

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

II — 1 OKTOBER 1966

INHOUD

Dr. P. G. J. Vredenduin: De bewijskracht van de diagrammen van Venn en de implicatie	33
Naschrift op Verscheidenheden LXII	41
In memoriam Dirk Jan van Rooy	42
C. W. Dornseiffen: De stelling van Whittaker voor een keplerse beweging	43
Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften	48
Drs. L. van den Brom: Graad en/of radiaal?	53
Boekbespreking	56
Korrel	61
Recreatie	62
Kalender	63
Liwenagel	64
Wimecos	64

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127, voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516, secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Dr. J. KOKSMA, Haren;	P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

DE BEWIJSKRACHT VAN DE DIAGRAMMEN VAN VENN EN DE IMPLICATIE

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

I

De diagrammen van Venn zijn een uitstekend hulpmiddel om redeneringen in de theorie van de verzamelingen aanschouwelijk te verduidelijken. Daartoe geeft men situaties als $V \subseteq W$, $V = W$, $V \cap W = \emptyset$ (V en W zijn disjunct) vaak weer door diagrammen, zoals getekend zijn in resp. fig. 1, fig. 2 en fig. 3.

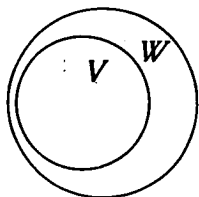


fig. 1 $V \subseteq W$

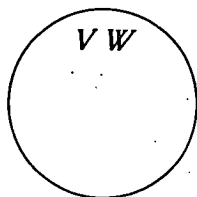


fig. 2 $V = W$

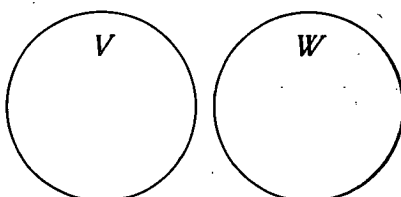


fig. 3 $V \cap W = \emptyset$

Ook gebruikt men de diagrammen om te bewijzen, dat de operaties tussen verzamelingen bepaalde eigenschappen hebben, b.v. om de juistheid van een eigenschap als

$$V \cap (W \cup U) = (V \cap W) \cup (V \cap U)$$

aan te tonen. Maar nu ontstaat een moeilijkheid. Men hoort namelijk vaak het bezwaar, dat de „cirkels” allerlei verschillende standen t.o.v. elkaar kunnen hebben en voor al deze gevallen het bewijs dus afzonderlijk geleverd moet worden. Hetgeen praktisch niet door te voeren is.

De oorzaak van de moeilijkheid ligt in een verkeerd gebruik van de venn-diagrammen. De figuren 1—3 mogen het voordeel hebben erg suggestief te zijn, voor theoretische doeleinden zijn ze slecht bruikbaar. Men kan beter ervan uitgaan, dat er slechts één venn-diagram is, dat op twee verzamelingen V en W betrekking heeft, nl. het diagram uit fig. 4.

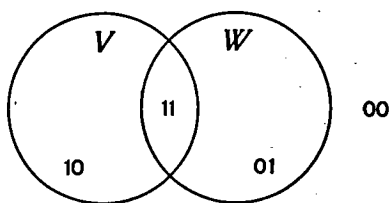
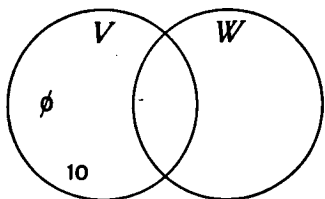
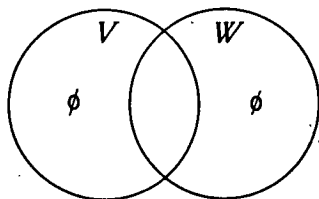
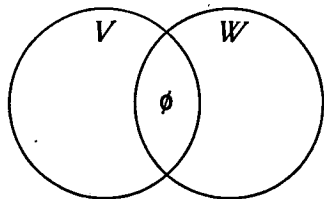


fig. 4

In het diagram wordt het platte vlak in vier delen verdeeld. Een element x , waarvoor geldt

$x \in V$, $x \in W$ wordt voorgesteld door een punt in deel 11,
 $x \in V$, $x \notin W$ wordt voorgesteld door een punt in deel 10,
 $x \notin V$, $x \in W$ wordt voorgesteld door een punt in deel 01,
 $x \notin V$, $x \notin W$ wordt voorgesteld door een punt in deel 00..

Nu kunnen er zich t.a.v. V en W bijzonderheden voordoen. Het diagram verandert daardoor niet. Wel kunnen we de bijzonderheden in het diagram aantekenen. Zo kan zich voordoen de bijzonderheid: $V \subseteq W$. Dit wil zeggen, dat het deel 10 (wel in V en niet in W) leeg is. We geven dit in het diagram aan door in het deel 10 het symbool $\emptyset$ te schrijven. Dit is gebeurd in fig. 5. Analoog zijn de bijzondere gevallen $V = W$ en $V \cap W = \emptyset$ weergegeven in resp. fig. 6 en fig. 7.

fig. 5 $V \subseteq W$ fig. 6 $V = W$ fig. 7 $V \cap W = \emptyset$

Waarschuwing. Als er in een van de delen niet het symbool $\emptyset$ staat, wil dit niet zeggen, dat dit deel niet leeg is. Het wil alleen zeggen, dat omtrent dit deel niets vastgesteld is. Het deel kan dus leeg zijn en het kan ook niet leeg zijn.

Men zou nog kunnen afspreken, hoe we in het diagram aangeven, dat een bepaald deel beslist niet leeg is. Omdat we in dit artikel deze afspraak niet nodig hebben, zien we hiervan af.

We gaan nu over tot het bewijs van de distributieve wet:

$$V \cap (W \cup U) = (V \cap W) \cup (V \cap U).$$

Eerst geven we het bewijs zonder gebruik te maken van venn-diagrammen. We maken de volgende tabellen. Toelichting volgt.

V	W	U	$W \cup U$	$V \cap (W \cup U)$	$V \cap W$	$V \cap U$	$(V \cap W) \cup (V \cap U)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Toelichting. De tweede regel van deze tabel betekent: als $x \in V$ en $x \in W$ en $x \notin U$, dan geldt

$$1^\circ. x \in W \cup U \text{ en } x \in V \cap (W \cup U),$$

$$2^\circ. x \in V \cap W, x \notin V \cap U \text{ en } x \in (V \cap W) \cup (V \cap U).$$

De vijfde kolom blijkt gelijklopend te zijn met de achtste. Hieruit volgt, dat inderdaad

$$V \cap (W \cup U) = (V \cap W) \cup (V \cap U).$$

We gaan nu dit bewijs reproduceren met behulp van venn-diagrammen. We representeren V , W en U door drie „cirkels”. Deze verdelen het vlak in acht delen, die we op dezelfde manier als bij twee verzamelingen merken 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000.

In fig. 8 zijn horizontaal gearceerd V en verticaal $W \cup U$. Het dubbel gearceerde deel representeert dan $V \cap (W \cup U)$.

In fig. 9 zijn horizontaal gearceerd $V \cap W$ en verticaal $V \cap U$. Het horizontaal en het verticaal gearceerde deel samen representeren dan $(V \cap W) \cup (V \cap U)$.

Omdat we in deze figuren dezelfde representatie vinden voor $V \cap (W \cup U)$ en voor $(V \cap W) \cup (V \cap U)$, zijn deze twee verzamelingen aan elkaar gelijk.

Als men het bewijs in tabelvorm vergelijkt met het bewijs in diagramvorm, zal men zien, dat de bewijzen gelijklopend zijn. Het eerste bewijs is zonder twijfel correct. En dus is het tweede het ook.

De lege verzameling. Een grote didactische moeilijkheid levert de lege verzameling. In het bijzonder is het niet eenvoudig de leerlingen duidelijk te maken, dat de lege verzameling deel van elke

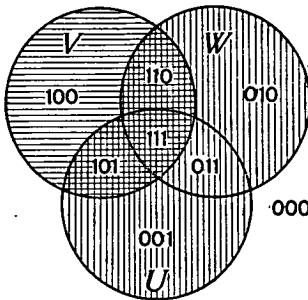


fig. 8

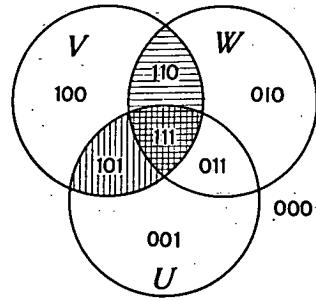
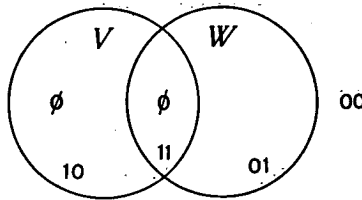


fig. 9

verzameling is. Met behulp van de venn-diagrammen gaat dit echter zeer gemakkelijk. In fig. 5 hebben we gezien onder welke voorwaarde $V \subseteq W$ het geval is. Daarvoor is vereist, dat het deel 10 (binnen V en buiten W) leeg is. Onderstel nu, dat $V = \emptyset$. Dan krijgen we het diagram uit fig. 10. Hierin is het deel 10 leeg (en het deel 11 ook, maar dat doet niets, ter zake). En dus is nu $V \subseteq W$.

fig. 10 $\emptyset \subseteq W$

Conclusie. Voor theoretische doeleinden moet men de venn-diagrammen altijd op dezelfde manier tekenen. Zijn er twee verzamelingen, dan is essentieel dat het vlak in vier delen verdeeld wordt, en zijn er drie, dan in acht delen. Houdt men zich aan deze regel, dan is de bewijskracht van een redenering, waarin van de venn-diagrammen gebruik gemaakt wordt, verzekerd.

II

Zoals bekend is de tabel van de waarheidswaarden van de implicatie:

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Het paradoxale in deze tabel is, dat een onjuiste uitspraak elke uitspraak impliceert, ongeacht of deze juist of onjuist is. Zo komt men tot de juistheid van uitspraken als: als de maan van groene kaas is, dan is de duivel president van de Verenigde Staten.

Men kan laten zien, dat het op grond van gangbare conclusieregels noodzakelijk is deze tabel te accepteren. Zo is het gebruik de volgende conclusieregels te aanvaarden:

$$\frac{\forall x R(x)}{R(c)}, \quad \frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}.$$

Boven de streep staan de premissen en eronder de conclusie. Het eerste schema houdt in dat uit de juistheid voor elke x van de uitspraak $R(x)$ kan worden afgeleid de juistheid van de uitspraak, die men uit $R(x)$ verkrijgt door x te vervangen door een willekeurige constante c .

Voorbeeld. In dit voorbeeld stelt x een natuurlijk getal voor. We weten, dat geldt:

$\forall x \cdot x$ is deelbaar door 4 $\rightarrow x$ is deelbaar door 2.

Volgens het eerste schema zijn dan ook juist de uitspraken:

8 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 8 is deelbaar door 2,

6 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 6 is deelbaar door 2,

7 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 7 is deelbaar door 2.

Deze drie uitspraken corresponderen met de eerste, derde resp. vierde regel van de tabel waarheidswaarden van $P \rightarrow Q$. In deze regels moet daarom aan $P \rightarrow Q$ de waarde 1 toegekend worden.

We kunnen verder concluderen:

$$\frac{8 \text{ is deelbaar door } 4 \quad 8 \text{ is deelbaar door } 4 \rightarrow 8 \text{ is deelbaar door } 2}{8 \text{ is deelbaar door } 2},$$

waarbij we het tweede schema gebruikt hebben.

Dit is alles stellig correct. We moeten er echter wel aan denken, dat de correctheid in de grond van de zaak een gevolg is van de manier, waarop de formele logica opgebouwd is. En deze opbouw is zo gekozen, dat een sluitend geheel ontstaat, dat uitermate geschikt is om de weergave van het denkproces in taal te mechaniseren. Deze mechanisering heeft allerlei voordelen en maakt onder meer het grondslagenonderzoek in de wiskunde eerst goed mogelijk.

Hoewel de geschetste resultaten niet in strijd zijn met de natuurlijke gang van het denkproces, doen ze gekunsteld aan, als men zich niet met de moderne formele logica min of meer vertrouwd gemaakt heeft. Het is nu de vraag of we de leerlingen van het v.w.o. deze

logische finesses moeten voorzetten. Als het mogelijk is hun zuiver denken te leren zonder daarbij de grenzen van het volgens hen natuurlijke te overschrijden, zou ik daar de voorkeur aan geven boven het gebruik van een tabel van waarheidswaarden voor de implicatie, die door hen met moeite begrepen wordt. De implicatie is in ons wiskundig denken zo fundamenteel, dat het niet aan te raden is een voor leerlingen onnatuurlijke definitie ervan te geven.

Nu is de voorgaande afleiding van „8 is deelbaar door 2” formeel geheel juist. Maar de beide conclusieregels zijn van andere aard dan normaal gebruikt worden. Om te beginnen komen uitspraken van de vorm $P \rightarrow Q$ in de schoolwiskunde niet voor. Natuurlijk hebben veel uitspraken de vorm „als ... dan ...”. B.v.:

als driehoek ABC rechthoekig in C is, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$. Maar bij nauwkeurig toezien heeft deze uitspraak niet de vorm $P \rightarrow Q$. Want het is een *algemene* uitspraak, waarin gezegd wordt, dat voor *alle* driehoeken geldt: als $\angle C = 90^\circ$, dan is $a^2 + b^2 = c^2$. Het is dus een uitspraak van de vorm

$$\forall x \cdot P(x) \rightarrow Q(x).$$

Als uitspraken van de vorm $P \rightarrow Q$ niet in de schoolwiskunde voorkomen, zal ook de regel

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$$

niet gebruikt worden. Welke regel komt hier dan voor in de plaats?

Om dit in te zien keren we naar ons voorbeeld terug en gaan we opnieuw de redenering analyseren, die eindigde met „8 is deelbaar door 2”. We gingen daarbij uit van de uitspraak:

voor elk natuurlijk getal x geldt: als x deelbaar is door 4, dan is x deelbaar door 2.

Dit is weer een algemene uitspraak van de vorm $\forall x \cdot P(x) \rightarrow Q(x)$.

Verder was bekend:

8 is deelbaar door 4.

Uit deze twee uitspraken concludeert het natuurlijke denken nu onmiddellijk:

8 is deelbaar door 2.

Het verschil tussen het natuurlijke denken en de vroeger doorgevoerde analyse is dus, dat de tussenfase:

8 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 8 is deelbaar door 2
ontbreekt.

De formele regels, die ons tot de tabel voor de implicatie brachten, waren:

$$\frac{\forall x \cdot R(x)}{R(c)}, \quad \frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}.$$

De regel, die door het natuurlijke denken gebruikt wordt, is

$$\frac{\forall x \cdot P(x) \rightarrow Q(x) \quad P(c)}{Q(c)}.$$

Deze regel laat zich door middel van een venn-diagram gemakkelijk veraanschouwelijken. Stel

$$V = \{x|P(x)\} \quad \text{en} \quad W = \{x|Q(x)\}.$$

Dan blijkt de inhoud van onze conclusieregel te zijn:

$$\frac{V \subseteq W \quad c \in V}{c \in W}.$$

In fig. 11 is het bijbehorend diagram getekend.

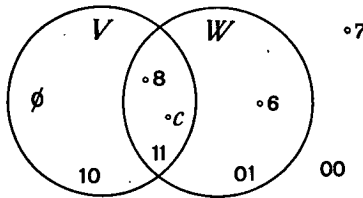


fig. 11

Omdat $V \subseteq W$, is het deel 10 leeg. Een element c van V moet zich dan bevinden in het deel 11. En is dus ook element van W .

We keren nu nog eens terug naar de vroeger geformuleerde uitspraken:

8 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 8 is deelbaar door 2,

6 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 6 is deelbaar door 2,

7 is deelbaar door 4 $\rightarrow$ 7 is deelbaar door 2.

Inderdaad zijn dit taalkundige misbaksels. Niemand zegt dit. Ze ontstaan door het logische denken eerst in een bepaald formeel kleed te hullen en daarna de resultaten van deze vermomming terug te vertalen in natuurlijke taal. We worden nu nieuwsgierig, wat er van deze uitspraken overblijft, als we de vermomming

achterwege laten. Wel, in de eerste uitspraak ligt 8 in het deel 11. In natuurlijke taal zegt men dan:

8 is deelbaar door 4; en dus is 8 deelbaar door 2.

In de tweede uitspraak ligt 6 in deel 01. De gebruiker van natuurlijke taal, drukt zich in dit geval als volgt uit:

hoewel 6 niet deelbaar door 4 is, is 6 toch deelbaar door 2.

En ten slotte de derde uitspraak. Hier ligt het getal 7 in 00. In gewone taal geformuleerd zeggen we dan:

als 7 deelbaar door 4 zou zijn, was 7 ook deelbaar door 2.

Conclusie. Het is overbodig de tabel voor de implicatie te gebruiken. Bij het v.w.o. kunnen we volstaan met het natuurlijke denken te volgen. Dit berust in de hier besproken voorbeelden op de regel:

alle V zijn W en c is een V , dus c is een W .

Dit is het aloude syllogisme barbara.

De veraanschouwelijking van deze denkwijze door een venn-diagram heeft nog een plezierig voordeel. Leerlingen hebben vaak de grootste moeite de negatie van een (algemene) implicatie te bewijzen. Een beroep op de tabel van waarheidswaarden kan hier de weg wijzen: $P \rightarrow Q$ geldt algemeen, wordt weerlegd door een voorbeeld te geven, waarin P waar en Q niet waar is. Voor een „normaal” denkend mens is dit weinig overtuigend. Teken nu weer het venn-diagram (fig. 12).

$\forall x \cdot P(x) \rightarrow Q(x)$ houdt in, dat het deel 10 leeg is. De ontkenning houdt dus in, dat het deel 10 niet leeg is. We moeten dus aantonen, dat er een element c bestaat, dat in 10 ligt, d.w.z. waarvoor wel $P(c)$, maar niet $Q(c)$ geldt. Hiermee is de moeilijkheid voor de leerling verdwenen.

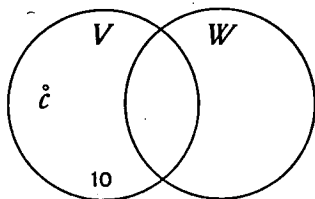


fig. 12

Ik hoop, dat men de strekking van het voorgaande niet wil misverstaan. Ik bedoel stellig niet iets kwaads te zeggen van de moderne formele logica. Ik heb alleen willen verdedigen, dat we voor gebruik op school ons kunnen beperken tot het toepassen van die delen van de logica, die de gang van het natuurlijke denken direct weergeven.

NASCHRIFT OP VERSCEIDENHEDEN LXII.

Naar aanleiding van LXII, *Kaarten leggen*, geschreven als aanvulling op een artikel in *Pythagoras* ontving ik een schrijven van Dr. H. G. Steiner van het Seminarium voor mathematische didactiek van de Universiteit te Münster. Deze maakt mij opmerkzaam op enige literatuur over het onderwerp. Het probleem wordt behandeld bij H. Dörrie, *Mathematische Miniaturen*, Breslau, 1943, 279—282 en bij H. G. Steiner, *Das „Turmproblem“ als Veranschaulichung der Divergenz der harmonischen Reihe*, MNU, 12, 5, 224 e.v. In een nader artikel *Eine statische Deutung gewisser unendlicher Reihen* (Mathem. Physikalische Semesterberichte, VII, 1960, 101—107) heeft de laatstgenoemde auteur het probleem gegeneraliseerd door de vraag te beantwoorden hoe men in het algemeen congruente doosjes of kaarten moet stapelen zodat ten eerste het bouwwerk standhoudt en ten tweede de horizontale afstand van de onderste en de bovenste bouwsteen alle grenzen te boven gaat. De vraag hangt nauw samen met die naar rijen met algemene term a_n , waarvoor $|\sum_1^n na_n| \leq n$ voor elke waarde van n terwijl $\sum_1^\infty a_n$ divergeert. In het fraaie opstel wordt ook (p. 106, noot 5) verband gelegd met de grafiek van de logaritmische functie.

O. Bottema

IN MEMORIAM DIRK JAN VAN ROOY

door Dr. H. Turkstra, Hilversum *

Dirk Jan van Rooy, geboren 18 september 1896 in Griekwastad (Kaapprovincie), overleden 20 november 1964 te Potchefstroom (Transvaal), behoorde vele jaren lang tot de vaste medewerkers van Euclides. Zijn wiskundige opleiding genoot hij aan het Grey-Universiteitskollege te Bloemfontein (1914 B.A. graad) en aan de Universiteit van Pretoria (M.A. graad), terwijl hij ook enige tijd studeerde aan de Stedelijke Universiteit van Amsterdam, onder leiding van Prof. Dr. L. E. J. Brouwer en het doctoraal examen aldaar aflegde in 1935. Hij was achtereenvolgens als wiskunde-onderwijzer verbonden aan het Potchefstroomse Hoër Gymnasium, werd in 1923 Senior Lektor in Wiskunde aan „die Potchefstroomse Universiteits Kollege vir Christelik Hoër Onderwijs” en in 1927 hoogleraar aan diezelfde Universiteit. Prof. van Rooy heeft baanbrekend werk verricht met het schrijven van schoolleerboeken wiskunde voor de Hoëre Scholen en van handboeken analytische meetkunde voor studenten aan de Universiteit. Hij hield vele lezingen voor vakonderwijzers, schreef artikelen, een enkele maal ook in Euclides. Voorts was hij voorzitter van „die Wiskundeleergangkomitee van die Gemeenskaplike Matrikulasieraad”, die zich bezig hield met het opstellen van wiskundeprogramma’s voor hoëre scholen en eindexamenprogramma’s wiskunde. Juist op 20 november 1964, toen hij op het punt stond te vertrekken om de vergadering van dit Komitee te presideren, overleed hij plotseling. Diep onder de indruk van het bericht van dit overlijden nam het Komitee op deze vergadering het besluit om over te gaan tot daadwerkelijke vernieuwing van het wiskunde-onderwijs, waar Prof. van Rooy bij zijn leven steeds voor had geijverd. De Raad van de Universiteit van Pretoria nam op de avond van 19 november 1964 het besluit om Prof. van Rooy de eregraad van D.SC toe te kennen, welk verheugend bericht hem helaas niet meer heeft mogen bereiken. Tenslotte zij nog meegedeeld, dat de Z.A. „Akademie vir Wetenskap en Kuns” besloot om vanaf 1966 een jaarlijkse prijs in de Wiskunde Olympiade in te stellen, die bekend zal staan als „de Dirk van Rooy prijs”.

En zo zagen we dat met het overlijden van Professor van Rooy een der pioniers voor de verbetering en verdere ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in Zuid-Afrika is heengegaan. Maar zijn werk wordt voortgezet in de geest, zoals hij dat voor de toekomst zag.

* De opname van dit bericht is vertraagd, doordat de er voor benodigde gegevens mij eerst enkele maanden geleden bereikten.

H.T.

DE STELLING VAN WHITTAKER VOOR EEN KEPLERSE BEWEGING

door

C. W. DORNSEIFFEN

Heemstede

Door de Amerikaan E. T. Whittaker is omstreeks 1940 een nieuwe stelling omtrent de keplerse beweging geformuleerd, die deze beweging op andere dan tot dusver gebruikelijke manier analyseert.

In het volgende bepalen we ons tot het geval van twee lichamen, waarbij de massa van één van de lichamen (het „kleinste”) te verwaarlozen is t.a.v. de massa (M) van het andere lichaam, dat in rust blijft in een brandpunt van de kegelsnede die het kleinste lichaam beschrijft; hun afstand (de „voerstraal”) noemen we r . Volgens Newton ondervindt dan het kleinste lichaam een versnelling in de richting van het grootste met scalaire waarde van $\frac{fM}{r^2}$. Hiervoor schrijven we verder $\frac{\mu}{r^2}$.

De stelling van Whittaker behelst het volgende:

„De snelheid van het kleinste lichaam kan in ieder punt van de baan ontbonden worden in twee componenten, die beide een constante scalaire waarde hebben; één van de componenten ($\vec{n}$) staat steeds loodrecht op de voerstraal, terwijl de andere component ($\vec{m}$) niet van richting verandert”.

$\vec{m}$ blijkt loodrecht op de grote as van de kegelsnede te staan; de verhouding van $\vec{m}$ en $\vec{n}$ is gelijk aan ε , de numerieke excentriciteit van de kegelsnede.

De hoek van de grote as met de voerstraal noemen we φ . Volgens de tweede wet van Kepler doorloopt de voerstraal in gelijke tijden gelijke perken. Dan is de oppervlakte van het perk P , dat per tijdseenheid wordt doorlopen

$$P = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{constant.} \quad (1)$$

Dat de stelling van Whittaker opgaat voor een keplerse be-

weging kan als volgt worden ingezien:

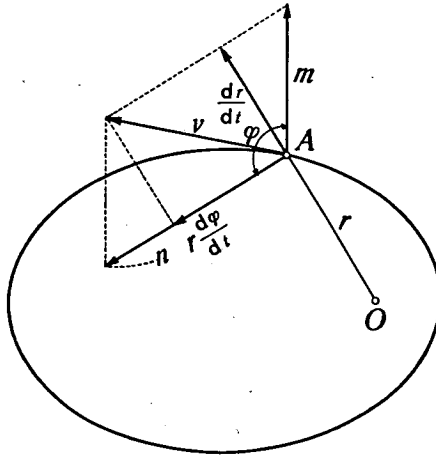


fig. 1

Laat (fig. 1) in punt A de snelheid $\vec{v}$ zijn, dan is v te ontbinden in een radiële snelheid $\frac{dr}{dt}$ en een tangentiële snelheid $r \frac{d\varphi}{dt}$, die in het algemeen beide, tengevolge van de versnelling, veranderen naarmate het lichaam zijn baan doorloopt. Maar ook kan $\vec{v}$ anders ontbonden worden: we geven de tangentiële component een andere waarde, en wel zo dat

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{r^2}. \quad (2)$$

Doordat $\vec{n}$ loodrecht op de versnelling staat in A, kan op dat tijdstip de scalaire waarde van $\vec{n}$ niet veranderen: $\vec{n}$ verandert alleen in richting, en deze verandering is

$$n \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu}{r^2}. \quad (3)$$

In deze gelijkheid is nu μ constant, en eveneens (zie 1) is $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2P$ constant, dus n is constant.

Voor de verschilvektor $\vec{m} = \vec{v} - \vec{n}$ geldt dan (zie 2) $\frac{dm}{dt} = 0$, waaruit volgt dat $\vec{m}$ constant in grootte en richting is.

In het pericentrum is de baansnelheid het grootst; dan moeten $\vec{m}$ en $\vec{n}$ dus dezelfde richting hebben. $\vec{m}$ staat dus loodrecht op de

grote as, en de hoek φ tussen deze as en de voerstraal is dus eveneens de hoek tussen $\vec{m}$ en $\vec{n}$.

De stelling is in verschillende opzichten een aanwinst. In de eerste plaats kan men in ieder punt van de baan, zodra m en n bekend zijn, de grootte van de snelheid bepalen, zowel grafisch als door berekening, waarbij als enige veranderlijke grootte de φ optreedt.

In de tweede plaats kunnen berekeningen en afleidingen verkort worden, doordat de uitdrukkingen voor m en n constant zijn. Zo kan b.v. de eerste wet van Kepler (dat de baan een kegelsnede is) uit de wet van Newton sneller worden bewezen via de stelling van Whittaker.

Verder *karacteriseert* de stelling van Whittaker ook de keplerse beweging: Uitgaande van deze stelling kunnen de beide eerste wetten van Kepler bewezen worden, alsmede het feit, dat de versnelling steeds naar het brandpunt is gericht en omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de voerstraal.

Daartoe drukken we eerst m en n uit in de grootheden r , φ en t . Uit fig. 1 is direct te zien dat

$$m = \frac{dr}{dt} : \sin \varphi \quad (4)$$

n bestaat in de figuur uit twee delen; het éne deel is $r \frac{d\varphi}{dt}$, en het andere $-\frac{dr}{dt} \cotg \varphi$. Derhalve is

$$n = r \frac{d\varphi}{dt} - \frac{dr}{dt} \cotg \varphi \quad (5)$$

Uit (4) volgt

$$\frac{dr}{dt} = m \sin \varphi \quad (6)$$

en uit (4) en (5)

$$r \frac{d\varphi}{dt} = n + m \cos \varphi \quad (7)$$

Deel nu (6) door (7), dan komt er $\frac{dr}{rd\varphi} = \frac{m \sin \varphi}{n + m \cos \varphi}$; deze betrekking schrijven we $\frac{dr}{r} + \frac{-m \sin \varphi d\varphi}{n + m \cos \varphi} = 0$.

Integratie geeft: $\int \frac{dr}{r} + \int \frac{-m \sin \varphi d\varphi}{n + m \cos \varphi} = C$; in beide breuken

staat in de teller de afgeleide van de noemer. Derhalve:

$$\ln r + \ln(n + m \cos \varphi) = C \rightarrow r(n + m \cos \varphi) = e^C \quad (8)$$

Volgens (7) en (8) is $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r(n + m \cos \varphi)$ constant, dus volgens (1) is de tweede wet bewezen. Stel nu $m = \varepsilon n$, dan is ε een constant getal. Dan wordt (8) $m(1 + \varepsilon \cos \varphi) = e^C$ of $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \frac{1}{n} e^C$. Stel nu het rechterlid van de laatste vergelijking gelijk aan p , dan is

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (10)$$

de vergelijking van een kegelsnede in poolcoördinaten, waarbij p de lengte is van de voerstraal die loodrecht op de grote as staat, en ε gelijk is aan de numerieke excentriciteit.

Aangezien e^C gelijk is aan $2P$, en tevens gelijk aan pn , kan n uitgedrukt worden in andere constante grootheden van de betreffende beweging. Uit (3) volgt $n \cdot 2P = \mu$; eliminatie van $2P$ uit deze beide betrekkingen geeft:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \quad (11)$$

en hieruit

$$m = \varepsilon \sqrt{\frac{\mu}{p}} \quad (12)$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{dt} = n \frac{d\varphi}{dt}$; deze versnelling staat loodrecht op $\vec{n}$, omdat n constant is. $n \cdot r^2 \frac{d\varphi}{dt} = n \cdot P = \mu$, dus

$$n \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu}{r^2} \quad (13)$$

De derde wet van Kepler kan dan worden afgeleid uit

$$\text{Perk} \times \text{omlooptijd} = \text{oppervlakte ellips},$$

op de traditionele manier.

Beschouwen we het ogenblik, dat de voerstraal loodrecht op de grote as staat (fig. 2), dan valt $\vec{m}$ samen met de radiële komponent van de snelheid, en $\vec{n}$ met de tangentiële komponent. Aangezien

daar $r = p$, en $n = r \frac{d\varphi}{dt}$, is n juist groot genoeg om, als $m = 0$, een cirkelbeweging te bewerkstelligen met p als straal. Tevens kan uit de figuur direct afgelezen worden, dat $2P = n \cdot p$.

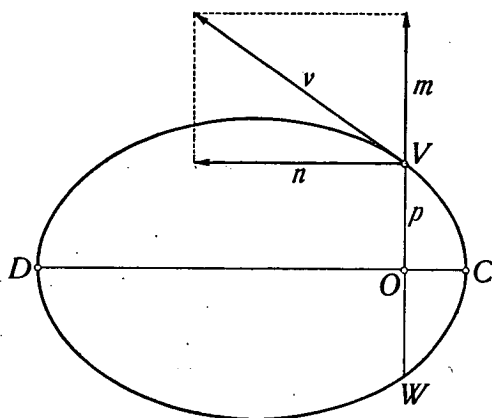


fig. 2

Op het eerste gezicht lijkt het misschien verwonderlijk, dat bij samenstelling van de snelheid uit een onveranderlijke vektor en een ronddraaiende vektor van constante waarde een gesloten kromme beschreven wordt.

Maar men bedenke, dat alleen over de tijd, dat de weg WCV wordt afgelegd, een component van $\vec{n}$ in dezelfde richting als $\vec{m}$ werkt, terwijl over de langduriger weg VDW een component van $\vec{n}$ tegengesteld is aan $\vec{m}$. Verder is bij een ellips $m < n$; gedurende het grootste deel van de omlooptijd is de aan $\vec{m}$ tegengestelde component van $\vec{n}$ groter dan m .

Bij een parabolische of hyperbolische baan geldt de stelling uiteraard ook. Bij de parabolische baan is $m = n$; dan nadert $\vec{n}$ tot de limietstand, dat hij tegengesteld aan $\vec{m}$ is. Dan nadert ook de snelheid tot 0. Bij de hyperbolische baan is $n < m$; $\vec{n}$ nadert tot een limietstand voordat hij tegengesteld aan $\vec{m}$ is, en (dus) nadert de snelheid niet tot 0.

Het belang van de stelling van Whittaker is dus vooral hierin gelegen, dat twee nieuwe constante grootheden bij de keplerse beweging gevonden zijn, die een eenvoudige meetkundige betekenis hebben, en dat vanuit deze stelling de verschillende bijzonderheden van de keplerse beweging kunnen worden afgeleid.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLIV, 250 en XLV, 251-252; décembre 1965 – avril 1966).

A. Adler, Etude élémentaire des géométries de Minkowski et Hilbert;
J. Chastenot, Matériaux pour un dictionnaire;
M. R. Heller e.a., Sur les projets de programmes de l'A.P.M.

M. Legay, Les différents niveaux d'intervention des mathématiques en biologie;
P. Rosenstiehl et A. Warusfel, Algèbre de Boole et publicité;
Z. Krygowska, Eléments de logique dans l'enseignement secondaire des mathématiques;

N. Picard, A propos du programme de mathématique au cycle primaire;
M. A. Touyarot, Fractions et irrationnels;
R. Estève, Sur les hexagones de Pascal;
A. Chauvin, L'intervalle ouvert;
H. Wilmotte, Une réalisation pédagogique du groupe de Klein;
P. Gagnaire, Et, +;
G. Walusinski, Les journaux et les mathématiques „modernes”;
Ch. Roumieu, Les études de troisième cycle dans les facultés des sciences.

Ph. Picard, Sociologie et probabilité;
G. Papy, La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique;
M.-A. Touyarot, Renouveau au cours préparatoire;
F. Vivien, Sur une notation relative aux nombres complexes en „mathélem”;
J.-P. Turner, Sur les inconvénients de la méthode axiomatique dans l'enseignement;
E. Duponski, Strasbourg, 17, 18, 19 février 1966.

2. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVIII, 9-12; XIX, 1-2; december 1965 – mei 1966).

K. Sielaff, Elementare Klassifizierung von linearen, quadratischen und kubischen Funktionen;

W. Ness, Eine Variante zum Prinzip der vollständigen Induktion.

A. Schilla, Vom Sinn der Mathematik und der Naturwissenschaften;
H. Dünzer, Klassische Lasermodelle;
H. Reichardt, Die Grundlagen des Kimball-Modelles;
H. Heyer, Lineare Algebra und ihre Anwendung auf die Analytische Geometrie;
Th. Lambacher, Ergänzungen zu der Kegelschnitt-Konstruktion von Fladt und Schwarze.

H. Freund, Einführung der ganzen Zahlen und der Brüche im Sinne der modernen Algebra;

W. Pelkmann, Die Raketenformel.

K. Wigand, H. Athen u.a.; Nürnberger Lehrpläne; Kritiken und Erwiderungen;
H. Heyer, Lineare Algebra und ihre Anwendung auf die Analytische Geometrie.

K. Steinmeier, Potenzsummenformeln;
J. Kühl, Über die Verwendung von Diagrammen im Unterricht;
M. Czerny, „Herrscht strenge Schwerelosigkeit in einem Satelliten?“
W. L. Fisher und O. Haupt, Die Fortbildung des Mathematiklehrers in der
Bundesrepublik Deutschland;
K. Wigand, Georg Wolff 80 Jahr.

3. *Praxis der Mathematik* (VII, 12; VIII, 1–4; december 1965 – april 1966).

K. R. Biermann, Dirichlet über Weierstrasz;
J. Kofler, Abschätzung von Summen durch Integrale;
H. Rössler, Zur leeren Menge;
H. Spiess, Einführung der Brüche mit Gleichungen und Diagrammen;
H. Schwartze, Veranschaulichung des kgV.

H. Töpfer, Der Beweis des Satzes von Bernstein im Unterricht;
K. Kursawe, Äquivalenz von Punktmengen verschiedener Dimension;
I. Paasche, Matrixpotenz und Fibonacci-Zahlen;
R. Brinker, Relationen programmiert.

H. Dücker, Zur Vorbereitung des Isomorphiebegriffes;
G. Schostack, Das Um-Inkreisviereck;
W. Böhme, Wahrscheinlichkeitsrechnung und „Korrekturproblem“;
I. Winogradow, Vom Bildungsweg der Mathematiker in der UdSSR.

K. A. Deubner, Dr. Georg Wolff zum 80. Geburtstag;
J. Wlodarski, Ausflussaufgaben mit experimenteller Nachprüfung;
J. E. Hofmann, Komplexe Streckenrechnung in der Dreiecksgeometrie;
H. Zeitler, Differenzengleichungen bei Parkettierungen;
H. Vennekohl, Kegelschnitte als projective Abbildung des Kreises;
G. Lessner, Formel für das Cauchy-Diagonalverfahren;
W. Franz, Kettenbruchdarstellung von Quadratwurzeln;
K. Wigand, Didaktik-Tagung in Oberwolfach.

H. Töpfer, Nürtinger Symposion in Düsseldorf;
F. Ostermann, Die leere Menge;
W. Ness, Das Majorantenkriterium und der iterierte Sinus;
G. Schostack, Das Um-Ankreisviereck;
K. Schmidt, Behaltenstest zur programmierten „Mengenalgebra“;
K. Wigand, A. I. Wittenberg †, 1926–1965.

4. *The Mathematics Teacher* (LVIII, 7–8; LIX, 1–4; november 1965 – april 1966).

L. A. Ringenberg, A portrait of $\sqrt{2}$;
Tr. Botts, Problem solving in mathematics;
W. Thumm, Buffon's needle: stochastic determination of π ;
V. E. Haas, Addition and subtraction on the soroban;

- K. Hanawalt, The end of a perfect number;
 E. F. Stiel, Relations and functions;
 L. Felix, The development of the teaching of mathematics in France at the first and second degree levels;
 L. W. Pixley, Archimedes;
 L. Guggenbuhl, Mathematics in ancient Egypt; a checklist (1930–1965).
- C. B. Allendoerfer, The second revolution in mathematics;
 H. E. Vaughan, An illustration of the use of vector methods in geometry;
 Ch. P. Seguin, Commuting linear functions and fixed points;
 L. W. Smith, The use and abuse of programmed instruction;
 J. Q. Jordan, Divisibility tests of the noncongruence type;
 R. S. Cherkasov, The development of the teaching of mathematics in Soviet schools;
 D. B. Lloyd, Recent evidences of primeval mathematics;
 L. D. Nelson, Textbook difficulty and mathematics achievement in junior high school.
- G. I. Haddock and D. W. Hight, Geometric techniques for graphing;
 H. C. Trimble, Problems as means;
 R. Kalin, Some guidelines for selecting a programmed text in mathematics;
 M. Shogren and R. Jates, A sieve for primes $p > 5$;
 A. Beninati, It's time to take a closer look at high school calculus;
 E. Just and N. Schaumberger, Two theorems concerning partial fractions;
 J. H. Manheim, The genesis of point set topology; from Newton to Hausdorff;
 Byran Thwaites, Mathematical reforms in English secondary schools;
 K. E. Brown and Th. L. Abell, Research in the teaching of high school mathematics;
 C. J. Keyser, The human worth of rigorous thinking.
- I. D. Macdonald, Abstract algebra from axiomatic geometry;
 L. Leake, Axiom or theorem?
 R. T. Heimer, Designs for future explorations in programmed instruction;
 St. I. Brown, Implications of an operation uniquely defined with respect to an equivalence relation: the „freeing” of vectors;
 J. Garfunkel and B. Leeds, The circle of unit diameter;
 C. C. Tranberg and Hussein Kayhan, Mathematics teaching in Afghanistan 1964.
 S. K. Langei, Algebra and the development of reason.
- Irving Adler, The Cambridge report: blueprint or fantasy?
 St. Szabo, An approach to Euclidean geometry through vectors;
 W. Asprey, Pseudo-ternary arithmetic;
 Don Ryoti, Confrunce of triangles by AAS;
 A. Xavier, A teacher-made slide program;
 W. Wernick, Variations on the theme $y = 2x - 3$;
 M. J. Hellman, On the evaluation of $\int \sec dx$ and $\int \csc dx$;
 J. L. Fejfar, A note concerning teaching matrices and theories of learning;
 G. W. Myers, Reaction vs radicalism in the teaching of mathematics;
 O. C. Bassler, An investigation of the effect of types of exercises on mathematics;
 H. Eves, The Bernoulli family;
 A. Delessert, What does the secondary-school teacher of mathematics expect from the university?

- Morris Kline, A proposal for the high school mathematics curriculum;
 J. H. Zant, A proposal for the high school mathematics curriculum – What does it mean?
 J. Dorman a.o., Fields and near-fields of ordered pairs of reals;
 D. Fukada a.o., A straight-line model for multiplication;
 M. M. Byrne, A geometric approach to the conic sections;
 M. Hausner, On an easy construction of a computing machine;
 G. Gutteresen, A computer for every classroom!

5. *School Science and Mathematics* (LXV, 9 – LXVI, 4; 578–582; December 1965 – april 1966).

- Th. A. Hutto, The BSCS program; reactions from students, teachers and parents;
 P. C. Burns and D. J. Dessart, A summary of investigations relating to mathematics in elementary education;
 Cecil B. Read, The Julian and Gregorian calendars;
 D. R. Byrkit, On the inverse of a function.

- Ch. V. Souers, An integrated math-science activity;
 M. Maris, The hypsometer, a trigonometry aid;
 G. Brown, Magic squares, more than recreation;
 Fr. B. Belcastro, Programmed learning and intelligence;
 A. R. Amir-Moe'z, Matrices and certain linear equations;
 P. C. Burns and D. J. Dessart, A summary of investigations relating to mathematics in secondary education;
 Ch. H. Coleman, A demonstration of the these of the alternative hypothesis.

- Fr. Abeles, Secondary school geometry instruction in Denmark;
 R. W. Cain, Relationships of verbal reasoning and numerical ability to achievement in first-year-algebra;
 L. M. Weiner, A slide rule for relationships involving three variables;
 Cecil B. Read, The history of mathematics, a bibliography;
 Ch. W. Trigg, Hetero-hexagons of the second order.

- A. A. Delaney, A computer activity for the classroom;
 Ch. J. Zoet, Computer orientation in Livonia high school;
 F. L. Coltharp, Introducing the integers as ordered pairs.

- H. L. Walton, Linear transformations and their graphs;
 D. Rameswar Rao, „Pythagoras' theorem" or its converse; which precedes the other?
 J. D. Cunningham, Rigidity in children's problem solving.

6. *Elemente der Mathematik* (XX, 6; XXI, 1–2; november 1965 – maart 1966).

- P. Finsler, Zur Goldbachschen Vermutung;
 J. Rätz, Begründung und Charakterisierung der reellen Logarithmenfunktionen;
 J. Mall, Axiomatische Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie;
 P. Flox, Über eine Ungleichung von S. S. Wagner.

W. Wunderlich, Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $n = 2^m$ im Ring gewisser ganzzahligen Matrizen;

J. Hoscher, Über Kegelschnitte mit gemeinsamen Krümmungselement;

J. Rätz, Zur Theorie der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x) + f(y)$;

W. Böhm, Über die Dualität bei der Konstruktion von Kegelschnitten;

G. R. Veldkamp, A theorem concerning Soddy-circles.

M. Goldberg, Rotors of variables regular polygons;

J. Hoschek, Über Kegelschnitte mit gemeinsamen Krümmungselement und Erzeugung von Steiner-Zykloiden;

G. Jaeschke und E. Trost, Über die Nichtprimteiler von $ab^x + c$;

A. Rotkiewicz, Sur les nombres pseudopremiers de la forme $nk + 1$;

L. Fejes Tóth, Mehrfache Kreisunterdeckungen und Kreisüberdeckungen auf der Kugel;

H. Kaufman and S. Melamed, Integration of multiple-valued functions by residues;

J. E. Hofmann, Zum Leibniz-Jahr 1966.

7. *The Mathematical Gazette* (XLIX, 369–370; L, 371; october 1965 – febr. 1966).

I. W. Busbridge, Robbins- and all that;

T. A. A. Broadbent, Institute, Joint Council, Association;

M. G. Hughes, Accurate reasoning in sixth form pure mathematics;

R. A. Cuninghame-Green, Algebra aids electronics;

J. F. Rigby, A problem in projective geometry;

E. T. Steller, Envelopes of Zylbertrest-lines;

J. de Meulenaer, On certain sums of products of binomial coefficients;

M. S. P. Eastham, The representation of lines by dual vectors;

E. and G. Szekeres, On a problem of Schütte and Erdős;

H. H. Spencer, The convolution integral of beam theory.

W. G. Bickley, Some thoughts on mathematical teaching;

C. G. Paradine, The probability distribution of χ^2 ;

A. J. Langner, Statistical evaluation of π ;

E. J. F. Primrose, On functions which form a group;

T. A. S. Jackson, Orthogonal curvilinear coordinates;

D. J. Green, Matrix proof of a theorem in mechanics;

A. Sutcliffe, The factors of $N!$;

J. M. Gandhi, On Fermat's last problem;

W. T. Blackburn, Solving Diophantine equations by means of the equation $a \cos \theta + b \sin \theta + c = 0$;

L. Fox, The proper use of recurrence relations;

D. Markovitch, On a new method of calculating the roots of algebraic equations;

N. M. Griffin a.o., A slipped disc and related problems;

J. F. Reynolds, A proof of the random-walk method for solving Laplace's equation;

J. Astin, Extensions of the Cayley-Hamilton theorem;

J. O. Irwin, Note on the addition formula for Jacobi elliptic functions;

N. J. Hardman, A report on the Easter conference in mathematics for sixth forms.

GRAAD EN/OF RADIAAL?

door

Drs. L. VAN DEN BROM

Amsterdam

What should they know of England who
only England know?

Rudyard Kipling

De graad schijnt als hoekmaat bij het wiskundeonderwijs in de hogere klassen van onze middelbare scholen in discrediet, daar heerst het primaat van de radiaal.

Voordat ik dit primaat ga aantasten eerst een paar opmerkingen over coördinaten-stelsels in het algemeen. Als we een coördinaten-stelsel nodig hebben, dan kiezen we de soort daarvan en de eenheden daarbij zodanig dat het rekenwerk zo kort mogelijk uitvalt en onze formules er zo elegant mogelijk komen uit te zien. Dat zal meestal betekenen dat we een zo groot mogelijk aantal additieve constanten 0 en multiplicatieve 1 maken. Ook streven we vaak naar symmetrie. Er zijn zelfs problemen waarbij het voordeel biedt om tijdens het oplossen over te gaan op een ander stelsel, ja zelfs een in soort ander stelsel.

Dat bij het onderwijs in de analytische meetkunde op onze scholen alleen het Cartesische stelsel gebruikt wordt draagt nu niet bepaald bij tot het aankweken van het gevoel dat een coördinaten-stelsel slechts waarde heeft in relatie met het probleem waarbij het gebruikt wordt ¹⁾.

Nu de hoekmeting. Voor een vraagstuk waarbij we een hoekmaat nodig hebben mogen we, analoog aan de keuze van een eenheid op de as, een willekeurige hoek, waarvan de benen niet samenvallen, als eenheid kiezen. Het is dan voor bepaalde vraagstukken wel vervelend, als deze hoek niet π keer, maar a keer op de gestrekte

¹⁾ Schrek is zover ik weet de enige die de mogelijkheid van andere stelsels noemt.

Keizer noemt zelfs het stelsel waarin hij werkt niet expliciet, wel veronderstelt hij in het voorbericht de „coördinaten-leer” bekend. Wat dat vak ook mag behelzen, het ontslaat de auteur niet van zijn plicht zijn referentie-systeem te noemen. Overigens maakt het boek van Keizer, ondanks dat het niet begint, bij eerste kennismaking een bruikbare indruk.

hoek begrepen is, dat dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{a}$ en we overal een factor $\frac{\pi}{a}$ moeten meeslepen. Uit praktische overwegingen, om de formules een elegantere vorm te geven, om ons esthetisch gevoel te bevredigen, kiezen we daar waar het ons schikt $a = \pi$, d.w.z. we kiezen de radiaal als eenheid voor de hoekmeting. En het schikt ons in de analyse, in dat vak waar ook de formules zoveel eleganter worden als we e als grondtal voor de logaritme kiezen. Maar dat wil nog niet zeggen dat het noodzakelijk is om overal en te allen tijde met de radiaal en de natuurlijke logaritme te werken.

Tot zover heb ik de supporters voor het primaat van de radiaal nog niet verontrust. Maar in de meetkunde en in de trigonometrie, en ook in alle andere vakken waar we geen enkele bemoeienis hebben met $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, is het veel praktischer om te werken met een hoekmaat die rationaal begrepen is op de „volledige hoek”. In de techniek, de astronomie, de natuurkunde en overal elders waar men zich bij de hoekmeting betreft op de „volledige hoek” is men zelfs niet gediend met een hoekmaat, die daar niet rationaal op begrepen is. Wat men hier kiest als eenheid, de traditionele graad, de decimale graad, de gestrekte hoek of welke hoek dan ook, mits rationaal t.o.v. de „volledige hoek”, is in dit verband niet wezenlijk.

Er bestaat geen „natuurlijke hoekmaat”. We kiezen die eenheid die ons voor een bepaald gebruik het beste schikt, zoals we ook de keuze van een referentiesysteem in het algemeen aanpassen aan het probleem waarbij we het nodig hebben, zonder het wezen van het probleem aan te tasten.

Ik zie geen bezwaar in het overgaan van radialen op graden of omgekeerd, tijdens het oplossen van een vraagstuk, als dat voordeel biedt. De vraagstukken goniometrie, zoals die op onze middelbare scholen voorkomen, hebben meestal antwoorden die rationaal zijn t.o.v. de gestrekte hoek. Geef deze antwoorden dan op in graden ondanks dat men gewerkt heeft in radialen bij de oplossing.

Ik begrijp wel waarom vele leraren bij de goniometrie in de hoogste klassen decreteren: „Druk de hoeken uitsluitend uit in radialen!”, dat is de veiligste manier. Dit decreet beveiligd de leerlingen voor een fout als: de oplossing van de vergelijking $\cos x = 0,6198$ is $x = \pm 51^\circ 42' + 2k\pi$ (Een zo snelle overgang van graden op radialen vind zelfs ik niet geoorloofd). Maar door dit decreet mist men de kans om de leerlingen inzicht te geven in de reden van de

keuze van een zekere hoekmaat.

De aanleiding tot dit artikel is dat de commissie voor het opstellen van een wiskunde-programma voor het h.a.v.o. een concept-leerplan heeft gepubliceerd in Euclides (dec. 1965), waarin ook voor dit onderwijs het primaat van de radiaal gesteld wordt. Hier nog kwalijker, omdat bij het opstellen van dit concept vooral gedacht is aan toekomstige h.t.s.-ers, mensen die men zeker klaarheid moet geven in kwesties aangaande eenheden. En laat men toch ook bedenken dat deze mensen later in de praktijk altijd met graden moeten werken.

Als dan bij de meetkunde gesteld wordt dat onderling onmeetbare lijnstukken niet behandeld *moeten* worden, zal de onderlinge onmeetbaarheid van graad en radiaal ook niet aan de orde gesteld worden.

De commissie kondigt ook aan dat zij zal doen uitgeven 36 stellen examenwerk, onder de naam „Eindexamenopgaven Wiskunde voor het h.a.v.o.“, waarin opgenomen: tafels van de goniometrische verhoudingen waarbij de hoeken in radialen en in delen van π -radialen.

Waarom de commissie deze tafels toevoegt is mij een raadsel. De eerstgenoemde tafel kan men vinden in de uitstekende tafels die Noordhoff uitgeeft en met de tweede zal wel bedoeld worden de z.g. „tafel van Vredenduin”¹⁾ (Wolters) of de „tafel van Timmer” (Thieme), een tafel die de leerlingen bedriegt. Men doet voorkomen of men in radialen werkt, maar in werkelijkheid werkt men in $0,001\pi$, resp. $0,001\frac{\pi}{2}$ rad d.w.z. in $10'48''$, resp. $5'24''$ (in decimale graden: 2, resp. 1 dgr). Ook tafel-technisch is de „tafel van Vredenduin” door Wijdenes al afgewezen in de 34e jaargang van Euclides, veel kundiger dan ik dat zou kunnen.

Het lijkt mij dat de commissie door het toevoegen van deze tafels aan de „36 stellen” ook de kans mist om de rekenliniaal dwingend te stellen bij de goniometrie in de hogere klassen van het h.a.v.o. Om voldoende vaardigheid met de rekenliniaal te krijgen zal men met dit instrument vroeg moeten kennismaken en om de vaardigheid te behouden zal men regelmatig moeten blijven oefenen. Tot dit laatste kan o.a. de goniometrie bijdragen.

Tot slot wil ik stellen dat het zeker aanbeveling verdient om in

¹⁾ De benaming „tafel van Vredenduin” is afkomstig van Wijdenes (zie hiervoor Euclides, 34e jaargang blz. 73 en blz. 280), naar analogie dan ook „tafel van Timmer” (Euclides, 34e jaargang blz. 205).

de 1e klasse bij het onderwijs in de meetkunde meer aandacht te besteden aan het „meten”. Geen van de auteurs van twaalf meetkunde-boeken, bestemd voor de 1e klasse v.h.m.o., die in mijn bezit zijn en uitgegeven rond 1960 (ongeveer 25 verschillende methoden waren er toen voor de meetkunde in gebruik), merkt bij de hoekmeting op dat men een willekeurige hoek als eenheid mag kiezen. Het $\frac{1}{180}$ e deel van een gestrekte hoek wordt als 1° gedefinieerd en de hoekmeting onmiddellijk naar de gradenboog verwezen ¹⁾).

Het is zeker instructief om de leerlingen eens bij twee gegeven hoeken met de ene als eenheid de andere te laten meten. Ook het invoeren van radialen en decimale graden naast de „gewone” graden in de 1e klasse en het omrekenen van het ene in het andere systeem zou kunnen bijdragen tot het verkrijgen van het inzicht dat men in een bepaald geval die eenheid kiest die ons het meest schikt. En laat de leerlingen ook eens werken met een „radialenboog”, de Aristo-Trigon kan daarbij goede diensten verlenen.

Ongetwijfeld maakt men het de leerlingen in de 1e klasse makkelijker door ze alleen met de graad als eenheid voor de hoekmeting in aanraking te laten komen, maar deze „didactiek op korte termijn” staat werkelijke begripsvorming op den duur in de weg.

BOEKBESPREKING

Ir. J. F. Schuh, *Algemene theorie der automaten*, Philips Technische Bibliotheek, N.V. Uitgeversmaatschappij Centrex – Eindhoven, 1963, 393 pag., 138 fig., f 35,—.

Ter toelichting van de titel moge hier eerst een korte opsomming van de behandelde onderwerpen volgen. In het eerste hoofdstuk worden enige algemene, gedeeltelijk ook filosofische, beschouwingen gegeven over automaten, waaronder machines worden verstaan, die beslissingen nemen waarvan de uitkomst afhankelijk is van het al of niet vervuld zijn van een bepaalde voorwaarde. Deze automaten worden ook vergeleken met de fysiologie der zenuwnetten, waarbij blijkt dat de laatste nog een enorm veel compactere opbouw hebben, maar dat de voortplantingssnelheid der informatie aanzienlijk langzamer is. De begrippen informatie en signaal worden nader geanalyseerd, evenals het optreden van ruis en storingen.

Het tweede hoofdstuk behandelt de beginselen der logica, o.a. begrippen als negatie, conjunctie, disjunctie enz., alsmede een inleiding tot de algebra van Boole. Het derde hoofdstuk gaat over codes en talen, waarbij tevens wordt ingegaan op de voor het overbrengen van informatie zo belangrijke zelf-controlerende en zelf-corrigerende codes. In hoofdstuk 4 worden de belangrijkste logische wetten beschouwd, die in rekenmachines worden toegepast, zoals de enpoort, de ofpoort,

¹⁾ Slechts in één boekje wordt in een voetnoot het gebruik van decimale graden door landmeters genoemd.

de flip-flop (hier trekker genoemd), geheugens en het rekenorgaan van een digitale rekenmachine. Het laatste hoofdstuk, geheten mechanismen in het algemeen, behandelt eerst enkele mathematische onderwerpen, zoals de theorie der lineaire differentiaalvergelijkingen en de laplace-transformatie, welke dan worden toegepast op eenvoudige netwerktheorie en teruggekoppelde systemen. Tenslotte wordt nog ingegaan op de programmering van een digitale rekenautomaat.

Zoals men ziet, bestrijkt het boek ongeveer het gehele terrein van onderwerpen, dat verband houdt met rekenautomaten, met uitzondering van de techniek van automatisering van processen. Er bestaan vele boeken over de afzonderlijke onderwerpen, maar weinig of geen, en zeker niet in het Nederlands, die een zo volledig totaalbeeld geven. Ook is de behandeling niet oppervlakkig, wel op vele plaatsen nog al uitvoerig. Vermoedelijk zal het boek veel worden gelezen door hen, die uit belangstelling nader op de hoogte willen komen van rekenmachines. Als zodanig is het ook in het bijzonder voor wis- en natuurkunde leraren zeer aan te bevelen van de inhoud van dit boek kennis te nemen.

A. I. van de Vooren

J. F. H. Bor, *Vraagstukken over lineaire algebra*, P. Noordhoff N.V., Groningen, 1965, XVI+104 blz., ing. f 9.75.

J. F. H. Bor = {dr. J. Ch. Boland, dr. F. Oort, dr. H. van Rossum}. Deze aldus gedefinieerde verzameling heeft als elementen een stelsel voortbrengenden van een nieuwe verzameling, namelijk van vraagstukken over lineaire algebra. Deze sluiten aan bij de in de laatste tijd verschenen leerboeken in moderne trant, wat inhoudt, dat de behandeling van een lineaire ruimte, resp. vectorruimte, uitsluitend steunt op de axioma's, al wordt (b.v. in het leerboek van prof. dr. N. H. Kuiper) in het begin wel uitgelegd, dat de verzameling van de „meetkundige” vectoren in een 2- of 3-dimensionale ruimte met hetzelfde „beginpunt” onder de bekende optellingsoperatie en de vermenigvuldiging met reële getallen aan de ingevoerde axioma's voldoet. De vraagstukken krijgen daardoor, veel meer dan in de bestaande verzameling van B. W. Steggerda e.a., een abstract karakter.

Doordat ik vele van de verzamelde vraagstukken heb behandeld op het practicum voor eerstejaars-studenten aan de universiteit van Amsterdam, heb ik mij van de goede bruikbaarheid van deze vraagstukken, ook voor m.o.-A-kandidaten, kunnen overtuigen.

In een eerste druk zijn vergissingen, vooral in een vraagstukkenverzameling, niet te vermijden; in de volgende drukken (die ik het boekje en zijn auteursverzameling van harte toewens) zullen ongetwijfeld verschillende verbeteringen, zowel in de tekst van de vraagstukken als in de antwoorden, worden aangebracht.

H. W. Lenstra

László Redeii, *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien* nach F. Klein, Akademiai Kiadó, Budapest, 1965, 363 blz.

Een boek over de axiomatische opbouw van de meetkunde wordt tegenwoordig niet meer geschreven met het oogmerk de mogelijkheid van een volledige axiomatiek van de meetkunde te demonstreren. Veeleer is het motief voor het schrijven ervan gelegen in het streven om vanuit een speciaal axiomasysteem, dat om de één of andere reden de voorkeur van de schrijver heeft, de opbouw van de meetkunde te voltrekken. Dan is het vaak nog mogelijk verschillende wegen te bewandelen om het gestelde doel te bereiken.

De auteur van het onderhavige werk zet zijn motieven uiteen in het voorwoord, waaruit we citeren: „Es gibt mehrere Wege und es entstehen auch heute noch neue Wege zur Begründung der drei Geometrien, über die wir nicht berichten wollen . . . Der von F. Klein in seinen Vorlesungen verfolgte Weg, der nämlich durch die projektive Erweiterung des Raumes zum Ziel führt, fand bisher in der Literatur keine ausreichende Bearbeitung. Ein erster Schritt in dieser Richtung wurde in dem (zweibändigen) Buch von Fr. Schilling getan, das jedoch nur die ebene Geometrie behandelt und auch sonst sehr skizzenhaft ist. Der Zweck unseres Buches ist es, diesen Mangel zu beseitigen und so die Kleinschen Ideen in der Lehrbuchliteratur zu ihrem Recht kommen zu lassen . . .”.

We zullen hieronder in het kort proberen aan te geven hoe in dit boek de opbouw van de meetkunde zich voltrekt.

Daartoe gaat de auteur uit van een verzameling R (de „ruimte”) waarvan de elementen „punten” zullen heten, en waarin zekere deelverzamelingen tot „rechten” en „vlakken” benoemd zijn, op zodanige wijze dat aan zekere incidentie-axioma's voldaan is. Deze incidentie-axioma's worden dan gevolgd door een groep axioma's, die de spelregels vastleggen voor de relatie „ A ligt tussen B en C ” voor drie collineaire punten A, B, C . Aangezien het de bedoeling is, dat het axioma-systeem de

stereometrie zal beschrijven op het drievoudig alternatief „ R is $\begin{cases} \text{euclidisch} \\ \text{elliptisch} \\ \text{hyperbolisch} \end{cases}$ ”

na, moeten de axioma's die het „tussen”-begrip vastleggen met enige omzichtigheid geformuleerd worden, daar anders de elliptische meetkunde van te voren geëlimineerd zou kunnen worden. Daartoe wordt aangenomen, dat er in R nog een deelverzameling R' is gegeven zodanig dat voor ieder drietal collineaire punten uit R' er één „tussen” de beide anderen ligt. (De verzameling R' moet men interpreteren als een ruimtelijke convexe verzameling, waarin het „tussen”-begrip axiomatisch wordt vastgelegd.) Vervolgens blijkt, dat in de verzameling R' reeds de incidentie-axioma's gelden, voor zover men daarin als „rechten” en „vlakken” de doorsneden neemt van R' met rechten en vlakken uit R . Het blijkt nu mogelijk om R' aan te vullen met ideale punten, rechten, en vlakken, tot een projectieve ruimte $\bar{R}$.

Hierbij moet men het begrip projectieve ruimte opvatten in de zin van een stelsel „punten”, „rechten” en „vlakken”, dat aan de gebruikelijke incidentie-axioma's voor de projectieve ruimte voldoet. De constructie van $\bar{R}$ uit R' voltrekt zich op soortgelijke wijze als de constructie van de gewone projectieve ruimte uit de euclidische ruimte, t.w. zekere rechten-schoven worden als „oneigenlijke” punten ingevoerd. Het blijkt dat ook R zich in $\bar{R}$ laat inbedden, en R en R' zijn aldus gerealiseerd als deelverzamelingen van de projectieve ruimte $\bar{R}$. Zoals bekend, is iedere ruimtelijke projectieve meetkunde isomorf met een analytische projectieve meetkunde gebaseerd op een lichaam, dus is ook $\bar{R}$ isomorf met een analytische projectieve meetkunde gebaseerd op een zeker lichaam K . Uit de axioma's blijkt alreeds dat K een geordend lichaam is. Om af te dwingen dat K het lichaam van de reële getallen is, is nog het zgn. „continuïteits-axioma” vereist. Dit laatste garandeert dat in het geordende lichaam K de stelling van Bolzano-Weierstrass geldt, en daarmee is de identiteit van K met het lichaam van de reële getallen vastgesteld. Op dat ogenblik is dan tevens vastgesteld dat R en R' convexe deelverzamelingen van de gewone projectieve ruimte zijn. Tenslotte wordt dan nog een groep axioma's in het geweer gebracht die de bewegingsgroep van de meetkunde R karakteriseren, en dan blijkt, dat R één van de drie klassieke meetkunden (euclidisch, elliptisch, hyperbolisch) moet zijn.

Naar mijn indruk heeft de auteur er consciëntieus naar gestreefd het boven geschetste programma „lückenlos" ten uitvoer te brengen, en is er daarbij toch in geslaagd een leesbaar boek te schrijven.

Over de keuze van de axioma's valt natuurlijk niet te twisten. Wel zou ik willen opmerken, dat met een iets bescheidener formulering van de bewegings-axioma's (een formulering, die misschien iets meer in overeenstemming is met de ervaringsmeetkunde), men het resultaat zou hebben gekregen dat R een zgn. ruimte van Clifford-Klein is, m.a.w. men zou dus voor R meer alternatieven, in feite zelfs oneindig veel, verkregen hebben.

Tenslotte nog een opmerking van meer algemene aard. Het is mij niet geheel duidelijk, waarom men zich veelal slechts bezig houdt met de axiomatiek van de euclidische en niet-euclidische meetkunde. Er zijn interessante terreinen voor axiomatisch werk in de mechanica en fysica te vinden. In dit verband moge gewezen worden op het zesde probleem uit de beroemde lijst van problemen die door Hilbert gesteld zijn op het congres te Parijs in 1900. Naar ik meen zijn er slechts incidentele pogingen op dit gebied te signaleren.

Misschien kunnen boeken als het onderhavige ertoe bijdragen ook eens enthousiasme te wekken voor axiomatisch onderzoek op deze gebieden.

W. T. van Est

Verslag van de cursus *Moderne Algebra* voor Ulo-leraren te Groningen en Leeuwarden, georganiseerd door de *Stichting voor Pedagogisch Onderwijs aan de Rijksuniversiteit te Groningen*, door drs. W. J. Brandenburg.

Na een oriënterende bespreking van de plannen op 4 maal twee colleges, bleek er voldoende belangstelling aanwezig, de aangekondigde cursus te volgen.

Alle cursisten schaften op eigen kosten aan: John L. Kelley, *Introduction to Modern Algebra* (D. van Nostrand Company, inc., Londen).

In een twintigtal colleges werden, aan de hand van dit boek, verschillende hoofdstukken besproken, de vraagstukken onder leiding behandeld.

Bij de bespreking van de *Axioma's van de getallenleer* zal zeker grote aandacht besteed zijn aan de opmerking van Kelley op blz. 13:

„The reader will notice that the following problem list exhibits certain schizophrenic tendencies. In some problems the reader is supposed to assume that his only knowledge of the number system is that which has been stated in the axioms and theorems of this section. In other problems and illustrations he is supposed to use his previous training in mathematics”.

Het groep begrip komt heel terloops en slechts „additief" voor terwijl de uniciteit van het neutrale element afhankelijk is van de commutatieve wet. Dit is een gevolg van het feit, dat de cursus zich nauw (te nauw?) aansloot bij het genoemde boek.

In de verhandelingen: *verzamelingen en getallen* werd ook het functie begrip onder de loep genomen. (De definitie 14-1 vindt f op de verkeerde plaats. Het is nl. een verzameling f van geordende paren en niet een verzameling van geordende paren f).

Vectoren en lijnen, inwendige produkten, het complexe vlak.

De complexe getallen worden als vectoren geïntroduceerd. Het produkt van twee zulke vectoren wijkt dan af van de reeds eerder gedefiniëerde produkten.

Na *Vectormeetkunde*, moest *Matrix algebra* volgen, maar de beschikbare tijd liet dit niet toe.

Misschien had men beter iets meer in de diepte dan in de breedte kunnen werken?

Het belangrijkste resultaat is echter wel, dat er een grote good-will gekweekt is, zich vertrouwd te maken met meer moderne wiskundige inzichten.

Burgers

J. Sinnema, IJ. Zwierstra, *Kompas voor meetkunde* deel 4a, J. M. Meulenhoff, Amsterdam 1965, 82 blz. f 4,25.

Dit boekje is bestemd voor Ulo-scholen en andere inrichtingen van voortgezet onderwijs, die opleiden voor het Mulo-A-examen.

Die onderwerpen komen in een zevental lessen aan bod, die, blijkens een nauwkeurige analyse van de schriftelijke examenopgaven, regelmatig terugkeren. Elk onderdeel is van een geschikt aantal opgaven voorzien. Het is echter alleen bruikbaar bij de voorafgaande deeltjes „Schrijf de stellingen 57, 58, 59 en 60 met figuur en tekst over en repeteer ze van links naar rechts en omgekeerd”, doet wel aan een strafcursus denken.

Burgers

KORREL CXXXIV

(Wat is een punt?)

Mijns inziens zou het gunstig zijn indien men de leerlingen van het toekomstige v.w.o. zou bijbrengen wat ze onder een formeel systeem dienen te verstaan. Vertrouwdheid met de techniek van het formaliseren en het opstellen van afleidingen (algemeen gezien, liefst los van de logica of de wiskunde) is daarvoor onontbeerlijk. Dan pas zijn duidelijke en betere antwoorden te geven op talloze vragen van meer algemene aard die de exacte wetenschap betreffen en binnen het bereik van het v.w.o. liggen. Een voorbeeld lijkt mij het volgende.

„Wat is een punt?“, is een vraag die de leerlingen toch nog wel eens stellen. Alleen de intonatie of het vraagteken is nog niet voldoende een vraag te creëren (zinnig te doen zijn) maar afgezien daarvan kan de vraag nog verschillend zijn bedoeld. In dit geval maak ik een onderscheid naar de deductieve en inductieve zin.

„Wat duiden we in de meetkundeles tijdens het construeren met het woord „punt“ aan?“ of „Wat verstaat de praktische meetkundige (landmeter) onder een punt?“ zijn vragen naar de inductieve zin. In dit geval kan het antwoord zijn: „Een stip met pen of potlood op papier of met krijt op het bord.“ Hiermee is de kwestie afgedaan; leerlingen tobben immers ook niet met de betekenis van de woorden „boek“ of „pen“ enz.

De vraagsteller kan ook bedoelen: „Wat verstaat de theoretische meetkundige onder een punt?“ of, iets naïever uitgedrukt, „Wat is nu eigenlijk een mathematisch punt?“. — Het zijn vragen naar de deductieve zin.

Het antwoord op deze laatste vragen luidt dan: „Onder een punt verstaan we een configuratie (van letters of klanken), hier „punt“, waarmee binnen een formeel systeem volgens vaste regels gemanipuleerd kan worden met de mogelijkheid om na een geschikte interpretatie te beschikken over een zo toepasselijk mogelijk beschrijvingsmiddel voor de betreffende meetkundige verschijnselen. In dit geval slaat de interpretatie van de configuratie „punt“ op datgene wat we onder stip verstaan“.

De situatie t.a.v. de vragen „Wat is een rechte lijn?“ en „Wat is een vlak?“ is overeenkomstig.

Amsterdam

J. Nienhuis

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

162. In het artikel in dit nummer over de diagrammen van Venn heeft u gezien, dat een venn-diagram van drie verzamelingen bestaat uit drie cirkels, die het vlak in acht delen verdelen. Is het nu mogelijk op analoge manier een venn-diagram voor n verzamelingen te ontwerpen? We kunnen ons dan niet tot cirkels beperken, maar moeten toelaten, dat het diagram bestaat uit gesloten krommen. We stellen verder de eis, dat geen drie van deze krommen door één punt gaan en dat ze het platte vlak in 2^n en niet meer delen verdelen.

163. Enige mensen zitten om een ronde tafel. We nummeren ze rondgaande 1, 2 ... Nummer 1 bezit een geheel aantal guldens, nummer 2 een gulden minder, nummer 3 weer een gulden minder, enz. Nummer 1 geeft 1 gulden aan nummer 2, nummer 2 geeft daarna 2 gulden aan nummer 3, nummer 3 geeft vervolgens 3 gulden aan nummer 4, enz. Steeds geeft iemand dus 1 gulden meer weg dan hij kreeg. Als dit niet meer mogelijk is, dan blijken er twee mensen naast elkaar te zitten, waarvan de een 4 maal zoveel guldens heeft dan de ander. Hoeveel mensen zitten er om de tafel? (Uit Lewis Carroll, Pillow Problems)

OPLOSSINGEN

160. Een sergeant wil 7 soldaten, die in een rij marcheren, in volgorde van grootte rangschikken en laat daartoe een drietal in versneld tempo naar de kop gaan. Dit herhaalt hij nog tweemaal om het gevraagde te bereiken.

Er is een algemene methode, waarop altijd, onafhankelijk van de permutatie van de zeven soldaten, de gewenste eindsituatie bereikt wordt.

De eerste keer laat men de nrs. 2, 4 en 6 uit de rij treden en naar voren lopen. De tweede keer de nrs. 1, 4 en 5. De volgorde is daardoor geworden

4 (1 5) (2 6) (3 7).

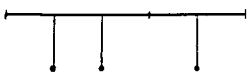
Met (1 5) wordt bedoeld, dat de volgorde kan zijn 1 en daarna 5, maar ook 5 en daarna 1. Analooz (2 6) en (3 7).

Als we nu de nrs. 1, 2 en 3 uit de rij laten gaan en naar de kop laten lopen, ontstaat de gevraagde eindvolgorde.

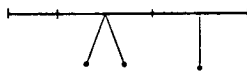
161. Op hoeveel topologisch verschillende manieren kunnen 9 eilanden door 8 bruggen verbonden worden?

Stel de langste keten bruggen bestaat uit k bruggen.

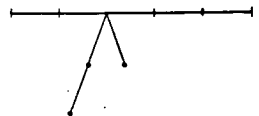
Uit de hieronderstaande figuren blijkt, hoe we de gevallen noteren. Ze hebben alle drie betrekking op $k = 5$.



(1, 1, 0, 1)



(0, 1², 0, 1)



(0, 2+1, 0, 0)

De gevallen zijn nu:

- $k = 8$ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
 $k = 7$ (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),
 $k = 6$ (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 0),
(0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (1², 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1², 0, 0, 0, 0),
(0, 0, 1², 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 0, 0, 0),
 $k = 5$ (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0), (1², 1, 0, 0, 0), (1², 0, 1, 0, 0), (1², 0, 0, 1, 0),
(1, 1², 0, 0, 0), (0, 1², 1, 0, 0), (0, 1², 0, 1, 0), (1³, 0, 0, 0, 0), (0, 1³, 0, 0, 0),
(1, 2, 0, 0, 0), (0, 2+1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 1, 0),
 $k = 4$ (1², 1, 1, 0), (1, 1², 1, 0), (1², 1², 0, 0), (1², 0, 1², 0), (1³, 1, 0, 0), (1³, 0, 1, 0),
(1, 1³, 0, 0), (1⁴, 0, 0, 0), (0, 1⁴, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1², 2, 0, 0),
(1, 2+1, 0, 0), (0, 2+1², 0, 0),
 $k = 3$ (1³, 1², 0), (1⁴, 1, 0), (1⁵, 0, 0),
 $k = 2$ (1⁶).

Totaal 46 mogelijkheden.

We zouden dit probleem kunnen generaliseren tot n eilanden en $n-1$ bruggen. Ik zie daar echter geen licht meer in. Mocht iemand iets in deze richting vinden, dat waardevol is, dan hoor ik het graag.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezaand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*” in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O op woensdag 26 oktober 1966: Prof. Dr. H. J. A. Duparc: „*Ontbinding in factoren*”. Aanvang 20.00 uur.

Colloquium „Topologie”.

Dit colloquium is bestemd voor leraren vhm. De bijeenkomsten vinden plaats op de eerste en derde woensdagavond van de maand. De stof zal worden behandeld in een rustig tempo, waarbij geen voorkennis van de topologie wordt verondersteld. Het is de bedoeling, dat zowel leraren als medewerkers van het MC als spreker zullen optreden.

Aan de orde zullen worden gesteld de beginselen van de topologie, met toepassingen in de analyse, meetkunde en algebra. De deelnemers ontvangen een uitgebreide syllabus.

Aanvangsdatum: 21 september 1966; plaats: grote collegezaal MC; tijd: 19.45—21.30. Belangstellenden worden verzocht zich van te voren aan te melden bij het secretariaat van het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op vrijdag 4 november 1966 om 14.30 uur in Gebouw „Op Gouden Wieken”, Scheveningseweg 37, Scheveningen.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 7 van 15 oktober 1965 en in Euclides nr. IV van 15 december 1965.)
3. Verslag kascommissie.
4. Bestuursverkiezing. (Aan de beurt van aftreden is D. Leujes, die zich herkiesbaar stelt. Tegenkandidaten kunnen vóór 29 oktober a.s. worden opgegeven bij de secretaris.)
5. Voordracht door de heer Dr. G. Brouwer, Wassenaar, over: „*Erfelijke codering*”.

Pauze.

6. Voordracht door de heer G. Krooshof, Groningen, over: „*Modernisering-nieuwbouw of verbouw?*”
7. Rondvraag.
8. Sluiting.

Delft, Thorbeckestraat 47

D. Leujes, secretaris

WIMECOS

Ook dit jaar wil het bestuur van Wimecos een najaarsexcursie organiseren. Op woensdag 2 november a.s. zal de *Technische Hogeschool Twente* onze vereniging gastvrijheid verlenen. Een programma van deze ontvangst zal de leden van Wimecos binnenkort worden toegezonden.

Namens het bestuur,
A. Maassen, secretaris.

Onlangs verscheen:

EXAMENOPGAVEN WISKUNDE VOOR H.A.V.O.

samengesteld door de Wimecos-commissie bestaande uit

C. J. Alders, Dr. A. van Dop, Dr. Ir. B. Groeneveld, C. de Groot en Ir. C. van Vliet.

Deze uitgave is het resultaat van de opdracht van het bestuur van Wimecos. De Wimecos-commissie werd op 29 december 1964 belast met de taak een concept-leerplan te ontwerpen voor het wiskundeprogramma voor het h.a.v.o. Deze taak werd uitgebreid met het samenstellen van een aantal opgaven ter bepaling van het eindexamen-niveau van het vak wiskunde bij het h.a.v.o.

Het boek behandelt de volgende onderwerpen: Ontwerp-leerplan Wiskunde voor h.a.v.o.
- inleiding tot verzamelingen - examenopgaven wiskunde voor h.a.v.o. - goniometrische tafels - antwoorden.

Het boekje is voornamelijk bestemd voor docenten wiskunde, die hun leerlingen opleiden voor het eindexamen wiskunde 1968 en de daarop volgende jaren. De prijs van deze uitgave bedraagt Ing. f 3,25.

P. Noordhoff nv

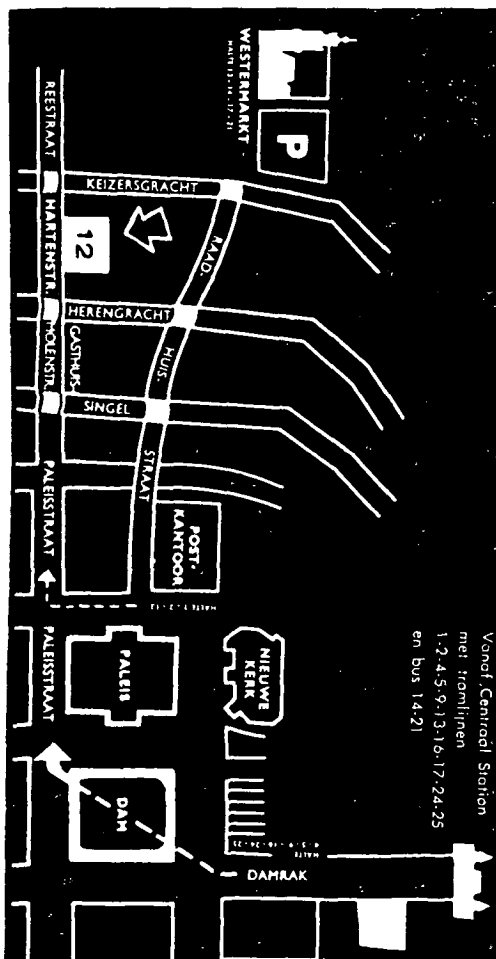
P. Noordhoff nv

cartografische,
educatieve,
medische,
technische,
wetenschappelijke en
wiskundige
uitgaven
documentatie op
sociaal-economisch en
juridisch gebied

ALLE UITGAVEN ZIJN TE
VERKRIJGEN BIJ:

Brinkman's Boekhandel

Hartenstraat 12 - Amsterdam-C



Wiskunde-uitgaven voor het vmo

ALGEBRA VOOR HET VHMO door C. J. Alders

deel 1 - 56/60e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.75 / deel 2 - 51/55e druk - ing. f 2.90;
geb. f 3.75 / deel 2B - ing. f 3.50; geb. f 4.75 / deel 3 - 24/26e druk - ing. f 2.70; geb.
f 3.60 / antwoorden 1 - f 1.— / 2 - f 0.90 / 3 - f 0.90

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / antwoorden gratis

GONIOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

26/30e druk - ing. f 2.60; geb. f 3.50 / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

24/26e druk - ing. f 3.25; geb. f 4.50

PLANIMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

31/35e druk - ing. f 3.75; geb. f 4.65

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

29e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.40

ALGEBRA VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

3e druk - ing. f 4.50 / antwoorden f 1.—

MEETKUNDE VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

deel 1 - 2e druk - ing. f 3.90 / deel 2 - ing. f 4.50

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR HET VHMO door Dr. H. Streefkerk

deel 1 - 5e druk - ing. f 3.25 / deel 2 - 5e druk - ing. f 3.90
deel 3 - 4e druk - ing. f 3.90

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET VHMO

door J. C. Kok

2e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.— / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door A. A. Lucieer

13e druk - ing. f 5.—; geb. f 5.75 / antwoorden f 1.00

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Dr. D. J. E. Schrek - m.m.v. H. Pleysier

4e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.25 / antwoorden f 1.00

P. Noordhoff nv

postbus 39 | Groningen

verkrijgbaar bij boekhandel en uitgever