

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

V — 1 FEBRUARI 1967

INHOUD

Bericht Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde	129
Interimrapport van de Commissie Modernisering	
Leerplan Wiskunde	129
Werkgroep Materiële hulpmiddelen wiskunde	135
Dr. J. T. Groenman: Vierhoeken in en om vierhoeken	144
Door de Unesco aanbevolen literatuur	148
Korrel	150
R. A. Hirschfeld: Gemeenschappelijke koordlengten	152
Boekbespreking	155
Kalender	158
Recreatie	159

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127, voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516, secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Dr. J. KOKSMA, Haren;	P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

BERICHT VAN DE COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

Op 28 oktober 1966 heeft de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde een interimrapport ingediend bij de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen.

De Staatssecretaris heeft goedgekeurd dat van de in dit rapport gedane voorstellen bekendheid wordt gegeven. In verband hiermede wordt hierbij het bedoelde rapport gepubliceerd. Bijlage I, waarnaar in het rapport wordt verwezen, is opgenomen in „Euclides”, 41e jaargang, 1965/1966, p. 104—107.

De Commissie heeft maatregelen getroffen om aangaande de uitwerking van de voorstellen discussienota's op te stellen. Het ligt in de bedoeling dat aan deze nota's eveneens bekendheid zal worden gegeven.

De Secretaris,
Prof. Dr. A. F. Monna.

INTERIMRAPPORT van de COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

Bij beschikking van 12 juni 1961, afd. V.H.M.O., no. 157069 III, is door de toenmalige Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen een Commissie ingesteld, die ten doel heeft plannen te beramen voor het moderniseren van het wiskundeonderwijs.

De Commissie is begonnen, na daartoe ontvangen machtiging, met het organiseren van cursussen in moderne wiskunde in verband met heroriëntering van leraren.

Intussen heeft de Commissie vele malen in subcommissies vergaderd over de vorm, die aan een toekomstig leerplan zou moeten worden gegeven.

Reeds zijn met overheidstoestemming aan een aantal scholen experimenten met nieuwe leerstof dan wel een nieuwe presentatie van de bestaande vakken ondernomen. Een overzicht van een deel van de werkzaamheden van de Commissie is door de secretaris gepubliceerd in het tijdschrift „Euclides” onder de titel: „*Bericht over de werkzaamheden van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde*” (zie bijlage I). Aan dit overzicht kan nog worden toegevoegd, dat

thans ook cursussen in moderne wiskunde worden gegeven aan leraren van het uitgebreid lager en het uitgebreid technisch onderwijs.

Bij het opstellen van een programma voor de verschillende vormen van voortgezet onderwijs is het zaak te trachten een motiveering van dit programma aan te geven. Dit is in het algemeen geen gemakkelijke opgave, en in ieder geval niet voor het vak wiskunde. Vele, en meermalen door traditie bepaalde factoren spelen hierbij een rol. Het zal, zonder verdere toelichting, duidelijk zijn dat de maatschappelijke betekenis van de wiskunde door velerlei toepassingen in de eerste plaats in de natuurwetenschappen en de techniek, maar ook daar buiten, in de laatste decennia sterk is toegenomen. In ieder geval zal er dus bij het concipiëren van een programma rekening mee moeten worden gehouden, dat de leerlingen bruikbare kennis moet worden overgedragen.

Daarnaast is het een noodzakelijk doel van het onderwijs in de wiskunde de leerlingen inzicht bij te brengen in de culturele betekenis van dit vak.

Een gedetailleerd onderzoek naar het verband tussen de op school te onderwijzen wiskunde en haar toepassingen in de maatschappij staat internationaal in het middelpunt van de belangstelling in kringen, die zich bezighouden met de problematiek van het onderwijs.

Door invoering van de wet op het voortgezet onderwijs daartoe genoopt, heeft de Commissie een interimrapport opgesteld, waarin de aandacht gericht wordt op de plaats van de wiskunde bij het vwo, het havo en het mavo.

Bovendien vragen de wiskundeprogramma's voor de scholen die het vervolgonderwijs na het mavo en havo verzorgen, bijzondere aandacht. Dit punt zal in studie worden genomen.

1. *Algemene richtlijnen*

Het wiskundeprogramma¹ voor het algemeen voortgezet onderwijs zal vanuit verschillende gezichtspunten moeten worden bezien. Bij het vwo zal de wiskunde enerzijds een propaedeuse voor de bij verschillende universitaire studies benodigde wiskunde moeten geven, maar anderzijds zal het programma niet direkt vanuit het onderwijs van de wiskunde als hoofd- of bijvak bij verschillende universitaire studies afgeleid kunnen worden.

Bij het havo, met zijn voortzetting in hts en heao, zal het maatschappelijk belang van de wiskunde zwaar moeten wegen. Dit zal zowel van invloed zijn op de te behandelen onderwerpen als op de wijze van presentatie. Het programma bij het havo zal ook de wis-

kundige hulpmiddelen moeten leveren, die nodig zijn in de verschillende beroepsopleidingen.

Mutatis mutandis gelden deze overwegingen ook voor het mavo. In het volgende is uitgegaan van de urentabellen zoals die zijn voorgesteld in de „Samenvatting van de overwegingen en conclusies met betrekking tot de uitvoering van de Wet op het voortgezet onderwijs van het overleg in enige werkgroepen, samengesteld uit de inspectie van het voortgezet onderwijs, bestuurs-, rectoren- en directeuren- en lerarenorganisaties en de pedagogische centra” (zie bijlage II).

Bovendien is uitgegaan van het principe dat het wiskundeprogramma van het atheneum en het gymnasium gelijk moet zijn. Er is rekening gehouden met het bestaan van een brugklasse; getracht is de overgang van het einde van de 5e klasse havo naar het begin van de 5e klasse vwo mogelijk te maken, terwijl na het vierde jaar mavo (met keuzevak wiskunde) overgang naar de vierde klasse havo moet kunnen plaatsvinden.

Belangrijker is echter geacht voor alle schooltypen een vanuit vervolgonderwijs en maatschappelijk belang gemotiveerd programma op te stellen.

2. *De brugklasse*

Het wiskunde-onderwijs in de eerste klasse van het mavo, het havo en het vwo zal in verband met het karakter van de brugklasse min of meer gelijk van inhoud moeten zijn. In de 4 uren die voor het wiskunde-onderwijs uitgetrokken zijn, zal een inleiding in de algebra en de meetkunde een plaats moeten vinden. Het meetkunde-onderwijs beoogt in eerste instantie de leerlingen kennis te doen maken met meetkundige figuren, zowel in het vlak als in de ruimte, en voorts hen voor zover mogelijk vertrouwd te maken met de betekenis en de aard van het bewijs.

Het onderwijs in de algebra zal inhouden het rekenen met letters, voorts de gebruikelijke bewerkingen, vergelijkingen en ongelijkheden in het systeem van de rationale getallen, gebruikmakende van begrippen en notaties van de verzamelingsleer.

3. *De onderbouw*

Hieronder worden begrepen de leerjaren 2 en 3 van het havo en 2, 3 en 4 van het vwo. Voor deze leerjaren worden voor havo en voor vwo overeenkomstige programma's voorgesteld.

De extra leerstof voor de B-richting in de 4e klasse vwo wordt bij de bovenbouw besproken. Het onderwijs in de onderbouw zal

moeten worden benut voor een afgerond programma in de algebra en de meetkunde, daar een deel van de leerlingen geen verder wiskunde-onderwijs zal volgen. Dit in aanmerking nemende stelt de Commissie het volgende programma voor:

- functies, relaties, vergelijkingen en ongelijkheden in de verzameling van de reële getallen;
- het gebruik van rekenhulpmiddelen, zoals de rekenliniaal, de logaritmentafel en andere tabellen;
- hoeken, lengten, afstanden, oppervlakten en inhouden;
- meetkundige afbeeldingen;
- gebruik van vectoren en goniometrische verhoudingen;

een en ander met inachtneming van de beschikbare uren en het karakter van vwo en havo.

Voor de leerjaren 2, 3 en 4 van het mavo met keuzevak wiskunde denkt de Commissie aan een overeenkomstig programma, uiteraard aangepast aan de behoeften en de mogelijkheden van dit schooltype. Bovendien acht de Commissie het, met het oog op de mogelijkheid dat op dit schooltype eindonderwijs wordt gegeven, nuttig dat daaraan beschrijvende statistiek wordt toegevoegd.

4. *De bovenbouw*

Na het onderwijs bedoeld onder 3 kan blijkens de urentabellen vervolgonderwijs in de wiskunde¹ plaatsvinden. Hierbij moet op de in de brugklasse en de onderbouw gelegde basis worden voortgebouwd. Dit onderwijs moet voor verschillende mogelijke studieverlopen worden gericht met het oog op de toekomst van de leerling.

a) Het havo

De facultatieve wiskunde in de havo-bovenbouw omvat een totaal van $4 + 5$ lessen. Daar zowel met toepassingen op het gebied van techniek en natuurwetenschappen (hts) als met toepassingen in de administratieve en economische wetenschappen (heao) rekening moet worden gehouden en differentiatie voor deze verdere studies tijdens het havo naar het zich laat aanzien onmogelijk zal zijn, zal aan verschillende toepassingen van de wiskunde aandacht moeten worden besteed. De Commissie meent dat een inleiding in de algebraïsche behandeling van de meetkunde, de goniometrie en de differentiaalrekening hierin een plaats zullen moeten vinden. De Commissie stelt zich voor nader te onderzoeken of waarschijnlijkheidsrekening en statistiek en een introductie op het gebruik van

elektronische rekenapparatuur in het programma voor de havo een plaats zouden moeten krijgen.

b) Vierde klasse B-afd. vwo

Het onderwijs in de B-afdeling van het vwo omvat in de 4e klasse boven de 2 uren van de A-afdeling nog 3 uren. Daar deze uren niet gevolgd worden door diegenen, die in de 5e en 6e klasse van de A-afdeling wiskunde I als keuzevak kiezen, moet de stof van wiskunde I onafhankelijk zijn van hetgeen in deze 3 uren in de klasse 4B wordt behandeld. De Commissie stelt voor deze 3 uren te besteden aan enkele onderwerpen uit de stereometrie en de algebraïsche behandeling van 2- en 3-dimensionale meetkunde.

c) Wiskunde I op het vwo

Het programma voor wiskunde I moet naar de mening van de Commissie de goniometrie, de differentiaal- en integraalrekening, en waarschijnlijkheidsrekening met enkele toepassingen op statistische problemen omvatten. Overwogen dient te worden of het numerieke element, o.a. bij het oplossen van vergelijkingen, een rol moet gaan spelen. Eveneens moet de introductie van elektronische rekenmethoden en daartoe leidende algoritmen nader worden bezien. Ten aanzien van wiskunde I doet zich voorts de volgende situatie voor:

Wiskunde I is een verplicht vak voor de B-afdelingen van het gymnasium en het atheneum; wiskunde I kan als keuzevak worden gekozen op de A-afdelingen van het gymnasium en het atheneum. Echter zijn in de 5e klasse van de A-afdeling van het atheneum 3 uren verplicht uitgetrokken voor de wiskunde. De Commissie is van oordeel dat het zowel om onderwijskundige redenen, en hierbij wordt gedacht aan homogeniteit van de leerlingen met betrekking tot aanleg en interesse, als om redenen betreffende de keuze van geschikte leerstof gewenst is de mogelijkheid te scheppen voor die leerlingen van het atheneum A voor wie het wiskunde-onderwijs in de 5e klasse afloopt (en die dus niet wiskunde I als keuzevak namen) een apart programma aan te bieden. Dit programma moet aangepast zijn aan de capaciteiten van de leerlingen, moet voor hen vanuit maatschappelijk oogpunt noodzakelijke leerstof bevatten en bovendien een afgerond geheel vormen.

d) Wiskunde II op het vwo

Tenslotte blijft het keuzevak wiskunde II van de B-afdeling ter discussie. Dit omvat 3 uren in de 5e en 3 uren in de 6e klasse. Het

laat zich aanzien dat deze lesuren voornamelijk zullen worden gevolgd door leerlingen die het voornemen hebben te gaan studeren in de wiskunde of de natuurkunde of in een richting waar de wiskunde sterk op de voorgrond treedt. Het is zaak bij de vulling van deze uren hiermee rekening te houden. Daarom meent de Commissie dat van dit totaal van 6 uren in elk van deze klassen 2 uren uitgetrokken zouden moeten worden voor lineaire algebra met verschillende toepassingen.

Het lijkt de Commissie nuttig dat het resterende uur in elk van de beide klassen wordt gebruikt om de leerlingen inzicht bij te brengen in de structuur van een beperkt wel omschreven gebied van de wiskunde. Dit gebied zou niet centraal voor alle scholen moeten worden vastgesteld. De Commissie is van oordeel dat de scholen daarbij zelf een keuze kunnen doen, eventueel uit een nader vast te stellen lijst van onderwerpen en/of onder goedkeuring van de inspectie. Dit onderdeel zal slechts mondeling moeten worden geëxamineerd.

De commissie stelt zich voor omtrent passende onderwerpen en de omvang daarvan in overleg met de inspectie uitgewerkte voorstellen aan te bieden.

Bijlage II

Urentabel voor wiskunde

Klasse	1	2	3	4	5	6
mavo III	4	3	(8)	—	—	—
mavo IV	4	4	3	(4)	—	—
havo	4	3	3	(4)	(5)	—
atheneum A	4	4	4	2	3	(3)
atheneum B	4	4	4	5	3 + (3)	3 + (3)
gymnasium A	4	4	4	2	(3)	(3)
gymnasium B	4	4	4	5	3 + (3)	3 + (3)

WERKGROEP MATERIËLE HULPMIDDELEN WISKUNDE
INGESTELD DOOR DE DRIE PEDAGOGISCHE
CENTRA V.H.M.O.

Overzicht van de activiteiten tot september 1965.

Op 14 februari 1964 werd in een bijeenkomst te Utrecht door de Heer A. J. S. van Dam, directeur van het Onderwijskundig Studiecentrum te Amsterdam, in aanwezigheid van de Heer R. Troelstra, lid van de Coördinatiecommissie Wiskunde van de drie Pedagogische Centra V.H.M.O., geïnstalleerd de Werkgroep voor de Materiële Hulpmiddelen bij het Wiskunde-onderwijs.

Deze werkgroep werd als volgt samengesteld:

Voorzitter:	Drs. A. B. Menk, Utrecht.
Secretaris:	A. Blom, Pascalstraat 7 te Amersfoort. Tel. 03490/18683
Leden:	Br. Ernst, Oudenbosch
	Dr. Ir. B. Groeneveld, Waalre
	D. Leujes, Delft
	A. J. Poelman, Bennekom

Als contactpersoon werd later aangewezen:

C. J. Alders, Haarlem, lid van het Katholiek Pedagogisch Bureau, welk bureau tevens werd aangewezen als secretariaat van de Werkgroep.

De taakomschrijving van de werkgroep luidde (ongeveer):
Te onderzoeken welke materiële hulpmiddelen voor het wiskunde-onderwijs op de middelbare scholen in Nederland beschikbaar en/of aan te bevelen zijn.

De werkgroep stelde het volgende voorlopige werkprogramma op: Inventarisatie, gevolgd door een beoordeling, van in binnen- en buitenland aanwezige hulpmiddelen; zo mogelijk het opstellen van criteria, waaraan materiële hulpmiddelen zullen moeten voldoen. Hierbij moet onder „materiële hulpmiddelen” worden verstaan:

1. Films en filmstroken (dia's). 2. Modellen. 3. Instrumenten (zoals rekenlinealen; geen teaching machines). 4. Illustratiemateriaal.

Voor de inventarisatie van de beschikbare hulpmiddelen werden de volgende wegen ingeslagen:

1. Alle leden van de werkgroep verzamelden en vermeldten de gegevens waarover zij beschikten.

2. Een oproep, geplaatst in de lerarenbladen, leverde enkele reacties van collega's.
3. Oproepen aan fabrikanten, importeurs e.d., geplaatst in verschillende handelsvakbladen, hadden enkele offertes tot resultaat.
4. Een oproep, opgenomen in het internationale blad Eurodidac, leverde een paar aanbiedingen uit het buitenland op.
5. Op 17 maart 1965 werd door de leden van de werkgroep een bezoek gebracht aan de expositieruimten van de firma Luctor te Baarn, ter bezichtiging van de hulpmiddelen, die door deze firma in de handel worden gebracht.
6. De werkgroep hield bijeenkomsten op 25-3-64, 24-2-65, 31-3-65, en 20-10-65 om de tot dusver geboekte resultaten te bespreken (vergaderingen, vastgesteld op 21-5-64 en 14-10-64, konden wegens drukke schoolwerkzaamheden van de leden van de werkgroep, geen doorgang vinden).

De bereikte resultaten zijn voor de leden van de werkgroep niet bemoedigend. De belangstelling van de collega's-leraren is bijzonder gering, om redenen die wij slechts kunnen gissen.

Een gevolg hiervan is, dat de belangstelling van de handel voor de door ons bedoelde leermiddelen óók zeer gering is. Immers, er zijn in het verleden wel leermiddelen bedacht, vervaardigd en in de handel gebracht, maar de omzet ervan was zo klein, dat de prijzen naar verhouding veel te hoog moesten worden; wat dan weer ten gevolge had, dat zelfs het geringe aantal gefabriceerde artikelen nog als winkeldochters bleef staan! Om dan maar weer uit de handel genomen te worden . . .

Niettemin wil de werkgroep er toe overgaan, een overzicht te geven van wat hij op zijn speurtochten heeft ontmoet. Het is tenslotte mogelijk, dat de geringe belangstelling te wijten is aan gebrek aan bekendheid met de bestaande materiële hulpmiddelen, en dat dit overzicht ervan het gebruik kan stimuleren. Dat er waardevolle hulpmiddelen bestaan, daarvan is de werkgroep overtuigd. Maar van elk hulpmiddel blijkt de waarde pas goed in het gebruik ervan. Hoeveel zal er bij zijn, dat we niet meer willen missen als we het eenmaal goed hebben leren kennen?

Beschikbare Materiële Hulpmiddelen

I *Films en filmstroken (dia's).*

Ia. Films.

1. Drie Franse films (stom, zwart-wit, 16 mm) van Cantagrel en Jacquemard, resp. over:

Regelmatige veelhoeken (duur ca. 12 minuten)

Cirkels, meetkundige verzamelingen (duur ca. 20 minuten)

Rechte lijn en parabool, algebraïsch-analytisch (duur ca. 20 min).

Van deze films zijn drie stel in ons land aanwezig, n.l. bij de Rijks H.B.S. te Groningen, het Chr. Lyceum te Delft en het St. Norbertus-Lyceum te Roosendaal. Andere scholen kunnen deze films te leen krijgen. Ze zijn echter al ongeveer 12 jaar oud, en beginnen dus duidelijke verschijnselen van slijtage te vertonen.

2. Tweeëntwintig korte Franse filmpjes van Nicolet (stom, zwart-wit, 16 mm), in twee series van 11 stuks (niet afzonderlijk!) verkrijgbaar bij de Stichting Technisch Filmcentrum, Stadhouderslaan 152, Den Haag. Duur van elk filmpje ca. 3 minuten. Voor een uitvoerige bespreking: zie Euclides, 35e jaargang, no. I (september 1959).

Een praktisch bezwaar: wanneer een school deze filmpjes op de begroting zet, worden ze door het Departement in Den Haag weer geschrapt!

3. Twee instructiefilms over de rekenliniaal; eveneens verkrijgbaar bij het Technisch Filmcentrum.
4. In het buitenland zijn een groot aantal films over wiskundige onderwerpen aanwezig. Zo werd bijv. tijdens „A short course for Mathematics Teachers 1963” in University College te Londen (april 1963) een programma vertoond met de volgende films:
 - a. Dance Squared, een 6-minuten kleurenfilmpje over vlakvullingen (planimetrie).
 - b. Four Line Conics, een 11-minuten filmpje over scharen kegelsneden.
 - c. Mathematics at your fingertips, een 30-minuten film over eenvoudige rekenmachines.

Als uitleen-adres voor deze drie films werd opgegeven: Canada House Library, 1 Grosvenor Square, Londen W. 1.

Verder bestaan er instructie-films over computers.

Ib. Filmstroken en dia's.

1. Inleiding tot de grafieken. Polygoon no. 512, zwart-wit.
2. Grafieken deel I (punt en rechte). Polygoon no. 511, zwart-wit.
3. En dat alles met de constructie HZH, Polygoon no. K. 510, in kleuren.
4. Hoe getallen geschreven werden. Tech. Filmcentrum no. S19, in kleuren.

5. Omtrek en oppervlakte van de cirkel. Tech. Filmcentrum, in kleuren.
6. Pythagoras, Tech. Filmcentrum, in kleuren.
7. Stellingen der Vlakke Meetkunde, Polygoon no. 280. Zwart-wit. f 27,50.
8. Eindexamenvraagstukken Stereometrie 1964. Polygoon no. 281. Zwart-wit f 27,50.
9. Transformaties.
10. Inleiding Projectieve Meetkunde.
De filmstroken 9 en 10 zijn privé-fabrikaat en eigendom van collega J. M. Boks te Ede.

Enkele algemene opmerkingen hierbij:

Sommige van de hierboven genoemde filmstroken zijn al lang in de handel, maar worden desondanks weinig gebruikt. Op de scholen waar ze aanwezig zijn worden ze meestal vertoond in een laatste lesuur voor de vakantie, dus vrijwel geheel buiten de lessen om. Hiervoor zijn twee redenen aan te wijzen.

1. De filmstroken zijn te incidenteel, er zijn er te weinig van. Ze kunnen daardoor moeilijk geïntegreerd worden in de gewone volgorde van lessen. Aan te bevelen was een serie filmstroken, aansluitend bij de gewone cursus. Voor heel wat onderwerpen uit onze schoolwiskunde is dit te realiseren!
2. Het gebruik van filmstroken vereist de aanwezigheid van een projector, en in de meeste gevallen (enkele zwart-wit stroken uitgezonderd) een redelijk goed verduisterd lokaal. De praktijk is, dat de meeste wiskunde-leraren nòch over het een, nòch over het ander beschikken. Er is dus heel wat rompslomp voor nodig (ruilen van leslokaal, opstellen van een projector) voor dat een filmstrook vertoond kan worden. En het rendement van zo'n enkele vertoning is daarmee niet evenredig. Aan te bevelen was daarom, dat in elk wiskunde-leslokaal een projector in permanente opstelling aanwezig was, en dat de normale gordijnen voldoende licht wegnemen om een redelijke projectie van de beelden mogelijk te maken. Alleen zo is het mogelijk om op elk gewenst moment een bij de les passend beeld snel te laten zien.

II *Modellen.*

1. De voornaamste leverancier-importeur hiervan is de firma Luctor N.V., Oude Utrechtse weg 20-22, te Baarn. Zij levert veel modellen van plastic (plexiglas), zowel voor de planimetrie (stelling van Pythagoras, de stellingen over hoeken, gevormd door twee

evenwijdige lijnen gesneden door een derde, demonstratie van $\pi = 3,14$ e.d.) als voor de stereometrie (kubus met diverse verdelingen, prisma's en piramiden met verdelingen, bollen en kegels met diverse doorsneden). Nieuw is Lommers' magnetisch geoplanbord van 1 m^2 , met bijbehorende kleinere borden van $20 \times 20 \text{ cm}$, waarop allerlei planimetrische figuren kunnen worden uitgebeeld, en dat met stangen kan worden uitgebouwd tot een kubus van 1 m^3 , waarin door diverse hulpmiddelen, zoals licht metalen staven en gekleurde elastische snoeren, stereometrische figuren kunnen worden aangebracht. Deze kubieke meter blijkt echter in de praktijk te groot te zijn om er de kubus en zijn deellichamen in te herkennen.

Ook zagen wij plastic blokken die dienen om een aanschouwelijke indruk te geven van omvang en inhoud van regelmatige ruimtelijke figuren.

2. Soortgelijke modellen worden geleverd door de firma Cenco, Konijnenberg 40, te Breda.
3. Speciale vermelding verdient de nieuwste uitgave van Luctor te Baarn, n.l. „Ruimtelijk doen”, een stereometrisch practicum, voorlopige prijs f 175,—. Dit is een ontwerp van collega Ir. H. M. Mulder, Wilhelminapark 22, te Breda. In een stevige houten doos bevindt zich allerlei materiaal (platen, staven, verbindingsstukken) waarmee het mogelijk is ruimtelijke figuren van allerlei soort op te bouwen.

Deze opbouw-set onderscheidt zich in een belangrijk opzicht van de hiervoor genoemde modellen, die vast en statisch zijn, en alleen maar geschikt om naar te kijken (hoe belangrijk dit ook is! vooral voor die leerlingen die in een vlakke tekening moeilijk de ruimte kunnen zien). Met deze set is het n.l. mogelijk om vrijwel elk in de stereometrie voorkomend probleem ruimtelijk uit te beelden!

4. Van de firma Karl Kolb, 6 Frankfurt-Main 1, Untermainkai 34, ontvingen wij eveneens een catalogus van modellen. Het betreft hier in hoofdzaak stevige draadfiguren van regelmatige lichamen (met diverse lijnen erin), regeloppervlakken, andere oppervlakken als torus, ellipsoïde en hyperboloïde, draadmodellen van ruimtelijke krommen, e.d.; maar ook plastic kegels met doorsneden, plastic blokken voor demonstratie van ruimtevulling met regelmatige viervlakken, zesvlakken en achthoeken, en plastic apparaten voor het doen ontstaan van epi- en hypocycloïden. Zelfs modellen van verschillende soorten coördinaten-systemen zijn aanwezig. De verzameling is de moeite van het

bekijken meer dan waard, maar de meeste onderwerpen vallen buiten de Nederlandse schoolwiskunde. De prijzen zijn hoog! Gemiddeld enkele honderden D.M. per stuk.

5. Door Ir. H. M. Mulder te Breda werd ook een gonio-schijf ontworpen, te leveren door de firma Cenco te Breda. (de gradenklok, vroeger geleverd door Luctor te Baarn, is niet meer in de handel).
6. Door collega W. Bergman te Wageningen werd een apparaat ontworpen ter demonstratie van de scheve projectie, en de daarbij optredende affiniteit. (niet in de handel).
7. Collega B. Th. Hooghuis, Ringbaan West 278, te Tilburg vervaardigde zelf een aantal stereometrische modellen, die hij en zijn medeleraren met enthousiasme gebruiken.

Algemene opmerkingen:

De meeste modellen hebben een vaste vorm, en kunnen na één keer goed bekeken te zijn in de kast worden opgeborgen. Omdat de prijs ervan als regel vrij hoog is, vinden de meeste wiskunde-leraren het niet de moeite waard om ze voor die éne keer kijken aan te schaffen; als een leerling zich de betreffende figuur niet goed kan voorstellen, is het immers ook mogelijk een tijdelijk model te maken met primitieve middelen, als driehoeken, touwtjes en breinaalden. Toch zou het de lessen wel eens vergemakkelijken, en misschien ook interessanter maken, als we een kast vol demonstratiemateriaal bij de hand hadden!

De werkgroep had speciaal belangstelling voor variabele modellen, waar iets mee gedaan kan worden. Vandaar de voorkeur voor het op de vorige bladzijde en hierboven onder no. 3 genoemde stereopracticum, al moet gezegd worden dat geen van de leden van de werkgroep dit practicum in de klas heeft beproefd.

De hierboven onder no. 5 genoemde gonio-schijf vormt reeds een overgang tot de volgende rubriek, n.l.

III *Instrumenten.*

Het is niet de bedoeling van de werkgroep te spreken over de normaal gebruikte instrumenten als driehoeken en passers, al zijn de Aristo-driehoeken vermeldenswaard wegens hun handige combinatie van mogelijkheden en de erbij passende borddriehoeken, en is het ook de moeite waard de aandacht te vestigen op de prima bordpasser merk Centrex, geïmporteerd door de firma Lintel N.V., Hobbemaplein 96, Den Haag. Prijs f 23,50 zonder, f 28,— met visipoint. Belangrijker is het te wijzen op waarschijnlijk minder bekende instrumenten.

1. Rekenlinealen zijn er in vele soorten en prijzen; we noemen slechts de merken Aristo, Nestler, Rista enz.
2. Mallen en schablonen voor de meest voorkomende figuren worden in verschillende soorten geleverd door Imha te Amsterdam; we noemen vooral de Aristokonika met enkele kegelsneden, en de standardgraph voor kubus, prisma's, viervlakken, piramiden e.d. Zij werken tijdsparend, en normaliseren de figuren. Ook de Deense firma Linex levert dergelijke artikelen.
3. De Noord-Nederlandse Stempel- en Leermiddelenfabriek N.V. te Groningen levert een serie van zes stempels voor stereometrische figuren, n.l. de kubus in twee standen, drie regelmatige vierzijdige piramides en een viervlak. Prijs: f 31,— per serie. Aanbevolen!
4. Firma Imha, Amsterdam, levert ook een Noorse (houten) tekenhaakbordlineaal, die op elk schoolbord een horizontaal-verschuifbare verticale lineaal met centimeterverdeling mogelijk maakt, met daaraan bevestigd een draai- en verschuifbare hulplineaal, waarvan de helling is af te lezen op een gradenboog. Prijs f 75,—.
5. Collega J. H. v. d. Hoeven, Joh. Ramaerstraat 11 hs, te Amsterdam (Slotervaart) maakte voor zichzelf;
 - a. Triplex-mallen voor kegelsneden (vergelijkbaar met het bord-model van de Aristokonika) en voor sinusoiden.
 - b. Triplex-mallen voor stereometrische figuren, vergelijkbaar met de Standardgraph.
 - c. Een grafiekenbord zonder „ruitjes”, maar met een vaste horizontale en een draai- en verschuifbare verticale as, vergelijkbaar met de Noorse tekenhaak-bordenlineaal.
 - d. Een „blokkendoos” voor de planimetrie, bestaande uit een bord van zachtboard met daarop te prikken latten en hoeken; enigszins vergelijkbaar met het spelletje „hamertje-tik”.
 - e. Een afstandsmeter, ten gebruike bij de goniometrie, die binnen de klas tot op enkele centimeters nauwkeurig werkt.
6. Collega A. Blom, Pascalstraat 7, te Amersfoort vervaardigde een „geo-plan”-grafieken-bord van 1 m², waarop de roosterpunten vaste spijkertjes zijn op onderlinge afstand van 5 cm; de figuren worden hierover gespannen met behulp van wit elastiek.
7. Voor de scholen waar het vak statistiek beoefend wordt is van belang de door de firma Berkeley Enterprises, Inc., 815 Washington St., R138, Newtonville 60, Mass. aangeboden „Probability and Statistics Kit K22”, waarvan wordt gezegd: „A NEW kit with more than 60 Experiments and Examples in CHANCES, PROBABILITIES and STATISTICS”.

Enkele opmerkingen:

Het gebruik van instrumenten en hulpmiddelen vereist een omschakeling in mentaliteit en werkmethoden. Dikwijls lijken zij tijdverlies mee te brengen, terwijl na enige gewenning juist blijkt, dat eerder tijdwinst het resultaat is, omdat de leerlingen met meer belangstelling de verschillende onderwerpen aanpakken, waardoor ook de resultaten beter worden. In vele gevallen is ook een winst aan duidelijkheid en nauwkeurigheid merkbaar.

Het normaliseren, dat wij vooral in de stereometrie zo goed kennen, heeft echter ook een bezwaar. De telkens terugkerende figuren, ontstaan uit mallen, schablonen, stempels e.d., kunnen de fantasie remmen, waardoor afwijkende figuren moeilijker schijnen te worden. Het is daarom zeer aan te bevelen geen slaaf van deze hulpmiddelen te worden, en ze zo nu en dan eens bewust niet te gebruiken, opdat de leerlingen niet te eenzijdig ontwikkeld worden.

Aansluitend aan de hiervoor genoemde instrumenten kan nog gewezen worden op de mogelijkheid, op vaste of, wat nog beter is, op verwisselbare schoolborden enkele geschilderde tekeningen te zetten (bijv. kubus, sinuslijn e.d.). Zij leveren de leraar dezelfde winst aan tijd en nauwkeurigheid die de leerling krijgt van de mallen e.d.

IV *Illustratiemateriaal.*

1. De wanden van de wiskunde-leslokalen kunnen worden versierd met portretten van grote wiskundigen uit het verleden; zie Euclides, 34e jaargang no. X (15 juli 1959), en Euclides, 31e jaargang no. II (Najaar 1955). Ook mogelijk is, gebruik te maken van afbeeldingen van verschillende krommen en van toepassingen van de wiskunde; zie Euclides, 36e jaargang no. IX (1 juni 1961).
2. Het is wenselijk te beschikken over een wissellijst voor platen van het formaat dat gewoonlijk wordt gebruikt bij het vak lijntekenen, met enkele series er bij passende tekeningen, bijv. over planimetrische figuren, stereometrische figuren (vooral de meer tijdrovende, zoals doorsneden van lichamen), grafieken van algebraïsche en goniometrische functies, e.d. Deze series zouden kunnen worden geleverd door een drukkerij-uitgeverij, en naar behoefte kunnen worden aangevuld door tekeningen, door leerlingen gemaakt bij het vak lijntekenen. Door één of enkele malen per week van tekening te wisselen bereikt men het effect van een zeer langzaam draaiende filmstrip.

3. In dit verband kan ook worden gewezen op de wenselijkheid, te komen tot een eigen schoolbibliotheek voor het vak wiskunde, eventueel tegelijk voor de vakken natuurkunde, scheikunde, sterrenkunde en biologie. In deze bibliotheek dienen voor te komen biografieën van belangrijke geleerden, populair-wetenschappelijke werken, schoolboeken die niet op school worden gebruikt, bij voorkeur ook uit het buitenland, tijdschriften, (Pythagoras, Archimedes) e.d. Vooral wanneer de leraar bij gelegenheid in de klas naar deze bibliotheek verwijst lijkt belangstelling hiervoor gegarandeerd.

Deze opsomming van materiële hulpmiddelen maakt geen aanspraak op volledigheid. Misschien is er nog veel aan de aandacht en de speurzin van de werkgroep ontsnapt. Wij zullen het daarom zeer op prijs stellen berichten en/of aanbiedingen van nog niet genoemde leermiddelen te ontvangen.

Bovendien zijn wij bijzonder belangstellend naar de ervaringen van collega's die met weinig bekende hulpmiddelen hebben gewerkt. Kunnen zij ons uit de praktijk van het onderwijs voor- en nadelen van die hulpmiddelen vertellen? Het is ons immers praktisch onmogelijk leermiddelen op hun waarde te beoordelen na ze alleen maar bezichtigd te hebben. Enkele door gebruik beproefde artikelen zijn in het bovenstaande reeds aanbevolen.

Wij hopen dat deze publikatie de nodige reacties oplevert.

Namens de Werkgroep,
Materiële Hulpmiddelen Wiskunde,

Drs. A. B. Menk, voorzitter,
A. Blom, secretaris,
Pascalstraat 7, Amersfoort.

VIERHOEKEN IN EN OM VIERHOEKEN

door

Dr. J. T. GROENMAN

Groningen

1. In onze leerboeken vindt men nog al eens het volgende vraagstuk:

Construeer een vierkant, waarvan de zijden door vier gegeven punten gaan.

De oplossing — met het voorafgaand inleidend vraagstuk — zal bekend zijn. De didaktische betekenis van het vraagstuk is mij nooit duidelijk geworden. Als shownummer is het zeker geslaagd, maar in onze vlakke meetkunde staat het geïsoleerd. Het is een sterke aanwijzing buitendien voor de juistheid van de overigens aanvechtbare bewering, dat de meetkunde een zaak is van het trekken van de goede hulplijnen.

Ook *Euclides* — zie recreatie 147 — haalde het onlangs te voorschijn, zij het dan met een variant.

2. Nog nooit ontmoette ik in onze leerboeken het „duale” vraagstuk:

Construeer een vierkant, waarvan de hoekpunten op vier gegeven lijnen liggen.

Wij stellen ons als doel dit vraagstuk op te lossen.

3. Wij beschouwen eerst drie lijnen a , b en d en zoeken naar een vierkant, waarvan één hoekpunt samenvalt met een gegeven punt P van a , terwijl de aanliggende hoekpunten op b en d liggen (zie figuur 1).

Wij kiezen als assen de lijn a en de middelloodlijn van AD . Verder: $A(1, 0)$; $D(-1, 0)$; $P(\lambda, 0)$.

Wij verbinden nu P met een willekeurig punt E van b ; dan zetten we EE' loodrecht op PE en maken $EE' = PE$. Doorloopt E de lijn b , dan doorloopt E' een lijn b' , die uit b ontstaat door een complexe vermenigvuldiging. Er wordt vanuit P eerst gewoon vermenigvuldigd met $\sqrt{2}$; daarna volgt een rotatie over een hoek

van 45° in positieve zin met P als centrum. Wij vinden twee punten van b' door eerst E in A te kiezen en daarna in het voetpunt H van de loodlijn uit P op b neergelaten; b' is de verbindingslijn van A' en H' . Omdat zowel PH' als b' een hoek van 45° maakt met b , is $\angle A'H'P$ recht.

$A' = A'(1, 1-\lambda)$, zodat b' de volgende vergelijking krijgt:

$$y - 1 + \lambda = m_1(x - 1) \dots\dots(1)$$

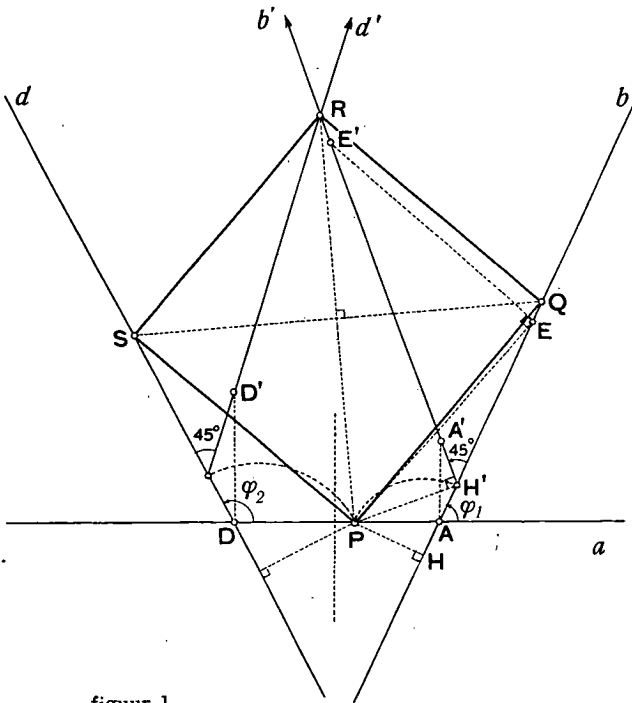
Daarin is $m_1 = \text{tg}(\varphi_1 + 45^\circ)$

Op dezelfde wijze vinden we een lijn d' bij d ; de rotatie heeft dan in negatieve zin plaats. De vergelijking van d' wordt

$$y - 1 - \lambda = m_2(x + 1) \dots\dots(2)$$

Daarin is $m_2 = \text{tg}(\varphi_2 - 45^\circ)$.

Het zal duidelijk zijn, dat het snijpunt R van b' en d' optreedt als overstaand hoekpunt van P in het gevraagde vierkant; de beide overblijvende hoekpunten Q en S vinden we door de middelloodlijn van PR met b , resp. d te snijden.



figuur 1.

4. Doorloopt P de lijn a , dan houden b' en d' hun richting. De verzameling der punten R is ook een rechte u ; men ziet dat het eenvoudigst door uit (1) en (2) de parameter λ te elimineren.

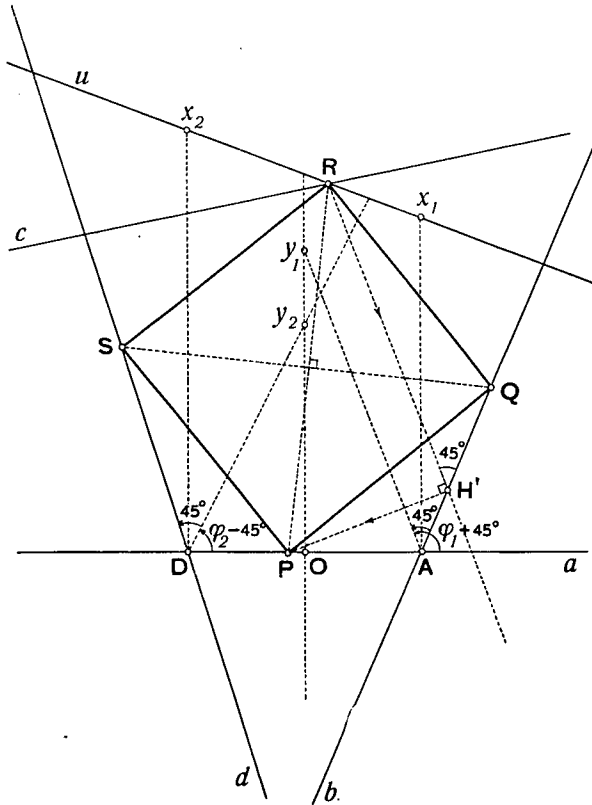
De vergelijking van u wordt dan:

$$y = \frac{1}{2}(m_2 + m_1)x + \frac{1}{2}(m_2 - m_1) + 1 \dots (3)$$

Om lijn u te tekenen, moeten we twee punten bepalen. Wij kiezen daartoe $X_1[1, m_2 + 1]$ en $X_2[-1, -m_1 + 1]$. (zie figuur 2).

5. Wij komen nu tot het vraagstuk van § 2. Voorlopig bepalen we ons tot de lijnen d , a , b ; daarna construeren we bij a de lijn u . (figuur 2).

Wij tekenen door A een lijn die een hoek van 45° maakt met b ; omdat $OA = 1$ wordt OY_1 dan gelijk aan $-m_1$; daarna een lijn door D , die een hoek van 45° maakt met d ; we krijgen $OY_2 = m_2$.



figuur 2.

Daarmee zijn de stukken $-m_1 + 1$ en $m_2 + 1$ gevonden, zodat X_1 en X_2 zijn te vinden; daarmee is u bepaald.

R is het snijpunt van u met de vierde lijn c .

Uit R tekenen we een lijn RH' , die een hoek van 45° maakt met b ; daarna een lijn in H' loodrecht op RH' , die a in P snijdt (vergelijk figuur 1). De middelloodlijn van PR geeft dan weer Q en S .

5. Wij kunnen nu de vraagstukken uit 1 en 2 algemener stellen. Zij luiden dan:

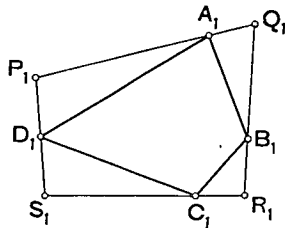
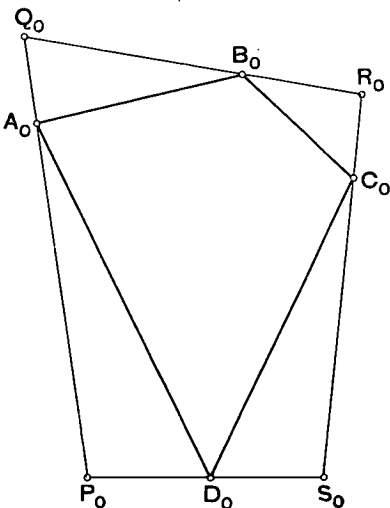
a. *Construeer een vierhoek, gelijkvormig met een gegeven vierhoek, waarvan de zijden door vier gegeven punten gaan.*

b. *Construeer een vierhoek, gelijkvormig met een gegeven vierhoek, waarvan de hoekpunten op vier gegeven lijnen liggen.*

Het laatste vraagstuk kon ik oplossen met behulp van de methode, die in 2, 3, 4 is gevolgd; de complexe vermenigvuldiging werd wat ingewikkelder en de constructie wat bewerkelijker. Principiële afwijkingen waren er niet. De constructie wordt hier kortheidshalve niet gegeven; zij geeft ook niets essentieels meer.

6. Het vraagstuk a uit 5 is dan ook opgelost. We stellen ons de vraag hoe een vierhoek $P_1Q_1R_1S_1$ te construeren, gelijkvormig met een gegeven vierhoek $P_0Q_0R_0S_0$, waarvan de zijden gaan door de hoekpunten van een gegeven vierhoek $A_1B_1C_1D_1$.

Volgens de methode van 2 t/m 5 construeren we eerst een vierhoek $A_0B_0C_0D_0$ — gelijkvormig met $A_1B_1C_1D_1$ — waarvan de hoekpunten liggen op de zijden van $P_0Q_0R_0S_0$. De „0-figuur” brengen we dan gelijkvormig over naar $A_1B_1C_1D_1$; dan ontstaat $P_1Q_1R_1S_1$ (zie figuur 3).



figuur 3.

DOOR DE UNESCO AANBEVOLEN LITERATUUR

Hieronder volgt een uittreksel uit een door de Unesco verzorgde lijst van aanbevolen moderne literatuur op het gebied van wiskunde-onderwijs.

United Nations Educational, Scientific & Cultural Organization:

Dienes, Z. P., *Mathematics in Primary Education* (prepared by the International Study Group for Mathematics Learning, Palo Alto, California), 1965, Unesco Institute for Education, Hamburg, p. 165.

Mialaret, G., *The Teaching of Mathematics*, Paris, Unesco, 1959, p. 20, \$ 0.25.
Report on the work of the International Symposium on School Mathematics Teaching, 1962, Hungarian National Commission for Unesco, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, p. 40, free on request.

Organization for Economic Co-operation & Development (OECD):

Mathematics Today: a guide for teachers, Paris, OECD, 1964, p. 422, \$ 3.00.

School Mathematics in OECD countries; summaries, Paris, OECD, 1963, p. 116, free on request.

Synopses for Modern Secondary School Mathematics, Paris, OECD, 1964, p. 310, free on request.

New Thinking in School Mathematics, Paris, OECD, 1961, p. 246, \$ 2.50.

Orders for publications should be sent to the Sales Agent of OECD (Meulenhoff & Co. N.V., Beulingstraat 2, Amsterdam C.).

School Mathematics Study Group:

Mathematics for Elementary Schools, 2 vol., \$ 3.00.

Introduction to Secondary School Mathematics, 2 vol., \$ 3.00.

Introduction to Algebra, 2 vol., \$ 3.00.

Generalizations and Algebraic Manipulations, Unit II, \$ 1.50.

First Course in Algebra, 2 vol., \$ 3.00.

Mathematics for Junior High School, 2 vol., \$ 3.00.

Geometry with Coordinates, 2 vol., \$ 3.00.

For orders and inquiries write to: The School Mathematics Study Group, School of Education, Cedar Hall, Stanford University, Stanford, California, U.S.A.

Nuffield Foundation Mathematics Project:

For orders and inquiries write to: Mr. D. E. Mansfield, 10 Lyndhurst Drive, Leyton, London, E. 10.

New Mathematical Library (publishes a series of monographs under the auspices of the „School Mathematics Group”):

Bold, B., *Reference Guide to the New Mathematical Library*, Random House, 457 Madison Avenue, New York 22, N.Y., U.S.A., 1964, p. 32, free on request.

- Davis, J. Ph., *The Lore of Large Numbers*, New York, Random House, 1961, p. 165, \$ 1.95.
- Ore, O., *Graphs and their Uses*, New York, Random House, 1963, p. 131, \$ 1.95.
- Sawyer, W. W., *What is Calculus about?*, New York, Random House, 1961, p. 118, \$ 1.95.
- Yaglom, U. M., *Geometric Transformations*, New York, Random House, 1962, p. 132, \$ 1.95.
- Zippin, L., *Uses of Infinity*, New York, Random House, 1962, p. 151, \$ 1.95.

The School Mathematics Project:

- Director's Report for 1962-63, ordinary level, Southampton, 1963, p. 48, 5/—.
- Director's Report for 1962-63, advanced level, Southampton, 1964, p. 48, 5/—.
- Experimental tests, Southampton, 1964, 6 vol., £ 1.00 each.
- For orders and inquiries write to: The Southampton University Bookshop, the University, Southampton.

- Adler, I., *The New Mathematics*, New York, John Day Co., 1962, p. 245, \$ 3.00 ¹⁾.
- Beberman & Herbert Vaughn, „Geometry” Unit VI: University of Illinois, Illinois Committee on School Mathematics, D. C. Heath & Co., Boston, Mass., U.S.A., 1964, p. 458, \$ 2.50.
- Begle, E. G., *Introductory Calculus with Analytical Geometry*, Holt, Rinehart & Winston Inc., New York, 1954, p. 304, \$ 6.00.
- Choquet, G., *L'enseignement de la géométrie*, Ed. Hermann, Paris, 1954, p. 180, Fr. 33,00.
- Dienes, Z.P., *Comprendre les mathématiques*, Office central de Librairie, Paris, 1965, p. 165, Fr. 12,00.
- Dienes, Z. P., *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire*, Office central de Librairie, Paris, 1964, p. 90, Fr. 10,00.
- Dieudonné, Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Collection „Enseignement des Sciences”, Ed. Hermann, Paris, 1964, p. 224, Fr. 36,00.
- Fehr, Carnahan & Beberman, *Algebra with Trigonometry*, second course, D. H. Heath & Co., Boston, Mass., U.S.A., 1963, p. 576, \$ 5.36.
- Gattegno, G. & autres, *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*, Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1965, p. 216, Fr. 25,00.
- Piaget & autres, *L'enseignement des mathématiques*, Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1965, p. 176, Fr. 20,00.
- Keedy, Jameson & Johnson, *Exploring Modern Mathematics*, Holt, Rinehart & Winston Inc., New York (Teacher's edition), Books I and II, 1963, \$ 5.32 each.
- Jaeger, Arno, *Introduction to Analytical Geometry and Linear Algebra*, Holt, Rinehart & Winston Inc., New York, 1960, p. 305, \$ 8.00.
- Lentin & Rivaud, *Eléments d'algèbre moderne*, Vuibert, Paris, 1963, p. 340, Fr. 20,00.
- Mitchell & Cohen, *A new look at elementary Mathematics*, Prentive Hall Inc., 1965, p. 400, \$ 7.95.
- Papy, G., *Groupes*, Dunod, Paris, 1961, p. 260, Fr. 34,00.
- Revuz, A., *Mathématique moderne, mathématique vivante*, O.C.D.L., 65 rue Claude-Bernard, Paris Vème, 1963, p. 86, Fr. 6,00.

P. G. J. Vredenduin

¹⁾ Er bestaat een goedkopere pocketuitgave.

KORREL CXXXVII

Bestaan er onbestaanbare cirkels?

In korrel CXXXVI van Wijdenes wordt terecht de aandacht gevestigd op enige slordigheden in leerboeken der analytische meetkunde, die ontstaan, doordat moeilijkheden over het hoofd worden gezien die voortvloeien uit het feit, dat men zich dient te beperken tot reële getallen.

We wijzen er echter op, dat het wezenlijke van Wijdenes' betoog reeds voorkomt in korrel CXXXI van R. Kooistra op pag. 182—183 van jaargang 41 van *Euclides*, Wijdenes vult Kooistra's betoog aan door in enige leerboeken na te gaan hoe de desbetreffende materie erin is behandeld.

Ik acht voorts Wijdenes' kritiek maar ten dele gerechtvaardigd, omdat er onder de door hem bedoelde auteurs ook zijn, die in hun leerboeken het complexe getal uitdrukkelijk behandelen. Het feit, dat het wiskundeplan voor gymnasium en hbs slechts spreekt over reële getallen en dat bijgevolg ook op het eindexamen slechts reële getallen gevraagd mogen worden, betekent geenszins, dat auteurs en docenten complexe getallen niet zouden mogen behandelen. De programma's bevatten minimum-eisen, geen maximum-eisen.

De complexe getallen stonden op het ontwerp-leerplan van de leerplancommissie van Wimecos van 1954. De commissie heeft in 1957 de complexe getallen laten vervallen, niet omdat ze de behandeling ervan niet mogelijk en wenselijk zou achten, maar uitsluitend omdat de algemene vrees voor overlading tot enige besnoeiing op de voorstellen noopte.

Het is m.i. onbillijk om een auteur die in zijn leerboeken de complexe getallen wel behandelt, te verwijten dat hij $x^2 + y^2 + 9 = 0$ als een vergelijking van een cirkel wenst te beschouwen.

Met Wijdenes' aanval op termen als „onbestaanbare punten” en „onbestaanbare cirkels” ga ik akkoord; dat wil zeggen: ik verwerp wel de termen maar niet de wiskundige inhoud die door die termen kan worden gerepresenteerd.

Als er complexe getallen in de klassen zijn behandeld, heb ik er geen enkel bezwaar tegen om te zeggen:

„het *punt* (3i, 4i) ligt op de *cirkel* $x^2 + y^2 + 25 = 0$ ”.

In tweede instantie zullen we de term „punt” immers niet meetkundig, maar algebraïsch interpreteren, nl. als een geordend getallenpaar, en eveneens de term „cirkel” algebraïsch opvatten, nl. als een verzameling van geordende getallenparen (x, y) die aan zekere voorwaarden voldoen.

Dit leidt ertoe dat $x^2 + y^2 + a = 0$ een cirkel wordt met Q als middelpunt onverschillig, of a positief of negatief is.

Ik wil er nog graag de aandacht op vestigen, dat de cirkel met Q als middelpunt en 5 als straal slechts het beeld is van een *deelverzameling* van de punten die door $x^2 + y^2 = 25$ worden gerepresenteerd, nl. alleen van die punten, welke reële coördinaten hebben. Een misverstand bij onze leerlingen is soms, dat ze menen dat er rechten zijn die de getekende cirkel in complexe punten snijden. Ze vergeten, dat er tot de verzameling van getallenparen (x, y) die we cirkel noemen, paren behoren die niets met de getekende cirkel te maken hebben. Ook de rechte lijn $x + y = 12$ is niet het beeld van de volledige verzameling van punten (x, y) die aan de gegeven vergelijking voldoen, maar slechts van een deelverzameling. Het punt $(7 + 3i, 5 - 3i)$ ligt dus niet op de rechte lijn die we als beeld van $x + y = 12$ in het reële vlak tekenen. Het „punt” $(7 + 3i, 5 - 3i)$ behoort wel tot de „punt”-verzameling die door $x + y = 12$ wordt gedefinieerd.

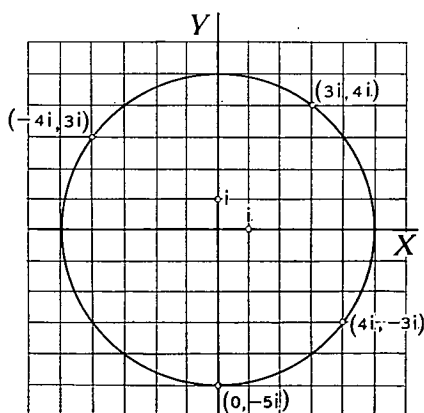
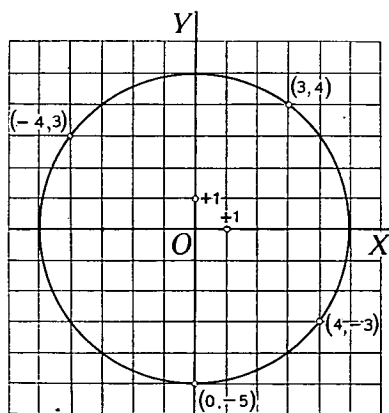
Dezelfde cirkel die dienst deed om een meetkundig beeld te krijgen van een deelverzameling van de punten die door $x^2 + y^2 = 25$ worden bepaald, kan ook dienst doen om een meetkundig beeld te krijgen van een deelverzameling van de punten die door $x^2 + y^2 + 25 = 0$ worden bepaald.

We beelden daartoe de punten $(i, 0)$, $(2i, 0)$, $(3i, 0)$. . . , af op de punten die aanvankelijk $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$. . . moesten afbeelden. Analoog op de Y -as.

Het punt (a, b) van het reële vlak wordt daardoor het punt (ai, bi) van het irreële vlak.

Er bestaat nu blijkbaar een cirkel waarvan de punten irreële coördinaten hebben.

Het is duidelijk dat we echter weigeren om te zeggen, dat er dus een cirkel bestaat, die uit onbestaanbare punten bestaat!



GEMEENSCHAPPELIJKE KOORDLENGTEN

door

R. A. HIRSCHFELD

Nijmegen

In het volgende leiden wij met volstrekt elementaire hulpmiddelen enige merkwaardige eigenschappen van continue functies af. Hoewel wij geen literatuurverwijzingen hebben kunnen vinden, zijn deze eigenschappen naar alle waarschijnlijkheid reeds lang bekend. Mogelijkerwijs bestaat er voor enkele lezers van Euclides aanleiding een en ander in de hogere klassen ten tonele te voeren.

Beschouw de reële, continue functies f op het eenheidssegment $0 \leq x \leq 1$, welke in de eindpunten voldoen aan

$$f(0) = 0 \text{ en } f(1) = 0.$$

Gemakshalve maken we de afspraak: onder een *kromme* verstaan we de grafiek van een dergelijke functie.

In zo'n kromme trekken we nu alle mogelijke horizontale koorden. Een positief getal k noemen we een *koordlengte* voor f indien minstens een dezer koorden de lengte k heeft. Er is dan minstens een puntenpaar (x, y) in $[0, 1]$ te vinden met

$$|x - y| = k \text{ en } f(x) = f(y).$$

Hierbij laten we toe dat de bewuste koorde de kromme in meerdere punten snijdt.

Uit de randvoorwaarden $f(0) = f(1) = 0$ volgt dat iedere f de triviale koordlengte $k = 1$ heeft. Aan de functie f met $f(x) = \sin 2\pi x$ zien we dat geen enkele k met $\frac{1}{2} < k < 1$ als koordlengte voor *alle* functies van onze klasse kan optreden.

Het aardige is nu dat $k = \frac{1}{2}$ dit wel doet.

STELLING 1. *Alle krommen bezitten de koordlengte $k = \frac{1}{2}$.*

BEWIJS. De nieuwe functie g , gedefinieerd op $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ door

$$g(x) = f(x) - f(x + \tfrac{1}{2})$$

is aldaar continu. In de eindpunten van dit nieuwe segment geldt

wegens de randcondities voor f

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f(\tfrac{1}{2}) = -f(\tfrac{1}{2}), \\ g(\tfrac{1}{2}) &= f(\tfrac{1}{2}) - f(1) = f(\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Voor $f(\tfrac{1}{2}) = 0$ vinden we $f(0) = f(\tfrac{1}{2}) (= 0)$, zodat $k = \tfrac{1}{2}$ een koordlengte is.

Voor $f(\tfrac{1}{2}) \neq 0$ zien dat we $g(0)$ en $g(\tfrac{1}{2})$ tegengesteld teken hebben. Volgens de *tussenwaardenstelling* voor continue functies bestaat er een punt u in $(0, \tfrac{1}{2})$ met

$$g(u) = 0.$$

Maar dit betekent dat

$$f(u) = f(u + \tfrac{1}{2})$$

en $k = \tfrac{1}{2}$ is alweer een koordlengte.

Q.E.D.

Bestaan er nog andere gemeenschappelijke koordlengten?

STELLING 2. *Alle krommen bezitten de koordlengten $k = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$.*

BEWIJS. Uitgaande van een willekeurige f van bovenbedoelde klasse en van een willekeurig natuurlijk getal n , vormen we de hulp-functie h volgens het voorschrift

$$h(x) = f(x) - f(x + 1/n) \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1 - 1/n.$$

Klaarblijkelijk is h continu op het segment $[0, 1 - 1/n]$.

Veronderstel nu eerst dat h in twee punten i/n en j/n ($i, j = 0, 1, \dots, n-1$) verschillende tekens vertoont. Alweer volgens de tussenwaardenstelling is h dan in zeker punt v nul. Bijaldien is

$$f(v) = f(v + 1/n)$$

en $k = 1/n$ is een koordlengte voor f .

Tenslotte het geval dat de $h(i/n)$'s niet van teken verschillen. Dan mogen we veronderstellen dat

$$h(i/n) \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Vorm de „telescoopsom”

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(i/n) = f(0) - f(1) = 0.$$

Een som van niet-negatieve getallen kan slechts dan nul zijn, indien iedere term nul is Dus

$$h(i/n) = f(i/n) - f((i+1)/n) = 0$$

en $k = 1/n$ is weerom een koordlengte.

Q.E.D.

OPMERKING. Aangezien in het bewijs alleen gebruik is gemaakt van de tussenwaardenstelling, is het resultaat ook geldig voor die discontinue functies, welke de tussenwaardeneigenschap bezitten (zg. Darboux functies).

Tenslotte rijst de vraag of onze krommen, behalve de reeds gevonden waarden, nog andere gemeenschappelijke koordlengten bezitten.

STELLING 3. *De in Stelling 2 aangegeven waarden zijn de enige gemeenschappelijke koordlengten.*

BEWIJS. Zij a een getal in $(0, 1)$ met $a \neq 1/n$ voor $n = 1, 2, 3, \dots$. We zullen een functie f , behorende tot onze klasse, aangeven, welke a niet als koordlengte bezit. De constructie speelt zich in eerste instantie af in het deelsegment $(0, a)$, waarin we net zoveel geschikte grafieken tekenen, dat we daarna door „uitschuiven” de gevraagde kromme boven het hele segment verkrijgen.

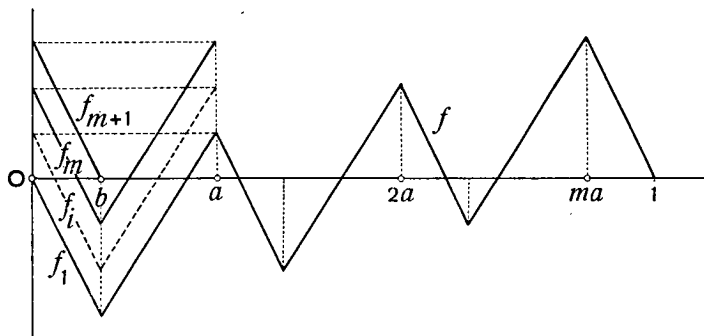
Wegens de keuze van a is geen enkel geheel veelvoud van a gelijk 1.

Zij m het grootste natuurlijke getal waarvoor

$$ma < 1$$

en stel

$$b = 1 - ma.$$



In de figuur (met $m = 3$) trekken we f_1 zo dat

$$f_1(0) = 0, f_1(a) > 0, f_1(b) < 0.$$

Daarna tekenen we f_2 als aangegeven, met inachtnaam van

$$f_2(0) = f_1(a), f_2(b) < 0,$$

en we zorgen er voor dat f_1 en f_2 elkaar niet snijden. Dit doen we in totaal m maal. Hierdoor ontstaan $f_1, f_2, \dots, f_m$.

Vervolgens kiezen we f_{m+1} zo dat

$$f_{m+1}(0) = f_m(a), f_{m+1}(b) = 0.$$

Alle f_i 's zijn continu en zij snijden elkaar niet; de beginwaarde van f_i , $i \geq 2$, is de eindwaarde van zijn voorganger. Verschuif nu f_2 horizontaal naar $[a, 2a]$, f_3 naar $[2a, 3a]$, . . . , en f_{m+1} naar $[ma, 1]$. Hierdoor worden de f_i 's achter elkaar geplakt tot de *continue* kromme f met

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x - (i-1)a) & \text{in } [(i-1)a, ia] \\ f_{m+1}(x - ma) & \text{in } [ma, 1] \end{cases}$$

Er geldt

$$f(0) = f(1) = 0.$$

De nieuwe kromme f behoort dus tot onze klasse. Omdat de f_i 's elkaar niet snijden, is a geen koordlengte van f . Q.E.D.

OPMERKING. Men kan f gemakkelijk oneindig vaak differentieerbaar maken.

BOEKBESPREKING

Edward O. Thorp, *Elementary Probability*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1966, X+152 blz., 38/—.

Het boek maakt in de aanvang de indruk een inleiding in de kansrekening te zijn voor geheel ongeschoolden. Op de fundamenteën van het kansbegrip wordt onduidelijk ingegaan. Weliswaar wordt een axiomatische definitie gegeven van een kansfunctie, maar daarna volgt de constatering, dat de relatieve frequentie hieraan voldoet en dus *een* kansfunctie is, en dientengevolge het bepalen van de relatieve frequentie een experimentele methode is om *de* kans te bepalen. Een analoge onnauwkeurigheid begaat de schrijver op p. 60 bij de bespreking van de dichtheidsfuncties. Ook de definitie van de conditionele waarschijnlijkheid $P(A|B)$ door $P(AB)/P(B)$ is niet helder. De lezer zal het niet duidelijk worden, of we hier te maken hebben met een definitie of met een resultaat, dat uit de axiomatische kansdefinitie afleidbaar is.

Gaandeweg worden de touwtjes echter strakker aangehaald en vanaf hoofdstuk 3 (p. 50) staat de behandeling van de stof op een hoger niveau. De traditionele onderwerpen worden behandeld, die nodig zijn om statistische toepassingen te kunnen doorzien: verwachting, momenten, binomiale en poisson-verdeling, wet van de grote getallen. Het laatste hoofdstuk over continue kansverdelingen en het verband tussen kansfunctie en maattheorie geeft de lezer een aanwijzing, hoe de kanstheorie zich verder kan ontwikkelen, zonder hier uitvoerig op in te gaan.

Wie zich voor kanstheorie interesseert zal zonder twijfel zijn kennis aan de hand van dit boek kunnen verdiepen. Voor eerste kennismaking vind ik het minder geschikt, met uitzondering van het begin.

P. G. J. Vredenduin

A. Ronveaux, *Introduction aux équations aux différences finies*, Collection Les Mathématiques Aujourd'hui, Lidee inc. Montreal, november 1965, 100 blz., C\$ 1.75.

Dit is de tekst van een cursus van 10 uur, voor jongelui van 16 tot 18 jaar, gedurende een werkweek in de provincie Quebec. Het boekje is verdeeld in vijf hoofd-

stukken. Elk hoofdstuk werd behandeld in twee uur, waarna twee uur besteed werd aan oefeningen. Voorkennis: normale stof van V⁸ gymnasium. ¹⁾

De behandeling is kernachtig en duidelijk. Na een inleiding, waarin drie problemen aanleiding geven tot het oplossen van een dergelijke vergelijking, begint de behandeling in hoofdstuk II met de homogene typen.

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = 0$$

x doorloopt de natuurlijke getallen, de coëfficiënten zijn constant. Wat gaan we doen?

1) Position du problème et définitions

2) Problème d'existence et d'unicité

3) Recherche de solutions particulières

enz. tot 7) Résumé du chapitre. Dus een „platte grond” van de in dit hoofdstuk te behandelen stof.

Nu volgt

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = \psi(x), \quad \psi(x) \equiv 0$$

dit is een vergelijking, $F(x)$ is de onbekende.

„différences finies” want niet alleen $F(x)$ maar ook $F(x+1)$ en $F(x+2)$ spelen een rol.

„linéaire” omdat de relatie tussen de F 's lineair is.

„homogène” indien $\psi(x) \equiv 0$, zo niet dan niet-homogeen.

„du 2e ordre” want het verschil van het maximale en minimale argument is 2. En nu. Wat verstaan we onder een oplossing? Een voorbeeld wordt ter verduidelijking gegeven, waarbij al direct twee particuliere oplossingen worden gevonden. Zo komt men dan tot de z.g. algemene oplossing.

Een dergelijke behandeling vindt men in elk hoofdstuk. Zo iets moet een belangstellende leerling aanspreken.

Na de niet-homogene vergelijkingen volgen nog twee hoofdstukken met generalisaties en uitbreidingen.

Uitgewerkte opgaven wisselen met niet-uitgewerkte, waarbij de oplossingen ter controle gegeven zijn.

Docenten, die een onderwerp zoeken voor een werkweek hebben aan dit boekje een uitstekende leidraad.

Burgers

H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, vol. 1., Oxford University Press 1966, XX+290 p., 63 /—.

Onder de weinig zeggende titel „Sequences” behandelen de schrijvers in vijf hoofdstukken enige der boeiendste onderwerpen uit de additieve getaltheorie.

In 1956 schetste Erdős op een colloquium over getaltheorie in Brussel toepassingen van het volgende idee. Zij Ω de ruimte van alle subrijen van de rij der gehele getallen en E een eigenschap die een rij al of niet kan bezitten. Maak dan van Ω op geschikte wijze een maatruimte met $\mu(\Omega) = 1$ zó, dat de verzameling van alle rijen die de eigenschap E bezitten, een maat 1 heeft. Het bestaan van minstens één rij met eigenschap E is dan aangetoond. Voor het eerst ziet men nu hier deze methode in detail op enkele problemen toegepast. Zeer fraai wordt b.v. het door

¹⁾ Datgene wat men van complexe getallen dient te weten, wordt in een ahangsel besproken.

de auteurs uitgewerkte bewijs van de volgende stelling: De rij van priemgetallen bezit een complementaire rij met een aantalfunctie welke $O((\log n)^2)$ is. Ook het door Erdős en Rényi ingevoerde begrip kwasi-onafhankelijkheid wordt aan een uitvoerig uitgewerkt voorbeeld toegelicht.

Afgezien van een zeer duidelijke inleiding in de waarschijnlijkheidsrekening is dit in grove lijnen de inhoud van het derde hoofdstuk.

Uit de rijke inhoud van de overige hoofdstukken vermelden we o.a. de volgende onderwerpen en resultaten.

Hoofdstuk I. Relaties tussen de Schnirelmannse dichtheid van twee rijen en hun somrij. Idem voor onder- en bovenasymptotische dichtheden. Bases van de rij van natuurlijke getallen, essentiële componenten, theorie van Kneser.

Hoofdstuk II. Zij $F(n)$ het maximale aantal elementen dat men uit de verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$ kan kiezen zó, dat ieder natuurlijk getal op hoogstens één manier als som van twee van deze elementen a_i en a_j met $a_i \leq a_j$, geschreven kan worden. Dan is $F(n) = n^{\frac{1}{2}} + O(n^{\frac{1}{4}})$ (Erdős, Turán, Chowla).

De stelling van Erdős-Fuchs, die op zo'n verrassende wijze het resultaat van Hardy en Landau over de restterm in het cirkelprobleem generaliseert.

Hoofdstuk IV. De zeefmethoden van Brun, A. Selberg, Linnik en Rényi met toepassingen op problemen welke in het vlak liggen van het vermoeden van Goldbach en de kwestie der priemgetaltweelingen.

Hoofdstuk V. Primitieve rijen (dat zijn rijen met de eigenschap dat geen enkel element uit de rij enig ander element uit die rij deelt) en dichtheidskwesties betreffende dergelijke rijen. Verzamelingen van veelvoudigen van elementen uit een gegeven (primitieve) rij.

De schrijvers doen voor het tweede deel reeds allerlei interessante beloften, o.a. een niet gepubliceerd bewijs van Erdős en de tweede auteur voor het bestaan van een essentiële component met een aantalfunctie welke $O(n^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, is, m.b.v. methoden uit de waarschijnlijkheidsrekening en zonder gebruikmaking van diepe resultaten betreffende exponentiële sommen zoals in Linniks bewijs voor het bestaan van een dergelijke component.

De stof wordt door de schrijvers steeds van de grond af opgebouwd zodat men het boek met vrij weinig voorkennis kan lezen. Bovendien staat elk hoofdstuk geheel op zichzelf. Een en ander betekent echter niet dat het gemakkelijke lektuur is. Grote delen van de theorie zijn afkomstig van Erdős en het boek bevat dan ook vele, wat sommigen noemen, typische Erdős-bewijzen. Door informele beschouwingen tussen de bewijzen door weten de schrijvers echter steeds de grote lijn en het onderlinge verband aan te geven en wat het belangrijkste is, de lezer een feeling voor het onderwerp bij te brengen. Er is een uitgebreide literatuurverwijzing. Een ieder met belangstelling voor de getaltheorie zij dit boek zeer warm aanbevelen!

H. Jager

J. M. Kingston, *Mathematics for teachers of the middle grades*, 322 blz., geb. 53/—; John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.

Een goed boek, als men rekening houdt met het relatief lage niveau van wiskundige kennis dat voor de „teachers” voor wie het boek is geschreven, voldoende wordt geacht. Door dat uitgegaan is van eenvoudige verzamelings-theoretische beschouwingen heeft het werk een modern aspect gekregen. En dit algemene uitgangspunt stelt de auteur in staat om bijvoorbeeld het functiebegrip op verantwoorde wijze te introduceren, terwijl simultane ongelijkheidsopgaven zo worden behandeld,

dat ze de basis kunnen vormen voor eenvoudige lineaire programmering. De auteur bewijst, dat de verzameling van de rationale getallen aftelbaar is en dat die van de verzameling van de irrationale getallen (bedoeld is: die van de reële getallen) niet-aftelbaar is. Hij neemt bij de introductie van de irrationale getallen stilzwijgend aan dat aan elk lijnstuk een getal als lengte toekomt (p. 82). Daarbij verklaart hij in dit toch voor leraren bestemde boek: „It is impossible in a presentation such as this to give any logical development of the irrational numbers”.

Hij wijst daarna wel op het feit, dat sneden van Dedekind ons in staat stellen met behulp van rationale getallen irrationale te construeren, maar daar deze term niet toegelicht wordt, blijft de kennis van de lezer op het verbale niveau steken. Dit wordt er niet beter op, als er daarna op wordt gewezen, dat het niet nader gedefinieerde limietbegrip bij de introductie van het irrationale getal nuttig kan zijn. De lezer wordt zodoende gemakkelijk misleid tot de opvatting, dat in het systeem van de rationale getallen de irrationale als limieten van rationale zouden kunnen worden gedefinieerd. Ik geef deze detailkritiek om te laten zien, hoe weinig het wetenschappelijk niveau van de leraar bij deze opvattingen boven dat van zijn leerlingen zal komen uit te steken.

Voor de wijze waarop het werk geschreven is en voor de zorg aan de vraagstukken besteed heb ik overigens alle lof. De uitvoerige toelichting die op vele vraagstukken wordt gegeven, maakt het boek voor zelfstudie uitermate geschikt.

De paragrafen over volledige inductie en die over enige fundamentele begrippen van de meetkunde verdienen waardering; hier staat weer tegenover, dat die over de oppervlakten van rechthoeken en driehoeken uitermate teleurstellen. Eigenlijk wordt de formule voor de oppervlakte van een rechthoek slechts toegelicht voor het geval waarin lengten der zijden hele getallen zijn. Voor deze en andere stellingen uit de meetkunde was de brede opzet van het boek overbodig geweest.

De typografische verzorging van het boek voldoet aan hoge eisen.

Joh. H. Wansink

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris. Johan de Wittlaan 14, Hoogezaand.

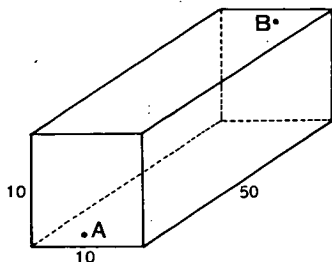
MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*” in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O op woensdag 22 februari 1967: Prof. Dr. I. W. van Spiegel. Onderwerp nader bekend te maken. Aanvang 20.00 uur.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Knepelhoutweg 12, Oosterbeek.

168. Een fabriekshal is 50 m lang, 10 m breed en 10 m hoog. In de voorwand bevindt zich een punt A 1 m boven de grond in het midden. In de achterwand bevindt zich een punt B 1 m onder de zoldering in het midden. Van A naar B moet een draad gelegd worden. De draad, die men tot zijn beschikking heeft, is 56 m lang. Hoe moet deze draad gelegd worden?



169. Een telefooncentrale heeft n abonnees. Op een gegeven moment zijn een aantal paren abonnees met elkaar in gesprek. Dit kan op zeer veel verschillende manieren. Hoe vinden we dit aantal, als we n kennen? Twee manieren zijn verschillend als ten minste één paar abonnees de ene keer wel en de andere keer niet met elkaar in gesprek is. (Uit J. F. Scheid, *Elements of Finite Mathematics*.)

170. Welk is het kleinste getal, dat gelijk is aan 5 (mod 9), aan 10 (mod 19) en aan 12 (mod 23)? Het is verboden onbepaalde vergelijkingen te gebruiken; gevraagd wordt dus een handige oplossing. (B. Kootstra)

Ongezien weet u, als u deze rubriek geregeld leest, dat er 1967 uitkomt. Het is inderdaad de nieuwjaarswens voor onze lezers van de heer Kootstra.

OPLOSSINGEN

166. $2n$ meisjes moeten op $2n - 1$ dagen zo in groepen van 2 gerangschikt worden, dat geen twee meisjes twee keer bij elkaar komen.

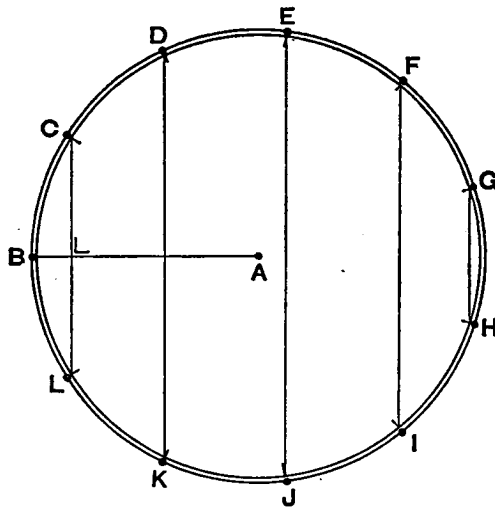
Stel gemakshalve $n = 6$. In onderstaande figuur is de binnenste schijf, waarop de lijnen aangebracht zijn, vast. De buitenste schijf, waarop de namen van 11 van de 12 meisjes staan, is draaibaar. De naam van het 12e meisje staat in het middelpunt. Meisjes, wier naam door een streep verbonden zijn, gaan samen wandelen. De volgende dag draaien we de schijf $\frac{1}{11} \cdot 360^\circ$ en laten weer de meisjes, wier naam door een streep verbonden zijn, met elkaar wandelen, enz.

167. De gevangene moet door één vraag te stellen aan een van twee wachters te weten komen, of de kamer, die hij bewaakt de dochter of de tijger bevat. De ene wachter spreekt altijd de waarheid, de ander liegt altijd; ze kennen elkaars aard niet. Het antwoord mag alleen „ja” of „neen” zijn. Welke vraag stelt hij?

Onderstel, dat hij de vraag stelt aan wachter A. Er zijn nu vier mogelijkheden t.a.v. de waarheidswaarden van de uitspraken:

de door A bewaakte kamer bevat de dochter, (P)

A is de waarheidspreeker. (Q)



Deze vier mogelijkheden zijn:

$P:$	0	0	1	1
$Q:$	0	1	0	1

Hij wil nu een zodanige vraag stellen, dat het antwoord „neen” luidt, als de kamer de dochter niet bevat, en „ja”, als de kamer de dochter wel bevat. Het antwoord luidt dan in de vier gevallen resp.

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad (0 = \text{neen}; 1 = \text{ja}).$$

Omdat in het eerste en derde geval het antwoord door de leugenaar gegeven is, zou het antwoord moeten luiden, als het conform de waarheid gegeven werd:

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

Zijn vraag moet dus zijn:

is de volgende bewering juist:

(je bent de leugenaar en je kamer bevat de tijger) of (je bent de waarheidspreker en je kamer bevat de dochter)?

Conform de waarheid zal het antwoord bevestigend luiden in het eerste geval en in het derde geval en ontkennend in het tweede en derde. En aan deze eis moet de vraag voldoen.

Ad 164. De heer E. C. Buissant des Amorie te Amstelveen schreef van de heer K. Harlaar indertijd gehoord te hebben, dat elk natuurlijk getal door middel van drie cijfers 4 te schrijven is, en wel op de volgende manier:

$$\frac{\sqrt{4}}{\log} \quad \frac{\sqrt{\sqrt{4}}}{\log \sqrt{4}} = 1,$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\log} \quad \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}{\log \sqrt{4}} = 2,$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\log} \quad \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}}{\log \sqrt{4}} = 3, \text{ enz.}$$

INLEIDING IN DE ANALYTISCHE MEETKUNDE EN LINEAIRE ALGEBRA (I)

door Dr. A. van Heemert en Dr. L. R. J. Westermann

Het eerste deel van de Inleiding in de Analytische Meetkunde en Lineaire Algebra behandelt de elementaire analytische meetkunde met behulp van de methoden der vectorrekening. Bovendien wordt er in dit deel een voorlopige aanschouwelijke inleiding in de lineaire algebra gegeven.

Het leerboek is bestemd voor studenten in de wiskunde en natuurkunde, voor studerenden voor de akte m.o.-A wiskunde en voor wiskundeleraren.

Inhoud: translaties, plaatsvectoren en parametervoorstellingen - meetkundige interpretatie van lineaire vergelijkingen, afstanden, oppervlakten en inhouden - cirkel en bol - afbeeldingen - meetkundige plaatsen

ingenaaid f 18.75, gebonden f 20.75

P. Noordhoff nv

a brilliant account

THE ATOMIC NUCLEUS

by M. Korsunsky

a brilliant and eminently readable account of the development of modern knowledge of atomic nucleus.

contents: radioactivity - the nuclear model of the atom - the mass of atomic nuclei - the disintegration of atomic nuclei - the discovery of positron - the artificial transformation of atomic nuclei - artificial radioactivity - mesons - the neutrino - the structure of atomic nuclei and the forces acting between nuclear particles - nuclear fission - nuclear chain reactions - the peaceful use of atomic energy - thermonuclear reactions

een hoogleraar schreef ons: „een ieder die in deze moderne ontwikkeling geïnteresseerd is behoort dit boek te hebben. Het is gemakkelijk leesbaar en toch niet oppervlakkig.”

gebonden f 36.—

P. Noordhoff nv

(ook via de boekhandel)

Wiskunde-uitgaven voor het vmo

ALGEBRA VOOR HET VHMO door C. J. Alders

deel 1 - 56/60e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.75 / deel 2 - 51/55e druk - ing. f 2.90;
geb. f 3.75 / deel 2B - ing. f 3.50; geb. f 4.75 / deel 3 - 24/26e druk - ing. f 2.70; geb.
f 3.60 / antwoorden 1 - f 1.— / 2 - f 0.90 / 3 - f 0.90

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / antwoorden gratis

GONIOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

26/30e druk - ing. f 2.60; geb. f 3.50 / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

24/26e druk - ing. f 3.25; geb. f 4.50

PLANIMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

31/35e druk - ing. f 3.75; geb. f 4.65

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

29e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.40

ALGEBRA VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

3e druk - ing. f 4.50 / antwoorden f 1.—

MEETKUNDE VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

deel 1 - 2e druk - ing. f 3.90 / deel 2 - ing. f 4.50

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR HET VHMO door Dr. H. Streefkerk

deel 1 - 5e druk - ing. f 3.25 / deel 2 - 5e druk - ing. f 3.90

deel 3 - 4e druk - ing. f 3.90

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET VHMO

door J. C. Kok

2e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.— / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door A. A. Lucieer

13e druk - ing. f 5.—; geb. f 5.75 / antwoorden f 1.00

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Dr. D. J. E. Schrek - m.m.v. H. Pleysier

4e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.25 / antwoorden f 1.00

P. Noordhoff nv

postbus 39 / Groningen