EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

VI — 1 MAART 1968

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EIGENVECTOREN VAN LINEAIRE TRANSFORMATIES. 1.

door

ROGER HOLVOET

(Universiteit Brussel)

Het is alom bekend dat de *vectorruimten* en de *lineaire afbeeldingen* een fundamentele rol spelen in de meest verschillende gebieden van de theoretische en de toegepaste wiskunde. De werktuigen van de lineaire algebra zijn dan ook onmisbaar voor de wiskundige en de wiskundegebruiker. We denken hierbij aan het oeuvre van E. Noether, de moeder van de zgn. moderne algebra, de linearisatie van de theorie van Galois door E. Artin, de lichaamsuitbreidingen in de algebraïsche meetkunde, de homologische algebra, de toepassingen van de vectorrekening in de ingenieurswetenschappen en in de wiskundige natuurkunde, in 't bijzonder in de quantische theorieën (Hilbertruimten, representaties van de orthogonale groepen, spinoren) en in de relativiteitsleer (tensorrekening, Lorentzgroep).

De lineaire algebra is ook belangrijk voor het wiskundeonderwijs. Inderdaad, zoals de integraalrekening toegelaten heeft archimedische problemen, die van de Griekse beroepswiskundige heel wat wiskundig doorzicht eisten, eenvoudig op te lossen, zo kunnen de leerlingen thans de belangrijke resultaten uit de meetkunde dank zij de vectorrekening eenvoudig terugvinden. Nu is de *vlakke meetkunde* doodgewoon de studie van een 2-dimensionale reële vectorruimte met positief-definiet scalair produkt; de *meetkunde van de ruimte* is de theorie van een 3-dimensionale reële vectorruimte met positief-definiet scalair produkt. De studie van de *kwadratische vormen* op deze ruimten is die van de *kegelsneden* en de *kwadrieken.* Op het historisch seminarie dat van 23 november tot 4 december 1959 te Royaumont door de O.E.S.O. (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) ingericht werd, kon G. Choquet dan ook een antwoord geven op de even historische vraag van Alexander de Grote aan Menaechmus: de „voie royale" naar de meetkunde is de lineaire algebra.

In Papy en F. Papy [10] worden het lichaam van de reële getallen en de reële vectorruimten ingevoerd voor leerlingen van

13 jaar. Voor het gebruik van de lineaire algebra in het middelbaar onderwijs, zie J. Dieudonné [2], G. Papy [8], [9], Papy en F. Papy [10][11][12], P. G. J. Vredenduin [13].

Dit artikel is gewijd aan de *eigenvectoren van lineaire transformaties*, die van belang zijn in de analyse, de sterrenkunde, de meetkunde, de mechanica, de fysica, de numerieke analyse.

We ontmoeten de theorie van de eigenvectoren reeds bij Euler (assen van een kegelsnede of van een kwadriek, hoofdinertieassen van een vast lichaam), bij Lagrange en bij Laplace (theorie van de kleine bewegingen, seculaire ongelijkheden van de planeten). Bij de studie van de singulariteiten van de differentiaalvergelijkingen werd Cauchy gevoerd tot de eigenwaardenvergelijking of karakteristieke vergelijking van een lineaire transformatie (door de sterrenkundigen ook seculaire vergelijking genoemd). Het meetkundig werk van Sylvester, Cayley (de stelling van Cayley-Hamilton, 1858), Weierstrass (de elementaire delers), Jordan (de „normaalvorm van Jordan") en Kronecker hebben deze theorie verder ontwikkeld. In de 20e eeuw werden de eigenvectoren uitermate populair dank zij de quantummechanica van W. Heisenberg.

In dit artikel geven we een *meetkundige* uiteenzetting. Vele eigenschappen over de eigenvectoren van lineaire transformaties zijn voor de leerlingen van het middelbaar onderwijs mooie en nuttige oefeningen over lineaire algebra. We hebben dikwijls gebruik gemaakt van de vectorruimte Π_0 (het vlak met vast punt 0), die de leraar talrijke interessante pedagogische situaties levert.

In een volgende bijdrage zullen we enkele bijkomende resultaten over de eigenvectoren geven.

1. Algemeenheden

We veronderstellen dat de lezer vertrouwd is met de begrippen vectorruimte, deelvectorruimte van een vectorruimte, basis van een vectorruimte (cf. F. Bingen [1], R. Holvoet [4], N. H. Kuiper [5] G. Papy [6] [7]).

In dit artikel beperken we ons tot vectorruimten over het lichaam R van de reële getallen. Als V een vectorruimte over het lichaam R is, zeggen we meestal dat V een *reële vectorruimte* is.

Zij V een reële vectorruimte. De interne wet van V noemen we *optelling* en noteren we $+$. De externe wet noemen we *scalaire vermenigvuldiging* en noteren we .; deze . zal dikwijls weggelaten worden (als $r \in \mathrm{R}$ en $\vec{v} \in V$, zullen we dus dikwijls $r\vec{v}$ in plaats van

$r \,.\, \vec{v}$ schrijven). De elementen van V noemen we *vectoren*, de elementen van R noemen we *scalairen*. De elementen van V zullen we meestal aanduiden door een letter waarboven een pijltje gezet wordt. Het neutraal element van de groep $V, +$ noteren we $\vec{0}$; het tegengestelde van $\vec{v}$ in $V, +$ wordt $-\vec{v}$ genoteerd.

Met Π_0 duiden we het vlak Π met het vast punt 0 aan (cf. fig. 1).

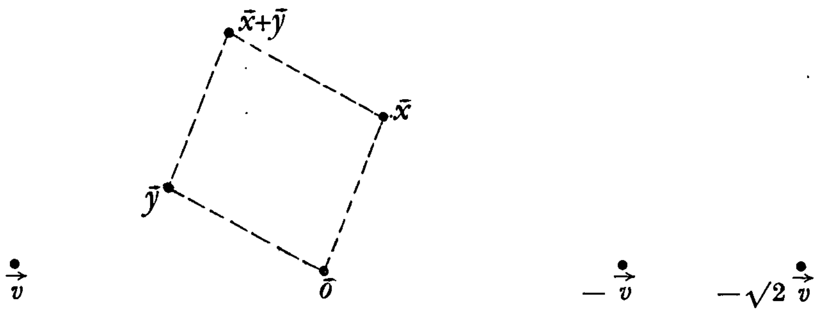


Fig. 1

Elke rechte lijn die in Π_0 bevat is en $\vec{0}$ bevat, is een deelvectorruimte van de vectorruimte Π_0. De vectorruimte Π_0 bevat natuurlijk de twee triviale deelvectorruimten: $\{\vec{0}\}$ en Π_0.

De vectorruimte van de veeltermen in X met coëfficiënten uit R, noemen we R[X].

Zij V een reële vectorruimte. Men noemt *lineaire transformatie van* V elke transformatie t van de verzameling V, waarvoor geldt

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : t(\vec{v} + \vec{w}) = t(\vec{v}) + t(\vec{w})$$

en

$$\forall a \in \mathrm{R}, \forall \vec{v} \in V : t(a\,\vec{v}) = a\,.\,t(\vec{v})$$

Elke *draaiing om* $\vec{0}$ is een lineaire transformatie van Π_0. De *derivatie in* R[X], gedefinieerd door

$$\mathrm{d} : \mathrm{R}[\mathrm{X}] \to \mathrm{R}[\mathrm{X}] : \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \to \sum_{i=1}^{m} i a_i X^{i-1}$$

is een lineaire transformatie van de vectorruimte R[X].

Daarentegen is elke niet identieke *verschuiving* van Π_0 *niet lineair*. Een voorbeeld van een transformatie van R, die niet lineair is: de functie

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} : x \to ax + b \quad , \quad \text{met} \quad b \neq 0.$$

Inderdaad,

$$f(0+0) = f(0) = b \neq 2b = f(0) + f(0).$$

Onder nr. 2 zullen we talrijke voorbeelden van lineaire transformaties van vectorruimten ontmoeten.

Als A en B deelvectorruimten van de vectorruimte V zijn, zeggen we dat V *directe som* van A en B is als en slechts als elk element van V op juist één manier de som is van een element van A en van een element van B. Men heeft de equivalentie

$$V = A \oplus B \Leftrightarrow V = A + B \quad \text{en} \quad A \cap B = \{\vec{0}\}$$

(cf. Papy [7], hoofdstuk 3, nr. 5).

In het vervolg zeggen we kortweg deelruimte in plaats van deelvectorruimte.

2. Eigenvectoren en eigenwaarden van een lineaire transformatie.

Zij V een reële vectorruimte en zij t een lineaire transformatie van V. Het kan gebeuren dat t sommige van $\vec{0}$ verschillende elementen van V op een scalair veelvoud van zichzelf afbeeldt. Beschouwen we bv. de vectorruimte Π_0; zij A een ééndimensionale deelruimte van Π_0; noemen we s de spiegeling van Π_0 t.o.v. A.

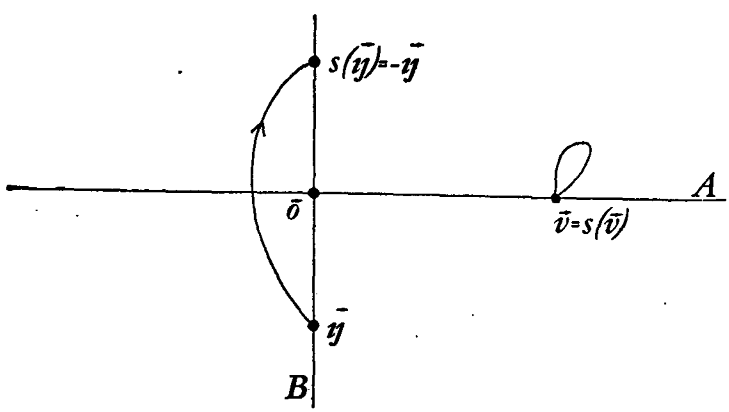


Fig. 2

De vector $\vec{v} \in A$ wordt door s op een scalair veelvoud van zichzelf afgebeeld, nl. $1\vec{v}$. In formulevorm

$$s(\vec{v}) = 1\vec{v}.$$

Elk element van A wordt door s op zulk een scalair veelvoud van zichzelf afgebeeld

$$\forall \vec{x} \in A : s(\vec{x}) = 1\vec{x}.$$

Noemen we nu B de loodlijn op A, die $\vec{0}$ bevat. Aangezien

$$\forall \vec{y} \in B : s(\vec{y}) = (-1)\vec{y}$$

wordt ook elk element van B op een scalair veelvoud van zichzelf afgebeeld.

De elementen van $A \cup B$ zijn de enige elementen van Π_0, die door s op een scalair veelvoud van zichzelf afgebeeld worden. We drukken deze eigenschap uit door te zeggen dat *de van $\vec{0}$ verschillende elementen van $A \cup B$ de eigenvectoren van s zijn.*

DEFINITIE 1. *Als t een lineaire transformatie van de vectorruimte V is, dan heet de vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ een eigenvector van t als en slechts als er een $\lambda \in \mathrm{R}$ bestaat zó, dat*

$$t(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.$$

De scalair λ noemt men dan de bijbehorende eigenwaarde

Als $\vec{v}$ een eigenvector van t is, dan is de bijbehorende eigenwaarde bepaald door $\vec{v}$. De scalair $\lambda \in \mathrm{R}$ is een eigenwaarde van t als en slechts als er een van $\vec{0}$ verschillende $\vec{v} \in V$ bestaat zó, dat $t(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Voorbeelden.

1) *Eigenvectoren van de spiegeling s.* Zij s de spiegeling van Π_0 t.o.v. de rechte lijn A, die $\vec{0}$ bevat. Zoals hierboven verklaard werd, is elk van $\vec{0}$ verschillend element van $A \cup B$ een eigenvector van s. De elementen van $A\backslash\{\vec{0}\}$ zijn de eigenvectoren met eigenwaarde 1. De elementen van $B\backslash\{\vec{0}\}$ zijn de eigenvectoren met eigenwaarde $-$ 1.

2) *Eigenvectoren van de projectie p van Π_0 op A, evenwijdig met B.* Zijn A en B twee verschillende ééndimensionale deelruimten van Π_0. Noemen we p de projectie van Π_0 op A, evenwijdig met B.
Elk element van $A\backslash\{\vec{0}\}$ is een eigenvector van p

$$\forall \vec{x} \in A : p(\vec{x}) = 1\vec{x}.$$

De bijbehorende eigenwaarde is 1. De elementen van $B\backslash\{\vec{0}\}$ zijn de eigenvectoren met eigenwaarde 0; in formulevorm

$$\forall \vec{y} \in B : p(\vec{y}) = 0\vec{y}.$$

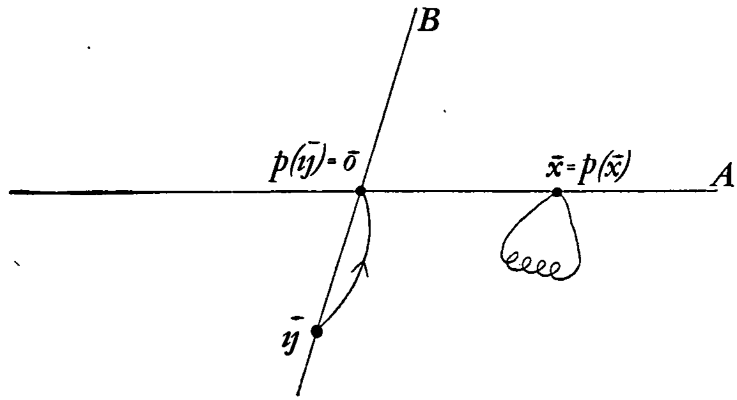


Fig. 3

3) *Eigenvectoren van de puntspiegeling t.o.v.* $\vec{0}$. Duiden we de puntspiegeling van Π_0 t.o.v. $\vec{0}$ door s_0 aan.

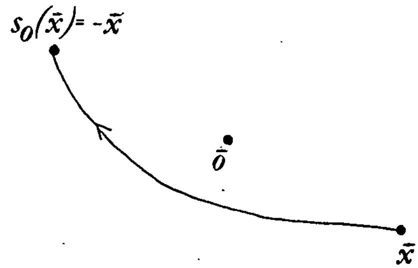


Fig. 4

Elk van $\vec{0}$ verschillend element van Π_0 is een eigenvector van s_0, met eigenwaarde -1. Inderdaad,

$$\forall \vec{x} \in \Pi_0 : s_0(\vec{x}) = (-1)\vec{x}.$$

4) *Een kwart draai om* $\vec{0}$ *heeft geen enkele eigenvector.* Inderdaad,

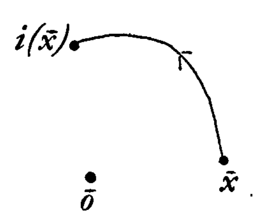


Fig. 5

noem i een van de kwart draaien om $\vec{0}$. Geen enkele vector $\vec{x} \neq \vec{0}$ wordt door i op een scalair veelvoud van zichzelf afgebeeld. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de andere kwart draai om $\vec{0}$.

Men gaat gemakkelijk na dat de identieke transformatie van π_0 en de puntspiegeling s_0 de enige draaiingen van π_0 zijn, waarvoor eigenvectoren bestaan.

5) *Eigenvectoren van een afschuiving.* Men weet dat een lineaire transformatie van Π_0 bepaald is door het geven van de beelden van de elementen van een basis van Π_0. In fig. 6 definiëren we de *afschuiving* t.

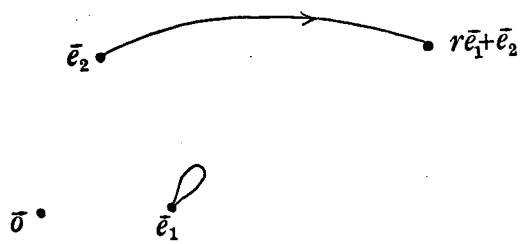


Fig. 6

We hebben dus gesteld

$$t(\vec{e}_1) = \vec{e}_1,\ t(\vec{e}_2) = r\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \text{ waarbij } r \in \mathrm{R}\backslash\{0\}.$$

Berekenen we nu de eigenvectoren van deze afschuiving t. Aangezien $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ een basis van π_0 is, wordt elk element van π_0 op juist één manier uitgedrukt als lineaire combinatie

$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \text{ met } a_1, a_2 \in \mathrm{R}.$$

Het element $a_1e_1 + a_2e_2 \in \Pi_0\backslash\{\vec{0}\}$ is een eigenvector van t als en slechts als er een $\lambda \in \mathrm{R}$ bestaat zó, dat

$$t(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) = \lambda(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2). \tag{1}$$

Houden we rekening met de lineariteit van t, dan vinden we

$$\begin{aligned} t(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) &= a_1 \,.\, t(\vec{e}_1) + a_2 \,.\, t(\vec{e}_2) \\ &= a_1\vec{e}_1 + a_2(r\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= (a_1 + a_2r)\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2. \end{aligned}$$

(1) wordt dus

$$(a_1 + a_2r)\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = (\lambda a_1)\vec{e_1} + (\lambda a_2)\vec{e_2}.$$

Daaruit volgt

$$a_1 + a_2r = \lambda a_1 \qquad \text{en} \qquad a_2 = \lambda a_2.$$

Uit $a_2 = \lambda a_2$ volgt $(1 - \lambda)a_2 = 0$, dwz.

$$\lambda = 1 \qquad \text{of} \qquad a_2 = 0.$$

Aangezien $r \neq 0$ leiden we daaruit af: *de eigenvectoren van de afschuiving t, gedefinieerd door*

$$t(\vec{e_1}) = \vec{e_1},\ t(\vec{e_2}) = r\vec{e_1} + \vec{e_2},\ \textit{waarbij } r \in \mathrm{R}\backslash\{0\},$$

zijn de van $\vec{0}$ *verschillende elementen van de deelruimte van* Π_0, *voortgebracht door* $\vec{e_1}$. De eigenvectoren van t zijn dus de elementen van

$$\mathrm{R}\vec{e_1}\backslash\{\vec{0}\} = \{a_1\vec{e_1} | a_1 \in \mathrm{R}\backslash\{0\}\}.$$

De bijbehorende eigenwaarde is 1.

6) *Eigenvectoren van de derivatie in* R[X]. Men noemt R[X] de vectorruimte van alle veeltermen in X, met reële getallen als coëfficiënten. De derivatie in R[X], gedefinieerd door

$$\mathrm{d} : \mathrm{R[X]} \to \mathrm{R[X]} : \sum_{i=0}^{m} a_i \mathrm{X}^i \to \sum_{i=1}^{m} ia_i\, \mathrm{X}^{i-1}$$

is een lineaire transformatie van de vectorruimte R[X]. Berekenen we de eigenvectoren van d. De van nul verschillende veelterm $\sum_{i=0}^{m} a_i\mathrm{X}^i$ is een eigenvector van d als en slechts als er een $\lambda \in \mathrm{R}$ bestaat zó, dat

$$\mathrm{d}\ (\sum_{i=0}^{m} a_i \mathrm{X}^i) = \lambda \,.\, \sum_{i=0}^{m} a_i \mathrm{X}^i$$

dwz.

$$\sum_{i=1}^{m} ia_i\, \mathrm{X}^{i-1} = \sum_{i=0}^{m} (\lambda a_i)\mathrm{X}^i.$$

Daaruit leidt men af dat *de eigenvectoren van de derivatie* d *de van nul verschillende veeltermen van de graad* 0 *zijn*. M.a.w. de eigenvectoren van d zijn de elementen van R\{0}. *De bijbehorende eigenwaarde is* 0.

7) *Eigenvectoren van een homothetie.* Zij V een reële vectorruimte.

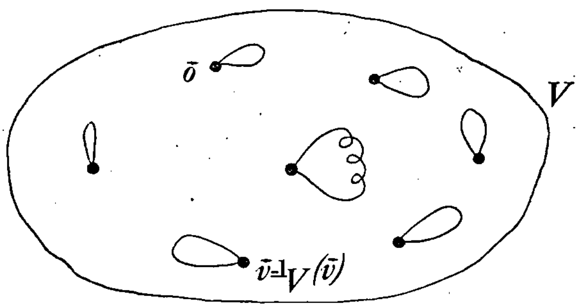
Als $r \in \mathrm{R}$, dan noemen we r_V de homothetie met verhouding r.

$$r_V : V \to V : \vec{x} \to r\vec{x}$$

Elk van $\vec{0}$ *verschillend element van* V *is een eigenvector van* r_V. *De bijbehorende eigenwaarde is* r. Inderdaad, voor alle $\vec{x} \in V$,

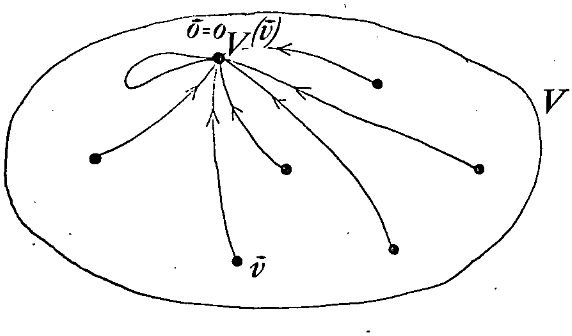
$$r_V(\vec{x}) = r\vec{x}.$$

In het bijzonder is elk element van $V \setminus \{\vec{0}\}$ een eigenvector van *de identieke transformatie van* V, met bijbehorende eigenwaarde 1, (cf. fig. 7) en is elk element van $V \setminus \{\vec{0}\}$ een eigenvector van de *nultransformatie van* V, met bijbehorende eigenwaarde 0 (cf. fig. 8).



$\forall \vec{x} \in V : 1_V(\vec{x}) = \vec{x} = 1\vec{x}$

Fig. 7



$\forall \vec{x} \in V : 0_V(\vec{x}) = \vec{0} = 0\vec{v}$

Fig. 8

3. Eigenruimten van een lineaire transformatie

Zij V een reële vectorruimte en t een lineaire transformatie van V. Voor alle $\lambda \in \mathrm{R}$, noemen we $V(\lambda)$ de verzameling van de $\vec{x} \in V$, waarvoor geldt $t(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. In formulevorm

$$V(\lambda) = \{\vec{x} \in V | t(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}.$$

$V(\lambda)$ is dus de vereniging van de verzameling $\{\vec{0}\}$ en van de verzameling van de eigenvectoren met eigenwaarde λ van t.

STELLING 1. *Voor alle $\lambda \in \mathrm{R}$, is $V(\lambda)$ een deelruimte van V, die invariant is onder t.*

Bewijs. Zij $\lambda \in \mathrm{R}$. We hebben het volgende kenmerk: $V(\lambda)$ is een deelruimte van V als en slechts als

$$\forall a, b \in \mathrm{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V(\lambda) : a\vec{v} + b\vec{w} \in V(\lambda).$$

Zij $a, b \in \mathrm{R}$ en $\vec{v}, \vec{w} \in V(\lambda)$. Men krijgt

$$\begin{aligned} t(a\vec{v} + b\vec{w}) &= a \,.\, t(\vec{v}) + b \,.\, t(\vec{w}) && \text{(lineariteit van } t\text{)} \\ &= a\lambda\vec{v} + b\lambda\vec{w} && (\vec{v}, \vec{w} \in V(\lambda)) \\ &= \lambda(a\vec{v} + b\vec{w}) && \text{(eigenschappen van de vectorruimten).} \end{aligned}$$

Daaruit volgt dat $a\vec{v} + b\vec{w} \in V(\lambda)$.

Blijft te bewijzen

$$\text{als } \vec{x} \in V(\lambda), \text{ dan } t(\vec{x}) \in V(\lambda).$$

Welnu, uit $t(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ volgt

$$t(t(\vec{x})) = t(\lambda\vec{x}) = \lambda t(\vec{x}),$$

waaruit we afleiden dat $t(\vec{x}) \in V(\lambda)$. Q.e.d.

DEFINITIE 2. *Als λ een eigenwaarde van t is, dan noemen we $V(\lambda)$ de eigenruimte met eigenwaarde λ van t.*

In onderstaande tabel geven we voor elk voorbeeld uit nr. 2 de eigenwaarden, de overeenkomende eigenruimten en de dimensie van deze eigenruimten.

	λ	$V(\lambda)$	$\dim V(\lambda)$
spiegeling van Π_0 t.o.v. A	1	A	1
(B loodrecht op A)	-1	B	1
projectie van Π_0 op A, evenwijdig met B	1	A	1
	0	B	1
puntspiegeling s_0	-1	Π_0	2
kwart draai	—	—	—
afschuiving t	1	$\mathrm{R}\vec{e}_1$	1
derivatie	0	R	1
homothetie r_V	r	V	dim V
identieke transformatie van V	1	V	dim V
nultransformatie van V	0	V	dim V

Opmerkingen. 1) De beperking van t tot $V(\lambda)$ is de homothetie met verhouding λ in $V(\lambda)$.

2) $V(0) = \{\vec{x} \in V | t(\vec{x}) = \vec{0}\}$ is de kern van t.

3) $\lambda \in \mathrm{R}$ is een eigenwaarde van t als en slechts als $V(\lambda) = \{\vec{x} \in V | t(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} \neq \{\vec{0}\}$.

4) Als t een lineaire transformatie van de vectorruimte V is, hangt de verzameling $\{\vec{x} \in V | t(x) = \lambda\vec{x}\}$ niet alleen van λ af, maar ook van t. Aangezien het in dit artikel steeds duidelijk is welke transformatie beschouwd wordt, schrijven we $V(\lambda)$ in plaats van $V(\lambda; t)$.

4. Projecties van een vectorruimte

DEFINITIE 3. *Zij V een vectorruimte. De lineaire transformatie p van V is een projectie als en slechts als $p^2 = p$.*

De volgende stelling is een generalisatie van voorbeeld 2 van nr. 2.

STELLING 2. *Als p een projectie van de vectorruimte V is en λ een eigenwaarde van p, dan is λ gelijk aan* 0 of 1.

Bewijs. Zij p een projectie van de vectorruimte V en zij λ een eigenwaarde van p. Er bestaat dus een $\vec{v} \in V \backslash \{0\}$, waarvoor geldt

$$p(\vec{v}) = \lambda\vec{v}. \tag{2}$$

We vinden dan

$$\begin{aligned} \lambda\vec{v} &= p(\vec{v}) && \text{(wegens (2))} \\ &= p^2(\vec{v}) && (p \text{ is een projectie}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p(p(\vec{v})) && \text{(definitie van } p^2\text{)}\\
&= p(\lambda\vec{v}) && \text{(wegens (2))}\\
&= \lambda p(\vec{v}) && \text{(} p \text{ is lineair)}\\
&= \lambda(\lambda\vec{v}) && \text{(wegens (2))}\\
&= \lambda^2\vec{v} && \text{(eigenschap van de vectorruimten).}
\end{aligned}
$$

Daaruit volgt

$$\lambda^2\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

d.w.z.

$$(\lambda^2 - \lambda)\vec{v} = \vec{0}.$$

Aangezien $\vec{v} \neq \vec{0}$, leiden we daaruit af

$$\lambda^2 = \lambda.$$

Nu zijn 0 en 1 de enige reële getallen die idempotent zijn voor de vermenigvuldiging, waaruit de bewering volgt.

Zij p een projectie van de vectorruimte V. Dan is

$$V(0) = \{\vec{x} \in V \mid p(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

de kern van p; en

$$V(1) = \{\vec{x} \in V \mid p(\vec{x}) = \vec{x}\}$$

is de verzameling van de dekpunten van p.

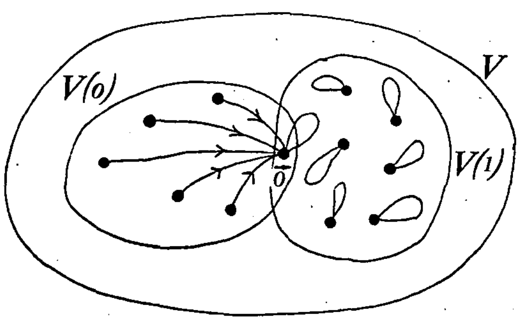


Fig. 9

We zullen bewijzen dat elk element van V op juist één manier de som is van een element van $V(0)$ en van een element van $V(1)$.

En omgekeerd, als p een lineaire transformatie van de vectorruimte

V is zó, dat elk element van V op juist één manier de som is van een element van $V(0)$ en van een element van $V(1)$, dan is p een projectie van V. Deze resultaten maken het onderwerp uit van

STELLING 3. *De lineaire transformatie p van V is een projectie van V als en slechts als $V = V(0) \oplus V(1)$.*

Bewijs. Zij p een projectie van V. Bewijzen we eerst dat elk element van V som is van een element van $V(0)$ en van een element van $V(1)$. Welnu, voor alle $\vec{v} \in V$,

$$\vec{v} = (\vec{v} - p(\vec{v})) + p(\vec{v}) \tag{3}$$

Enerzijds krijgen we

$$p(\vec{v} - p(\vec{v})) = p(\vec{v}) - p(p(\vec{v})) = p(\vec{v}) - p^2(\vec{v}) = p(\vec{v}) - p(\vec{v}) = \vec{0}$$

waaruit volgt

$$\vec{v} - p(\vec{v}) \in V(0).$$

Anderzijds

$$p(p(\vec{v})) = p^2(\vec{v}) = p(\vec{v}),$$

waaruit volgt

$$p(\vec{v}) \in V(1).$$

Bewijzen we nu dat $V(0) \cap V(1) = \{\vec{0}\}$. Uit $\vec{v} \in V(0) \cap V(1)$ volgt

$$p(\vec{v}) = 0\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{en} \qquad p(\vec{v}) = 1\vec{v} = \vec{v}.$$

Dus $\vec{v} = \vec{0}$.

We hebben bewezen

$$V = V(0) + V(1) \qquad \text{en} \qquad V(0) \cap V(1) = \{\vec{0}\}$$

wat equivalent is met

$$V = V(0) \oplus V(1).$$

Omgekeerd, zij p een lineaire transformatie van V zó, dat $V = V(0) \oplus V(1)$, waarbij

$$V(0) = \{\vec{x} \in V | p(\vec{x}) = \vec{0}\}$$
$$V(1) = \{\vec{x} \in V | p(\vec{x}) = \vec{x}\}$$

Te bewijzen: p is een projectie van V. Welnu, aangezien $V = V(0) \oplus V(1)$, is elk element van V op juist één manier de som van een element van $V(0)$ en van een element van $V(1)$. Stel dus voor alle $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \vec{y} + \vec{z}$, met $\vec{y} \in V(0)$ en $\vec{z} \in V(1)$. Men vindt dan

$$p^2(\vec{v}) = p(p(\vec{v})) = p(p(\vec{y} + \vec{z})) = p(p(\vec{y}) + p(\vec{z})) = p(\vec{0} + \vec{z})$$
$$= p(\vec{z}) = p(\vec{y}) + p(\vec{z}) = p(\vec{y} + \vec{z}) = p(\vec{v}).$$

Daaruit volgt

$$\forall \vec{v} \in V : p^2(\vec{v}) = p(\vec{v})$$

d.w.z.

$$p^2 = p \quad \text{Q.e.d.}$$

Het kan gebeuren dat een van de deelruimten $V(0)$ of $V(1)$ gelijk is aan $\{\vec{0}\}$. Als $V(0) = \{\vec{0}\}$, dan $V(1) = V$ en p is de identieke transformatie van V. Als $V(1) = \{\vec{0}\}$, dan is p de nultransformatie van V.

Bij wijze van voorbeeld, bekijken we in fig. 10 de ontbinding (3) in het geval dat p de projectie van Π_0 op A, evenwijdig met B, is (cf. 2, vb. 2).

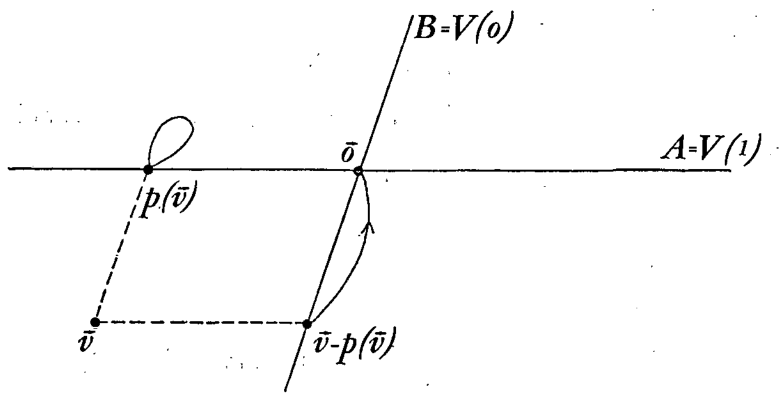


Fig. 10

5. Involuties van een vectorruimte

DEFINITIE 4. *Zij V een vectorruimte. De lineaire transformatie u van V is een involutie als en slechts als $u^2 = 1_V$* (waarbij 1_V de identieke transformatie van V aanduidt).

De volgende stelling is een generalisatie van voorbeeld 1 van nr. 2.

STELLING 4. *Als u een involutie van de vectorruimte V is en λ een eigenwaarde van u, dan is λ gelijk aan 1 of -1.*

Bewijs. Zij u een involutie van de vectorruimte V en zij λ een eigenwaarde van u. Er bestaat dus een $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$, waarvoor geldt

$$u(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

We vinden dan

$$1\vec{v} = \vec{v} = 1_V(\vec{v}) = u^2(\vec{v}) = u(u(\vec{v})) = u(\lambda \vec{v}) = \lambda u(\vec{v}) = \lambda(\lambda \vec{v})$$
$$= \lambda^2 \vec{v}.$$

Daaruit volgt

$$\lambda^2 \vec{v} = 1\vec{v}$$

d.w.z.

$$(\lambda^2 - 1)\vec{v} = \vec{0}.$$

Aangezien $\vec{v} \neq \vec{0}$, volgt daaruit

$$\lambda = 1 \qquad \text{of} \qquad \lambda = -1 \quad \text{Q.e.d.}$$

Zij u een involutie van de vectorruimte V. Volgens nr. 3 stellen we

$$V(1) = \{\vec{x} \in V | u(\vec{x}) = \vec{x}\}$$
$$V(-1) = \{\vec{x} \in V | u(\vec{x}) = -\vec{x}\}.$$

We zullen in stelling 5 bewijzen dat elk element van V op juist één manier de som is van een element van $V(1)$ en van een element van $V(-1)$; en omgekeerd, als u een lineaire transformatie van de vectorruimte V is zó, dat elk element van V op juist één manier de som is van een element van $V(1)$ en van een element van $V(-1)$, dan is u een involutie van V.

STELLING 5. *De lineaire transformatie u van V is een involutie van V als en slechts als $V = V(1) \oplus V(-1)$.*

Bewijs. Zij u een involutie van V.

1) $V = V(1) + V(-1)$.

Inderdaad, voor alle $\vec{v} \in V$,

$$\vec{v} = \tfrac{1}{2}(\vec{v} + u(\vec{v})) + \tfrac{1}{2}(\vec{v} - u(\vec{v})). \tag{4}$$

Uit

$$u(\tfrac{1}{2}(\vec{v} + u(\vec{v}))) = \tfrac{1}{2}u(\vec{v}) + \tfrac{1}{2}u(u(\vec{v})) = \tfrac{1}{2}u(\vec{v}) + \tfrac{1}{2}\vec{v} = \tfrac{1}{2}(\vec{v} + u(\vec{v}))$$

volgt

$$\tfrac{1}{2}(\vec{v} + u(\vec{v})) \in V(1).$$

Op analoge manier bewijst men dat

$$\tfrac{1}{2}(\vec{v} - u(\vec{v})) \in V(-1).$$

2) $V(1) \cap V(-1) = \{\vec{0}\}$.

Inderdaad, $\vec{v} \in V(1) \cap V(-1)$ betekent

$$u(\vec{v}) = 1\vec{v} = -1\vec{v}.$$

Daaruit volgt

$$\vec{v} = -\vec{v}$$

d.w.z.

$$\vec{v} = \vec{0}.$$

Omgekeerd, zij u een lineaire transformatie van V zó, dat $V = V(1) \oplus V(-1)$, waarbij

$$V(1) = \{\vec{x} \in V | u(\vec{x}) = \vec{x}\}$$
$$V(-1) = \{\vec{x} \in V | u(\vec{x}) = -\vec{x}\}.$$

Te bewijzen: u is een involutie van V. Welnu, aangezien $V = V(1) \oplus V(-1)$, stellen we voor alle $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \vec{y} + \vec{z}$, met $\vec{y} \in V(1)$ en $\vec{z} \in V(-1)$.

We krijgen dan

$$\begin{aligned} u^2(\vec{v}) &= u(u(\vec{v})) = u(u(\vec{y} + \vec{z})) = u(u(\vec{y}) + u(\vec{z})) = u(\vec{y} - \vec{z}) \\ &= u(\vec{y}) - u(\vec{z}) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{v} = 1_V(\vec{v}). \end{aligned}$$

Daaruit volgt

$$\forall \vec{v} \in V : u^2(\vec{v}) = 1_V(\vec{v})$$

d.w.z.

$$u^2 = 1_V \quad \text{Q.e.d.}$$

Het kan gebeuren dat een van de deelruimten $V(1)$ of $V(-1)$ gelijk is aan $\{\vec{0}\}$. Als $V(1) = \{\vec{0}\}$, dan $V(-1) = V$ en is u de puntspiegeling t.o.v. $\vec{0}$. Als $V(-1) = \{\vec{0}\}$, dan is u de identieke transformatie van V.

Bij wijze van voorbeeld tekenen we in fig. 11 de ontbinding (4) in het geval dat u de spiegeling van Π_0 t.o.v. A is (cf. 2, vb. 1).

OEFENINGEN

1) Noem t de lineaire transformatie van de reële vectorruimte C van de complexe getallen, die elk complex getal op zijn complex toegevoegde afbeeldt

$$t : \mathrm{C} \to \mathrm{C} : a + bi \to a - bi$$

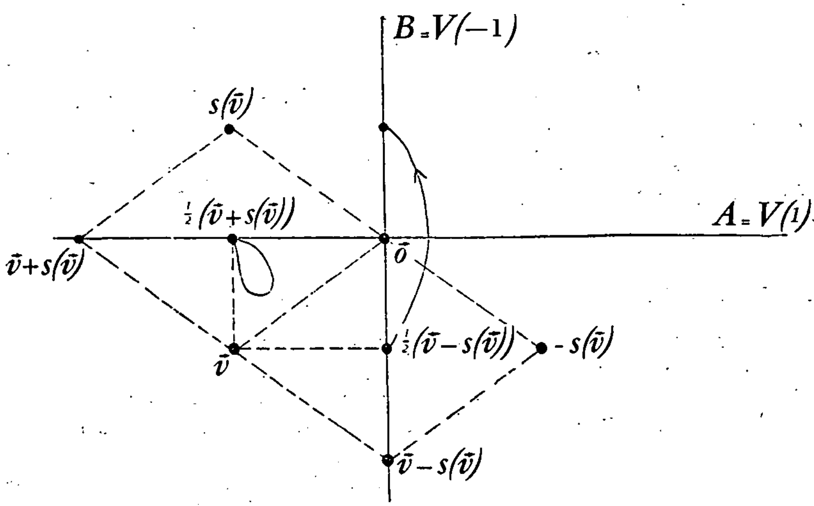


Fig. 11

Vind de eigenvectoren van t. Bereken de bijbehorende eigenwaarden.

2) Zij $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ een basis van de vectorruimte Π_0. Vind de eigenvectoren van de lineaire transformatie t van Π_0, gedefinieerd door $t(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $t(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Welke zijn de bijbehorende eigenwaarden?

3) Zij $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ een basis van de vectorruimte Π_0. Vind de eigenvectoren en bereken de eigenwaarden van de lineaire transformatie t van Π_0, gedefinieerd door $t(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $t(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$.

4) Vind twee lineaire transformaties f en g van Π_0, zodanig dat de verzameling van de eigenvectoren van $f \circ g$ verschillend is van de verzameling van de eigenvectoren van $g \circ f$.

5) Als f, g lineaire transformaties van de vectorruimte V zijn, dan is elke eigenwaarde $\lambda \neq 0$ van $f \circ g$ een eigenwaarde van $g \circ f$.

6) Als f, g lineaire transformaties van een *eindigdimensionale* vectorruimte V zijn, dan hebben $f \circ g$ en $g \circ f$ dezelfde eigenwaarden.

7) Vind twee lineaire transformaties f en g van $\mathrm{R}[X]$, zodanig dat 0 een eigenwaarde is van $f \circ g$, maar niet van $g \circ f$.

8) Gegeven een vectorruimte V en een lineaire transformatie t van V zó, dat er een natuurlijk getal $k \neq 0$ bestaat waarvoor geldt

$$t^k = 1_V \text{ en } \forall l \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : t^l \neq 1_V.$$

Te bewijzen: voor alle $\vec{v} \in V$ is $\vec{v} + t(\vec{v}) + t^2(\vec{v}) + \ldots + t^{k-1}(\vec{v})$ de nulvector of een eigenvector van t. (Ga dit resultaat na voor de voorbeelden 1, 3, 4 van nr. 2).

9) Zij $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ een basis van de vectorruimte Π_0. Als $a, b, c \in \mathrm{R}$, met $a \neq c$ of $b \neq 0$, dan heeft de lineaire transformatie van Π_0, gedefinieerd door $t(\vec{e}_1) = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2$ en $t(\vec{e}_2) = b\,\vec{e}_1 + c\,\vec{e}_2$, twee verschillende reële eigenwaarden.

10) Zij t een lineaire transformatie van de vectorruimte V. Te bewijzen: t is een involutie van V als en slechts als $(1 + t)/2$ een projectie van V is.

BIBLIOGRAFIE

[1] F. Bingen, *Beginselen van de algemene wiskunde*, Brussel (Universitaire Publicaties), 1965.

[2] J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris (Hermann), 1964

[3] R. Holvoet, *Vecteurs propres d'une transformation linéaire*, Math. & Paed., 24 (1963), 6—34.

[4] R. Holvoet, *Lineaire algebra*, Wiskunde-Post, 3 (1963—1964), feuilleton.

[5] N. H. Kuiper, *Analytische meetkunde verklaard met lineaire algebra*, Amsterdam (Noord-Hollandsche Uitgeversmij), 1959.

[6] G. Papy, *Inleiding tot de vectorruimten*, Wiskunde in de 20e eeuw, 2 (1961), 155—186.

[7] Papy, *Inleiding tot de vectorruimten* (vertaald door P. Wuyts), Antwerpen (Plantijn), 1966.

[8] G. Papy, *La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique*, Math. & Paed., 30 (1966), 32—39.

[9] G. Papy, *L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans*, Publications de l'UNESCO, te verschijnen.

[10] Papy en F. Papy, *Moderne wiskunde 2. De reële getallen en het vectorvlak* (vertaald door A. Vermandel), Brussel (Didier), 1967.

[11] Papy en F. Papy, *Mathématique moderne 3. Et voici Euclide*, Brussel-Montreal-Paris (Didier), 1967.

[12] Papy en F. Papy, *Mathématique moderne 6. Géométrie plane*, Brussel (Labor en Didier), 1967.

[13] P. G. J. Vredenduin, *Puntspiegeling*, Euclides, 41 (1963—64), 202—207.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXXI. Over sommen van kwadraten van projecties van ribben van veelvlakken.

In het Zwitserse tijdschrift *Elemente der Mathematik* is enige jaren geleden de volgende stelling als opgave gesteld: [1]) als men een *regelmatig* viervlak projecteert op een vlak V, dan is de som S van de kwadraten van de projecties van de ribben onafhankelijk van de stand van V. De gegeven bewijzen en ook een aansluitend onderzoek [2]) naar de waarden van S, voor een *willekeurig* viervlak, bij verschillende standen van V, gaven aanleiding tot vrij lange berekeningen.

Eenvoudige beschouwingen uit de zogenaamde massa-geometrie blijken tot het doel te voeren en laten bepaalde generalisaties toe.

Daar S niet verandert als men V evenwijdig verplaatst is er geen bezwaar tegen om V door het zwaartepunt G van het (willekeurige) viervlak $A_1A_2A_3A_4$ te nemen. De ribbe A_iA_j wordt met r_{ij}, haar projectie op V met p_{ij} en de afstand van A_i tot V met d_i aangeduid. Men heeft dan

$$p_{ij}^2 = r^2{}_{ij} - (d_i - d_j)^2 \tag{1}$$

en dus

$$S = \sum p_{ij}^2 = \sum r_{ij}^2 - 3\sum d_i^2 + 2\sum_{i<j} d_i d_j = \sum r_{ij}^2 - 4\sum d_i^2 + (\sum d_i)^2 \tag{2}$$

Geeft men de constante $\sum r_{ij}^2$ met S_1 aan en past men $\sum d_i = 0$ toe, dan komt er

$$S = S_1 - 4\sum d_i^2 \tag{3}$$

waaruit blijkt dat S in eenvoudig verband staat met het *kwadratisch moment* $\sum d_i^2$ van de hoekpunten A_i t.o.v. V.

Kiest men een rechthoekig assenstelsel, waarvan de assen GX, GY en GZ langs de *hoofdtraagheidsassen* vallen en zijn de traagheidsmomenten resp. A, B en C, dan is als $A_i = (x_i, y_i, z_i)$:

$$A = \sum (y_i^2 + z_i^2),\ B = \sum (z_i^2 + x_i^2),\ C = \sum (x_i^2 + y_i^2),$$
$$\sum y_i z_i = \sum z_i x_i = \sum x_i y_i = 0 \tag{4}$$

en als dus V de vergelijking

$$x \cos \vartheta_1 + y \cos \vartheta_2 + z \cos \vartheta_3 = 0 \tag{5}$$

heeft, met $\sum \cos^2 \vartheta_i = 1$, dan krijgt men

$$\begin{aligned} \sum d_i^2 &= \sum (x_1 \cos \vartheta_1 + y_i \cos \vartheta_2 + z_i \cos \vartheta_3)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(B + C - A)\cos^2 \vartheta_1 + \tfrac{1}{2}(C + A - B)\cos^2 \vartheta_2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(A + B - C)\cos^2 \vartheta_3 \end{aligned} \tag{6}$$

waardoor voor elk vlak V het kwadratisch moment en dus ook de uitdrukking S bepaald is.

Is het viervlak regelmatig, dan is de traagheidsellipsoïde een bol: $A = B = C$ en men vindt

$$\sum d_i^2 = \tfrac{1}{2}A \tag{7}$$

voor elke keuze van ϑ_i, waaruit volgt dat S een constante is. Is de ribbe $r_{ij} = a$, dan wordt, zoals men gemakkelijk nagaat

$$S = 4a^2 \tag{8}$$

Heeft de traagheidsellipsoïde drie verschillende assen en is b.v. $A > B > C$, dan zijn er *twee* vlakken V waarvoor S extreem is, nl. de vlakken GXY en GYZ. De bijbehorende waarden van S zijn $S_1 - 2\,(A + B - C)$ en $S_1 - 2(B + C - A)$ die respectievelijk het minimum en het maximum van S aangeven. Er zijn niet *drie* extrema, zoals in de betreffende publikatie werd gezegd: het vlak GXZ levert geen uiterste waarde.

Bovenstaande redeneringen kunnen met een kleine wijziging uitgebreid worden tot overigens willekeurige polyeders. Daartoe beschouwen we het puntstelsel $A_i (i = 1, 2, \ldots n)$.

We vragen naar de som S van de kwadraten van de projecties op een vlak V van *alle* lijnstukken $A_i A_j$. Het lijnstuk $A_i A_j$ wordt weer aangeduid met r_{ij}, zijn projectie op V met p_{ij} en de afstand van A_i tot V met d_i. Dan zien we:

$$S = \sum p_{ij}^2 = \sum r_{ij}^2 - (n-1) \sum d_i^2 + 2 \sum_{i>j} d_i d_j \tag{9}$$

Nemen we het vlak V door het zwaartepunt G van het stelsel, dan geldt

$$S = S_1 - n \sum d_i^2 \tag{10}$$

Ook hier blijkt dus de traagheidsellipsoïde in G beslissend voor de waarden die S kan aannemen.
Zijn de hoofdtraagheidsmomenten ongelijk dan zijn er twee vlakstanden V waarvoor S extreem is; ze staan loodrecht op elkaar.
Voor een regelmatig veelvlak is de traagheidsellipsoïde een bol, zodat de stelling geldt: de som van de kwadraten van de projecties van de ribben *en* de diagonalen van een regelmatig veelvlak is op elk projectievlak dezelfde.

Tot slot beschouwen we nog de som S van de kwadraten van de projecties p_{ij} van een aantal willekeurige lijnstukken A_iA_j op een vlak V door de oorsprong van een willekeurig assenstelsel $OXYZ$.
Het vlak V wordt gegeven door

$$x \cos \vartheta_1 + y \cos \vartheta_2 + z \cos \vartheta_3 = 0 \tag{11}$$

waarbij $\sum \cos^2 \vartheta_i = 1$.
Zijn x_i, y_i en z_i de coördinaten van A_i dan wordt de afstand d_i van A_i tot V gegeven door

$$d_i = x_i \cos \vartheta_1 + y_i \cos \vartheta_2 + z_i \cos \vartheta_3. \tag{12}$$

Duiden we de lengte van A_iA_j aan met r_{ij} dan krijgen we

$$\begin{aligned} S = \sum p_{ij}^2 = \sum r_{ij}^2 - \sum \{(x_i - x_j) \cos \vartheta_1 + (y_i - y_j) \cos \vartheta_2 \\ + (z_i - z_j) \cos \vartheta_3\}^2 \end{aligned} \tag{13}$$

De tweede term van het rechterlid van (13) is een homogene kwadratische vorm in $\cos \vartheta_1$, $\cos \vartheta_2$ en $\cos \vartheta_3$. Door een geschikte transformatie van het assenstelsel kan men (13) omzetten in een uitdrukking van de vorm

$$S = \sum r_{ij}^2 - (\lambda_1 \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2 \cos^2 \varphi_2 + \lambda_3 \cos^2 \varphi_3) \tag{14}$$

waarbij $\sum \cos^2 \varphi_i = 1$.
Als $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ dan blijkt dus de som S onafhankelijk van de stand van het vlak te zijn. Zijn λ_1, λ_2 en λ_3 onderling ongelijk dan treden twee extrema op, een maximum en een minimum; de bijbehorende vlakken staan loodrecht op elkaar. We zien dus dat, behalve in een aantal uitzonderingsgevallen, de som S van de kwadraten van de projecties van een willekeurig aantal lijnstukken op een vlak V voor twee loodrecht op elkaar staande vlakken V een extreme waarde aanneemt: een maximum en een minimum.
Aan T. Koetsier komt onze dank toe voor de bij deze beschouwingen verleende bijstand.

[1]) Aufgabe 458, *Elemente der Mathematik* 19 (1964), 90—92.
[2]) W. Jänichen, Ueber ein Tetraederproblem; id. 83—87.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Praxis der Mathematik* (VIII, 10—12 en IX, 1—7; oktober 1966 - juli 1967).

J. E. Hofmann, G. W. Leibniz, der Erfinder des Calculus;
H. von Majewski, Experimenteller Beweis für den Höhensatz;
P.F. Harm, Schülereltern und Modernisierung der Schulmathematik;
Chr. Ahrens, Das Trapez als Gegenkreispaar-Viereck.

K. H. Hellmich, Näherungskonstruktion eines regulären Neunecks;
R. Wolff, Kegelschnittklassifikation ohne Koordinatentransformationen.

J. T. Groenman, Kreisprobleme und isotrope Koordinaten;
Kl. Kursawe, Reelle Zahlen und Rechteckschachtelungen;
W. Zirkel, Ring-, Verbands- und Dualstruktur der Mengenoperationen;
H. Ahbe, Einführung der Ableitung im sprachlichen Zweig.

K. D. Schmidt, Rationale Funktionen und Faserungen der Ebene;
P. Dallmann, Der Biblische Mathematicus und andere Kuriosa;
H. Töpfer, Der Begriff des metrischen Raumes.

S. Filippi, Das Verfahren von Bairstow;
K. H. Hürten, Komplexe Zahlen in Untersekunda;
R. Brinker, Programmierter Unterricht;
G. Steller, Zur Einführung des skalaren Produktes.

H. Zeitler, Schulgeometrie, klassisch oder Modern?
H. von Majewski, Experimenteller Beweis für den Kathetensatz;
Kl. Ruthenberg, Dreiecke als Elemente algebraischer Körper;
G. Schostack, Über gleichhohe basisgleiche Dreiecke;
Kl. Kursawe, Eine fast überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion.

H. Ziegel, Funktionen von x und $[x]$;
K. Münst, Die Höhenschnittpunkte der Tangentendreiecke einer Parabel;
H. Töpfer, Metrische Funktionenräume.

J. E. Hofmann, Michael Stifel, der führende Algebraiker in der Mitte des 16. Jahrhunderts;
A. Herzig, Über die Winkelhalbierende im Dreieck;
E. Beck, Polyedermodelle;
H. Lindner, Bemerkungen zu einem Unterrichtsprogramm aus der D.D.R.

H. Coehsmeyer, Die Grundaufgaben *ssw* und *wws* in der Sphärik;
H. Kschwendt, Lösungsmethode für Gleichungen 4. Grades;
W. Fragner, Intervallschachtelung beim Quadratwurzelziehen;
H. Linder, Fünftes Symposion über Lehrmaschinen.

H. Siemon, Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie im Unterricht;
Chr. Ahrens, Ein System der Vierecke, aus den Diagonalen entwickelt;
H. Töpfer, Geometrie im metrischen Raum.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* ((XLIV–XLVI; september 1966 – februari 1967).

P. Costabel, G.W. Leibniz et le sens d'une réforme mathématique;
A. Adler, Géométries de Hilbert;
M. Barbut, De Pascal à Savage; un chapitre de l' algèbre linéaire: le calcul des probabilités;
G. Delpla, Grandeur, mesure et unité;
Glaymann, Initiation au calcul numérique et aux machines à calculer;
J. Siros, Sur les instructions pour l'enseignement du premier degré;
Concours d'entrée aux E.N.S. de Saint-Cloud et de Fontenay-aux-Roses (1966).
Drie deeltjes examen opgaven 1966: Baccalauréat, B.E.P.C. en Propédeutique M.G.P. et M.P.C.; Mathématiques élémentaires, en Mathématique et Technique.

P. Samuel, A propos d'équations diophantiennes;
E. Ehrhart, Ovales et ovoides;
J. F. Pieri, Equations du second degré dans un corps de Galois;
Y. Gentilhomme, Mathématiques et linguistique appliquée;
J. M. Chevallier, Matériaux pour un dictionnaire;
L'enseignement des mathématiques dans les facultés des Lettres et Sciences humaines;
J. P. Kahane, Importance et rôle des cercles mathématiques;
W. Mountebank, Quelques rôles de composition;
P. Kree, Sur l'enseignement des probabilités;
Ch. Ehresmann, Sur l'activité des départements de Mathématiques;
M. Hébrant, Le diascope.

3. *Mathematica & Paedagogia* (nr. 30; jrg. XI; 1966).

W. Servais, Progrès décicifs de la Réforme;
G. Papy, La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique;
G. Bosteels, Terminologie in de wiskunde;
W. Servais, La coordination des enseignements de la mathématique et de la physique au niveau secondaire;
R. Dieschbourg, L'utilisation de la machine à calculer CURTA dans l'enseignement secondaire;
H. G. Steiner, Compte rendu sur l'introduction de la notion de groupe et du calcul des groupes pour la 3e et 4e classe des gymnases (13 à 14 ans);
P. G. J. Vredenduin, Puntspiegeling; een les gegeven door R. Holvoet.

4. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität*, Neue Folge (XI, 1 en 2; XII, 1 en 2; 1964 en 1965).

H. Behnke, Die Pflichten der Universität gegenüber dem Gymnasium;
H. Hermes, Unentscheidbarkeit der Arithmetik;
H. G. Steiner, Frage und die Grundlagen der Geometrie;
A. Kirsch, Über die Endomorphismen der endlichen Bewegungsgruppen und ihre Veranschaulichung;
M. Leppig, Grosskreis und Loxodrome in der analytischen Geometrie auf der Kugel;

K. Koch, Bemerkungen zu den neuen Richtlinien des Landes Nordrhein-Westfalen;
M. Päsler, Ein elementarer Zugang zu den drei prüfbaren Aussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

H. G. Steiner, Mathematische Grundlagenstandpunkte und Reform des Mathematikunterrichtes;
H. Behnke, Die regulierende Funktion des Staatsexamens;
W. Oberschelp, Die Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie;
G. Bol, Über Auswahlsätze;
W. Bos, Ein einfacher Beweis eines Satzes von Hurwitz über reelle Divisionsalgebren;
G. Pickert, Elementare geometrische Einführung der trigonometrischen Funktionen.

H. Behnke, Carl Weierstrasz als Gymnasiallehrer;
P. Beisswanger, Die Phasen in Hermann Weyls Betrachtung der Mathematik;
B. van Rootselaar, Intuitives über den Intuitionismus;
W. Wiebe und H. Bussmann, Ein Vorschlag zur Erweiterung des Groszenkalkuls;
K. Fladt, Die Herleitung der Geometrie des Raumes aus der Geometrie auf der Kugel;
W. Rautenberg, Ein Beweis des Satzes von Pappus-Pascal in der affinen Geometrie;
H. G. Steiner, Quadratische Gleichungen und Quadratwurzelfunktion in Körpern.

J. O. Fleckenstein, Von Descartes zu Leibniz;
H. Gericke, Die Entwicklung physikalischer Grundbegriffe bei den Griechen;
H. Meschkowski, Die Bildung der Menschen durch die moderne Mathematik;
H. G. Steiner, Wie steht es mit der Modernisierung unsres Mathematikunterrichts?
W. Schwabhäuser, Zum Begriff des symbolischen Potenz;
H. Coers, Bildung und Mathematik von A. I. Wittenberg.

5. *Elemente der Mathematik* ((XXI, 6 en XXII, 1—3; November 1966— mei 1967).

H. Lenz, Zur Axiomatik der ebenen euklidischen Geometrie;
A. Makowski en A. Rotkiewicz, On pseudoprime numbers;
M. R. Chowdhury, Eine Verallgemeinerung des Homomorphiesatzes.

B. L. van der Waerden, Klassische und moderne Axiomatik;
O. Giering, Ein mechanisches Modell zur Lösung gewisser Extremalaufgaben;
J. Spliker, Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation;
J. Rätz, Zur Zerlegung von Permutationen in elementfreien Zykle;
E. Szekeres, Einfache Beweise zweier Dreiecksätze.

L. Fejes Tóth, Eine Kennzeichnung des Kreises;
A. Kirsch, Eine geometrische Charakterisierung der Differenzierbarkeit für Funktionen zweier Veränderlichen;
K. Szymiczek, On a diophantine equation.

A. S. B. Holland, Concurrencies and areas in a triangle;
H. Zeitler, Über Netze aus regulären Polygonen in der hyperbolischen Geometrie;
Tiba Šalát, Zur Induktion im Kontinuum;
C. Bindschedler, Zur Hyperbel des Menaichmos.

6. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XIX, 9—12; XX, 1—4; december 1966 — juli 1967).

R. Rose, Über die ausschliessende Vereinigung von Mengen;
G. Hube, Über die Umkerung der Quotientenregel;
R. Becker, Das Einsteinse Additionstheorem der Geschwindigkeiten als unmittelbare Konsequenz der Gruppeneigenschaft der Lorentz-Transformationen.

R. Stettler, Begründung von Exponential- und Logarithmenfunktion;
W. Tietze, Wie Leonard auf die Reihe für den Tangens geführt wurde;
E. Elsner, Zur Himmelsmechanik im Physikunterricht;
J. Wlodarski, Eine magische Zeile im Pascalschen Dreieck.

J. Schwarze, Funktionen zufälliger Veränderlicher;
H. Kemper, Die Klassenarbeit.

H. Schubert, Kategorien und Funktoren;
H. Dahncke, Punktspiegelung und Sechsecke;
R. Bürck, Quellenstudien, zeitverschwendende Umwege?
W. Jung, Mathematikunterricht in der Primary School.

G. Ch. Hönig, Pyramiden die zu einer Kugel oder einem Kugelteil höhenschittgleich sind;
K. H. Jäschke, Zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht;
G. Lessner, Zur Definition der Äquivalenzrelation.

G. Steller, Aufgaben zur Vektorrechnung;
E. Baurmann, Unterrichtsfilme.

E. Töpfer, Martin Wagenschein und die Lehrer der Physik;
M. Wagenschein, Natur und Apparatur;
W. Jung, Ist jede symmetrische und transitive Relation reflexiv?
J. Grehn, Zum Minuszeichen in der Physik.

W. Kroebel, Martin Wagenschein, ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken.

7. *School Science and Mathematics* (LVXII, 1—6; januari—juni 1967).

P. K. Gureau, Individualizing mathematics instruction;
J. L. Underfer, Equations for transverse and longitudinal waves;
E. G. Summers, Doctoral dissertation research in science and mathematics, reported for 1964;
C. A. E. Hensley, "New" mathematics with the pioneers' dial tally.

K. W. Kelsey, Exercises in computer-assisted physics and mathematics;
D. J. Dessart en P. C. Burns, A summary of investigations relating to mathematics in secondary education 1965;
W. Vernon Price, Whence cometh the spark?

J. M. Moser, A geometric approach to the algebra of solutions of pairs of equations;
H. O. Andersen, Problem solving against science teaching;
J. F. Weaver, Multiplication within the set of counting numbers.

F. Flourney, A study of pupils' understanding of arithmetic.

W. Wiersma, A cross-national comparison of academic achievement of mathematics majors preparing to teach in secondary schools;
R. F. Graesser, Another dodecahedron calender;

G.G. and J. V. Mallinson, Symbolic science learning for the blind.

P.J. Cowan, Constants resulting from differences of exponentials;
W. S. Vasilaker, Problems with the scientific method;
C. B. Read, The next three terms of a sequence;
J. F. Ginther, How many lines?
H. Rosenberg, The use of vectors to eliminate construction lines in proving theorems in geometry;
Th. C. O'Brien, Some ideas on subtraction and division.

8. *The Mathematical Gazette* (L, 374 en LI, 375; december 1966—februari 1967).

M. E. Baron, A note on Robert Recorde and the Dienes Blocks;
H. Simpson, On plane circular cubic curves;
D. A. Quadling, A generalisation of Taylor's Theorem;
E. J. Simpson, Spirography.

G. A. Garreau, The problem bureau and some of its problems;
C. D. B. Eperson, The Newson report "half our future";
J. J. Malone, Uses of sylow theory;
H. Liebeck, The structure of cliques;
B. Meltzer, Mathematics, logic and undecibility;
R. L. Goodstein en C. P. Wormell, Formulae for primes;
R. L. Goodstein, A functional equation for implication.

9. *The Mathematics Teacher* (LIX, 8 en LX, 1—5; december 1966— mei 1967).

I. Adler, Mental growth and the art of teaching;
R. F. Lawler, A nontrivial automorphism in the field of real numbers;
U. Alfred, A mathematician's progress;
J. Garfunkel en B. Plotkin, Using geometry to prove algebraic inequalities;
J. M. Scandura, Concrete examples of commutative nonassociative systems;
P. A. Wursthorn, The position of Thomas Carlyle in the history of mathematics.

B. E. Meserve, Euclidean and other geometries;
L. Raphael, The return of the old mathematics;
H. Sitomer en Howard F. Fehr, How shall we define angle?
C. R. Wylie, What are perpendicular lines?
C. Mallory, Intuitive approach to $x^0 = 1$;
J. W. Alspaugh en F. G. Delon, How modern is today's secondary mathematics curriculum?

A. Sterrett, Gamble doesn't pay;
P. Braunfeld, A new UICSM approach to fractions for the junior high school;
I. Hollingshead, Number theory, a short course for high school seniors;
J. N. Williamson, A general structure for the study of prime numbers;
J. L. Marks en J. R. Smart, Using the analytic method to encourage discovery;
C. Callanan, Scientific notation;
D. V. Schrader, The arithmetic of the mediaeval universities;
R. T. Mattson, Mathematics leagues, stimulating interest through competition.

J. Fey, What's between Q and R?
A. Coxford, Classroom inquiry into conic sections;
M. S. Klamkin, On some geometric inequalities;

St. Szabo, Some results on quadrilaterals with perpendicular diagonals;
G. R. Rising, A reaction to "definitions without exceptions";
S. S. Anderson en F. Harary, Trees and unicyclic graphs;
J. T. Sgroi, Pascal's triangle: a different approach to subsets;
Th. Mikula, The trigonometry of the square;
R. E. Reys, Mathematics word search;
E. H. Moore, On the foundations of mathematics;
G. J. Pawlikowski, The men responsible for the development of vectors.

R. G. Pawley, 5-con triangles;
R. D. Hajek, New learning and subverbal knowledge;
V. H. Leichliter, Businessmen and mathematics teachers;
A. J. Simone, A FORTRAN program for a recursion for simultaneous linear equations;
J. R. Smart, The N-sectors of the angles of a square;
A. M. Glirksman en H. D. R. Ruderman, Two combinatorial theorems;
W. R. Ransom, Fermat's factoring;
L. E. Pursell, The area under a parabola by Cavalieri's rule;
H. Sitomer, Sight versus insight;
H. von Baravelle, The number π;
J. P. Philips, Brachistochrone, tautochrone, cycloid: apple of discord;
K. O. May, The origin of the four-color conjecture;
H. G. Steiner, The mathematization of a political structure.

O. Veblen, The modern approach to elementary geometry;
D. W. Stover, Auxiliary lines and ratios;
R. Sweet, Organizing a mathematics laboratory;
J. C. Biddle, The square function: an abstract system for trigonometry;
Ch. Buck, An alternative definition for equivalence relations;
L. D. Kovach, A note on curve-fitting with rational polynomials;
F. J. Crosswhite, Classics in mathematics education.

HET VIERDE NEDERLANDSE MATHEMATISCHE CONGRES

Het vierde jaarlijkse Nederlandse mathematisch congres vanwege het Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op 18 en 19 april 1968 te Eindhoven.

Het doel van deze congressen is de contacten tussen de Nederlandse wiskundigen te bevorderen en hen in de gelegenheid te stellen om door middel van voordrachten van elkaars werk kennis te nemen.

Naast de algemene voordrachten zullen er kortere voordrachten worden gehouden in secties, t.w. (indien voldoende sprekers zich aanmelden) *grondslagen der wiskunde, topologie en meetkunde, algebra, getaltheorie, combinatoriek en discrete wiskunde, abstracte analyse, analyse, waarschijnlijkheidstheorie en statistiek, mathematische fysica, numerieke wiskunde, operationele analyse, theorie van automaten en van programmeren.*

Aan belangstellenden (die geen lid van het Wiskundig Genootschap zijn) wordt op aanvraag voor 10 maart a.s. bij de congrescommissie, een congresfolder toegezonden. Secretaris is Dr. W. van der Meiden, Afd. Wiskunde, Techn. Hogeschool, Postbus 513, Eindhoven.

BOEKBESPREKING

Dr. J. H. Wansink, *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren* deel II, le druk, f 21,90, J. B. Wolters, Groningen.

Na mijn bespreking van deel I (Euclides **42**-VI-pag. 189—191) acht ik mij ontslagen van de taak de bedoeling van het boek uiteen te zetten. De inhoud in zijn geheel heeft betrekking op het wiskundeonderwijs; opmerkingen van algemene aard, het leraarschap betreffend, zal men niet veel meer ontmoeten. Het boek leest vanwege zijn meer wiskundig karakter iets minder gemakkelijk dan deel I, dat is uiteraard vanzelfsprekend; het blijft echter een boeiende indruk maken.

Aanvaardbaar en begrijpelijk, hoewel tot mijn teleurstelling, komt de betekenis van de auteur zelf voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs, wat op de achtergrond. Die moet men dan er maar bij denken, onoverkomelijke moeilijkheden zal dat niet geven.

De hoofdstukken zijn de volgende:

8 Over inleidende cursussen in de meetkunde. We ontmoeten Schogt, Vredenduin, van Hiele, Troelstra c.s. Een historische bespreking ontbreekt niet, neemt zelfs een voorname plaats in.
9 Metrieken (zeer uitgebreid)
10 Het inleidend algebraonderwijs
11 Uitbreiding van het getalbegrip
12 Functies en relaties (met een prima voorbeeld van lineaire programmering; ik ik had er best nog een paar willen hebben)
13 Vergelijkingen en ongelijkheidsopgaven
14 Logaritmen en rekenliniaal
15 Het limietbegrip

Mijn voorkeur volgend, besteedde ik de meeste tijd aan de hoofdstukken 8, 12 en 13. Zij vormden pakkende vakantielectuur, maar zijn zonder twijfel niet alleen als zodanig bedoeld. Leraren zullen er mogelijk nog meer aan hebben dan a.s. leraren.

Het werk ziet er voortreffelijk uit.

Groenman

Dr. A. van Heemert en dr. L. R. J. Westermann, *Inleiding in de Analytische Meetkunde en de Lineaire Algebra*, Eerste deel, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1966, 213 bladz., f 20,75.

De auteurs delen mee bij de samenstelling van dit eerste deel twee doeleinden te hebben nagestreefd: „1. een handleiding te geven voor het consequent en doelmatig toepassen van de methoden der vectorrekening op meetkundige problemen, en 2. profiterend van de aan de elementaire meetkunde verbonden vertrouwde aanschouwelijke situatie, geleidelijk een punt te bereiken, waarop de behandeling van de lineaire algebra als abstracte mathematische theorie didactisch verantwoord is".

Dit deel bestaat uit vijf hoofdstukken. In het eerste hoofdstuk worden de translaties ingevoerd, de algebra der translaties wordt besproken, waarna de plaatsvectoren aan de orde komen. Het tweede hoofdstuk begint met een inleiding in de theorie der lineaire vergelijkingen; na invoering van metrische hulpmiddelen wordt vervolgens de berekening van afstanden, oppervlakten en inhouden besproken. Hoofdstuk III handelt over cirkel en bol, waarna hoofdstuk IV aan afbeeldingen gewijd is, waarbij ook groepen van afbeeldingen worden besproken. In het laatste hoofdstuk komen meetkundige plaatsen aan de orde, met het probleem van elimineren van parameters.

Bij een beoordeling van het boek dient primair nagegaan te worden of de auteurs er in geslaagd zijn de gestelde doeleinden te verwezenlijken. Wat het eerste doel betreft, kan gezegd worden dat dit zeker het geval is. Hiertoe werken ook de vraagstukken mee, die in ruime mate in afzonderlijke paragrafen de meer theoretische behandeling afwisselen. Moeilijker ligt het met het tweede gestelde doel. Voor vele beginnende studenten zullen diverse passages uit de hoofdstukken I en IV dermate moeilijk zijn dat zij door de bestudering ervan niet gemakkelijk tot een verrijking van het inzicht in de onderhavige materie zullen geraken. De auteurs zijn zich dit klaarblijkelijk, speciaal wat hoofdstuk IV betreft, bewust geweest; zij ,,achten het alleszins denkbaar dat de lezer dit hoofdstuk bestudeert nàdat hij van de abstracte opbouw der lineaire algebra heeft kennis genomen" (deze abstracte opbouw zal in het nog niet verschenen tweede deel plaatsvinden). Hoofdstuk IV-3, over endomorfismen en automorfismen, is een voorbeeld van een te geleerde behandeling; deze wordt mede veroorzaakt door een ingewikkelde notatieprocedure, waarbij voortdurend de verzameling T van alle translaties van de ruimte R, waarin meetkunde wordt bedreven, wordt onderscheiden van de verzameling $V_3(R)$ der getallentripels. Natuurlijk is dit onderscheid op zichzelf zinvol; men vraagt zich alleen af of het verstandig is eerste-jaars-studenten in hun eerste semester reeds met voor hen ingewikkelde notatiekwesties te vermoeien, waardoor de kans vergroot wordt dat zij de grote lijn van het betoog niet meer zien.

Het boek bevat een grote hoeveelheid stof; bij sommige onderwerpen hebben de auteurs stellig reeds aan de projectieve meetkunde gedacht (hoofdstuk I en in het bijzonder hoofdstuk IV). Men kan zich voorstellen dat een zekere beperking in de keuze van de stof uiting van een wijs inzicht is. Tenslotte is het de bedoeling dat de studenten dit deel in drie maanden doorwerken; beheersen zij dan de aan de orde gekomen onderwerpen in de geboden omvang ook voldoende?

Nog enkele opmerkingen:

1. Sommige bewijzen, speciaal in hoofdstuk I, zijn voor een beginnend student erg beknopt geformuleerd; zij zouden bij een iets grotere uitvoerigheid aan duidelijkheid gewonnen hebben (bijv. bladz. 9 en 24).
2. In hoofdstuk II, 1 wordt de theorie van de lineaire vergelijkingen algemeen voor een stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden opgebouwd, weer met het oog op wat in deel 2 zal volgen. Was de behandeling van stelsels met twee resp. drie onbekenden, met de meetkundige interpretatie (zoals deze op de bladzijden 52-56 plaatsvindt) voor het doel, in het eerste deel gesteld, niet voldoende geweest? De algemene theorie zou dan elegant in deel 2 een plaats kunnen vinden, nadat de lineaire algebra abstract is opgezet en het begrip matrix is ingevoerd.
3. Op bladz. 46 wordt gesproken over de oplossingsruimte van een stelsel lineaire vergelijkingen, die niet homogeen bedoeld zijn. In het algemeen reserveert men het begrip oplossingsruimte uitsluitend voor stelsels homogene vergelijkingen.

Het aantal drukfouten in de tekst is gering, een bewijs dat de auteurs aan de afwerking van het boek grote zorg hebben besteed. De typografische indeling zouden we ons overzichtelijker kunnen voorstellen; men leest het boek door de drukke bladspiegel wat moeizaam.

Met belangstelling zien we de verschijning van het tweede deel tegemoet, teneinde een definitief oordeel over het boek te kunnen vormen.

W. J. Claas

Gregory H. Wannier, *Statistical Physics*, John Wiley & Sons, New York – Londen, 1966.

Dit boek over statistische methoden is in eerste instantie een natuurkundeboek. Daarom is het met enige aarzeling dat ik als wiskundige aan een bespreking begin, en daarom heeft het wel wat lang op mijn bureau en soms op mijn nachtkastje gelegen. Maar het is ook voor een wiskundige een boeiend boek omdat op heldere wijze voor een groot aantal problemen het verband tussen fysisch experiment en mathematisch model uiteengezet wordt. De methode om verschillende delen van de wiskunde zoals thermodynamica, electromagnetische straling, theorie van de electrolyten in enkele opzichten vanuit een centraal statistisch gezichtspunt te beschrijven maakt het boek voor een wiskundige tot prettige lectuur. Dat bij een begrip als entropie ook bij de niet-statistische introductie wordt stilgestaan is belangrijk.

Waardevol is de collectie recommended problems and general problems na ieder hoofdstuk. Deze vraagstukken zijn soms zuiver wiskundig; sommetjes over boldriehoeksmeting bijvoorbeeld, soms volledig toegepast zoals de opgaven over bacteriofagen, over de temperatuur van de aarde als alle warmtetoevoer de zonnestraling is, berekeningen van molecuulrotaties met behulp van formules voor theta functies.

Alleen bij hoofdstuk 16 staat: There are no problems for this chapter. Een bespreking op deze plaats moet kort zijn en kan niet in details treden. Mag ik besluiten dat het voor mij persoonlijk als docent analyse voor natuurkundestudenten waardevol is geweest in dit boek geconfronteerd te worden met fysisch gebruiken van mathematische methoden op een klassiek gebied en met een respectabel niveau?

F. van der Blij

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

192. Helaas zijn in ons land nog steeds vhmo-klassen van 32 leerlingen mogelijk. Maar dat is dan ook gelukkig het maximum. Een Nederlandse leraar, die een of ander statistisch experiment wilde doen, vroeg daartoe aan de leerlingen van zijn klasse elk een natuurlijk getal kleiner dan 100 op te schrijven. Niemand was afwezig. Het gemiddelde van de gekozen getallen bleek na afronding te zijn 53,34. Na een week werd het experiment herhaald. Nu was één leerling afwezig en was het gemiddelde 68,57. Welke conclusie onze leraar daaruit trok, weet ik niet, maar kunt u uitrekenen, wat het totaal van de gekozen getallen de eerste maal was?

193. Kies een willekeurig natuurlijk getal groter dan 9. Deel het door 2. Het getal, dat men dan krijgt, begint (decimaal geschreven) met een 6. Wat is de kans hierop?

Mag ik u vragen eerst deze kans zelf te bepalen en dan de oplossing te raadplegen, die *in dit nummer* hieronder gegeven is. Kunt u zich met deze oplossing verenigen of heeft u kritiek? In het volgende nummer wordt erop teruggekomen.

OPLOSSINGEN

189.
$$\underset{(u)}{12} \cdot \underset{(v)}{34} + 6789 = \underset{(x)}{67} \cdot \underset{(y)}{89} + 1234.$$

Vul in zo, dat een analoog resultaat ontstaat:

$$33 \cdot 82 + \dots = \dots \cdot \dots + 3382.$$

Stel een methode op om bij gegeven u en v een oplossing voor x en y te vinden.
Er moet gelden

$$uv + 100x + y = xy + 100u + v,$$
$$100x + y - xy = 100u + v - uv.$$

Stel

$$100u + v - uv = p.$$

Dan moeten x en y voldoen aan

$$100x + y - xy = p,$$
$$(x-1)(100-y) = p-100.$$

De grafiek hiervan is een orthogonale hyperbool. Op deze hyperbool ligt het roosterpunt (u, v). We moeten een tweede roosterpunt op de hyperbool vinden. Trek door (u, v) een rechte met richtingscoëfficiënt 1. Deze snijdt de hyperbool in het punt $(101-v, 101-u)$. Aan de vraag voldoet dus

$$x = 101-v, \qquad y = 101-u.$$

Waardoor we in het bijzonder vinden:

$$33 \cdot 82+1968 = 19 \cdot 68+3382.$$

Zet voor het verkregen antwoord „gelukkig" en u verkrijgt datgene, wat de heer Kootstra de lezers van deze rubriek gaarne toewenst.

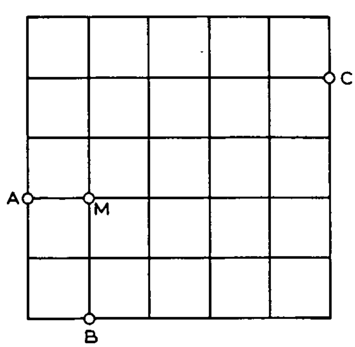
190. We kunnen zonder bezwaar de zeshoek convex onderstellen en door toevoeging van de zeshoek zelf aan het stelsel driehoeken een convex veelvlak doen ontstaan. Hiervoor geldt de stelling van Euler: $Z+H = R+2$. Laten we de zeshoek nu weer weg, dan blijkt voor het stelsel driehoeken te gelden: $Z+H = R+1$.

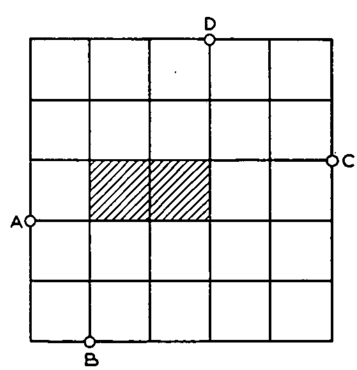
Onderstel, dat de gevraagde verdeling in driehoeken teweeggebracht is door middel van p verbindingslijnstukken. Dan is het aantal driehoeken $\frac{1}{3}(2p+6)$. Ingevuld in de formule van Euler levert dit

$$\tfrac{1}{3}(2p + 6)+10 = p + 6 + 1.$$

We vinden hieruit $p = 15$. Het aantal lijnstukken is dus minimaal 15, en een groter aantal dan 15 is bovendien onmogelijk.

191. Een magazijn moet ingericht worden om vandaar uit de winkels A, B, C (en D) te bevoorraden. De som van de afstanden van het magazijn tot de winkels moet minimaal zijn. Waar moet het magazijn gekozen worden?

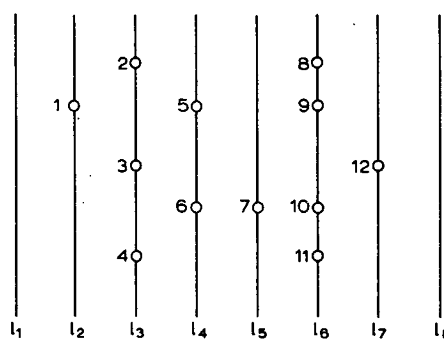




In de linker figuur nemen we de horizontale straat door A en snijden deze met de verticale door B. Op het snijpunt kiezen we het magazijn M.

In de rechter figuur nemen we de horizontale straten door A en C en de verticale door B en D. Deze vier straten begrenzen een, in de figuur gearceerd, gedeelte van de stad. Het magazijn moet nu gekozen worden op een of andere straathoek, die tot dit gearceerde gedeelte (de rand meegerekend) behoort.

We beschouwen nu het algemene geval en geven daarvoor tevens het bewijs van de juistheid van de oplossing. Neem om de gedachten te bepalen aan, dat het aantal winkels 12 bedraagt. We nummeren deze van links naar rechts. Winkels, die in een zelfde verticale straat liggen, worden daarbij in willekeurige volgorde genummerd. Beschouw nu de verticale straten door de winkels 6 en 7 (deze kunnen verschillend zijn, ze kunnen ook samenvallen). We beginnen nu een punt op l_1 te kiezen. Van hier gaan we naar l_2. Dan zullen de horizontale afstanden tot alle 12 winkels 1 kleiner worden. Nu gaan we naar l_3. Dan worden 11 afstanden 1 kleiner en wordt 1 afstand 1 groter. Van l_3 naar l_4 zijn deze getallen 7 en 4, van l_4 naar l_5 zijn ze 6 en 6, van l_5 naar l_6 zijn ze 5 en 7, enz. Tot aan l_4 wordt de som van de horizontale afstanden dus kleiner en vanaf l_6 kleiner.



Nu nummeren we de winkels opnieuw, maar thans van boven naar beneden. We nemen de horizontale straten door 6 en 7. Noem deze m_i en m_{i+1}. De vier straten l_4 en l_5, m_i en m_{i+1} begrenzen het deel van de stad, waar het magazijn gekozen moet worden om aan de eis te voldoen.

Het zo gevonden stadsdeel kan een rechthoek zijn, het kan ook een lijnstuk en ook een punt zijn. Als het aantal winkels oneven is, vinden we steeds een punt.

193. Ieder normaal mens zegt spontaan, dat de gevraagde kans $\frac{1}{9}$ is. Toch is dit niet juist. De helft van een natuurlijk getal begint met een 6 — is gelijkwaardig met —

het eerste cijfer van het getal is een 1 en

het tweede cijfer is een 2 of een 3.

De kans hierop is $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$.