v. d. Neut, Drs. B. J. Westerhof,

de vertegenwoordigers van G. Krooshof van Euclides

Dr. Th. Korthagen van Liwenagel

en de sprekers Prof. Dr. J. J. Seidel, A. Engel

Een van de belangrijkste gebeurtenissen voor ons wiskunde-onderwijs in het afgelopen jaar is de publikatie geweest van de discussienota's door de C.M.L.W. Het is nu vrijwel zeker, dat we het komende cursusjaar in de brugklasse met een gemoderniseerd leerplan voor wiskunde kunnen beginnen. Een moeilijk probleem is nog de gelijkstelling van de programma's voor verschillende onderwijs-typen, die op de brugklasse zullen moeten voortbouwen. We denken hierbij bijvoorbeeld aan de leerling, die eindexamen HAVO heeft en over wil gaan naar VWO. Ook in de brugklassen van diverse schoolsoorten zal de eenheid moeilijk volledig verkregen kunnen worden. We zijn van mening, dat het consequent gelijk-schakelen nadelig zal zijn, zowel voor de toekomstige VWO-leerlingen, wegens het dalen van het peil, als voor de toekomstige MAVO-leerlingen, wegens het werken boven hun niveau. Het verwondert ons dan ook niet, dat er bij sommige experimenterende schoolgemeenschappen op bepaalde tijden in het cursusjaar bij de brugklassen hergroeperingen, dus selecties, plaatsvinden. De praktijk zal spoedig uitmaken welke weg we moeten inslaan.

Een daarmee min of meer parallel-lopend probleem is de differentiatie voor de wiskunde in de onderbouw van het HAVO. Ons bestuur is unaniem van oordeel, dat differentiatie noodzakelijk is en wel voornamelijk omdat de niet-wiskundig aangelegde leerlingen het tempo van het onderwijs zo remmen, dat het algemene peil, dus

het aanzien van het HAVO, sterk in waarde zal dalen. Omdat het lidmaatschap van onze vereniging ook bedoeld is voor wiskunde-leraren, verbonden aan het HAVO, voelen we ons mede verantwoordelijk voor de gang van zaken bij het wiskundeonderwijs op het HAVO.

Daarom moeten de docenten van het HAVO voorzichtig zijn met de mededeling, dat een voorgesteld programma te zwaar is. Een dergelijk verschijnsel zien we ook bij de huidige eindexamens voor de wiskunde bij HBS-B en gymnasium-B. Dit jaar golden de wiskundeopgaven voor tamelijk zwaar. Onze secretaris ontving diverse brieven met kritiek op de moeilijkheidsgraad van de opgaven. Vaak blijken dan achteraf de door de inspectie vastgestelde normen veel bezwaren te ondervangen. Ook komen er brieven binnen, waarbij geprotesteerd wordt tegen de veel te geschikte normen. In het algemeen kan ons bestuur in deze kwesties moeilijk tot actie overgaan. Alleen indien de eisen bij de wiskunde-examens al te extreem zijn is het onze plicht alarm te slaan.

Tegen het verschil in aantal lesuren voor de wiskunde op het gymnasium-B en het atheneum-B wordt door ons bestuur bezwaar gemaakt. Omdat de eindexamens voor deze beide richtingen geheel gelijk zullen zijn t.a.v. de wiskunde zal voor de meest begaafde leerlingen voor de exacte vakken het atheneum de meest aantrekkelijke afdeling worden, zodat het voortbestaan van het gymnasium-B bedreigd wordt.

16, 17, 18 augustus 1967 heeft het Mathematisch Centrum zijn jaarlijkse vakantiecursus georganiseerd, zowel in Amsterdam als in Eindhoven. Het behandelde onderwerp, de besliskunde, heeft grote belangstelling getrokken. Een woord van grote dank komt toe aan de organisatoren van deze cursus.

Van 11 t/m 15 september 1967 zijn in Eindhoven de moderniseringscursussen voor wiskunde-leraren gegeven. Het onderwerp was de computer-wiskunde. Hoewel menigeen van te voren sceptisch tegenover deze materie stond, hebben de cursisten met groot enthousiasme de computer, althans op papier bediend. De deelnemers aan de nog te geven cursussen in januari 1968 over hetzelfde onderwerp kunnen zich hierop verheugen. De organisatoren, de docenten en hun medewerkers komt alle lof toe.

De activiteiten van de CMLW strekken zich uit over de leraren van het ULO en het lager technisch onderwijs. In vele steden worden cursussen gegeven aan leraren en het totaal aantal cursisten bedraagt meer dan duizend. Men huldigt hierbij het systeem van één avond per veertien dagen, een systeem, dat didactisch gespro-

ken vele voordelen biedt.

Op 30 oktober 1967 vond de buitengewone Wimecos-Liwenagel-WVO-ledenvergadering plaats, waarop de discussienota's van de CMLW werden besproken. Het verslag van deze vergadering is inmiddels in Euclides gepubliceerd. Ik moet hier nogmaals de bestuursleden danken, die door hun vele arbeid hebben bijgedragen tot het welslagen van deze samenkomst.

De propagandistische waarde van het houden van deze buitengewone ledenvergadering is geweest, dat onze vereniging 109 nieuwe leden erbij heeft gekregen. Daardoor is ons ledental gestegen tot ong. 800. Verder is tijdens deze vergadering overduidelijk gebleken hoezeer de wiskunde-leraren het werk van de CMLW op prijs stellen en men was unaniem van oordeel, dat het voortbestaan van deze commissie een essentieel belang voor het onderwijs is. Vooral het organiseren van de cursussen voor leraren VHMO wordt door ieder als noodzakelijk gezien.

Het jeugdtijdschrift Pythagoras is zijn zesde jaargang ingegaan. Het aantal abonnees is nu vrijwel constant. Men moet waken voor te moeilijke artikelen en vooral niet de afdeling „Diverse problemen” vergeten. De redacteurs, de heren B. Ernst, A. B. Oosten en A. F. van Tooren, komt veel dank en waardering toe en we wensen het tijdschrift een goede toekomst.

Het komende jaar werkt Wimecos weer samen met de zusterverenigingen bij het organiseren van het congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen. Dit zeventiende congres wordt gehouden in Utrecht op 16 april 1968. Het thema luidt: *Uitdaging in wetenschap en onderwijs*.

De belangstelling voor deze congressen is tot nu toe steeds groot geweest. Wij raden onze leden ten sterkste aan om aan het nieuwe congres deel te nemen.

Het colloquium dat door het Mathematisch Centrum in Amsterdam over topologie is gehouden heeft evenals vorige jaren weer een welverdiende belangstelling gehad.

Dit jaar wil ik nog eens duidelijk wijzen op de belangrijke taak, die door de redactie van Euclides op zo'n voortreffelijke wijze wordt vervuld. Vele lezers zullen het bijzonder op prijs stellen als er meer artikelen worden gewijd aan de didactiek van de onderwerpen uit de moderne wiskunde die in de discussienota's wordt voorgesteld.

Veel dank is verschuldigd aan de organisator van de leesportefeuille, de heer Boost. Bij deze gelegenheid wil ik vooral de vele nieuwe leden wijzen op het bestaan daarvan. Er wordt nog te weinig gebruik gemaakt van de mogelijkheid om hieruit de didactiek van

de wiskunde te bestuderen.

De wiskunde-olympiade heeft veel wiskundigen in spe aan het denken gezet. Het nieuwe systeem, toegepast bij de beoordeling van het werk bij de eerste ronde, heeft veel waardering. Een voorronde kan bij vele leerlingen teleurstelling voorkomen en geeft een goede selectie. Het prachtige werk, dat ook nu weer is voorgelegd, verdient een bijzonder woord van lof. We rekenen op continuering van deze instelling. Een aardig gebaar van de PTT, was de ontvangst door het C.B.O. van de winnaars van de eerste ronde.

Onze jaarlijkse excursie-dag is het afgelopen jaar vervallen wegens de organisatie van de buitengewone ledenvergadering. Het is geenszins de bedoeling deze activiteiten te staken. Er waren reeds plannen in een vergevorderd stadium om naar TNO in Den Haag te gaan. We hopen deze plannen in oktober a.s. alsnog te verwezenlijken.

Ieder jaar staat het bestuur weer voor het probleem om een datum vast te stellen voor de ledenvergadering. Het aantal vergaderingen en conferenties is de laatste tijd zo toegenomen, dat menig leraar er niet meer voor voelt om er een vakantiedag aan te besteden. Ook de vele mogelijkheden om tijdens de vakanties op reis te gaan, maken een vergaderdatum in die perioden minder geschikt. Als de vrije zaterdag in het onderwijs ingevoerd wordt zou zo'n dag veel geschikter zijn dan een vakantiedag. Ook zou het uitzoeken van een vergaderdag veel eenvoudiger zijn als de vakantiedata voor alle scholen gelijk waren.

We nemen dit jaar afscheid van ons bestuurslid van Vliet. In de betrekkelijk korte tijd, dat hij deel uitmaakte van ons bestuur, hebben we hem leren kennen als iemand, op wie we konden bouwen. Ook voor zijn werkzaamheden als tweede secretaris zijn wij hem veel dank verschuldigd. Zijn jonge gezin bleek teveel te lijden onder zijn herhaaldelijke afwezigheid tengevolge van vergaderingen en samenkomsten. Wij hebben respect voor dit motief en danken hem voor het vele werk, dat hij voor onze vereniging heeft gedaan, en wij hopen, dat, als zijn kinderen ouder en zelfstandiger geworden zijn, hij weer kan terugkeren tot zijn activiteiten in het verenigingsleven.

U een waardevolle dag toewensend, verklaar ik hierbij de algemene ledenvergadering voor geopend.

## VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

### *LXXII. De ladenkastjes van Bertrand.*

In de elementaire waarschijnlijkheidsrekening wordt een *kans* gedefinieerd als de verhouding van het aantal gunstige gevallen tot het totale aantal mogelijkheden. Het is welbekend dat de beide daarvoor nodige tellingen zorgvuldig moeten worden verricht en dat men behalve tellen ook moet wegen, en met het omstreden begrip van *gelijkwaardige* mogelijkheden rekening moet houden. Een in al zijn eenvoud geraffineerd waarschuwend voorbeeld is ons altijd het probleem van de drie ladenkastjes voorgekomen, dat Bertrand stelt in het eerste hoofdstuk van zijn klassieke *Calcul des probabilités*.<sup>1)</sup>

Van drie gelijke kastjes, elk met twee laatjes, is gegeven dat elk laatje een munt bevat en wel één kastje twee gouden, een ander twee zilveren en het derde één gouden en één zilveren. Alle laatjes zijn gesloten. Men wijst een kastje aan en vraagt naar de kans dat dit het gemengde kastje is. Het antwoord is ten duidelijkste  $1/3$ . Men trekt één der beide laatjes open, ziet een gouden munt liggen en herhaalt de vraag. Een oppervlakkige redenering zegt: het zilveren kastje is als mogelijkheid weggevallen, er zijn nog slechts twee mogelijkheden over, waarvan één gunstig; de kans is dus  $\frac{1}{2}$ .

Dat de gedachtengang onjuist moet zijn volgt dadelijk al uit het feit dat het openen van het ene laatje door een betrokkene met volkomen onverschilligheid zal worden bijgewoond. Het resultaat kan hem onmogelijk interesseren en de ontvangen nadere informatie is waardeloos. De opheldering volgt spoedig: er is onjuist geteld. Weliswaar zijn er nog maar twee mogelijkheden over, maar zij hebben ongelijke waarschijnlijkheid. De kans dat het bewuste kastje twee gouden munten bevat is twee maal zo groot als de kans op het gemengde kastje; de eerste is  $2/3$  de andere nog steeds  $1/3$ .

Wij breiden het vraagstuk hier uit door  $N$  kastjes te beschouwen, elk met  $n$  laatjes. Er zijn  $n$  verschillende muntsoorten  $a_1, \dots, a_n$

---

<sup>1)</sup> J. Bertrand, *Calcul des probabilités*. (Paris, 1907), p. 2.

en  $N$  is zo gekozen dat elke vulling van een kastje met  $n$  munten één maal voorkomt. In verschillende laatjes van eenzelfde kastje mogen gelijke munten liggen; de volgorde der laatjes in een kastje is irrelevant. Er is één bijzonder kastje, namelijk het exemplaar  $B$  waarvoor alle munten die het bevat verschillend zijn. Wij wijzen een kastje aan; de kans  $k_0$  dat het  $B$  is zal uiteraard  $1/N$  zijn. Wordt één laatje geopend en de inhoud vastgesteld dan zal, evenals boven, die kans  $k_1$  onveranderd  $1/N$  blijven. Wij zullen trachten na te gaan hoe de kans verandert als achtereenvolgens méér laatjes worden geopend. De vraag heeft alleen zin zolang de geopende laatjes onderling verschillende munten bevatten: zodra er twee gelijke bij zijn is de kans op  $B$  verkeken.

Volgens de combinatoriek is het aantal „combinaties  $n$  aan  $n$  van  $m$  elementen, met herhaling” gelijk aan

$$C_m^n = \frac{(m + n - 1)!}{n!(m - 1)!} \quad (1)$$

waaruit voor ons volgt

$$N = C_n^n = \frac{(2n - 1)!}{n!(n - 1)!} \quad (2)$$

De berekening van de genoemde kansen voert, voor zover wij kunnen zien, tot niet zeer eenvoudige uitdrukkingen. Wij beperken ons daarom tot het voorbeeld  $n = 5$ , waaruit volgt  $N = 126$ .

De kans  $k_0$  dat een aangewezen kastje het exemplaar  $B$  is, bedraagt dus  $1/126$  en voor  $k_1$  geldt hetzelfde. Wij berekenen de kansen  $k_j$  ( $j = 2, 3, 4$ ), aannemend dat de munten in de  $j$  geopende laatjes alle ongelijk zijn.

Zij vooreerst  $j = 2$ ; in de geopende laatjes blijken te liggen  $a_1$  en  $a_2$ . Deze informatie sluit van mededinging uit alle kastjes die de combinatie  $(a_1, a_2)$  niet bevatten. Hun verzameling  $V_0$  bestaat uit 91 elementen, nl.  $C_4^4 = 35$  kastjes, die wel  $a_2$ , maar niet  $a_1$  bevatten, evenveel die wel  $a_1$ , maar niet  $a_2$  bevatten en nog  $C_3^5 = 21$ , die geen van beide bevatten. Voor de andere moeten verschillende gevallen worden onderscheiden.

Er is een verzameling  $V_1$  van kastjes die  $(a_1, a_2)$  één maal bevatten; ons kastje  $B$  behoort daartoe. Zij hebben gemeen dat de drie ongeopende laatjes alleen  $a_3, a_4, a_5$  bevatten. Hun aantal is blijkbaar  $C_3^3 = 10$ . Is in één der drie laatjes  $a_1$  (of  $a_2$ ) gelegen en in de andere munten uit de verzameling  $(a_3, a_4, a_5)$  dan behoort het kastje tot de verzameling  $V_2$ , waarvan de exemplaren twee maal de combinatie  $(a_1, a_2)$  bevatten. Hun aantal is  $2 \cdot C_3^2 = 12$ .

Bevatten de drie laatjes twee maal  $a_1$  (of  $a_2$ ), dan komt  $(a_1, a_2)$  in het kastje drie maal voor; het aantal van de collectie  $V_3$  is  $2 \cdot 3 = 6$ . Komen  $a_1$  en  $a_2$  elk één maal voor dan wordt daardoor een verzameling  $V_4$  beschreven met 3 elementen.

De kastjes waarvan de drie onbekende laatjes alleen munten  $a_1$  en  $a_2$  bevatten geven nog verzamelingen  $V'_4$  en  $V_6$ , elk van twee elementen.

De som der tot  $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V'_4$  en  $V_6$  behorende elementen is naar behoren 126. Het totale aantal combinaties  $(a_1, a_2)$  dat zij bevatten is  $10 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 84$ . Door het openen der twee laatjes, met twee verschillende munten, is de kans dat  $B$  het bewuste kastje is, gestegen tot  $k_2 = \frac{1}{84}$ . Diezelfde kans hebben ook nog 9 andere kastjes, maar er zijn 12, 6, 5 en 2 kastjes met resp. 2, 3, 4 en 6 maal zo grote kans.

Volgens dezelfde gedachtengang kunnen wij de kansen  $k_3 = \frac{1}{36}$  en  $k_4 = \frac{1}{9}$  bepalen. Zijn dus vier der vijf laatjes geopend en is alles tot dan toe gunstig gegaan, dan is de kans tot slechts  $\frac{1}{9}$  gegroeid dat wij met  $B$  te doen hebben. Liggen de vier laatjes met  $a_1, a_2, a_3, a_4$  geopend voor ons, dan is de kans dat de laatste munt  $a_5$  zal zijn geenszins  $\frac{1}{5}$ : die op elk der andere, reeds getrokken munten, is twee maal zo groot als die op de ontbrekende.

Voor kleinere waarden van  $n$  wordt de berekening uiteraard eenvoudiger. Wij vinden voor  $n = 4$ :  $k_0 = k_1 = \frac{1}{35}$ ,  $k_2 = \frac{1}{21}$ ,  $k_3 = \frac{1}{7}$ ; voor  $n = 3$ :  $k_0 = k_1 = \frac{1}{10}$ ,  $k_2 = \frac{1}{5}$ ; voor  $n = 2$ , de oorspronkelijke opgave,  $k_0 = k_1 = \frac{1}{3}$ .

Interessant lijkt de opgave om voor willekeurige waarde van  $n$  de kansen  $k_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) te bepalen. Met bovenstaande methode vonden wij

$$\begin{aligned} k_{n-1}^{-1} &= 2n - 1, \quad k_{n-2}^{-1} = (2n - 1)(n - 1), \\ k_{n-3}^{-1} &= \frac{1}{3}(2n - 1)(2n - 3)(n - 1) \end{aligned}$$

en met deze mededeling stellen wij de voortzetting dezer rij gaarne ter discussie.

## KALENDER

### MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit een hoger standpunt belicht*” in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O, op woensdag 24 april 1968: Prof. Dr. G. Zoutendijk: „*De wiskunde van het bergbeklimmen*”. Aanvang 20.00 uur precies.

## WIMECOS-LEESPORTEFEUILLE

Sinds vele jaren tracht de redactie van Euclides door middel van een rubriek gewijd aan de inhoud van buitenlandse tijdschriften de belangstelling te wekken voor buitenlandse literatuur voor zover deze in verband met de didactiek van ons wiskunde-onderwijs voor de Nederlandse leraar van belang mag worden geacht. In de regel wordt volstaan met een opsomming van de titels van de belangrijkste artikelen, enkele malen wordt er een waarderingsoordeel uitgesproken of wordt de inhoud van een artikel enigszins gespecificeerd; ook wordt er in de kolommen van Euclides soms aan een bepaald onderwerp of een bepaalde buitenlandse auteur uitvoeriger aandacht besteed.

De bedoeling van een en ander is duidelijk: de redactie wenst de lust om de buitenlandse artikelen ook te gaan lezen te stimuleren. Alom ter wereld wordt in de jaren na de tweede wereldoorlog getracht om aan inhoud en aan vorm van het wiskunde-onderwijs nieuwe gestalte te geven. Zonder enige kennis van wat er in het buitenland wordt geboden is een bevredigende oriëntatie ten aanzien van de zich voltrekkende onderwijsvernieuwing schier onmogelijk.

We begrijpen dat tal van collega's die niet te ver van de bibliotheek van een onzer universiteiten of hogescholen wonen, een dankbaar gebruik zullen maken van de gelegenheid die daar voor hen bestaat om buitenlandse tijdschriften in te zien. Ook zijn we ervan overtuigd dat er vele collega's zijn die door een abonnement op het Duitse *Praxis der Mathematik*, op het Belgische *Mathematica et Paedagogia*, op het Franse *Bulletin*, op het Zwitserse *Elemente der Mathematik*, op de Engelse *Mathematical Gazette* of op de Amerikaanse *Mathematics Teacher* zich van de onderwijskundige problematiek in het buitenland op de hoogte stellen, maar niet ieder die toch eigenlijk wel wat naders over de onderwijskundige problematiek in het buitenland zou willen weten, komt er gemakkelijk toe een persoonlijk, dikwijls prijzig abonnement te nemen.

Gelukkig is WIMECOS reeds vele jaren geleden, in 1949, aan de bestaande behoefte aan voorlichting tegemoet gekomen door de instelling van de WIMECOS-LEESPORTEFEUILLE, waarover in de 23e, de 24e en de 29e jaargang van ons tijdschrift uitvoerige inlichtingen werden verstrekt.

Alle leden van Wimecos, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. kunnen zich zonder verdere formaliteiten als deelnemer aan deze portefeuille opgeven bij *G. J. J. Boost, Parklaan 107a, Roosendaal (N. Br.)*.

Hier volgt een lijst van de tijdschriften waaruit men een keuze kan doen.

*Praxis der Mathematik*, Aulis Verlag, Köln; 12 afleveringen per jaar.

*Mathematica et Paedagogia*, driemaandelijks tijdschrift uitgegeven door de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren.

*Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, Parijs; tweemaandelijks tijdschrift.

*Elemente der Mathematik*, Basel, tweemaandelijks tijdschrift.

*Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, Hirschgraben Verlag, Frankfurt/M; 10 afleveringen per jaar.

*The Mathematics Teacher*, uitgegeven door de National Council of Mathematics, Washington; verschijnt 8 maal per jaar.

*The Mathematical Gazette*, Journal of the Mathematical Association, London; verschijnt 5 maal per jaar.

*Mathematische-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen; verschijnt op ongeregelde tijden.

*School Science and Mathematics*, a journal devoted to the improvement of teaching of the sciences and mathematics at all grade levels, Michigan.

*Paedagogische Studiën*, Nederlands tijdschrift. verschijnt maandelijks; Groningen; eigenlijk een vreemde eend in deze bijt.

De nummers van de tijdschriften worden niet „in portefeuille” rondgezonden. Dit zou in verband met een efficiënte bestudering van de inhoud weinig doeltreffend zijn. De nummers worden zodra ze binnenkomen stuk voor stuk door de heer *Boost* in circulatie gebracht en telkens na een leestijd van maximaal een week volgens een bijgevoegd rooster doorgezonden. Alleen voor de *Semesterberichten*, een omvangrijk tijdschrift, is de leestijd op drie weken gesteld.

De leeskosten bedragen f 2,— per jaar en per tijdschrift; wie slechts één tijdschrift wenst te ontvangen betaalt echter f 2,50. Uitgaven van het Wiskundig Genootschap worden gratis bijgevoegd.

Er zijn enkele tijdschriften waarvoor zich zoveel lezers hebben opgegeven dat het gewenst bleek er twee abonnementen op te nemen.

De belangrijkste tijdschriften worden na afloop van de circulatie gebonden en in de WIMECOS-BIBLIOTHEEK opgenomen. Deze bevat op dit moment ruim 80 delen. Wie tegen betaling van kosten een jaargang een maandlang ter lezing wil ontvangen, kan zich melden bij *dr. Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, Arnhem*.

De Redactie van Euclides vermoedt, dat zeer veel lezers van Euclides door onbekendheid met het bestaan van de WIMECOS-LEESPORTEFEUILLE tot dusver de gelegenheid heeft laten voorbijgaan om zich op gemakkelijke, goedkope wijze doeltreffend ten aanzien van buitenlandse didactische lectuur te laten oriënteren. Vandaar onze opwekking:

**geeft U als lezer op bij de heer G. J. J. Boost,  
Parklaan 107 A, Roosendaal (N. Br.).**

## ZEVENTIENDE CONGRES

*van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen*

Op dinsdag 16 april 1968 zal in het Transitorium der Rijksuniversiteit te Utrecht het zeventiende Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen worden gehouden. Het Congres wordt georganiseerd door Wimecos, Liwenagel, Velebi en Velines.

Als thema is gekozen: *Uitdaging in Wetenschap en Onderwijs*.

In de sectievergaderingen zullen problemen, die samenhangen met het algemene thema, maar die toegespitst zijn op de betreffende vakken, worden besproken. Na iedere voordracht zal er gelegenheid zijn voor een korte discussie.

De actualiteit van het te behandelen thema doet het Congresbestuur vertrouwen, dat vele leden van de organiserende verenigingen zullen deelnemen aan dit Congres.

### PROGRAMMA

- |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10.00—10.30 uur | Aankomst der deelnemers, waarbij een kopje koffie zal worden aangeboden.                                                                                                                                                                                                                                               |
| 10.30 uur       | Opening van het Congres door de Voorzitter, Drs. M. Koksmā.<br>Plaats: Blauwe zaal.                                                                                                                                                                                                                                    |
| 10.45 uur       | <i>Eerste algemene bijeenkomst.</i><br>Prof. Dr. J. Kommandeur, Groningen: Niet spelen maar leren.<br>Plaats: Blauwe zaal.                                                                                                                                                                                             |
| 11.45—12.45 uur | <i>Bijeenkomst der secties.</i><br><br>Sectie Wiskunde:<br>Prof. Dr. E. van Spiegel, Delft: Construeren met rekenmachines.<br>Plaats: Witte zaal.<br><br>Sectie Natuurkunde:<br>Prof. Dr. H. de Waard, Groningen: Principiële en incidentele problemen bij het experimenteren in de natuurkunde.<br>Plaats: Rode zaal. |

## Sectie Scheikunde en Biologie:

Dr. A. de Waard, Leiden: Onderzoek, onderwijs en fantasie in de biochemie.

Plaats: Blauwe zaal.

12.45—14.15 uur *Lunch* in de kantine van het Transitorium.

14.15—15.45 uur *Bijeenkomst der secties.*

## Sectie Wiskunde:

Prof. Dr. Ir. A. van Wijngaarden, Amsterdam: Welk deel van het taalonderwijs dient door de Wiskundeleraar gegeven te worden?

Plaats: Witte zaal.

## Sectie Natuur- en Scheikunde:

Ir. W. Hengeveld, Hengelo: Welke onderwijsdoelen kunnen wij thans formuleren?

Plaats: Blauwe zaal.

## Sectie Biologie:

Dr. A. de Waard, Leiden: Bedevaart naar de Galapagos (met lichtbeelden).

Plaats: Rode zaal.

15.45—16.00 uur *Theepauze.*

16.00—17.00 uur *Tweede algemene bijeenkomst.*

Prof. Dr. L. Vlijm, Amsterdam: Uitdaging aan de mens in de wetenschap.

Plaats: Blauwe zaal.

17.00 uur Sluiting van het Congres door de Voorzitter.

Het Transitorium der Rijksuniversiteit te Utrecht is gelegen in het nieuwe Universiteitscentrum „De Uithof”, in de polder ten zuiden van de Rijksweg Utrecht-Zeist.

Ten behoeve van treinreizigers zal om 10.00 uur een autobus vertrekken van het Centraal Station te Utrecht naar het Transitorium. Deelnemers aan het Congres, die van deze busverbinding gebruik wensen te maken, wordt verzocht bij hun aanmelding f 0.50 extra over te maken.

De kosten van deelneming aan het Congres bedragen voor leden van de organiserende verenigingen f 11,—, voor anderen f 15,—. Deze bedragen konden gehandhaafd worden dankzij een subsidie van het Ministerie van O. en W.

Bij deze bedragen zijn de kosten voor de lunch, de ochtendkoffie en de middagthee inbegrepen, terwijl het uitvoerige Congresverslag aan iedere deelnemer gratis zal worden toegezonden.

Voor deelnemers, verbonden aan een school voor V.H.M.O., kunnen de reiskosten 2e klas uit een verkregen rijkssubsidie geheel worden vergoed.

Indien men aan het Congres wenst deel te nemen, wordt men verzocht bovengenoemd bedrag, eventueel vermeerderd met f 0,50 voor het gebruikmaken van de busverbinding, over te maken op girorekening 915935 ten name van de Penningmeester van het Congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen te Zutphen voor 1 april a.s.

Toezending van de toegangskaarten en later van het uitvoerige Congresverslag zal dan volgen. Zij, die na 1 april nog inschrijven, ontvangen hun toegangskaart bij aankomst aan het Transitorium.

Het adres van de penningmeester luidt:

Dr. Th. J. Korthagen, Coehoornsingel 72, Zutphen.

Voor nadere inlichtingen wende men zich tot de secretaris.

Namens het Congresbestuur:

W. C. Riel, *secretaris*

Vlaskamp 500, 's-Gravenhage

## BOEKBESPREKING

Th. M. E. Liket, R. de Poel en G. Schoemaker; **xy**<sup>2</sup>.

1B, *algebra voor het brugjaar vwo-havo*; 123 blz.; geb. f 4,90; 1965; 2B, *algebra voor havo*; 127 blz.; geb. f 4,90; 1965; 3B, *algebra voor havo*; 125 blz.; geb. f 5,90; 1966; uitgave van W. J. Thieme, Zutphen.

Het is te verwachten, dat het wiskunde-onderwijs op onze scholen in een nabije toekomst ingrijpende veranderingen zal ondergaan. Overal ter wereld wordt er gestreefd naar een verregaande modernisering. Ook in ons land. Sinds 1961 werkt hier de *Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde* aan maatregelen die getroffen zullen moeten worden om de wiskundeprogramma's aan te passen aan de eisen die door de nieuwere ontwikkelingen in de wiskunde wenselijk worden. Anderzijds heeft de totstandkoming van de *Mammoetwet* een impuls gegeven tot een zekere coördinatie van de wiskundeleerplannen op de onderscheiden schooltypen. Zal de horizontale doorstroming die men wenst te bevorderen, zo goed mogelijk slagen, dan dient men te voorkomen, dat een leerling bij overgang naar een ander schooltype te maken krijgt met leerboeken van geheel andere structuur. In verband hiermee interesseren ons bij de verschijning van een nieuw leerboek in het bijzonder twee vragen: (1) draagt het nieuwe boek bij tot een verantwoorde modernisering; (2) draagt het bij tot de hier bedoelde coördinatie?

Ik heb de indruk dat de boekjes van Liket c.s. tot deze modernisering geen bijdrage leveren, maar dat ze de coördinatie wel beloven te bevorderen.

Tot goed begrip van een en ander diene, dat vóór de verschijning van de havo-boekjes die hier onze aandacht hebben, reeds vier eenvoudiger algebraboekjes werden uitgegeven, waarvan het eerste het brugjaar mulo-, mavo-havo betrof en de andere het mulo-mavo. Mocht aan de reeds verschenen series te zijner tijd nog een serie voor het vwo worden toegevoegd, dan is de grondslag voor de als wenselijk bepleite coördinatie stellig aanwezig. Het niveau van strengheid in deze derde serie zal echter aanmerkelijk hoger dienen te liggen dan het niveau dat in deze havo-serie werd bereikt.

Ik zie in de opzet van de series leerboekjes van Liket c.s. een prijzenswaardig initiatief. Ik ontkom echter niet geheel aan de indruk, dat de totstandkoming van de reeds verschenen deeltjes enigszins overhaast in zijn werk is gegaan, waardoor er in de samenstelling van de tekst een aantal slordigheden voorkomen, terwijl het vernieuwend aspect zwak gebleven is. In het ontwerp-leerplan voor het havo, opgenomen in het boekje *Examenopgaven wiskunde voor h.a.v.o.*, samengesteld door

een Wimecos-commissie in overleg met de inspectie, komen enkele bescheiden voorstellen tot modernisering voor, met name de behandeling van enige begrippen uit de leer der verzamelingen en het gebruik van de rekenliniaal. In de havo-serie van Liket c.s. missen we beide thema's. De auteurs hebben zelf voor dit ontbreken oog gehad. In hun voorwoord verwijzen ze namelijk voor wat de rekenliniaal betreft naar een geprogrammeerde tekst van Geerts en voor de verzamelingen naar een door hen zelf separaat uitgegeven werkschrift. Het is echter duidelijk dat door een en ander de betekenis van de verzamelingsleer voor het algebratoonderwijs in het gedrang komt. Het verdient de voorkeur deze theorie in de algebraleerstof zelf te integreren. Dan zou het bijvoorbeeld mogelijk geweest zijn de functies als „afbeeldingen van verzamelingen in andere verzamelingen” te geven en de betekenis van het verzamelingsbegrip in het hoofdstuk der vergelijkingen tot zijn recht te laten komen.

Wat stof en stofverdeling betreft zijn de boekjes traditioneel van opzet. Ze onderscheiden zich echter van andere, doordat er enkele tekstverklaringen zijn ingelast en door de opname van veel persoonlijk aansprekend didactisch commentaar.

Het eerste deeltje bevat drie series van tien lessen. De eerste geeft een herhaling en uitbreiding van het rekenen op de lagere school, de tweede een inleiding tot het gebruik van algebrataal, de derde een grotendeels in afspraken vastgelegde algebra-theorie. Deel II behandelt breuken, evenredigheden, wortelvormen, vergelijkingen en functies. Deel III behandelt, naast herhaling en uitbreiding van de theorie uit de voorafgaande deeltjes, machten, logaritmen, ongelijkheden en rijen.

De auteurs hebben het wenselijk geacht om de vervolgdeeltjes telkens te beginnen met een recapitulatie van de stof uit vorige deeltjes. Dit leidt ertoe, dat soms tal van bladzijden uit een vorig deeltje geheel worden herdrukt.

Het vaststellen van series afspraken, het introduceren van „regels”, waarbij in het midden blijft, of we met „definities” of met „eigenschappen” te maken hebben, bevordert de drill en brengt de totstandkoming van inzicht in gevaar.

Met instemming citeren we uit het voorwoord: „Grote waarde hechten wij aan het onderwijs in de moedertaal, omdat we de overtuiging zijn toegedaan, dat veel leerlingen in het begin moeilijkheden met de wiskunde hebben die terug te voeren zijn tot taalproblemen”.

Enige detailkritiek.

Op p. 85 (I) lezen we:

$$a^5 \cdot a^3 = a^8 \rightarrow a^p \cdot a^q = a^{p+q}.$$

De betekenis van de pijl klopt niet met de betekenis die de auteurs er zelf aan geven, namelijk de betekenis van „hieruit volgt”. De betekenis gaat geheel verloren op p. 31 (III):

Hoofdbewerkingen  $\rightarrow$  De omgekeerde bewerking.

Ten onrechte wordt aan de tekens  $\rightarrow$  en  $\therefore$  geheel dezelfde betekenis toegekend.

De auteurs verzuimen af en toe de omkering van een stelling te vermelden, ook als deze omkering van evenveel belang blijkt als de oorspronkelijke stelling zelf; zie de hoofdeigenschap van de evenredigheden en de stelling dat een produkt nul is, als minstens een van de factoren nul is (p. 7; III).

De term *oplosbaar stelsel* (p. 7; III) acht ik minder gelukkig. Ook strijdige stelsels en afhankelijke stelsels zijn „oplosbaar”. Zo is bij een strijdig stelsel de oplossingsverzameling de lege verzameling.

Op p. 56 (III) vragen de auteurs om te onderzoeken, of een vierkantsvergelijking

twee *onbestaanbare wortels* heeft, terwijl bedoeld wordt te onderzoeken, of de vergelijking geen wortels heeft.

Het begrip *onbestaanbaar getal* wordt op onaanvaardbare wijze ten tonele gevoerd. Nadat aangetoond is, dat er geen getal bestaat dat in het kwadraat gebracht  $-16$  oplevert, wordt zonder meer  $\sqrt{-16}$  tot onbestaanbaar getal uitgeroepen (p. 66; II). De auteurs schrijven in hun voorwoord, dat ze gebruik gemaakt hebben van de adviezen van de Nomenclatuurcommissie voor wat de terminologie betreft. Het is jammer dat ze voor wat betreft de termen reële getallen en niet-reële getallen de adviezen van de commissie hebben genegeerd. Ook de term *oneigenlijke machten* (p. 24; III) acht ik minder gelukkig. We spreken toch ook niet van oneigenlijke produkten, als de factoren breuken zijn.

Op p. 111 (III) wordt gesproken over *meetkundig* middelevenredige terwijl blijkbaar *rekenkundig* middelevenredige is bedoeld.

Bij de definitie van  $\sqrt[n]{a}$  wordt ten onrechte de voorwaarde gesteld dat  $a \geq 0$  moet zijn. Bij de toepassing wordt immers ook  $\sqrt[3]{-8}$  besproken.

Op p. 28 (III) worden in de formule  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$  aan de grondtallen onnodige beperkingen opgelegd.

Het is begrijpelijk, dat de invoering van het limietbegrip, dat bij de oneindige meetkundige rijen aan de orde komt, met de nodige onzichtigheid plaats diende te hebben. De auteurs slagen erin op p. 113-114 (III) de term *limiet* te vermijden, maar wekken daarbij de indruk, dat een „steeds groter” worden een „naar oneindig naderen” zou impliceren en dat een „steeds kleiner worden” een „naderen tot nul” tengevolge zou hebben.

Op p. 115 (III) wordt naast het gedefinieerd begrip *rij* het ongedefinieerde begrip *reeks* gebruikt.

Voor de formuleringen „een som is een optelling” en „een factor is een onderdeel van een produkt” kan ik weinig waardering opbrengen (p. 8; I).

Op p. 67 (III) staan minstens twee storende drukfouten die een alinea vrijwel onleesbaar maken. Ik citeer:

„We nemen  $2x + 3$ . Dit is een vorm met een onveranderlijke  $x$ . Het betekent, dat als we voor  $x$  verschillende getallen invullen, er ook verschillende uitkomsten zijn. De uitkomst hangt af van de gekozen  $x$ . We zeggen ook: de uitkomst IS EEN FUNCTIE VAN  $x$ .”

We schrijven  $f(x) = 2x + 3$ .”

Op p. 39 wordt aan de boekhandelaar Vlack uit Gouda een eer betoond die in feite aan de „rekenmeester, landmeter ende liefhebber der mathematische konst”, Ezechiël de Decker, toekomt. Van Haaften schreef reeds in 1925 over het gepleegde plagiaat het artikel:

„Ce n'est pas Vlack, en 1628, mais De Decker, en 1627, qui a publié le premier une table de logarithmes étendue et complète”.

De misvatting omtrent Vlack blijft onverzwakt in tal van schoolboeken voortwoekeren. In dit verband kan ik de fotokopie van de overigens interessante titelpagina van een *goniometrische* logaritmentafel uit 1661, die wel van Vlack is, maar matig waarderen.

Ik ben er van overtuigd, dat vele van de aangegeven feilen bij een herdruk gemakkelijk zullen kunnen worden verbeterd.

Joh. H. Wansink

Dr. D. N. van der Neut en Drs. A. Holwerda, *Meetkunde met de beginselen der goniometrie*, deel 3, 13e druk, prijs f 3,20; J. B. Wolters Groningen.

De auteurs hebben nogal wat veranderingen aangebracht; zij noemen de uiterste en middelste reden; de regelmatige vijfhoek en de regelmatige tienhoek en een beperking bij de aangeschreven cirkel.

Verder is de oppervlakte van de cirkel aanschouwelijker behandeld.

Met deze besnoeiingen ga ik graag akkoord; de gulden snede en de regelmatige veelhoeken vragen meer algebraïsche vaardigheid dan meetkundig inzicht. Met één mijner kinderen heb ik daarmee bijzonder onaangename ervaringen gehad, waarvan de beschrijving buiten het kader van deze bespreking valt. Daarmee wil ik graag toelichten, dat de „beperkingen” koren op mijn molen zijn; meetkundig hebben die onderwerpen ook weinig om het lijf.

Het boek mag verder bekend worden verondersteld en behoeft geen aanbeveling meer.

Groenman

## RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

194. Enige kinderen spelen een balspel. Elk kind heeft één bal. Op een sein van de spelleider staan allen stil. We nemen aan, dat al hun onderlinge afstanden dan verschillend zijn. Elk kind gooit nu zijn bal naar het dichtstbijstaande kind. Daarna laat ieder kind het aantal ballen zien, dat hij verkregen heeft. Sommigen hebben één bal, anderen twee, weer anderen drie. Eén kind had zelfs vier ballen, terwijl een ander triomfantelijk zes ballen toonde. Eén ventje was ontroostbaar, want hij had geen enkele bal gekregen. Is er reden aan te nemen, dat de opdracht niet op juiste wijze uitgevoerd is?

195. De functie  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$  heeft op elke lijn door de oorsprong een minimum in de oorsprong. Heeft  $f(x, y)$  een minimum in de oorsprong? (ontleend aan Schuh).

## OPLOSSINGEN

192. Een klasse bevat hoogstens 32 leerlingen. Allen kiezen een natuurlijk getal kleiner dan 100. Het gemiddelde blijkt 53,34 te zijn. Het experiment wordt herhaald, echter is nu 1 leerling minder aanwezig. Het gemiddelde is 68,57. Gevraagd de som van de gekozen getallen de eerste keer.

Als de klasse b.v. 12 leerlingen bevat, kunnen de cijfers achter de komma van het gemiddelde alleen maar zijn:

00, 08, 17, 25, 33, 42, 50, 58, 67, 75, 83, 92.

Men vindt nu, dat 34 alleen kan voorkomen bij een klassebezetting van 29 of 32. Bij 31 kan 57 niet voorkomen, bij 28 wel. De klasse bestaat dus uit 29 leerlingen. De som van de getallen is de eerste keer dus 1547.

193. Gevraagd werd de kans, dat de helft van een willekeurig gekozen natuurlijk getal (groter dan 9) met een 6 begint.

Om kansen te kunnen uitrekenen moet een kansverdeling gegeven zijn. Trekt men een willekeurige kaart uit een spel van 52 kaarten, dan stelt men voor elke kaart de kans op het trekken van die kaart  $\frac{1}{52}$ . Kiest men op willekeurige wijze een natuurlijk getal, dat hoogstens gelijk aan 1000 is, dan stelt men voor elk van deze getallen de kans op het kiezen ervan  $\frac{1}{1000}$ . Eerst na een dergelijke vaststelling kan men ertoe overgaan kansen te berekenen.

In ons geval zijn er helaas onbegrensd veel mogelijkheden om het natuurlijke getal te kiezen, zodat een simpele aanname betreffende de kansverdeling, zoals in bovenstaande voorbeelden mogelijk was, hier niet meer lukt. Door eerst vast te stellen, welk procédé we bij het kiezen van het natuurlijke getal zullen volgen, kunnen we tot een aanname betreffende deze kansverdeling komen. Deze aanname zal in de praktijk steeds zo zijn, dat men het oneindige veld van mogelijkheden a priori begrenst. B.v. men stelt vast, dat men een getal zal kiezen van hoogstens 10 cijfers. Daarna neemt men aan, dat de kansen op het kiezen van een bepaald getal voor al deze getallen gelijk is. Nu is de redenering, die vorige maand leidde tot de uitkomst  $\frac{1}{45}$ , verantwoord geworden.

Men kan ook een notaris laten draaien aan een rad van avontuur, waarbij de eerste keer de 0 uitgesloten wordt. Men schrijft de gedraaide cijfers achter elkaar op en stopt, zodra een wekker afloopt. De tijd, waarbinnen deze wekker afloopt, moet a priori gelimiteerd worden. Ook zo komt men op  $\frac{1}{45}$ .

Het natuurlijke verstand leverde echter  $\frac{1}{9}$ . Met welk procédé correspondeert de impuls van het natuurlijke verstand? Neem alle getallen 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, ...,  $10^n$ , waarin  $n$  een of ander natuurlijk getal is, dat vooraf gekozen wordt. Vermenigvuldig deze met 2. We krijgen nu de serie natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...,  $2 \cdot 10^n$ . Uit deze getallen kiezen we ons aanvangsgetal en we stellen a priori vast, dat alle keuzen even waarschijnlijk zijn. Nu is de kans, dat de helft met een 6 begint, inderdaad  $\frac{1}{9}$ . (Een onbelangrijk detail is, dat de voorwaarde dat het oorspronkelijke getal groter dan 9 moet zijn, hier is weggelaten. Laat men deze voorwaarde niet weg, dan nadert de kans tot  $\frac{1}{9}$  als  $n \rightarrow \infty$ ).

De oorzaak van de moeilijkheden lag dus in een onvolledige probleemstelling. Deze onvollédigheid maakte het onmogelijk de kans te berekenen.

VERSCHIJNT DIT VOORJAAR BIJ  
WOLTERS - NOORDHOFF

# WISKUNDE VOOR DE BRUGKLAS

C.J. ALDERS • K. H. COHEN • J. R. F. VAN DUYNEN  
IR. C. VAN VLIET • L. WIJNOLTS



TECHNISCHE HOGESCHOOL  
TWENTE

Bij de BIBLIOTHEEK kan worden geplaatst  
een academicus (dr., drs., ir.) als

## HOOFD WETENSCHAPPELIJKE STAF

Zijn taak zal zijn het leiding geven aan een team van wetenschappelijke ambtenaren die werkzaam zijn ten behoeve van de onderwerpscatalogisering. Gevraagd wordt een kwalificatie voor tenminste een van de volgende vakgebieden: wiskunde, natuurkunde of communicatietechniek.

Aanstelling zal geschieden, afhankelijk van leeftijd en ervaring, in het rangenstelsel voor wetenschappelijke ambtenaren.

Bij gebleken geschiktheid is na enige jaren benoeming tot onderbibliothecaris mogelijk.

Inlichtingen over deze functie zijn te verkrijgen bij de bibliothecaris, tel. 05420-44644 toestel 2030.

Schriftelijke sollicitaties aan het hoofd van de afdeling personeelszaken, postbus 217, Enschede, met vermelding van no. Bi 6806/6.

---

# moderne wiskunde deel 1 definitieve versie is verschenen wolters-noordhoff

---

## *Aangeboden:*

*Wiskundige Bibliotheek van wijlen B. Coster, in z'n  
geheel voor Fl. 300,00*

---

*Lijst ter inzage op aanvraag: M. Coster, Elzen-  
laan 42, Hilversum*