EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

IX — 1 JUNI 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

KENNIS VAN COMPUTER EN AUTOMATISERING ALS VAK BIJ HET MIDDELBAAR ONDERWIJS

door

Prof. Dr. M. Euwe

Amsterdam

De strekking van dit artikel is de invoering te bepleiten van het vak „*Computer en automatisering*" bij het Middelbaar Onderwijs. Niet verplicht maar facultatief. Ook niet duurzaam maar voor een periode van bijv. 15 tot 25 jaar.

In het kort volgen eerst de twee voornaamste argumenten voor deze op het eerste gezicht nogal ingrijpende stap.

1. Bijna iedereen zal in de maatschappij van morgen met de computer te maken krijgen, hetzij op kantoor of in bedrijf, hetzij in de wetenschap. Bij dit laatste te bedenken dat de computer stellig niet alleen een instrument is ten behoeve van wiskundige berekening of research, maar ten dienste staat voor de beoefening van vrijwel alle wetenschappen.
2. Het is moeizaam iedere nieuweling een vooropleiding te geven in de vorm van een algemene oriëntatie. Deze elementaire voorbereiding vindt thans plaats op Hogescholen en Universiteiten, in grote bedrijven en voorts in diverse instellingen die speciaal op het gebied der automatisering werkzaam zijn. Het betrekken van de automatisering bij het middelbaar onderwijs zou deze gespreide voorlichting overbodig maken. Daarbij wordt niet gedacht aan de opleiding van computer-functionarissen, maar aan een algemene voorlichting. Het gaat ook niet zozeer om het bijbrengen van parate kennis, maar om het wennen aan nieuwe denkwijzen. Men spreekt wel van een nieuw denkpatroon. Om die reden denk ik ook dat de invoeging in het Middelbaar Onderwijs van tijdelijke aard kan zijn. Over 20 jaar behoeven wij niet meer aan het nieuwe te wennen.

In dit verband is het wellicht belangrijk kennis te nemen van de inhoud van een recent artikel van Prof. dr. ir. F. A. Heijn in het tijdschrift *Intermediair*. Onder de titel „*Aan de vooravond van een omwenteling*", signaleert de schrijver een krasse verandering die bezig is zich te voltrekken in de structuur van maatschappij en wetenschap en die mogelijk zal leiden tot een „Umwertung aller Werte". Enkele van de in dit artikel gestelde opmerkelijke uitspraken:

- wie in 1910 eindexamen deed, kon in 1935 nog aardig meepraten;
- een ingenieur die in 1915 afstudeerde kon in 1935 nog actief deelnemen aan de technische ontwikkeling;
- onze kennis verdubbelt thans in 10 jaar;
- dientengevolge moet een ingenieur die in de laatste jaren is klaargekomen 5 tot 10 jaar na het behalen van zijn graad als verouderd worden beschouwd;
- de ingenieur en ook de leraar moeten voortdurend bijstuderen en actief deelnemen aan de recente ontwikkelingen.

Prof. Heijn concludeert, dat onze kennis niet meer statisch is, maar dynamisch en dat ons onderwijs zich daarbij zal moeten aanpassen. Men behoeft niet al te zeer bevreesd te zijn dat de materie voor de leerling te zwaar wordt. Jeugdige leerlingen kunnen vaak veel moeilijker dingen leren dan men denkt. Leren is grotendeels een kwestie van wennen en op jeudige leeftijd went men snel. Een extra voordeel is daarbij dat de jeugd niets behoeft te vergeten. Ouderen zijn vaak onbewust zozeer verstrikt in algemeen aanvaarde theorieën, dat zij vernieuwingen moeilijk kunnen aanvaarden.

Tot zover het artikel van Prof. Heijn, dat zowel direct als indirect in mijn betoog zal resoneren.

Wie de vraag stelt waarom bepaalde vakken bij het algemeen onderwijs zijn betrokken, zal daarop, afhankelijk van het vak, verschillende antwoorden krijgen.

Ik meen drie doelstellingen te kunnen onderscheiden:
direct nut, indirect nut (algemeen vormend), maatschappelijk nut (meer begrip voor de algemene gang van zaken).

Een algemene, ofschoon onbewust gehanteerde stelregel schijnt mij de volgende:

Om bij het algemeen onderwijs te worden geïntroduceerd moet een vak meer dan één van de doelstellingen dienen, of, zo het slechts in een enkel opzicht nut afwerpt, dan moet het dit in hoge mate doen. Voorts spelen de traditie en de continuïteit een grote rol. Wat gedurende 50 jaar belangrijk is geweest, zal dit het 51ste jaar ook nog wel zijn.

Ter toetsing van het hierboven gestelde laten wij een aantal vakken de revue passeren.

Aardrijkskunde heeft enig direct nut, meer naarmate de persoon in kwestie zich over grotere afstanden pleegt te verplaatsen, maar dit vak heeft in ieder geval grote algemeen maatschappelijke waarde.

Frans heeft direct nut in verband met de studie, vooral op het gebied van de exacte vakken, waar de Franse literatuur belangrijk en uitgebreid is. Voorts is ook waardevol de mogelijkheid tot converseren met onze Franse medeburgers in Europees verband, te meer daar deze slechts zelden een andere taal spreken. Indirect nut heeft de Franse taal door zijn verband met andere Romaanse talen, waarbij in het bijzonder met het Latijn.

Het vak *rekenen* heeft groot direct nut, terwijl het indirecte nut evenmin mag worden onderschat.

Meetkunde heeft voornamelijk indirect nut; dit vak bevordert het systematisch en logisch denken; de beoefening van de meetkunde kan een voor vele andere vakken waardevolle denkwijze kweken.

Staatsinrichting heeft voornamelijk maatschappelijke betekenis. Dit vak komt slechts op weinig instellingen van onderwijs tot zijn recht en de hier volgende verzuchting van oud-minister Vondeling houdt daarmee wel enig verband: „De opleiding van de Nederlander tot staatsburger is bedroevend".

Kom ik thans tot het nieuwe vak „*Kennis van computer en automatisering*" dan zal het niet moeilijk vallen aan te tonen dat dit vak in alle drie categorieën zijn verdiensten heeft. Over de grootte van deze verdiensten kan men van mening verschillen. Een verder pré van het vak is dat de leerlingen het plezierig vinden. Er komt veel eigen activiteit aan te pas en de gestelde opgaven liggen doorgaans niet boven het bereik van de gemiddelde leerling.

Toch ontveins ik mij niet, dat het moeilijk haalbaar zal zijn het vak algemeen ingevoerd te krijgen en wel om drie redenen:

a de voornaamste reden: het programma is al zo overbelast;
b het door autoriteiten gevolgde beleid is in grote lijn conservatief en moet dat misschien ook wel zijn om geen gevaar te lopen van de hak op de tak te springen;
c het vak is nog weinig bekend, de deskundigen bevinden zich veelal buiten de kringen van het middelbaar onderwijs en hun argumenten dragen daardoor eerder de schijn van partijdigheid.

De opsplitsing van het vak in drie aspecten, het exacte, het verbale (nauwkeurig formuleren) en het maatschappelijke om het dienovereenkomstig onder te brengen bij respectievelijk Wiskunde, Nederlands en (bijv.) Maatschappijleer, zou ik niet toejuichen, ofschoon zodanige regeling gemakkelijker in de huidige situatie zou kunnen worden ingepast en derhalve wellicht eerder haalbaar zou zijn.

Ik beschouw de wiskunde-leraar als de aangewezen docent voor het nieuwe vak.

Wanneer ik nu de verschillende nuttigheden van „Computer en automatisering" de revue laat passeren, zal ik beginnen met de laatste.

I Het *Maatschappelijk belang* van een algemene oriëntering op het nieuwe gebied.

Reeds werd opgemerkt, dat de kennis van automatisering en computer algemeen gesproken nog weinig is gevorderd. Er heerst onkunde, wanbegrip en misverstand, op alle niveaus, ook op het hoogste. O.m. daardoor wordt de automatisering te veel afgehouden ook in gevallen waar de doelmatigheid voor ingewijden duidelijk aanwezig is. Het is begrijpelijk dat de manager die niet behoorlijk op de hoogte is van wat de computer wel en niet kan doen, niet gaarne zijn fiat geeft aan zo'n kostbare investering. Hij zou zich eerst wat beter in de nieuwe materie moeten inwerken. Hier nu schuilt het misverstand. De manager denkt dat het maanden of zelfs jaren ernstige studie zou vereisen alvorens hij een redelijk gefundeerde beslissing zou kunnen nemen. Hij kan deze tijd onmogelijk opbrengen en zal nu òf de beslissing delegeren — hetgeen voor een in financieel en organisatoir opzicht zo diep ingrijpende maatregel zeer onbevredigend is — òf hij zal gedwongen zijn de redeneringen en aangevoerde motieven ten faveure van de computer met een geleerd gezicht aan te horen om ze vervolgens terzijde te schuiven, daarbij voortdurend vrezend dat hij door een of andere losse opmerking er blijk van zou geven dat hij er helemaal niets van had begrepen.

Wie enigszins op de hoogte is van computer en automatisering weet dat het helemaal niet moeilijk is de grote lijnen te vatten. Veel meer is niet nodig om in deze zaken een gefundeerde beslissing voor te bereiden.

In dit verband moge ik evenwel opmerken dat het Departement van Onderwijs wel degelijk oog heeft voor het belang en de vérstrekkende gevolgen van de automatisering. In een brief van ruim twee jaar geleden heeft de Staatssecretaris reeds het probleem gesteld „hoe de opgroeiende jeugd het best voor te bereiden op een geautomatiseerde samenleving". Naar aanleiding daarvan is door het „Nederlands Studiecentrum voor Administratieve Automatisering" begin 1965 een conferentie georganiseerd waarin voorlichting werd gegeven aan en overleg werd gepleegd met de leden van de hoofdinspectie Onderwijs in Nederland. Ofschoon de slotconclusies weinig bemoedigend waren ten aanzien van een mogelijke invoering van het nieuwe vak, is toch in ieder geval bereikt dat het vraagstuk ernstig is overwogen en dat de aandacht op deze kwestie is gericht. Mogelijk zijn in dit verband op korte termijn toch bepaalde ontwikkelingen te verwachten.

Intussen wil ik nog de aandacht vestigen op een speciaal aspect dat algemene oriëntering gewenst maakt.

Wij weten dat de computer fantastische dingen doet, spectaculaire prestaties verricht op de meest uiteenlopende gebieden. Om er enkele te noemen: hij bestuurt satellieten, hij spoort misdaden op, vertaalt van 't Chinees in 't Russisch, speelt schaak, regelt het verkeer en levert meetkundige bewijzen.

Deze ontzagwekkende variëteit waarvan de draagwijdte ver boven ons begrip gaat, de geheimzinnigheid die dit alles omringt, ziedaar twee factoren die vrees kunnen wekken of sterker paniek kunnen zaaien.

Vele auteurs van science-fiction verhalen nemen deze materie gaarne als onderwerp van hun fantasieën en enige angst voor de toekomstige robots is stellig niet denkbeeldig. Zelfs niet ongegrond! Niemand minder dan wijlen Norbert Wiener heeft hierover tijdens een interview een opmerkelijke verklaring afgelegd. Hem werd de vraag gesteld of het gevaar dat de robots te eniger tijd de ,,macht zouden overnemen" niet volkomen irreëel was. Men kon immers, wanneer dit gevaar werkelijk actueel werd, de toevoer van energie afsnijden door de stop eruit te trekken en aldus de robots onschadelijk maken. ,,Zo eenvoudig ligt de zaak echter niet", merkte Wiener op, ,,wanneer wij steeds meer aan de robots toevertrouwen en daarbij verzuimen zelf op de hoogte te blijven van hun verrichtingen dan worden wij dermate afhankelijk van de robots, dat wij door de stop uit te trekken onze samenleving geheel zouden ontwrichten. Dit zullen wij dus niet doen, hetgeen in feite betekent, dat de robots wel degelijk de macht in handen hebben". In het vervolg van het onderhoud gaf Wiener evenwel als zijn mening te kennen, dat hij voldoende vertrouwen in de denkende mensheid stelde dan dat hier van een werkelijk gevaar sprake zou zijn. Hij verwachtte weliswaar dat de robots een steeds grotere rol zouden spelen, maar dat wij in staat zouden zijn de ontwikkeling stevig in de hand te houden.

Niettemin blijft er algemeen een lichte vrees bestaan voor de computer en deze vrees zou gemakkelijk kunnen overslaan in paniek wanneer voorshands onverklaarbare gebeurtenissen zouden optreden waarbij de mens direct betrokken zou geraken. Het is daarom een belangrijke zaak deze vrees bij voorbaat weg te nemen door een korte algemene oriëntatie die het bereik van de computer tot zijn ware proporties terugbrengt. Zo'n oriëntatie is nuttig, zelfs onontbeerlijk voor iedereen, ministers en leiders van bedrijven inbegrepen. Wij moeten de mogelijkheden en de bijzonderheden van dit fenomeen leren kennen. Het is nieuw en anders dan anders. Bij welke machine komt het voor dat 2 jaren van degelijke voorbereiding aan de installatie moeten voorafgaan om zich met enige kans op succes aan de praktijk te wagen!

Een ander vreespunt ten aanzien van de invoering van de computer betreft de werkgelegenheid. Aangezien dit onderwerp buiten het kader van dit artikel valt, volsta ik met de opsomming van een aantal factoren, die de verminderde werkgelegenheid in Nederland op het ogenblik geheel of gedeeltelijk compenseren:

- expansieve economie;
- krappe arbeidsmarkt (van administratief personeel);
- de computer creëert nieuwe taken;
- de computerindustrie heeft mensen nodig;
- algemene opleving van een maatschappij waar computers zijn ingezet.

Het fabeltje van de zaal met nijvere werkers en werksters die het veld moeten ruimen voor een enkele man die op de knop drukt, zal in het vergeetboek raken wanneer men iets weet van de computer en zijn werking.

In Amerika liggen de zaken in dit opzicht evenwel minder gunstig dan in Nederland. Daar is wel degelijk sprake van werkeloosheid door inzet van computers. Uit een aan de president uitgebracht rapport blijkt echter dat de opleiding het grootste knelpunt vormt. Een betere opleiding zou de werkgelegenheid in bepaalde sectoren verruimen. Een reden te meer om ook bij ons het onderwijs bijzonder te benadrukken.

II *Direct nut*

Alvorens door de computer te worden verwerkt, doorloopt een probleem de volgende stadia: conceptie, formulering of definitie, analyse, programmering. Deze deel-vraagstukken worden doorgaans door verschillende personen aangepakt en zij werken dus allen mee aan de oplossing. Het is niet de programmeur alleen die meetelt en wanneer wij spreken over het directe nut van computer-onderwijs, mogen wij ons niet bepalen tot het nut voor de aanstaande programmeur, maar moeten wij denken aan allen die direct of indirect in aanraking komen met de computer. Dit zal vooral in de toekomst een aanzienlijk percentage van de werkende bevolking bedragen, want de computers zijn gestadig in opmars, ook in Nederland. Men rekent met een factor twee per 5 jaar, en dit komt erop neer dat Nederland rond 1972 ongeveer 1000 computers zal tellen. Voorts breidt niet alleen het aantal computers zich gestadig uit, maar ook wordt de variatie van toepassingen steeds groter.

Dát de computer bij alle problemen van de techniek een belangrijke rol zou spelen, werd van het begin af verwacht, maar thans is de computer eveneens nuttig op medisch gebied, in de psychologie, in de rechtswetenschappen, in de taalwetenschappen en op zoveel andere gebieden. De uitspraak dat geen wetenschap op den duur buiten de „greep" van de computer kan blijven, is veelzeggend.

Wanneer wij nu spreken over het directe nut van het voorbereidend computer-onderwijs op Middelbare scholen, dan beginnen wij met een aantal voordelen die in de eerste plaats van belang zijn voor aanstaande computer-specialisten:

1 Er wordt een gunstig klimaat geschapen voor de opleiding tot programmeur en systeem-analist. De daaruit voortvloeiende versnelling is bijzonder belangrijk omdat er zoveel nieuwe functionarissen nodig zijn.
2 Minder afvallers bij de opleiding tot specialist; het terrein is reeds bekend en men weet wat men gaat doen als men de richting van computer-functionaris heeft gekozen.
3 Een beter gebruik van de computer. Een uitspraak van Auerbach: „het nut van de computer hangt niet meer af van nieuwe vindingen, maar wordt bepaald door het antwoord op de vraag of wij de juiste methodes kunnen ontwikkelen om een optimaal gebruik te maken van de mogelijkheden van de computer", De toepassingen vertonen een ontstellende achterstand ten opzichte van de techniek.

Is het directe nut van inleidend onderwijs reeds aanzienlijk voor de toekomstige specialisten, voor de overigen die met de computer in aanraking komen, is de betekenis nog veel groter. Het gaat hier om de ontwikkeling van een nieuw denkpatroon, een denkpatroon dat in bepaalde opzichten veel exacter is en dit ook moet zijn. Daarmee wordt echter niet gezegd dat ons oude, gebruikelijke denkpatroon achterhaald zou zijn en noodzakelijk vervangen moet worden. Het oude denkpatroon is praktisch en doelmatig. Het stelt geen problemen aan de orde die misschien toch niet zullen optreden. Het propageert geen beslissingen in de verre toekomst, zolang de alternatieven nog niet helder voor de geest staan.

De beste keuze kan worden gemaakt wanneer wij er direct voor staan. Wij kunnen dan handelen naar gelang van omstandigheden. Wij hoeden ons voor perfectionisme gedachtig aan de zegswijze „het perfecte is de vijand van het goede". Al deze goede oude waarheden gaan over boord wanneer de computer in het geding is. Het nieuwe denkpatroon eist het rekening houden met alle mogelijkheden ook met de meest onwaarschijnlijke. Dit geldt mede voor de mogelijkheden in de verre toekomst; de gedragslijn wordt van te voren in alle details uitgestippeld.

Deze eisen gelden niet alleen voor de programmeur maar ook voor de directe en indirecte opdrachtgevers. Voor deze categorie doemt nog een tweede moeilijkheid op, waarvan de betekenis slechts te peilen is door degenen die het probleem aan den lijve hebben ondervonden: men moet weten wat men wil! Is aan deze verraderlijk eenvoudige eis voldaan dan komt de taak van de volledige, eenduidige en nauwkeurige formulering aan de orde.

Al deze zaken kan men ervaren, wanneer men zelf de eerste beginselen van het programmeren in praktijk heeft gebracht en waar zou dit beter kunnen dan bij het Algemeen Onderwijs?

III *Het indirecte nut* van de computer grenst aan het directe nut in deze zin dat de kwaliteiten die worden gevraagd voor een succesvol opereren op het gebied der automatisering ook elders hun nut kunnen afwerpen. Denk bijvoorbeeld aan uitdrukkingsvaardigheid. Men dient er als computerman steeds mee rekening te houden, dat de machine alles letterlijk neemt en wie daarop toeziet, is eraan gewend de tekst niet alleen met eigen ogen te lezen maar ook met die van anderen. Wanneer in een brievenhoofd staat: „Stortingen bij voorkeur op Bank X, rijksgiro 12000", dan blijft men in het onzekere of Bank X dit giro-nummer heeft of wel het bedrijf zelf.

De machine neemt alles letterlijk, waardoor soms verrassende wendingen optreden. Een klein voorbeeld. In de programmeertaal FORTRAN bewerkstelligt het volgend paar instructies

```
101 FORMAT (21H WORTELS○ONBESTAANBAAR)
    PRINT 101
```

de afdruk „wortels onbestaanbaar". Het teken ○ stelt voor „één positie wit" en 21 is het totaal aantal posities druk.

Zou men verkeerd tellen en i.p.v. 21, 20 schrijven, dan zou dit als enig gevolg hebben dat de „R" van het laatste woord wegbleef. Zou men echter „22H" schrijven, dan zou de computer na „wortels onbestaanbaar" nog een haakje afdrukken (volkomen logisch) en daarna op de bij de computer behorende schrijfmachine de vermaning uittypen: „U heeft het haakje vergeten".

Bij de programmering zijn evenals bij alle voorbereidende werkzaamheden nauwkeurigheid en denkdiscipline vereist. Zeer in het bijzonder wordt door het computer-onderwijs analytische vaardigheid gekweekt, het uiteenrafelen van problemen ten einde deze terug te brengen tot een reeks binaire vragen.

De schematechniek vereist een sequentiële ordening van gedachten en het gemakkelijk werken met symbolen. Voorts wordt het logisch denken bevorderd. Elke fout tegen de logica wordt door de computer gesignaleerd en bestraft.

De Boole-Algebra is voor velen te abstract en daardoor moeilijk verteerbaar. De administratieve regelingen met hun „korting bij afname van een bepaald quantum of bij een zeker totaalbedrag en jaartotaal, maar niet in een ander rayon enz." openen de mogelijkheden om de symbolische logica concreet te beleven.

Het denken in vertakkingen, dat de eis stelt steeds rekening te houden met alle mogelijkheden, en bedacht te zijn op onverwachte afwijkingen, kan op andere gebieden evenzeer van belang zijn. Zo ook het kweken van een gevoel voor uitzonderingen.

Enkele eenvoudige voorbeelden om te laten zien met welke complicaties en kleine, maar verraderlijke moeilijkheden, de computerleerling soms te maken krijgt.

1 Bij het berekenen van de ziektepremie in Engeland wordt achtereenvolgens gevraagd naar ziek of gezond; al of niet boven 65; al of niet beneden 18; man of vrouw. Een aaneenschakeling van binaire vertakkingen.
2 Bij de bepaling van het onderwijzerssalaris zijn nog veel meer factoren in het geding: aantal dienstjaren, hoofdakte, bevoegdheid, grootte school, lessen elders, woonhuis verder dan 6 km van de school, enz.
3 De berekening van de Amerikaanse loonbelasting vindt (of vond) plaats volgens onderstaand voorbeeld.

Bruto-loon per week	\$ 120.—	
Aftrek per huisgenoot (vrouw of kinderen) \$ 13 voor vrouw en 4 kinderen		
5 × \$ 13 =	\$ 65.—	
		\$ 120.— = bruto
loonbelasting 18 %	\$ 55.—	= \$ 9.90
		\$ 110.10 = netto

Wanneer men nu dit probleem moet programmeren en daartoe het volgende voor de hand liggende blokdiagram samenstelt,

Belastbaar bedrag = Bruto — aantal × 1300
Loonbelasting = 18 % belastbaar bedrag
Netto = Bruto — loonbelasting

heeft men twee fouten gemaakt.

Ten eerste is verzuimd de loonbelasting af te ronden en ten tweede is geen rekening gehouden met de mogelijkheid dat de aftrek het belastbaar bedrag zou kunnen overtreffen.

Bij vrouw en 9 kinderen bedraagt de aftrek $ 130,—; daardoor zou het belastbaar bedrag en de loonbelasting negatief worden, hetgeen bepaald niet de bedoeling is.

4 In de administratie van een levensverzekeringmaatschappij worden regelmatig vermenigvuldigingen uitgevoerd van de vorm x,xx maal x,xx = xx,xxxx.

In het geheugen van de computer zijn 6 posities voor de uitkomst gereserveerd.

Om geheugenruimte te besparen en omdat de laatste cijfers niet nauwkeurig zijn wordt besloten de uitkomst in 2 (i.p.v. 4) decimalen te schrijven.

Men doet dit dan zo, dat men alvorens te vermenigvuldigen allereerst vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal tot één decimaal terugbrengt. (Overigens een weinig nauwkeurige manier van doen.)

In het geheugen komt nu xx,xx te staan. Een verder gegeven is dat in de kolom links van deze uitkomst een 1 verschijnt wanneer de verzekerde is overleden. Op een gegeven dag krijgt Mevr. X een aantal documenten toegezonden i.v.m. het overlijden van haar echtgenoot, die bij het openen van de post gespannen toeziet. Wat is geschied? Antwoord: vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal waren op zekere keer beide op 10,0 afgerond, het eerste getal was (bijv.) aanvankelijk 9,96, het tweede 9,98; $10{,}0 \times 10{,}0 = 100{,}00$. In de kolom links verschijnt een niet bedoelde 1.

5 Gegeven de matrix A (M,M). Gevraagd de elementen van kolom K te vermeerderen met het diagonaal-element A (K,K) in die kolom.

Het is bij deze vraagstukken gebruikelijk en zeer voordelig voor de nieuwe elementen dezelfde letter te gebruiken als de oorspronkelijke bijv.

A (I,K): = A (I,K) + A (K,K).

Bij de programmering in programmeertalen beschikken wij over z.g. herhaalinstructies, die een aanzienlijke bekorting van het schrijfwerk mogelijk maken.

Dus A (I,K): = A (I,K) + A (K,K) voor I = 1, 2, 3 . . . enz. t/m M.

Hier zit weer een fout, want als I op een gegeven ogenblik K wordt, staat er

A (K,K): = A(K,K) + A (K,I) = 2A (K,K).

Dit is nog volkomen in orde, maar bij de volgende bewerking

A (K + 1,K): = A (K + 1,K) + A (K,K)

neemt deze laatste A (K,K) zijn nieuwe waarde 2A (K,K) aan. Hoe het dan wel moet?

Men stelt eerst A (K,K) veilig door X = A (K,K) en kan daarna de herhaalinstructie zonder bezwaar gebruiken:

A (I,K): = A (I,K) + X voor

I = 1 t/m M.

Computer-onderwijs in Nederland en elders

Op M.E.A.O.-scholen wordt gedurende enkele jaren geëxperimenteerd met deze materie. De ervaringen zijn verschillend en niet onverdeeld gunstig. Er is wel belangstelling vooral onder de meer wiskundig begaafden, maar de A-leerlingen vinden het vak erg moeilijk.

Op vrijwel alle instellingen van Hoger Onderwijs worden colleges gegeven in „automatische informatieverwerking”. Zulks geschiedt niet om specialisten op te leiden, maar wel om de studerenden op de hoogte te brengen van de mogelijkheden en beperkingen van de computer. Voorts om hun in staat te stellen de problemen van het eigen vakgebied te formuleren in een voor de computer verstaanbare taal.

Prof. A. B. Frielink merkt te dien aanzien o.m. het volgende op[1]: „De ervaring heeft geleerd dat de zuiver verbale benadering aangevuld met visuele voorstellingen de begripsoverdracht onvolkomen doet zijn. Het is dringend noodzakelijk dat elke student gedurende zijn studietijd de gelegenheid krijgt enkele uren met de computer te „spreken”.”

De auteur hoopt en verwacht, dat deze doelstelling over een aantal jaren te verwezenlijken zal zijn door gebruikmaking van datatransmissie en time-sharing.

Professor Frielink komt tot de volgende conclusie:

„Evenzeer als lezen, schrijven en rekenen reeds lang behoren tot het minimum van algemene ontwikkeling, moet algemene kennis van de automatische informatieverwerking worden gerekend tot het minimum van kennis van de academicus. De tijd lijkt niet ver dat het V.H.O. deze taak gaat vervullen”.

In Engeland wordt eveneens getracht het computer-onderwijs te stimuleren en daartoe wordt een zeer opmerkelijke weg bewandeld. De maatschappij „Computer Resale Brokers” vraagt verouderde typen computers gratis ter beschikking van scholen te stellen en wanneer de overtuiging leeft dat de school er het best mogelijke gebruik van zal maken, verleent deze maatschappij bovendien de nodige faciliteiten voor installatie e.d.

In Amerika is men veel verder. Daar beschikt elke school van enige omvang over een computer, waarop de leerlingen de nodige ervaring kunnen opdoen.

Wij laten hier ter afsluiting volgen een Amerikaans leerprogramma van een inleidende cursus van 15 lessen van 2 uur.

1. Inleiding; achtergronden; geschiedenis; behoefte aan computers; analoge en digitale computers; gebruik in wetenschap en bedrijf.
2. Talstelsels: 10, 2, 8. Conversie.
3. Basis-schema van de computer: input, output, rekenorgaan, geheugen, besturingsorgaan, perifere apparatuur.

4 en 5.
Probleem-analyse: blokdiagram; nut en doel van de analyse.

6 t/m 13.
Programmering in machinetaal; demonstraties; gebruik van de computer.

14 en 15.
Praktijk: administratieve toepassing, baan van een satelliet, oorlogsspel, vertaling. Automatische programmering. Toekomstige ontwikkelingen.

---

[1]) zie „Folia Civitatis” d.d. 18 juni ’66.

RONDOM HET GELIJKTEKEN

door

Dr. Joh. H. Wansink

Arnhem

1. Het gelijkteken (=) is een van de belangrijkste algebraïsche constanten die in de algebraïsche syntaxis optreden. Het komt in de schoolwiskunde in wisselende betekenissen voor. Welke die betekenis is dient uit de context duidelijk te worden, maar dikwijls drukt die context zowel in leerboeken als in leerlingenwerk de bedoeling niet adequaat uit.

Het gelijkteken is afkomstig van Robert Recorde (†1558). Voordien werd de betekenis ervan omschreven, bijv. met woorden als *aeqatur* of *aequalis est*. Recorde motiveerde zijn voorkeur voor het gelijkteken door op te merken, dat er niets zou zijn dat meer gelijk is dan twee evenwijdige lijnen. Het heeft destijds meer dan een eeuw geduurd, voordat Recorde's gelijkteken algemeen in gebruik werd genomen.

2. In de loop der tijden zijn er in verband met de wisselende betekenis die er aan het gelijkteken kon worden toegekend, ook diverse symbolen in gebruik gekomen. Zo ontmoeten we de tekens:

$$= \qquad \approx \qquad \equiv \qquad \triangleq \qquad \doteq$$

We geven van elk een voorbeeld:

(1). $2 + 5 = 7$;

(2). lengte van een staaf $\approx$ 123 cm;

(3). $x^2-4 \equiv (x+2)(x-2)$;

(4). bij de toelichting op een grafiek:

1 cm $\triangleq$ 1000 bruto-registerton;

(5). in het hoofdstuk over vergelijkingen:

$$x^2 - 4 \doteq x + 8.$$

Vredenduin heeft in jaargang 28 van Euclides uitgelegd, dat het t.a.v. de symbolen 1, 3 en 5 logisch verantwoord is zich in alle gevallen te beperken tot het gebruik van het symbool =, maar laat de mogelijkheid open, dat het gebruik van andere tekens, hoewel logisch niet noodzakelijk, didactisch toch enige voordelen zou kunnen opleveren [1]).

We willen in onderstaand artikel nagaan, welke de functie is die men aan de vijf genoemde symbolen in de schoolwiskunde zou kunnen toekennen.

3. *Het kromme gelijkteken* $\approx$.

We weten, dat alle meetuitkomsten benaderingen voorstellen, die nimmer de getalwaarde van de desbetreffende grootheden (gewichten, lengten, oppervlakten, . . .) exact aangeven. De optredende onnauwkeurigheden geven ons echter niet het recht de meetuitkomsten als „onnauwkeurige getallen" te kwalificeren. Niet de getallen die men gebruikt zijn onnauwkeurig, maar de meting zelf bezit een onnauwkeurigheid.

Om nu het benaderingskarakter van meetuitkomsten reliëf te geven, gebruikt men wel het „kromme" gelijkteken $\approx$ en schrijft:

$$l \approx 123 \text{ i.p.v. } l = 123.$$

4. Het *identiteitsteken* $\equiv$ komt in onze leerboeken nog slechts sporadisch voor. Het gebruik ervan neemt, voorzover ik kan nagaan af, m.i. terecht.

In de leer der vergelijkingen placht men het teken $\equiv$ te gebruiken indien de oplossingsverzameling van een vergelijking de al-verzameling is, bijvoorbeeld in:

$$x^2 - 4 \equiv (x - 3)(x + 3) + 5$$

Is van deze vergelijking de grondverzameling R, dan is ook de oplossingsverzameling R.

In oudere leerboeken kwam het identiteitsteken $\equiv$ strijk en zet voor bij de behandeling van de reststelling:

de „rest" die de veelterm $V(x)$ oplevert bij deling door $x - a$, is $V(a)$.

Het bewijs ving dan aan met het neerschrijven van de identiteit

$$V(x) \equiv (x-a)Q(x)+R,$$

waarin R onafhankelijk is van x.

De behoefte aan het teken $\equiv$ blijkt slechts tijdelijk te zijn; leerboek en leraar contenteren zich spoedig weer met het gewone gelijkteken.

---

[1]) P. G. J. Vredenduin, *Het gelijkteken*, Euclides **28**, p. 288-291, 1952-1953.

Opmerkelijk is dat in het beginonderwijs van de algebra, waar de identiteiten een belangrijke rol spelen en men zou mogen schrijven

$$a + b \equiv b + a$$
$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

niemand het identiteitsteken gebruikt, ook al hebben deze formules het karakter van identiteiten. Er is m.i. geen bezwaar om met vermijding van het teken $\equiv$ deze formules te schrijven als

$$\underset{a}{\forall}\underset{b}{\forall}\ a + b = b + a$$
$$\underset{a}{\forall}\underset{b}{\forall}\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De kwantor $\underset{a}{\forall}$ uit de symbolische logica wordt gelezen als:

voor alle a geldt . . .

We kunnen dit symbool ook vervangen door $\wedge$; het symbool voor de kwantor $\exists$ wordt dan $\vee$.

5. *Het teken* $\triangleq$.

Dit symbool, dat voorkomt in de tabel N1267 van de Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland, wordt gelezen als „komt overeen met". Zo schrijven we bij een snelheidsdiagram bijvoorbeeld bij de assen:

1 cm $\triangleq$ kine en 1 cm $\triangleq$ 1 sec.

6. *Het teken* $\doteq$.

Dit symbool wordt in Nederland slechts door één auteur gebruikt [2]). Schogt vermeldde het bestaan van het teken reeds in 1923 in een artikel in de tiende jaargang van Euclides [3]). Wat is nu de betekenis van dit symbool?

We schrijven $\qquad 4 + 3 = 7$

maar $x^2 + 3 \overset{?}{=} 7$ of iets eenvoudiger

$$x^2 + 3 \doteq 7$$

We noemen $4 + 3 = 7$ en $5 + 4 = 8$ oordelen, d.w.z. uitspraken, waarvan we kunnen uitmaken of ze waar dan wel niet-waar zijn. $4 + 3 = 7$ is een waar oordeel, $5 + 4 = 8$ een onwaar oordeel. $x^2 + 3 = 7$ en $x^2 + 3 = 2$ zijn echter geen oordelen, ook al hebben

---

[2]) Joh. H. Wansink, *Algebra I*, pp. 99, Groningen, 1966.

[3]) J. H. Schogt, *Opmerkingen over wiskundige vaktaal*, Euclides **10**, p. 51-72, 1933-1934.

ze wel de vorm van een oordeel; we kunnen nl. niet uitmaken, of deze beweringen waar of onwaar zijn. Dit kunnen we wel, zodra we de variabele x die erin optreedt, door enige getalwaarde vervangen; de eerste uitspraak gaat voor $x = 2$ over in een waar, voor $x = 3$ in een onwaar oordeel.

We noemen deze formules oordeelschema's. Van logisch standpunt zijn het „open zinnen" met een vrije variabele x.

Door het plaatsen van een vraagteken bij het gelijkheidssymbool, een vraagteken waarvan de stip boven = als rudiment is te beschouwen, trachten we aan te geven, dat de waarden van x gezocht moeten worden, waarvoor het oordeelsschema overgaat in een waar oordeel.

Uitgaande van enige grondverzameling, bijv. de verzameling R der reële getallen, zoeken we de oplossingsverzameling, d.i. die deelverzameling van R, die substitutie toelaat in een waar oordeel.

Voor $x \in \mathrm{R}$ is de oplossingsverzameling van $x^2 + 3 = 7$ de verzameling $\{-2; +2\}$ en van de vergelijking $x^2 + 3 = 2$ de lege verzameling $\emptyset$. Voor $x \in \mathrm{C}$ wordt de oplossingsverzameling echter $\{i; -i\}$.

We kunnen desgewenst het symbool $\doteq$ missen, als we de erdoor aangewezen opdracht maar op ondubbelzinnige wijze door omgangstaal vervangen.

Freudenthal heeft voorgesteld [4]) om naast de logische kwantoren $\forall$ en $\exists$ (dan wel $\wedge$ en $\vee$) de interrogatieve kwantor ? in te voeren.

Hiervan gebruik makend schrijven we de vergelijking $x^2 + 3 = 7$ als

$$\underset{x}{?}(x^2 + 3 = 7).$$

Hier vervangt de kwantor $\underset{x}{?}$ een stuk context, nl. de opdracht: „zoek de waarden van x, waarvoor $x^2 + 3 = 7$ overgaat in een waar oordeel", m.a.w.
„bereken de oplossingsverzameling van $x^2 + 3 = 7$".
Zodra de leerlingen in het voortgezet onderwijs met kwantoren vertrouwd zijn geraakt, verdient het introduceren van de interrogatieve kwantor de voorkeur boven het gebruik maken van een gelijkheidsteken met een stip erboven. Een voordeel ervan is ook, dat men bij het vraagteken gemakkelijker een index kan plaatsen ter verstrekking van nadere informatie dan bij een simpele stip.

---

[4]) H. Freudenthal, *Logica als methode en als onderwerp*, Euclides **35**, p. 241-255, 1959-1960.

Zo is de oplossingsverzameling van

$$\underset{x}{?}(x^2 + 2ax + a^2 = 9)$$

de verzameling $\{- a - 3;\ - a + 3\}$
en van de vergelijking

$$\underset{a}{?}(x^2 + 2ax + a^2 = 9)$$

de verzameling $\{- x - 3;\ + x + 3\}$.
We zien echter dat we reeds hier met een gewijzigde betekenis van de interrogatieve kwantor worden geconfronteerd. Terwijl de oplossingsverzameling van de vergelijking $\underset{x}{?}(x^2 + 3 = 7)$ een getallenverzameling was, beschouwen we een verzameling van functies van a als oplossingsverzameling van de tweede vergelijking. Substitutie van $- a - 3$ en van $- a + 3$ doet het oordeelsschema $x^2 + 2ax + a^2 = 9$ overgaan in een identiteit in a.

We kunnen in verband hiermee de bedoeling van de gestelde opgave iets scherper aangeven door introductie van de al-kwantor $\forall$ of $\wedge$.

$$\underset{x}{?}\underset{a}{\forall}(x^2 + 2ax + a^2 = 9)$$

met de oplossingsverzameling $\{- a - 3;\ + a + 3\}$
en

$$\underset{a}{?}\underset{x}{\forall}(x^2 + 2ax + a^2 = 9)$$

met de oplossingsverzameling $\{- x - 3;\ - x + 3\}$.
Welke de deelverzameling van de grondverzameling is waarop de kwantor $\forall$ betrekking heeft staat niet a priori vast.
Zo is de oplossingsverzameling van

$$\underset{x}{?}\underset{a}{\forall}(x^2 + 9 = 6x + a)$$

de verzameling $\{3 - \sqrt{a};\ 3 + \sqrt{a}\}$, met $a \in R_+$, de verzameling van de niet-negatieve reële getallen.
Er is nog een moeilijkheid.
De oplossingsverzameling van

$$\underset{x}{?}\underset{a}{\forall}(x^2 + ax = a + 1)$$

is het singleton $+ 1$, als we conform de oorspronkelijke definitie alleen getalwaarden van x op het oog hebben maar de oplossingsverzameling wordt $\{+ 1;\ - a - 1\}$, als we vragen naar x als functie van de parameter a.

In verband hiermee geven we er de voorkeur aan om met weglating van de al-kwantor bijvoorbeeld te schrijven:

$$\underset{x=f(a)}{?}(x^2 + ax = a + 1) \text{ en } \underset{x=f(a)}{?}(x^2 + ax + 1 = 0).$$

De hier gegeven opdrachten kunnen zodanig worden geïnterpreteerd, dat daarbij ook moet worden opgegeven voor welke deelverzamelingen van R de te bepalen functies van a zijn gedefinieerd. Dat zijn dus hier opvolgend de verzamelingen R en

$$\{a|a \leqq -2 \vee a \geqq +2\}.$$

6. *Equivalentierelaties.*

De door het gelijkteken $=$ uitgedrukte relatie is een equivalentierelatie. Dit betekent:

(1). de relatie is reflexief: $\underset{a}{\forall}(a = a)$;

(2). de relatie is symmetrisch: $\underset{a}{\forall}\underset{b}{\forall}(a = b \Rightarrow b = a$;

(3). de relatie is transitief: $\underset{a}{\forall}\underset{b}{\forall}\underset{c}{\forall}(a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c)$.

Voor het kromme gelijkteken gelden de twee eigenschappen (1) en (2) wel, (3) echter niet,
Dat wil zeggen:

we hebben niet: $\underset{a}{\forall}\underset{b}{\forall}\underset{c}{\forall}(a \approx b \wedge b \approx c \Rightarrow a \approx c)$.

Immers:

$$a \approx b \Leftrightarrow |\, a - b \,| < \varepsilon,$$

waarin de grootte van ε afhangt van de mate van nauwkeurigheid van de uitgevoerde „meting", c.q. van de beoogde benadering.

Zo kunnen de uitkomsten van metingen waarbij men opvolgend waarden a en b vindt tussen 6,50 en 7,49 worden benaderd door 7,0. We hebben in dit geval $|a - b| < 1{,}0$.
Uit $a \approx b \Leftrightarrow |a-b| < \varepsilon$ en $b \approx c \Leftrightarrow |b-c| < \varepsilon$ volgt nu wel $|a - c| < 2\varepsilon$, maar niet $|a - c| < \varepsilon$, zodat nog niet geldt:

$$a \approx c.$$

Terwijl in het gewone rekenen de punten op een getallenrechte met „getallen" corresponderen, worden bij het rekenen met benaderingen de getallen afgebeeld op „intervallen" van die getallenrechte.

Het niet meer gelden van de transitieve eigenschap laat zich in de klas op eenvoudige wijze illustreren.

Onderstel, dat iemand voor het knopen van een smyrna-tapijt 500 draden van een bepaalde kleur en van een bepaalde lengte nodig heeft. Hij kan nu bij het knippen op verschillende wijzen te

werk gaan. Hij knipt eerst met behulp van schaar en meterlat een draad van de gewenste lengte af, daarna gebruikt hij de afgeknipte draad bij het afknippen van de tweede, deze tweede bij het afknippen van de derde, enz. Ook kan hij bij elke knipping steeds de oorspronkelijke vaste maat gebruiken.
Het is duidelijk, dat bij de eerste methode voor de 500ste draad een aanmerkelijk verschil in lengte zal kunnen optreden ten opzichte van de eerste, een aanmerkelijk groter verschil dan bij de tweede methode.

7. Ook het symbool $\triangleq$, soms geschreven als het gewone gelijkteken $=$, is geen equivalentiesymbool. We kunnen het voor de ervoor gereserveerde diensten gevoeglijk vervangen door de afbeeldingspijl $\rightarrow$. Bij het gebruik van het teken $\triangleq$ gaat het nl. niet om een equivalentierelatie, maar om een afbeelding van een verzameling in een andere verzameling.

Beschouwen we bijvoorbeeld een v-t-diagram, dan behoort er bij elk punt van het vlak een getallenpaar (a, b). Elk van de elementen vertegenwoordigt een grootheid; de a betekent a seconden en de b betekent b kine als we in het c.g.s.-stelsel werken.

Met het punt $(1, 0)$ het eenheidspunt op de tijdas, correspondeert de eenheid van tijd, in ons geval de seconde, en met het punt $(0, 1)$, het eenheidspunt op de snelheidsas, correspondeert de eenheid van snelheid, hier de kine.

De notatie 1 cm $\triangleq$ 1 sec voor de tijdas en de notatie 1 cm $\triangleq$ 1 kine voor de snelheidsas geven nu de volgende afbeeldingen aan:

a sec $\rightarrow$ het punt $(a, 0)$ op de tijdas;
b kine $\rightarrow$ het punt $(0, b)$ op de snelheidsas.

Het teken $\triangleq$ treedt dus op in afbeeldingsvoorschriften.

8. Zijn de oordelen $3 = 8$ en $12 = 2$ ware oordelen of onware? Dit is zonder meer niet uit te maken. Het al of niet mogen gebruiken van het gelijkteken hangt af van de regels, die gesteld worden bij een indeling in equivalentieklassen.
Beschouwen we bijv. restklassen modulo 5 dan mogen we schrijven:

$$3 = 8 \text{ en } 12 = 2$$

We gebruiken hier ook wel het identiteitssymbool $\equiv$ onder toevoeging van (mod. 5).

Misschien oordeelt men, dat deze beschouwing ons buiten de leerstof voor het v.h.m.o. voert. Ik wijs er echter op, dat we zonder bezwaar reeds de leerlingen van de eerste klassen van het v.h.m.o., eventueel die van de hoogste klassen van de lagere school, met restklassen mod. 12 kunnen leren rekenen, nl. bij de zogenaamde „klokvraagstukjes". We mogen dan schrijven:

$$9 + 5 = 2 \text{ en } 3 - 8 = 7.$$

9. Een gelijkheid als

$$5 + 3 = 8$$

geeft ons nog aanleiding tot het volgende commentaar.

Deze gelijkheid houdt meer in dan de ermee corresponderende:

$$8 = 8.$$

$3 + 5$ stelt namelijk een optelling voor en tevens de uitkomst van die optelling, de getalwaarde.

Een leerling van de lagere school ziet $5 + 3$ als de opdracht „tel bij het getal 5 het getal 3 op". De leerling van het v.h.m.o. ziet $a + b$ als een symbool voor een getal, dat hij in concreto niet kan vinden door een optelling uit te voeren, zoals de leerling van de lagere school dat deed. Hij weet immers in het geheel niet welk getal door a en welk door b wordt voorgesteld.

$5 + 3$ wijst meer aan dan alleen het getal 8; het wijst ook aan dat het uit de getallen 5 en 3 is ontstaan en we door optelling. Het is uit andere getallen ontstaan dan bij $2 + 6 = 8$ en bovendien door een andere bewerking dan in $2 \times 4 = 8$.

Deze dubbele betekenis van waarde en bewerking treft men eveneens aan in uitdrukkingen als $9 - 3$, $3 + 9$, $18 : 3$, . . .

Wil men in het onderwijs aan de dubbele betekenis enig reliëf geven dan kan men tijdelijk de notatie

$$a + b = (a + b)$$

gebruiken.

In het linkerlid valt de aandacht op de bewerking, in het rechterlid op de met $a + b$ corresponderende waarde.

10. We ontmoeten soms het misverstand, dat er bij gebruik van het teken $=$ en stellig bij het gebruik van het teken $\equiv$ aan weerszijden „precies hetzelfde" moet staan. Wat we met dit „precies hetzelfde" bedoelen, vereist echter steeds nadere precisering.

$5 + 3 = 8$. Niemand zal in eerste instantie aan de juistheid van dit oordeel twijfelen. Maar tevens zal ieder voetstoots toe moeten geven, dat er links en rechts van het gelijkteken toch niet „precies hetzelfde" staat. Als we „$5 + 3$" niet uitsluitend beschouwen in de rekenkundige context, maar ook als een tekening, als een schilderij, dan kunnen we gemakkelijk abstraheren van de getalwaarde 8 die we aan de uitdrukking plegen toe te kennen en daarna constateren, dat er links en rechts van het gelijkteken stellig niet hetzelfde staat. Zelfs $8 = 8$ klopt dan niet meer in zijn volle strengheid. Ik zie althans geen kans twee maal het symbool 8 neer te schrijven, zonder dat de beide tekens ook maar ergens in zouden verschillen (vorm, grootte, zwarting, invloed achtergrond, . . .). Deze aperte verschillen zullen ons echter er nimmer toe brengen de conclusie $5 + 3 \neq 8$ te aanvaarden.

Bezwaren van deze aard kunnen we met Tarski ontzenuwen door te onderscheiden tussen de symbolen zelf en dat wat door die symbolen wordt gerepresenteerd [5]). Als we in een zin iets willen zeggen, moeten we in die zin niet dat bepaalde ding zelf laten optreden, maar er een naam voor gebruiken. Als we het over problemen van dood en leven hebben, is het irrelevant, dat het woordje „dood" uit vier en het woordje „leven" uit vijf letters bestaat.
We herinneren in dit verband aan een flauwe vraag uit onze kinderjaren:

Amsterdam die grote stad
Met hoeveel letters spelt men dat?

Antwoordden we „met 21", dan was het antwoord: neen, uit 3: d-a-t; zei men: met 3, dan was het antwoord: beter tellen, het zijn er 21.

Het misverstand zou afdoende bezworen kunnen het worden, als men de ene maal de eerste regel, in het andere woordje „dat" tussen aanhalingstekens had gezet. Maar om het misverstand was het destijds juist begonnen!

Zo kan men zonder gevaar voor misverstand zeggen dat

„$5 + 3$" en „8"

niet precies hetzelfde, niet identiek zijn, maar dat wat er tussen aanhalingstekens staat wel het zelfde getal representeert.

Voor we over het al of niet gelijk zijn van twee uitdrukkingen een oordeel kunnen uitspreken, dienen we eerst nauwkeurig te weten, wat er met de erin optredende symbolen wordt bedoeld.

Het gaat in de wiskunde nimmer om die symbolen zelf, maar steeds om dat wat door die symbolen wordt aangegeven.

We moeten in de algebraïsche syntaxis steeds de betekenis van de symbolen kennen, benevens de regels op grond waarvan we tot het al of niet gelijk zijn van uit de symbolen opgebouwde uitdrukkingen wensen te besluiten.

---

[5]) A. Tarski-E. W. Beth, *Inleiding tot de logica*, Amsterdam, 1958,
H. A. C. Roem, *Identiteit en gelijkheid in de algebra*, Euclides **31**, p. 122-125, 1955-1956.

GROEP L.I.W.E.N.A.G.E.L.

NOTULEN VAN DE LEDENVERGADERING

op vrijdag 4 november 1966 om 14.30 uur in Gebouw „Op Gouden Wieken" te Scheveningen

De vergadering werd geopend door de voorzitter, Drs. M. Koksma, die de aanwezigen en in het bijzonder Inspecteur Drs. J. Groen, de vertegenwoordigers van zusterverenigingen, de heren Ir. C. van Vliet (Wimecos), Drs. W. C. Riel (Velines) en H. G. Broekman (Wiskundewerkgroep van de W.V.O.), en de sprekers, de heren Dr. G. Brouwer en G. Krooshof, hartelijk welkom heette. De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd. Van de kascommissie, bestaande uit de heren N. J. Zimmerman en Dr. L. Bakema, was bericht binnen gekomen, dat de kas in orde was bevonden. In overeenstemming met het voorstel van de kascommissie werd de penningmeester onder dankzegging voor het vele werk gedechargeerd. De secretaris, die aan de beurt van aftreden was, werd herkozen.

Na dit officiële gedeelte was het woord aan de eerste spreker, Dr. G. Brouwer, die een voordracht hield over: „*Erfelijke codering*". De spreker was zo vriendelijk zelf het volgende resumé te geven.

Bij een celdeling vormen de chromosomen zich uit de chromatinemassa van de kern, (*de nucleus*). Deze chromosomen zijn de dragers der erfelijke factoren of *genen*; hun aantal is voor iedere plante- of dieresoort constant. De mens heeft er 46. De chromosomen bestaan uit eiwitten en de genen uit nucleïnezuren.

Dank zij het elektronenmikroskoop heeft men de virussen leren kennen, die met een lichtmikroskoop niet of nauwelijks zijn waar te nemen. *Virussen* kunnen bij mens, dier of plant infectieziekten veroorzaken, (verkoudheid, griep, kinderverlamming), maar ook kunnen zij bacteriën vernietigen, b.v. pathogene bacteriën bij ons, zij heten dan *bacteriofagen* of kortweg *fagen*.

Een virus blijkt veelal te bestaan uit een eiwitomhulsel met daarin een nucleïnezuur en is daardoor vergelijkbaar met een chromosoom en de genen. Virussen en fagen kunnen zich niet zelfstandig vermeerderen, maar zij dringen een cel binnen en nu wordt de celstofwisseling gedwongen een groot aantal nieuwe virusdeeltjes te vormen De cel barst open en de nieuwe virussen zullen op hun beurt cellen verwoesten.

In het protoplasma van de cellen bevinden zich uiterst kleine lichaampjes, die men met het elektronenmikrosk. heeft kunnen onderscheiden in: *ribosomen*, die voor de *eiwitsynthese* zorgen en de *mitochrondriën* waarin de *energie* ontstaat die voor die eiwitopbouw noodzakelijk is.

Eiwitten zijn makromoleculen van honderden aan elkaar gekoppelde *aminozuren*. Er zijn echter slechts 15 à 20 onderling verschillende aminozuren die voor de opbouw van een eiwitmolecule nodig zijn. De volgorde waarin die vele aminozuren in een eiwitmolecule voorkomen en de ruimtelijke structuur zijn specifiek voor de soorten van planten en dieren. Volgorde der aminozuren en structuur van een eiwit zijn erfelijk vast gelegd in de genen. Al die opbouwreacties zijn echter *enzymreacties*, zodat de cel eerst de eiwitten voor de enzymen moet maken en dus is ook de structuur van de enzymen erfelijk bepaald.

Men onderscheidt de nucleïnezuren in: *ribonucleïnezuren*, (RNA) en *desoxyribonucleïnezuren*, (DNA). (A van „acid".)

Deze grote makromoleculen zijn samengesteld uit fosforzuur, een suiker, die ribose heet, (een pentose) en een organische base. Er zijn 4 organische basen, die worden gebruikt: adenine, thymine, guanine en cytosine. (Thymine kan zijn vervangen door uracil). De verbinding van één molecule fosforzuur met een molecule ribose en een molecule van een van die basen, noemt men een *nucleotide*. Honderden nucleotiden samen vormen een nucleïnezuur. Bij DNA blijken echter steeds 2 nucleïnezuren tegenover elkaar te liggen, verbonden door z.g. „waterstofbruggen". De linkerketen is steeds het complement van de rechterketen en wel zodanig dat altijd adenine tegenover thymine en cytosine tegenover guanine ligt. Bovendien is deze zeer lange dubbele keten nog gedraaid om een denkbeeldige lengte-as, waardoor een „*helix*" of gedraaide „touwladder" ontstaat. (Nobelprijswinnaars: Watson en Crick.) De bouw van DNA is nu de *erfelijke of genetische code*, ook wel de erfelijke informatie genoemd, waardoor de ribosomen op een bepaalde wijze de aminozuren synthetiseren tot eiwitten, nadat eerst de bijbehorende enzymen zijn gevormd.

Het contact van het DNA, dat zich in de kern bevindt, met de ribosomen in het protoplasma, komt tot stand door het RNA, dat is een der helften van het DNA dat overlangs is gesplitst. Men noemt dit wel het mRNA van „*messenger-RNA*".

Tenslotte is er nog het, „tRNA", het *transfer-RNA* dat uit korte RNA-moleculen bestaat en dat de aminozuren naar de ribosomen transporteert. (De aminozuren bevinden zich o.a. in het protoplasma.)

Gebleken is dat de levende cel niet onbeperkt blijft doorgaan met de aanmaak van stoffen, maar dat er een regelend mechanisme is dat de synthese van een verbinding stop zet, door remming van het enzym of het enzymsysteem, zodra er genoeg van die stof is ontstaan. Komt er te weinig van de verbinding dan wordt de blokkade van de synthese weer opgeheven. Dit regelende mechanisme is eveneens erfelijk bepaald door het z.g. „*regulator-gen*". Bovendien kunnen sommige organismen zich „aanpassen" aan een bepaalde verandering in het milieu. Zo kan de bacterie Escherichia coli de suiker maltose gebruiken bij de stofwisseling, indien de suiker glucose afwezig is. Maar daarvoor is een zekere „adaptatietijd" nodig om het gewenste enzym te synthetiseren, dat voor het gebruik van maltose nodig is.

Ook dit vermogen, de „*enzym-inductie*" geheten, blijkt genetisch te zijn gecodeerd. Men heeft thans een beter inzicht gekregen in de erfelijke informatie, maar er zijn nog talloze vragen overgebleven en bovendien zijn er vele nieuwe bijgekomen.

Er zijn enige uitvoerige, zeer duidelijke en niet dure boekjes over dit onderwerp. Spreker (Dr. G. Brouwer, Hoflaan 24, Wassenaar) zal gaarne de titels opgeven aan belangstellenden.

Nadat de voorzitter de spreker hartelijk had bedankt voor zijn interessante lezing en voor de moeite die hij zich getroost had, werd enige tijd gepauzeerd. Vervolgens konden de aanwezigen en de wiskundigen in het bijzonder, genieten van de voordracht door de heer G. Krooshof over „*Modernisering – nieuwbouw of verbouw?*", die in „Euclides "gepubliceerd zal worden. Nogmaals vertolkte de voorzitter de dank van de vergadering, nu voor het door de heer Krooshof gebodene, dat mede door de didactische strekking ook voor de niet-wiskundigen waardevol was.

Nadat tenslotte bij de rondvraag de gasten bij monde van de heer Riel hun dank hadden betuigd voor de ontvangen uitnodiging, sloot de voorzitter de vergadering.

De secretaris,
D. Leujes

WIMECOS

Door het bestuur werd het volgende schrijven verzonden:

5 mei 1967

Aan de Commissie Opleiding Leraren
Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen
Nieuwe Uitleg 1
's-Gravenhage.

In antwoord op Uw uitnodiging aan de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie (Wimecos), een deskundige uit haar midden aan te wijzen om zitting te nemen in de programmacommissie voor de opleiding van wiskundeleraren, brengen, wij, namens het bestuur van Wimecos, het volgende onder Uw aandacht.

De opleiding van wiskundeleraren van het vwo en het havo behoeft een programma dat voldoende flexibel is, om ontwikkelingen in de mathematische wetenschap die van belang zijn voor het voorbereidend wetenschappelijk en hoger algemeen vormend onderwijs op de voet te kunnen volgen.

Wij zijn er van overtuigd, dat de samenstelling van zo'n programma niet behoort tot de competentie van wiskundeleraren, maar slechts kan worden toevertrouwd aan hoogleraren in de wiskunde.

Het is voor ons duidelijk, dat het leerplan van het vwo en het havo, zoals dat is geprojecteerd door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, aan de toekomstige wiskundeleraren hogere wetenschappelijke eisen stelt dan het vigerende leerplan aan de huidige wiskundeleraren.

Wij zijn van mening, dat het Interimrapport van de Commissie Opleiding Leraren niet voldoende mogelijkheden biedt voor de wetenschappelijke vorming van de toekomstige wiskundeleraar, omdat daarin de opleidingen tot de drie bevoegdheidsgraden worden gekoppeld, omdat daarin voor havo-abituriënten een te gemakkelijke toegang tot de bevoegdheid van de eerste graad geprojecteerd is en omdat de tijd die in dat rapport beschikbaar wordt gesteld voor de opleiding in het hoofdvak, te gering is.

Overwegende, dat de programmacommissie gebonden is aan de voorstellen, neergelegd in het Interimrapport van de Commissie Opleiding Leraren, meent het bestuur van Wimecos dan ook, geen lid van zijn vereniging te kunnen verzoeken, namens Wimecos zitting te nemen in de Commissie voor de opstelling van het programma van de wetenschappelijke opleiding van wiskundeleraren.

w.g. B. Groeneveld, voorzitter.
A. J. Th. Maassen, secretaris.

HET ALGEBRA-EXPERIMENT

Aan een zevental scholen voor vhmo is gedurende de laatste twee cursussen op verzoek van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde in het op een na hoogste en hoogste leerjaar geëxperimenteerd met betrekking tot het leerplan algebra [1]). In verband daarmee is dit jaar, dus voor het eerst, een afwijkend stel opgaven gegeven voor het eindexamen algebra. Deze opgaven, die evenals het "gewone" algebra-werk, gemaakt moesten worden in 2½ uur, laten we hieronder volgen.

1. De kromme K is de verzameling van de punten, waarvan de coördinaten ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY voldoen aan $y^4 = kx$, waarbij k een positieve constante is.
Men trekt de raaklijnen aan K in de punten P en Q, waarvan de x-coördinaat p is.
   a. Bewijs dat de coördinaten van het snijpunt S van deze raaklijnen onafhankelijk zijn van k.
   b. Bewijs dat de verhouding van de oppervlakten van de delen, waarin de kromme K driehoek SOP verdeelt, onafhankelijk is van k en p .
   c. Men wentelt de figuur begrensd door PS, SO en boog OP om de X-as.
   Zo ook de figuur begrensd door koorde OP en boog OP.
   Bereken de verhouding van de inhouden van deze omwentelingslichamen.

2. De functie f is voor alle reële getallen gedefinieerd door $f(x) = (2x^2 + x - 1)e^x$
   a. Bereken de uiterste waarden van deze functie.
   b. Teken de grafiek van deze functie.
   c. Voor welke waarden van a, b en c is de functie g gedefinieerd door
   $$g(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$$
   een primitieve functie van f?
   Bereken de oppervlakte van het eindige deel van het vlak, dat gelegen is onder de X-as en begrensd wordt door de X-as en de grafiek van de functie f.

3. *a.* Teken de verzameling V van de punten, waarvan de coördinaten ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY voldoen zowel aan
   $$x - 2y + 12 \geqq 0$$
   als aan $$-x^2 + 2y \geqq 0.$$
   b. Teken de verzameling van de punten van V, waarvoor $x + y = 6$.
   c. Bereken de grootste in de kleinste waarde die $x + y$ kan aannemen, als x en y de coördinaten van een punt van V zijn.

---

[1]) Een verslag over het experiment aan een van die scholen (Rhbs - Zwolle) hopen we in het septembernummer af te drukken (red.).

KORREL CXXXIX

Het binomium

Wat is de coëfficiënt van a^5b^3 in $(a + b)^8$?

We schrijven de 8 factoren naast elkaar en nummeren ze:

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \underline{a} + b & \underline{a} + b & \underline{a} + b & \underline{a} + b & \underline{a} + b & a + b & a + b & a + b \\ & & & & & \quad\ \uparrow & \quad\ \uparrow & \quad\ \uparrow \end{array}$$

Elke term van elke factor wordt met elke term van elke andere factor vermenigvuldigd.

De permutatie 1 2 3 4 5 | 6 7 8, maar óók 3 1 2 5 4 | 7 6 8 enz. bepaalt een keuze. Anders gezegd: Elke term a^5b^3 wordt door $5! \times 3!$ permutaties bepaald.

Dus zijn er $\dfrac{8!}{5!3!}$ termen a^5b^3.

Zo zijn er in $(a + b)^n$ dus $\dfrac{n!}{(n - k)!\,k!}$ termen $a^{n-k}b^k$.

$$c_k^n = c_{n-k}^n = \frac{n!}{k!\,(n - k)!}$$

Wassenaar — Burgers

BOEKBESPREKING

Irving Adler, *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek*, Aula 295, 1966, 233 blz., *f* 4.50.

Men heeft in Euclides kunnen lezen, dat voorgesteld wordt in het nieuwe programma onder wiskunde I op te nemen waarschijnlijkheidsrekening met eenvoudige toepassing op de statistiek. Wie hier later les in zal moeten geven, zal dunkt me de behoefte hebben aan een boek, dat aan de volgende eisen voldoet:

1. het moet wetenschappelijk verantwoord zijn, maar niet te zwaarwichtig,
2. het moet niet te dik zijn,
3. het moet niet te duur zijn,
4. het moet prettig leesbaar zijn,
5. het moet datgene bevatten, wat men later zal moeten onderwijzen, en liefst nog iets meer.

Om kort te gaan, men wil een schaap met vijf poten.

Het merkwaardige is, dat een dergelijk schaap bestaat. Het werkje van Adler voldoet aan al deze eisen. Ik kan ieder, die later (vanaf 1972) les in statistiek moet geven, dan ook aanraden: koop dit voortreffelijk boekje nu alvast.

P. G. J. Vredenduin

Rueff and Jeger, *Menge, Boole'scher Verband und Mass*, Heft 4, Einzelschriften zur Gestaltung des Mathematisch-Pysikalischen Unterrichts. Räber Verlag, Luzern und Stuttgart, 1966, 127 blz., DM 17,50.

Dit boekje begint met een hoofdstuk over de verzamelingen. Nu is dit langzamerhand een mode geworden en men wordt als conservatief beschouwd als men hiermee niet alvast op de lagere school begint. Dat dit dan nergens functioneert kan de pret niet drukken.

Dit boekje is echter geschreven voor leerlingen, die een redelijke scholing in wiskundige technieken bezitten en daarom kan dit nu functioneren op velerlei gebied, waardoor het nut en het pleizier van het gebruik van deze inzichten duidelijk blijkt. Dit is wel de grootste verdienste van dit boekje.

Het hoofdstuk over abstracte Boole-algebra is zeer helder geschreven en vindt zijn toepassingen bij de waarschijnlijkheidsrekening. Speciaal vraag ik aandacht voor het hoofdstuk over schakelalgebra, dat geïnteresseerden zeker zal aanspreken.

De paragraaf over lineaire programmering is de enige, waar op de praktijk afgestemde voorbeelden, die toch gemakkelijk te vinden zijn, ontbreken.

Burgers

Béla Kerékjártó, *Les Fondements de la géométrie*, Tome deux, Adademiai Kiadó 1966, 521 blz., $ 14,50.

Het boek behandelt breedvoerig in 521 pagina's een synthetische opbouw van de projectieve meetkunde. Het behandelt behalve een aantal eenvoudige welbekende stellingen ook stellingen, die men in de leerboeken zelden aantreft. Ook de elliptische en hyperbolische meetkunde worden summier besproken. De titels van de hoofdstukken luiden achtereenvolgens:

I Les fondements de la géométrie projective
II Géométrie projective de la droite
III Géométrie projective du plan
IV Géométrie projective de l'espace
V Conigues
VI Quadrigues
VII Mesure projective
VIII Sur les axiomes de la géométrie projective.

W. T. van Est

Prof. dr. Hans Freudenthal, *De eerste ontmoeting tussen de wiskunde en de sociale wetenschappen*, 52 blz., ingen. 100 Belg. fr, 1966, Paleis der Academiën, Hertogstraat 1, Brussel.

In een indringend, boeiend en historisch rijk gedocumenteerd betoog schetst Freudenthal de Belgische astronoom Quetelet als grondlegger van de mathematische statistiek, zijn relaties tot voorgangers en tijdgenoten, en zijn verdiensten èn tekortkomingen als mathematicus. Hij illustreert, hoe Quetelet's beschouwingen als een symptoom gezien kunnen worden voor het langzaam terrein winnen van de mathematische methode in de biologische en in de zogenaamde geesteswetenschappen.

Gaarne bevelen we de lezing van deze voordracht gehouden voor de Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België aan bij allen die zich voor de historische ontwikkeling van de statistiek interesseren.

Joh. H. Wansink

Lucienne Félix, *Elementarmathematik in moderner Darstellung*; 558 blz.; geb. 39 DM; 1966; Vieweg, Braunschweig.

Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus was een werk van Felix Klein, dat meer dan een halve eeuw lang aan de wiskundeleraar in functie waardevolle informatie ten aanzien van de door hem te onderwijzen leerstof heeft kunnen verstrekken. *Elementarmathematik in moderner Darstellung* beoogt een analoge informatie te geven over de hedendaagse schoolstof. Uitgaande van de verzamelingsleer en wiskundige logica wordt er in het boek gestreefd naar een unificatie van de gehele leerstof. Daarbij wordt de axiomatische methode gevolgd. Doel is een grondige voorbereiding te geven voor het bestuderen van de hogere wiskunde.

Het werk is onderverdeeld in vier afdelingen: Fundamentale Strukturen, Arithmetik und Algebra, Analysis, die Geometrien. Het is de vertaling van het in 1959 bij Dunod, Parijs, verschenen *Exposé moderne des mathématiques*. De vertaling is van de hand van dr. Steinacker en heeft plaats gehad onder redactie van Kl. Wigand, die o.a. als redacteur van het tijdschrift *Praxis der Mathematik* ook in Nederland bekendheid geniet. Eerder verschenen van dezelfde schrijfster *L'aspect moderne des mathématiques* in 1959 bij Blanchard, Parijs, en in 1960 bij dezelfde uitgever *Mathématiques modernes*] $\cap$ [*Enseignement élémentaire*. Dit laatste is een boekje bestemd om onderwijzers van het lager onderwijs te confronteren met wiskundige begrippen en structuren die zo vaak in het door hen gegeven onderwijs schuil blijven gaan.

Ten aanzien van de titel van Lucienne Félix' hoofdwerk merken we op, dat we de begrippen elementaire wiskunde en schoolwiskunde niet mogen identificeren. Stellig niet voor zover het het Nederlandse wiskundeonderwijs betreft. Ook onderwerpen als verzamelingsleer, maatbegrip, e-functie, complexe getallenleer, affiene en projectieve meetkunde en niet-euclidische meetkunden worden in dit boek aan de orde gesteld.

Het boek is in de eerste plaats geschreven voor de wiskundeleraren zelf, maar wordt door schrijfster en uitgever ook geschikt geacht voor de hoogste klassen van de Duitse gymnasia. Voor de hoogste klassen van Nederlandse scholen voor voorbereidend wetenschappelijk onderwijs lijkt me het wetenschappelijk niveau te hoog en het didactische niveau te laag.

Lucienne Félix is een geharnast strijdster voor modernisering van het Franse wiskundeonderwijs. Ze is in haar opvattingen verwant aan de vermaarde Bourbaki-groep, waarvan enkele ideeën mede door de invloed van de Franse wiskundige Dieudonné ook in Nederlandse onderwijskringen bekend raken. Uit deze verwantschap meen ik te moeten verklaren, dat er in een boek als dit zo weinig didactisch-psychologische opvattingen naar voren worden gebracht. De schrijfster zal echter stellig niet zo ver willen gaan als Dieudonné en diens uitlating op een congres te Aarhus (1960) „*La psychologie, je m'en fiche*" voor haar rekening willen nemen. Wat de psychologie betreft, steunt Lucienne Félix op de theorieën van Jean Piaget, die van oordeel is, dat de drie fundamentale structuren à la Bourbaki (algebraïsche structuren, ordeningsstructuren, topologische structuren) corresponderen met de structuren van het menselijk denken. Deze hypothese laat zich zo interpreteren, dat het onderwijs in de wiskundige structuren automatisch de ontwikkeling van het kinderlijke denken ten goede zou doen komen!

Het werk van Lucienne Félix is helder geschreven, overzichtelijk van samenstelling en getuigt van een enthousiasme van de schrijfster met betrekking tot de door haar behandelde materie. Het boek verdient de warme belangstelling van alle wiskundedocenten bij het v.w.o. die ten aanzien van de leerstof zelf zich nader willen oriënteren.

De typografische verzorging van het boek door Vieweg voldoet aan hoge eisen.

Joh. H. Wansink

F. Goffree, A. A. Hiddink en J. M. Dijkshoorn, *Rekenen en Didactiek*, 275 blz. ingen. *f* 16,90; P. Noordhoff, Groningen; 1966.

Dit boek neemt onder de werken over rekendidactiek een bijzondere plaats in. De titel drukt reeds uit, dat er niet alleen aandacht zal worden geschonken aan de eigenlijke problemen van de didactiek, aan de overdrachtsproblemen, maar tevens aan de problemen van de stofbeheersing, aan het rekenen zelf. Terecht naar mijn mening, want een verschraalde vakwetenschappelijke ondergrond brengt onvermijdelijk een te laag onderwijsniveau met zich mee.

Opvallend is ten aanzien van het zuiver rekenkundige gedeelte de bijzondere zorg, die er besteed wordt aan de theorie van de verzamelingen. Begrippen en eigenschappen uit dit gebied worden met grote zorg en uitvoerig besproken. De fundamentele betekenis die de verzamelingsleer voor een gemoderniseerd wiskundeonderwijs, het rekenonderwijs daaronder begrepen, kan hebben, rechtvaardigt de aandacht aan deze materie besteed. Ook logische symbolen als implicatiepijl en bi-implicatiepijl worden in het boek gebruikt.

De auteurs hebben tal van onderwerpen opgenomen, waarvan sommigen zich misschien met enige zorg zullen afvragen, of ze wel in een didactisch werk als dit op hun plaats zijn. Ik noem de bespreking van de axioma's van ons getallensysteem, de behandeling van talstelsels in het bijzonder van het binaire en van het zestallige stelsel, de repeterende breuken, de irrationaliteit van $\sqrt{2}$, de computer en de machinetalen ALGOL 60 en FORTRAN. Ik ben er echter van overtuigd, dat deze materie, evenals de geschiedenis van de rekenkunde inclusief een verwijzing naar de betekenis die de abacus thans nog in landen als Rusland en China heeft, tot een lofwaardige verruiming van de geestelijke horizon van de aanstaande onderwijzer zal kunnen bijdragen. Bovendien overheersen ook hier veelal didactische aspecten; zo is de behandeling van het zestallig stelsel in de vorm van een geprogrammeerde cursus gegoten.

Het is echter duidelijk dat een boek als dit zijn hoofdbetekenis ontleent aan de zuiver didactische onderdelen. Klasseopdrachten zijn door het gehele werk verspreid en er zijn een elftal schetsen van rekenlessen opgenomen, die uitmunten door zorgvuldige analyse van optredende moeilijkheden. Hierbij komen ook problemen ter sprake die in verband staan met voorbereidend rekenonderwijs op de kleuterschool.

Uit de omstandigheid dat deze lessen in een royaler lettertype zijn gedrukt dan de rest van het boek blijkt reeds, dat ook de auteurs de hier besproken stof van bijzondere betekenis achten. Teleurstellend is het echter te moeten vaststellen, dat in deze lessen van de verzamelingstheorie die in de opzet zozeer domineert, vrijwel geen spoor te ontdekken is. We zouden het ten zeerste op prijs hebben gesteld te lezen, hoe in een modern opgezette rekendidactiek deze verzamelingstheorie kan functioneren.

De auteurs verklaren, dat hun boek geen leerboek is maar een studieboek. De hier gemaakte onderscheiding is me niet geheel duidelijk. Wel ben ik ervan overtuigd, dat een werk als dit onder leiding van een deskundig docent voor de didactische vorming van de onderwijzer van grote waarde kan zijn.

Wat het uiterlijk van het boek betreft: het is gezet in schreefloze letter en gedrukt op witglanzend papier met breede bladspiegel. De typografische verzorging verdient alle lof.

We wensen de drie auteurs geluk met de voltooiing van dit werk.

Joh. H. Wansink

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

177. a. Vier personen zijn samengekomen voor een bridge-avondje. Juist op het moment, dat ze willen beginnen, komt een huisvriend op bezoek, die ook een enthousiast bridger is. Men kan hem moeilijk voor het hoofd stoten en besluit een aantal ronden te spelen. Hierbij zal iedere speler precies eenmaal met elke andere als partner spelen en precies tweemaal tegen elke andere spelen. Op hoeveel verschillende manieren is dit mogelijk? Twee manieren heten verschillend, als ze niet door permutatie van de spelers in elkaar kunnen overgaan.

b. De volgende week doet zich een analoge situatie voor. Alleen heeft nu de huisvriend zijn vrouw meegenomen en ook deze bridget graag. Beantwoord nu dezelfde vraag als onder a.

178. a. We gaan uit van een naar alle zijden onbegrensd „schaakbord". Kies een rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan de assen evenwijdig aan de zijden van de velden lopen, neem als eenheid de zijde van een veld en geef de velden nu coördinaten (a, b), waarin a en b geheel zijn. Gevraagd wordt het minimale aantal paardesprongen nodig om uitgaande van veld (0, 0) veld (17, 17) te bereiken. Langs hoeveel verschillende wegen is in dit minimale aantal sprongen (17, 17) vanuit (0, 0) bereikbaar?

b. De voorgaande vraag is een inleiding tot de volgende. We hebben nu een echt schaakbord, dus met rand en met 64 velden, en vragen in hoeveel paardesprongen vanuit het veld links onderaan het veld rechts bovenaan minimaal bereikbaar is en langs hoeveel verschillende wegen.

OPLOSSINGEN

175. Van vijftien munten heeft één een afwijkend gewicht. Men heeft een balans met één schaal en een wijzer, die het gewicht aangeeft. Bepaal in maximaal vier wegingen het juiste gewicht, de grootte van de afwijking en identificeer de afwijkende munt.

Noem het juiste gewicht g en de grootte van de afwijking p. Nummer de munten van 1 tot en met 15.

Eerste weging. Weeg de munten 1—8.

Tweede weging. Weeg de munten 5—12.

A. De uitkomsten zijn gelijk. Noem de uitkomst a. Dan is $g = \frac{1}{8} a$ en de afwijkende munt zit in 13—15, of $g + \frac{1}{8} p = \frac{1}{8} a$ en de afwijkende munt zit in 5—8.

Weeg nu 5, 6, 13 en 14 en noem de uitkomst b. Nu is $g = \frac{1}{4} b$ en de afwijkende munt zit in 7, 8, 15, of $g + \frac{1}{4} p = \frac{1}{4} b$ en de afwijkende munt zit in 5, 6, 13, 14.

Is $a = 2b$, dan is de afwijkende munt 15 en geeft weging van 15 het gewenste resultaat.

Zo niet, dan zijn er voor g en p drie mogelijkheden. Deze kunnen we uitrekenen en vinden dan

$g = g_1$, $p = p_1$ en de afwijkende munt zit in 7, 8, of
$g = g_2$, $p = p_2$ en de afwijkende munt zit in 5, 6, of
$g = g_3$, $p = p_3$ en de afwijkende munt zit in 13, 14.

Nu wegen we 5, 7, 13. Hier kan uitkomen:

$3g_1$, $3g_2$, $3g_3$, $3g_1 + p_1$, $3g_2 + p_2$, $3g_3 + p_3$.

In elk van deze zes gevallen is deze derde weging reeds voldoende om ons alles te leren, wat gevraagd was. Is b.v. de uitslag $3g_1$, dan weten we, dat het juiste gewicht g_1, de afwijking p_1 en de afwijkende munt 8 is.

Men kan verifiëren, dat, als $a \neq 2b$, de genoemde zes mogelijke uitkomsten alle zes verschillend zijn.

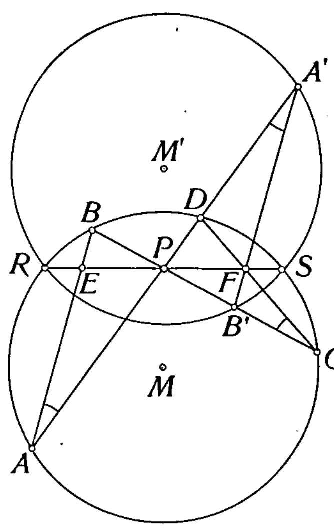
B. De uitkomsten van de eerste en de tweede weging zijn ongelijk. Noem de eerste uitkomst a en de tweede b. Dan is

$g = \frac{1}{8}a$, $p = \frac{1}{8}(b - a)$ en de afwijkende munt zit in 9—12,
$g = \frac{1}{8}b$, $p = \frac{1}{8}(a - b)$ en de afwijkende munt zit in 1—4.

Weeg nu 1, 2, 9, 10. Is de uitkomst van deze weging $\frac{1}{2}a$, dan is $g = \frac{1}{8}a$, $p = \frac{1}{8}(b—a)$ en zit de afwijkende munt in 11, 12. Weging van 11 geeft aan, welke munt de afwijkende is. De overige drie mogelijkheden zal de lezer zonder moeite analoog zelf behandelen.

176. Gegeven was $PR = PS$ en te bewijzen $PE = PF$.

Oplossing I (planimetrisch):

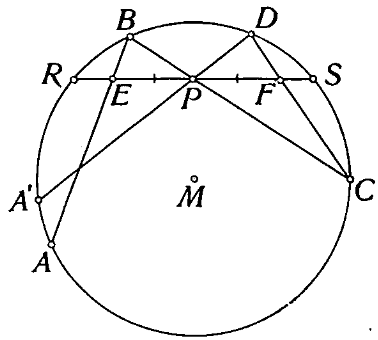


Vermenigvuldig cirkel M met —1 t.o.v. P; A' en B' zijn de beelden van A en B. Daar $\angle A = \angle C$ en ook $\angle A = \angle A'$, volgt $\angle C = \angle A'$; door de punten D, B', C en A' gaat dus een cirkel.

De machtlijnen van de drie cirkels twee aan twee zijn: RS, CD en $A'B'$. Deze gaan door één punt; dit is het punt F; dus gaat $A'B'$ door F en is $PE = PF$.

(P. Bronkhorst) [1])

[1]) Wel de oplossing, niet de opgave is van Dr. P. Bronkhorst.



II (met projectieve meetkunde). Kies A en E willekeurig, maak $PF = PE$ en trek achtereenvolgens AE, BP, CF en DP; DP snijdt de cirkel in A'. De toevoeging van A' aan A is een projectiviteit op de cirkel. Voor deze projectiviteit geldt $R' = R$, $S' = S$, terwijl bovendien A' met A nog samenvalt, als we A zo kiezen, dat $BD \parallel RS$ (dat dit mogelijk is, vindt men met behulp van continuïteitsoverwegingen). Dus is de projectiviteit de identiteit. Hieruit volgt de juistheid van de stelling.

VAKANTIECURSUS MATHEMATISCH CENTRUM

Deze voor wiskundeleraren en andere belangstellenden te houden cursus, die in Amsterdam en waarschijnlijk ook te Eindhoven zal plaatsvinden heeft als centraal onderwerp „*Besliskunde*", waarover door een viertal sprekers voordrachten zullen worden gehouden. Het ligt in de bedoeling de cursus te Amsterdam te doen plaatsvinden op woensdag 16 en donderdag 17 augustus, die te Eindhoven op donderdag 17 en vrijdag 18 augustus, in beide gevallen op nog nader te bepalen plaats. Kosten voor deelneming *f* 5,— inclusief syllabus; dagelijkse gezamenlijke lunch *f* 2,50. Aanmelding gaarne vóór 1 juli 1967 bij het secretariaat van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam, (tel.: 020-947272), onder opgave aan welke van de twee cursussen men wenst deel te nemen, alsmede of men wenst gebruik te maken van de gezamenlijke lunch.

Het definitieve programma zal aan de deelnemers z.s.m. worden toegezonden.

Het onderwerp „*Besliskunde*" vereist een zekere toelichting.

Genoegzaam is bekend, dat er situaties bestaan, waarin beslissingen moeten worden genomen. Minder bekend is wellicht het feit dat dankzij de wiskunde de taak van de beslisser kan worden verlicht. Beslissingssituaties laten zich dikwijls beschrijven door een wiskundig model. Binnen zo'n model wordt het beslissingsprobleem weergegeven door een wiskundig optimumprobleem, waarvan de oplossing na terugvertaling de gezochte beslissing of strategie oplevert.

De vraagstukken rond de modelvorming, de wiskundige oplossing en de interpretatie daarvan, vormen het studieobject van de besliskunde.

Beslissingsproblemen leiden tot nauwomlijnde klassen van optimaliseringsproblemen; problemen die in het verleden blijkbaar aan de aandacht van de wiskundige zijn ontsnapt. Ondanks het feit dat er koortsachtig gezocht wordt naar methodes van uiteenlopende aard, zijn nog steeds talrijke eenvoudig te formuleren problemen onoplosbaar. Een ieder die zich bezig heeft gehouden met bijv. het opstellen van een „optimaal" lesrooster, heeft, zich daarvan wellicht niet bewust, reeds zijn eerste schrede op het besliskundige pad gezet.

Wie heeft voor mij nog de eerste druk van mijn ***middel-algebra*** *(1921) met de kansrekening van Prof. Dr. F. Schuh?*
P. WIJDENES - Jac. Obrechtstraat 88 - Amsterdam - tel. 020-727119