

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

X — 15 JULI 1966

INHOUD

Nieuw programma voor de akte wiskunde l.o.	289
Georg Friedrich Bernhard Riemann	298
Prof. Dr. H. Freudenthal: Functies en functies-notaties	299
Prof. Dr. H. J. A. Duparc: Nodig en voldoende, onnodig en voldoende	305
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	309
Boekbespreking	297, 304, 311
Berichten	310
Wimecos	311
Recreatie	316

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Dr. J. KOKSMA, Haren;	P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van *Wimecos*, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de *Wiskunde-werkgroep W.V.O.* te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

Middel-Algebra

leerboek voor aktestudie en inleiding tot
de analyse

door P. Wijdenes

verkrijgbaar bij boekhandel en uitgever

P. NOORDHOFF NV - POSTBUS 39 - GRONINGEN

MIDDEL-ALGEBRA

Inhoud van het eerste deel

I. Bewijzen door volledige inductie. II. Ongelijkheden. III. Permutaties en combinaties. Machten van een tweeterm en van een veelterm. IV. Rekenkundige reeksen van een hogere orde. V. Determinanten. VI. Lineaire vergelijkingen. VII. Complexe getallen. VIII. Het begrip functie. IX. Algemene eigenschappen van de veelterm in x . Nulpunten. Over de wortels van een hogere machtsvergelijking. X. Binominaal-vergelijkingen. XI. Oplossing van de derde- en vierde-machtsvergelijking. XII. Scheiding der reële wortels van een hogere-machtsvergelijking. XIII. Benadering van de wortels. XIV. Symmetrische functies. IX. Eliminatie. XVI. Splitsing van breuken. Register. Formules.

Inhoud van het tweede deel

I. Onmeetbare getallen. De stelling van d'Alembert. II. Varianten en limieten van varianten. III. Limieten van functies. IV. Reeksen met reële termen. Kenmerken van convergentie. V. Reeksen met complexe termen. VI. Wederkerige reeksen. VII. Gelijkmatische convergentie. VIII. Exponentiële en logaritmische functies van z . IX. Afleiding van reeksen. X. Kettingbreuken. Historische aantekeningen. Register. Formules.

Het is niet de bedoeling hier een kritische bespreking van dit werk te geven, dat is bij vorige drukken al wel gebeurd. M.i. is het echter niet overbodig nog eens de aandacht te vestigen op dit voortreffelijke studieboek. Dit werk was aanvankelijk voor de akte M.O. Kl geschreven, doch het bevat zeer veel stof, welke ook voor de M.O. A candidaat onontbeerlijk is.

Voor de meeste M.O. A candidaten, evenals voor vele studenten, is de stap van de H.B.S.-stof naar de abstracte algebra, de lineaire algebra

AAN P. NOORDHOFF NV - UITGEVERS TE GRONINGEN

Verzoeken voor mijn rekening rechtstreeks, met nota aan eigen adres
door bemiddeling van onderstaande boekhandel

..... te

de volgende uitgave(n) te zenden

..... ex.

..... ex.

..... ex.

..... ex.

..... ex.

..... ex.

Naam: Straat:

Functie: Plaats:

Handtekening

BESTELKAART
voor boekwerken

Hier
frankeren

P. NOORDHOFF NV

POSTBUS 39

GRONINGEN

en de analyse te groot. Ze missen de routine in het werken met determinanten, lineaire vergelijkingen, complexe getallen, limieten, reeksen en het splitsen in partieelbreuken. Ze hebben niet veel benul van het elimineren, van continuïteit, convergentie (laat staan gelijkmatige convergentie) en zelfs van het werken met ongelijkheden! Dit bezwaar is te ondervangen door eerst een gedeelte van dit boek door te werken, bijv. van deel I de hoofdstukken I, II, V-XI, XVI geheel en III, IV, XII, XIV, XV ten dele. Van deel II zijn nodig de hoofdstukken I-IV, VII, VIII geheel en IX gedeeltelijk. De theorie wordt, op de ons van de schrijver bekende wijze, duidelijk en uitvoerig behandeld en aan vele geheel uitgewerkte voorbeelden toegelicht. Men vindt er 206 in deel I en 142 in deel II. In geen ander werk over deze stof vindt men er ook maar half zo veel! Bovendien bevatten beide delen een groot aantal vraagstukken bij elk hoofdstuk, zodat er oefenmateriaal genoeg is. Het 1e deel behandelt in hoofdzaak de leer van de hogere machtsvergelijkingen, voorafgegaan door hoofdstukken over bewijzen door volledige inductie, ongelijkheden, permutaties, combinaties en variaties, over de n^e macht van een binomium en van een polynomium, over rekenkundige reeksen van hogere orde, determinanten, lineaire vergelijkingen en complexe getallen en gevolgd door een hoofdstuk over splitsing in partieelbreuken.

In het 2e deel vindt men in hoofdzaak de theorie van de oneindige reeksen, voorafgegaan door hoofdstukken over het onmeetbare getal en de limieten, welke zeer uitvoerig behandeld zijn (evenals de reeksen trouwens). In een apart hoofdstuk worden de exponentiële en logaritmische functies van een complexe veranderlijke besproken en het laatste hoofdstuk is gewijd aan de kettingbreuken, waarvan de student toch eigenlijk ook iets moet weten.

Aan het eind van deel II vindt men nog interessante historische aantekeningen (van Dr. E. J. Dijksterhuis) over de wiskundigen, die in dit boek vermeld zijn (en dat zijn er bijna 50).

Ik kan dit boek van harte aanbevelen als inleiding voor M.O. A candidaten en voor studenten, die de wiskunde gaan beoefenen, in het algemeen, zeer zeker ook voor degenen, die voor actuaris studeren.

Ik doe dit uit een langjarige ervaring, ik gebruik het boek al van de 1e druk af (die in 1921 verscheen) bij mijn lessen!

H. Herreilers

In dit werk wordt de kloof tussen de wiskunde van de middelbare school en die van de universiteit op prettige wijze overbrugd. Het is daarom van belang de abiturienten, die wiskunde gaan studeren of de wiskunde nodig hebben, op dit boek attent te maken. Ze kunnen dan alvast aan de nieuwe materie, die hun hier didactisch verantwoord wordt geboden, enigszins wennen; terwijl het hun bij de verdere studie van groot nut kan zijn.

(D. S., Groningen)

Deel I	-	zevende druk	-	420 blz.	-	gebonden	f 19,50
Deel II	-	zesde druk	-	378 blz.	-	gebonden	f 19,00

P. NOORDHOFF NV - GRONINGEN

EUCLIDES

*MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE*

*ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.*

*MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND*

41e JAARGANG 1965/1966

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

INHOUD VAN DE 41STE JAARGANG

ARTIKELEN EN VOORDRACHTEN

P. C. BAAYEN: Opmerkingen over de verzamelingentheoretische topologie	33
Prof. Dr. O. BOTTEMA: Verscheidenheden	
LX Een verwantschap van de achtste graad	86
LXI Wiskundigen over zichzelf	177
LXII Kaarten leggen	271
LXIII Een kwestie van wrijving	309
Dr. W. BURGERS: Groepen van eindige orde	225
Prof. Dr. H. J. A. DUPARC: Nodig en voldoende, onnodig en onvoldoende	305
Prof. Dr. H. FREUDENTHAL: Functies en functie-notaties	299
Dr. J. T. GROENMAN: Isotrope coördinaten	152
G. KROOSHOF: De opbouw van een wiskunde-programma voor de de niet mathematische richtingen van het H.A.V.O.	108
Prof. Dr. A. F. MONNA: Reële en p-adische getallen van topologisch standpunt uit bezien	169
Ir. G. A. OOSTERHOLT: Eliminatie van parameters	208
Prof. Dr. J. POPKEN: De reële getallen van getaltheoretisch standpunt uit bekeken	244
B. VAN ROOTSELAAR: Het getalbegrip bij Bernard Bolzano	53
B. VAN ROOTSELAAR: Nog eens iets over functie-notaties	144
Drs. J. SNOEP: Het wiskunde-onderwijs op de Engelse middelbare scholen	20
W. O. STORER: Modernization of school mathematics in England.	161
S. STRASZEWICZ: Sur les nouveaux programmes de mathématiques scolaires en Pologne	238
Dr. C. J. VOOYS: De helicograaf van Nicodemos	28
Dr. P. G. J. VREDENDUIN: De alverzameling	97
Dr. P. G. J. VREDENDUIN: Hoeken	257
Dr. P. G. J. VREDENDUIN: Onderwijsvernieuwing in België	131
Dr. P. G. J. VREDENDUIN: Uitbreiding van getalsystemen.	1
MARTIN S. WOLFE: The UICSM program, old and new	277

KORRELS

CXXX Dr. P. G. J. VREDENDUIN: Wat is contradictoor?	83
CXXXI R. KOOISTRA: Over de cirkelbundel	182
CXXXII W. BERGMAN: Verzamelingen	270

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

Drs. M. D. Bos: De vierde Nederlandse Wiskunde-olympiade (1965)	193
Nieuw programma voor de akte wiskunde i.o.	289
Puntspiegeling — een les gegeven door R. Holvoet (P. G. J. VREDENDUIN)	202
Recreatie en rekenmachines (P. G. J. VREDENDUIN)	273

Staatsexamen Gymnasium 1964 (uit het verslag van de commissie)	30
Staatsexamen Gymnasium 1965 (uit het verslag van de commissie)	282
Staatsexamen H.B.S. 1965 (uit het verslag van de commissie)	283

DIVERSEN

Commissie modernisering leerplan wiskunde (bericht over de werkzaamheden)	104
A. J. E. M. SMEUR: Julius Wilhelm Richard Dedekind	142
A. J. E. M. SMEUR: Georg Friedrich Bernhard Riemann	298
Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften	212
Engelse examens — nieuwe stijl	67
Prof. Dr. H. FREUDENTHAL 60 jaar	65
Drs. J. D. DE JONG overleden	130
Onderwerpen uit de moderne wiskunde	118
Openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos tot de algemene vergadering — 1965	218
In memoriam Prof. Dr. Fred. Schuh 1875—1966	129
Dr. C. J. Vooys†	64
Wimecos-commissie voor het leerplan en het eindexamen van de wiskunde op het H.A.V.O. (de werkzaamheden van de)	116

BESPREKING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN

P. S. ALEXANDROFF: Introduction à la théorie des groupes (<i>Burgers</i>)	60
S. F. BARKER: The elements of logic (<i>Vredenduin</i>)	94
R. G. BARTLE: The elements of real analysis (<i>Lenstra</i>)	159
BAUER-HEINHOLD-SAMELSON-SAUER: Moderne Rechenanlagen (<i>vande Vooren</i>)	30
D. M. BORTON: An introduction to abstract mathematical systems (<i>Vredenduin</i>)	93
Dr. W. J. Bos: Grondslag voor meetkunde I (<i>Groenman</i>)	183
BOUMAN-GEERTS-LOCK: Algebra (<i>van Tooren</i>)	185
BOYCE-di PRIMA: Elementary differential equations and boundary value problems (<i>Claas</i>)	315
Dr. D. BURGER: Galileo Galilei (<i>Burgers</i>)	159
Dr. J. E. CIGLER: Enige aspecten van de wiskundige begripsvorming (<i>Groenman</i>)	61
COURANT-JOHN: Introduction to calculus and analysis I (<i>Burgers</i>)	304
CROUCH-BALDWIN-WISNER: Preparatory mathematics for elementary teachers (<i>van Tooren</i>)	286
R. DUBISCH: Introduction to abstract algebra (<i>Burgers</i>)	159
P. R. GARABEDIAN: Partial differential equations (<i>Claas</i>)	59
M. GÄRDNER: Mathematische Rätsel und Probleme (<i>Vredenduin</i>)	316
Ir. W. GEERTS: Werken met de rekenliniaal (<i>van Tooren</i>)	185
S. GOLDBERG: Die Wahrscheinlichkeit (<i>Vredenduin</i>)	297
GOLOMB-SHANKS: Elements of ordinary differential equations (<i>Burgers</i>)	94
PH. HARTMAN: Ordinary differential equations (<i>Claas</i>)	313
W. E. HARTNETT: An introduction to the concepts of analysis (<i>Burgers</i>)	31

Prof. Dr. G. HOHEISEL: Gewöhnliche Differentialgleichungen (<i>Lenstra</i>)	158
G. de HUNGARIA (SMEUR): Arithmeticae Summa tripartita 1499 (<i>Burgers</i>)	237
KAM-TING LEUNG & Doris LAI-CHUE-CHAN: Elementary set theory (<i>Lenstra</i>)	221
J. de KIMPE: Eindexamen vraagstukken. Sterometrie 1964; diaserie (<i>Leujes</i>)	63
J. de KIMPE: Stellingen vlakke meetkunde; diaserie (<i>Leujes</i>)	62
D. KLEPPNER: Quick calculus (<i>Burgers</i>)	184
E. KREYSZIG: Statistische Methoden und ihre Anwendungen (<i>Vredenduin</i>)	313
W. I. LAYTON: Essential business mathematics (<i>Burgers</i>)	256
Dr. J. H. LEENDERS: Moderne wiskunde met opgaven (<i>Troelstra</i>)	126
Dr. J. H. LEENDERS: Verzamelingen en relaties (<i>Troelstra</i>)	285
P. LORENZ: Anschauungsunterricht in Mathematischer Statistik I (<i>Vredenduin</i>)	128
E. MAXWELL: A gateway to abstract mathematics (<i>Burgers</i>)	286
Dr. A. F. MONNA: Beschouwingen over onderzoek en onderwijs in de wiskunde (<i>Groenman</i>)	314
Ir. H. M. MULDER: Stereovisie (<i>Burgers</i>)	31
NILES-SULLIVAN: Algebra and trigonometry (<i>Burgers</i>)	184
G. PAPY: Einführung in die Vektorräume (<i>Vredenduin</i>)	314
A. J. VAN ROOY: Die onderwijs van wiskunde, algemene wiskunde en rekenkunde aan die openbare middelbare en hoërskole vir blankes in Suid-Afrika (<i>Wansink</i>)	311
W. L. SCHAAF: Basic concepts of elementary mathematics (<i>Burgers</i>)	159
Drs. A. P. SNOEK: Practische ruimtemeetkunde (<i>Burgers</i>)	256
S. STEVIN (Smeur): De thiende (<i>Burgers</i>)	313
Prof. Dr. D. J. STRUIK: Geschiedenis van de wiskunde (<i>Vredenduin</i>)	93
L. F. TOTH: Reguläre Figuren (<i>Grootendorst</i>)	128
S. M. ULAM: Problems in modern mathematics (<i>van der Blij</i>)	61
P. J. VISSER: Algebra voor de brugklas (<i>Burgers</i>)	186
R. L. WILDER: Introduction to the foundations of mathematics (<i>Vredenduin</i>)	126
VAN WISSEKERKE (Struik): Liber Desideratus 1494 (<i>Burgers</i>)	237
V. I. ZUBOV: Methods of A. M. Lyapunov and their application (<i>van der Blij</i>)	60
RECREATIE	32, 63, 95, 124, 160, 191, 221, 255, 287, 316
KALENDER	151
WIMECOS	63, 91, 119, 224, 287, 311
LIWENAGEL	123
WISKUNDE-WERKGROEP	91
BERICHTEN	52, 124, 143, 186, 201, 221, 254, 310

De 41ste jaargang stond onder redactie van Dr. JOH. H. WANSINK, Drs. A. M. KOLDIJK, Dr. W. A. M. BURGERS, Dr. P. M. VAN HIELE, G. KROOSHOF, Drs. H. W. LENSTRA, Dr. D. N. VAN DER NEUT en Dr. P. G. J. VREDENDUIN.

NIEUW PROGRAMMA VOOR DE AKTE WISKUNDE L.O.

In het staatsblad van 9 december 1965 is verschenen een K.B. inhoudende een wijziging van het examenbesluit lager onderwijs wiskunde.

Enige jaren geleden werd de mogelijkheid geopend een herexamen in één of twee vakken af te leggen of één of meer vrijstellingen te verwerven voor het volgende examen.

Bij de laatste wijziging van het examenbesluit heeft de minister van Onderwijs en Wetenschappen de bevoegdheid gekregen regels vast te stellen volgens welke vrijstelling voor één of meer onderdelen van het examen verkregen kan worden door kandidaten, die in het bezit zijn van een diploma gymnasium-B of h.b.s.-B.

Inmiddels zijn deze regels als volgt vastgesteld:

Een kandidaat voor het examen wiskunde l.o., die bij het eind-examen gymnasium-B of h.b.s.-B voor het overeenkomstige onderdeel een eindcijfer van 8 of meer behaald heeft, verkrijgt een vrijstelling volgens onderstaande tabel:

	onderdeel	vrijstelling voor
gymnasium-B		
behaald vóór 1961	stelkunde meetkunde trigonometrie en anal. mtk.	analyse I geen meetkunde II
behaald in 1961 of later	algebra en diff. en int. rek. stereometrie goniometrie en anal. mtk.	analyse I, II en mondeling analyse geen meetkunde II
h.b.s.-B		
behaald vóór 1961	wiskunde I wiskunde II	analyse I geen
behaald in 1961 of 1962	wiskunde I wiskunde II	analyse I, II en mondeling analyse meetkunde II
behaald in 1963 of later	algebra en diff. en int. rek. stereometrie goniometrie en anal. mtk.	analyse I, II en mondeling analyse geen meetkunde II

waarbij een vrijstelling voor analyse I en/of meetkunde II tevens inhoudt, dat dit onderdeel bij het mondeling examen niet gevraagd zal worden.

Bovendien kan, volgens door de minister vast te stellen normen, aan een kandidaat, die bij het schriftelijk examen wiskunde l.o. goede cijfers heeft behaald, vrijstelling verleend worden voor één of meer onderdelen van het mondelinge examen.

Het K.B. van 5 februari 1960, nummer 51, eerst gewijzigd bij K.B., nummer 322, van 13 oktober 1961 en nu gewijzigd bij K.B. 522 van 19 november 1965 kent dus een drietal soorten vrijstellingen en een herexamenregeling.

Vrijstellingen kunnen verleend worden voor één of meer onderdelen van de wiskunde op grond van het bezit van een diploma gymnasium-B of h.b.s.-B met tenminste goede cijfers voor de wiskunde.

Vrijstellingen kunnen verleend worden voor één of meer onderdelen van de wiskunde na een afgelegd schriftelijk examen wiskunde l.o. waarbij tenminste goede cijfers behaald moeten worden, zodat voor het betreffende vak geen mondeling examen afgelegd behoeft te worden.

Vrijstellingen met een geldigheid van één jaar kunnen worden verleend voor één of meer onderdelen van de wiskunde na een volledig, met negatief resultaat, afgelegd examen wiskunde l.o. indien de cijferlijst aan redelijke eisen voldoet.

Herexamens in één of meer onderdelen worden toegekend na afwijzing bij een volledig afgelegd examen, indien de cijferlijst van de kandidaat net beneden de maat is. Deze herexamens worden enige maanden later afgenomen.

Aan het K.B. 522 is toegevoegd een nieuw programma, dat als volgt luidt:

PROGRAMMA VOOR HET EXAMEN TER VERKRIJGING VAN DE AKTE
VAN BEKWAAMHEID VOOR HET GEVEN VAN LAGER ONDERWIJS IN
HET VAK WISKUNDE.

a. *Analyse.*

1. Bewerkingen in het systeem van de reële getallen. Het begrip functie; lineaire en kwadratische functies, lineair gebroken functies, wortelfuncties, logaritmische functies, exponentiële functies; grafieken van deze functies. Vergelijkingen en ongelijkheden die met de genoemde functies verband houden. Stelsels van lineaire vergelijkingen met ten hoogste drie onbekenden. Stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Het begrip limiet zowel ten aanzien van getallenrijen als ten aanzien van functies van een reële veranderlijke; berekening van eenvoudige limieten. Rekenkundige en meetkundige rijen. Sommeerbaarheid van oneindige meetkundige rijen. Logaritmische berekeningen met behulp van een tafel in vier decimalen.
2. De goniometrische functies, ook voor andere dan scherpe, rechte en stompe hoeken, met hun grafieken. Het begrip radiaal. De formules van $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha \pm \cos \beta$.

De vergelijking $a \cos x + b \sin x = c$. Grafieken van de functies $\sin(ax + b)$, $\cos(ax + b)$, $\operatorname{tg}(ax + b)$, $a \cos x + b \sin x$.

Afgeleiden van rationale functies en van goniometrische functies; primitieve functies voor zover deze gemakkelijk kunnen worden bepaald; de bepaalde integraal. Toepassingen bij het bepalen van extreme waarden en bij oppervlakten en inhoudsberekeningen.

b. *Meetkunde.*

1. Opbouw van de planimetrie met behulp van grondbegrippen, definities, axioma's en afgeleide eigenschappen. Eigenschappen van rechte lijnen, hoeken, driehoeken, vierhoeken, veelhoeken, cirkels, ook in hun onderling verband. Eigenschappen van enige merkwaardige lijnen in de driehoek. De begrippen lengte van lijnstukken en cirkelbogen en oppervlakte van door lijnstukken of cirkelbogen begrensde figuren. Sinusregel en cosinusregel. Het berekenen van de onbekende elementen (zijden of hoeken) van een driehoek uit drie onafhankelijke elementen met behulp van een tafel in vier decimalen van de goniometrische functies of van hun logaritmen. Kennis van de meetkundige transformaties: translatie, rotatie, spiegeling en vermenigvuldiging. Meetkundige plaatsen. Vaardigheid in berekenen, construeren en bewijzen.

Opbouw van de stereometrie met behulp van grondbegrippen, definities, axioma's en afgeleide eigenschappen. Eigenschappen van rechte lijnen en platte vlakken, ook in hun onderling verband. Prisma, piramide, cilinder, kegel, bol. Het begrip oppervlakte van een gebogen vlak (kegelmantel, cilindermantel, bolvlak). Het begrip inhoud van een lichaam (prisma, piramide, cilinder, kegel, bol). Berekening van oppervlakte en inhoud van de genoemde lichamen. Meetkundige plaatsen. Afbeelding van prisma's en piramiden op een plat vlak door middel van een methode van parallelprojectie. Het construeren in deze figuren van punten, lijnen en vlakken die aan bepaalde voorwaarden voldoen, en het construeren in ware grootte van lijnstukken en hoeken die in geconstrueerde afbeeldingen voorkomen.

2. Rechthoekige-coördinatenstelsels in een plat vlak. Vergelijkingen van rechte lijn en cirkel. Afstand van twee punten; afstand van een punt tot een lijn. Vergelijkingen van ellips, hyperbool en parabool, voor zover de assen van deze figuren vallen langs of evenwijdig zijn aan de coördinaatassen. Vergelijking van de orthogonale hyperbool, waarvan de asymptoten vallen langs of evenwijdig zijn aan de coördinaatassen. Raaklijnen aan de genoemde krommen. Berekening van het snijpunt van twee lijnen. Berekening van de snijpunten van twee cirkels. Berekening van de snijpunten van een lijn en de genoemde krommen. Meetkundige plaatsen. Lijnen- en cirkelbundels.

c. *Didactiek en methodiek.*

Concrete toepassingen van de pedagogiek en de algemene didactiek op de didactiek van de wiskunde.

Enig inzicht in de betekenis van inductieve inleidingen tot de wiskunde en in de wiskunde als deductief systeem.

Wenselijkheden en mogelijkheden ten aanzien van de te behandelen leerstof voor de schooltypen, waarvoor de akte wiskunde l.o. onderwijsbevoegdheid geeft.

TOELICHTING.

a. *Analyse.*

Voor het uitvoeren van bewerkingen in het gebied van de reële getallen is enige kennis vereist van de grondeigenschappen en de rekenregels die voor reële getallen gelden. Een formeel-strenge opbouw, uitgaande van de natuurlijke getallen, wordt niet verlangd, wel enig inzicht in deze opbouw en bekendheid met de afbeelding van de reële getallen op een rechte (getallenrechte). Met wortelfuncties worden bedoeld functies van het type $\sqrt{f(x)}$, waarin $f(x)$ tot de overige genoemde typen van functies behoort. Aan het begrip limiet dient veel aandacht te worden geschonken.

Met afgeleiden worden steeds eerste afgeleiden bedoeld. Primitieve functies van functies van het type $\frac{1}{x}$ worden niet gevraagd; kennis van het getal e wordt niet vereist. Een strenge opbouw van het begrip bepaalde integraal wordt niet verlangd; het is toelaatbaar dit begrip te laten steunen op een intuïtief oppervlaktebegrip. Partiële integratie wordt niet gevraagd.

b. *Meetkunde.*

Bij de meetkunde is het verwerven van inzicht het hoofddoel. Echter is een zekere technische vaardigheid ten aanzien van berekeningen, constructies en bewijsmethoden onontbeerlijk. Berekeningen in verband met merkwaardige lijnen in de driehoek, die van meetkundig standpunt van betekenis zijn (bissectrice, hoogtelijn, zwaartelijn, middelloodlijn), dienen tot een minimum beperkt te blijven. Zo wordt ook berekening van merkwaardige lijnen in de driehoek of van delen daarvan slechts gevraagd, indien deze lijnstukken met behulp van de sinus- of cosinusregel uit de overige elementen van een driehoek, waarvan zij zelf een zijde zijn, kunnen worden berekend. Bij de meetkundige transformaties wordt inversie niet gevraagd. Van de regelmatige veelvlakken worden alleen het regelmatige viervlak, de kubus en het regelmatige achthoek gevraagd.

De analytische meetkunde geeft op geheel eigen wijze reliëf aan de aritmetisering van de meetkunde, waarvan het synthetische aspect in planimetrie en stereometrie voldoende tot zijn recht komt.

c. *Didactiek en methodiek.*

Bij de vraag of de kandidaat in staat is de pedagogiek en de algemene didactiek toe te passen op de didactiek van de wiskunde, zal worden uitgegaan van de behandeling van eenvoudige vraagstukken of theoretische problemen, zoals die aan de orde komen op de scholen waarvoor de akte wiskunde i.o. onderwijsbevoegdheid geeft. De kandidaat dient de voornaamste didactische moeilijkheden in dergelijke onderwerpen te herkennen en moet in staat zijn er een didactisch aanvaardbare oplossing voor te geven. Van de kandidaat wordt verlangd een kritische bestudering van een methode voor algebra-onderwijs en van een methode voor meetkunde-onderwijs.

Wanneer een kandidaat de gelegenheid heeft gehad tijdens zijn opleiding voor de akte wiskunde i.o. enige wiskundelessen op een school, waarvoor deze akte onderwijsbevoegdheid geeft, bij te wonen of zelf te geven, al of niet onder leiding van een mentor, kan een deel van de examentijd worden besteed aan de bespreking van een verslag, dat de kandidaat van deze lessen heeft gemaakt.

Het beginonderwijs in de wiskunde dient een brug te slaan tussen het concreet-aanschouwelijke denken van de leerlingen en het abstracte denken, dat de beoefening van de wiskunde vereist. Hoe dit op verantwoorde wijze kan geschieden is het thema van de zogenaamde inductieve inleidingen tot de wiskunde, die van de docent evenzeer de belangstelling moeten hebben als de later volgende systematische behandeling van de leerstof.

Voorts is het gewenst dat de docent kritisch staat tegenover de door hem op grond van de bestaande voorschriften te onderwijzen leerstof en tegenover de traditionele onderwijsmethoden, zodat hij een open oog heeft voor verbeteringen, die in de keuze van de leerstof en in de aanbieder ervan mogelijk en wenselijk zijn.

In 1966 zal het examen afgenomen worden volgens het oude programma, in het volgende jaar volgens het nieuwe programma. Alleen de kandidaten, die in het jaar 1966 afgewezen worden met één of meer vrijstellingen voor het volgende jaar, op grond van de behaalde eindcijfers bij dit examen, worden in de gelegenheid gesteld volgens het oude programma tot en met 1968 examen te doen.

De vrijstellingsregeling voor de bezitters van een gymnasium B- of een h.b.s.B-diploma treedt voor het eerst in 1967 in werking.

Op basis van de indeling van het nieuwe programma wordt het examen als volgt gewijzigd:

Het examen bestaat uit drie vakken	$\left\{ \begin{array}{l} \text{a. analyse} \\ \text{b. meetkunde} \\ \text{c. didactiek en methodiek} \end{array} \right.$
Het vak analyse omvat	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{analyse I: algebra} & \text{schriftelijk examen van 3 uur} \\ \text{analyse II: goniometrie en diff. en integraalrekening} & \text{schriftelijk examen van 3 uur} \\ \text{analyse I en II} & \text{mondeling examen van 30 min.} \end{array} \right.$
Het vak meetkunde omvat	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{meetkunde I: planimetrie en stereometrie} & \text{schriftelijk examen van 3 uur} \\ \text{meetkunde II: analytische meetkunde} & \text{schriftelijk examen van 3 uur} \\ \text{meetkunde I en II} & \text{mondeling examen van 30 min.} \end{array} \right.$
Het vak didactiek en methodiek uitsluitend als	mondeling examen van 30 min.

De hoofdinspecteur van het kweekschoolonderwijs heeft de docenten, die les geven aan een C-cursus, op 18 december j.l. tot het bijwonen van een vergadering uitgenodigd. Op deze vergadering werd het nieuwe programma toegelicht en in bespreking gebracht.

Het verdient zeker aanbeveling de belangrijkste discussiepunten van de vergadering een grotere bekendheid te geven.

1. Het onderdeel analyse I of algebra vertoont veel overeenkomst met het oude programma algebra. De complexe getallen komen echter niet meer in het programma voor.

Hoewel de omschrijving van de leerstof geen aanwijzingen geeft in de richting van de moderne wiskunde, wordt het gebruik van enkele eenvoudige begrippen uit de theorie van de verzamelingen zeer aanbevolen: verzameling, element, deelverzameling, vereniging, doorsnede met de bijbehorende symbolen. Ook het gebruik van enige symbolen uit de logica wordt gewenst geacht: „of” $\vee$, „en” $\wedge$, „als . . . dan” $\Rightarrow$ en „dan en slechts dan, als” $\Leftrightarrow$. De opbouw van het systeem van de reële getallen dient de kandidaat goed voor ogen te staan.

2. Bij de analyse II zijn verenigd de goniometrie en de differentiaal- en integraalrekening. Van het oude programma-onderdeel trigonometrie en goniometrie is dus de trigonometrie vervallen. Voor zover het berekenen van hoeken en lijnstukken in een driehoek nog van belang is, is dit gedeelte, waarin het gebruik van de sinusregel en de cosinusregel beoefend wordt, ondergebracht bij de planimetrie.

Eenvoudige trigonometrische problemen waarbij geen meetkundige kennis is vereist en het gebruik van sinusregel en/of cosinusregel niet noodzakelijk is, maar waarbij het inzicht in het gedrag van functies als $\sin x$, $\cos x$ of $\operatorname{tg} x$ getoetst wordt, blijven wel tot de leerstof behoren, b.v. als in driehoek ABC geldt: $\cos A + \cos B = 1$, bewijs dan dat de hoeken A en B scherp zijn. De eerste afgeleide van logaritmische en exponentiële functies worden niet gevraagd. Bij het bepalen van primitieve functies van eenvoudige functies is geen kennis vereist van aparte methodes zoals substitutiemethodes en partieel integreren.

3. Meetkunde I omvat zowel de planimetrie als de stereometrie. De inversie komt niet meer in het programma voor, terwijl van de raakproblemen van Apollonius slechts de meest eenvoudige gehandhaafd zijn. Parate kennis over de rechte van Euler, de negenpuntscirkel en de rechte van Wallace is niet meer noodzakelijk.

De formules voor de inhoud van boldelen behoeven niet meer gekend te worden.

In verband met de analytische meetkunde is de planimetrische behandeling van pool en poollijn van een cirkel wel gewenst, echter zonder dat gebruik gemaakt wordt van harmonische puntenparen.

4. Het onderdeel meetkunde II is de tweedimensionale analytische meetkunde.

Daar dit onderdeel niet in het oude programma voorkomt, volgt hieronder een opsomming van de minimumleerstof voor dit onderdeel.

MEETKUNDE II

Analytische Meetkunde t.o.v. een rechthoekig assenstelsel

1. De plaatsbepaling van een punt op een lijn
 De plaatsbepaling van een punt in een vlak
 De plaatsbepaling van een punt op een lijnstuk
 De afstand van twee punten
 Translatie van een assenstelsel.
2. De vergelijking van een rechte lijn
 Het begrip richtingscoëfficiënt
 De bepaling van het snijpunt van twee lijnen
 De voorwaarde voor snijdende, evenwijdige en samenvallende lijnen
 De vergelijking van een lijn door een gegeven punt met een gegeven richtingscoëfficiënt
 De hoek van twee snijdende lijnen
 De loodrechte stand van twee lijnen
 De afstand van een punt tot een lijn
 Lineaire ongelijkheden: $ax + by + c > 0$ (of < 0)
 De lijnenbundel.
3. De algemene vergelijking van een cirkel
 De bepaling van de snijpunten van twee cirkels
 De raaklijn in een punt van de cirkel
 De hoek van twee cirkels
 De poollijn van een punt t.o.v. een cirkel
 De pool van een lijn t.o.v. een cirkel
 De macht van een punt t.o.v. een cirkel
 De machtlijn van twee cirkels
 Kwadratische ongelijkheden: $x^2 + y^2 + ax + by + c > 0$ (of < 0)
 De cirkelbundel.
4. Definities van parabool, ellips en hyperbool
 De vergelijking van een parabool met as // X -as of // Y -as
 De vergelijking van een ellips met assen // X -as en Y -as
 De vergelijking van een hyperbool met assen // X -as en Y -as
 De begrippen brandpunt en richtlijn bij deze kegelsneden
 Het begrip asymptoot van een hyperbool
 De orthogonale hyperbool met asymptoten // X -as en Y -as
 De bepaling van de snijpunten van twee kegelsneden
 De raaklijn in een punt van deze kegelsneden
 De normaal in een punt van deze kegelsneden
 De poollijn van een punt t.o.v. deze kegelsneden
 De pool van een lijn t.o.v. deze kegelsneden
 De hoek van twee kegelsneden
 Kwadratische ongelijkheden: $ax^2 + by^2 + cx + dy + e > 0$ (of < 0).
5. Meetkundige plaatsen (verzamelingen).

Het gebruik van vectoren is toegestaan, hoewel voorlopig de notatie in de examenopgaven overeenkomstig de notatie bij de eindexamenopgaven van het v.h.m.o. zal zijn.

In ieder geval worden de kegelsnedenbundels en de klassificatie van kegelsneden niet tot de examenstof gerekend.

Veel aandacht dient besteed te worden aan de gelijkwaardigheid van stelsels vergelijkingen en de gebruikelijke eliminatiemethoden. Een goed, niet te eenvoudig leerboek ten dienste van het v.h.m.o. geeft voldoende leerstof om het examenniveau voor dit onderdeel te bereiken. Als oefenmateriaal kunnen de examenopgaven v.h.m.o. sedert 1961 zeer goed gebruikt worden.

5. Voor didactiek en methodiek behoeft voortaan slechts één methode voor algebra en één methode voor meetkunde kritisch bestudeerd te worden. Nieuw is voorts, dat een deel van de examentijd besteed kan worden aan de bespreking van een verslag, gemaakt door de kandidaat, over een of meer lessen aan een school, waarvoor de akte wiskunde l.o. bevoegdheid geeft. Tevens bestaat de mogelijkheid, dat een gesprek over de door de kandidaat gelezen didactische, wiskunde-boeken of artikelen plaats vindt en de kritische bestudering daarvan door de kandidaat onderzocht wordt.

Naast de drie keuze-onderwerpen voor algebra en voor meetkunde uit de m.u.l.o.-leerstof voor het vak wiskunde, dient vooral het algemeen aspect van het wiskunde-onderwijs niet uit het oog verloren te worden, zoals het doel van het wiskunde-onderwijs, de keuze van de leerstof, vormen van lesgeven, algemene didactische beginselen, opstellen van een proefwerk, opgeven van huiswerk enz.

In het algemeen kan worden gesteld dat dit nieuwe programma voor de akte wiskunde l.o. een grote overeenkomst vertoont met de huidige examenstof voor de scholen van v.h.m.o., met dien verstande dat de planimetrie daar niet geëxamineerd wordt, terwijl hier de vlakke meetkunde een belangrijk onderdeel uitmaakt terwille van het feit, dat deze meetkunde op de m.u.l.o.-scholen een vooraanstaande plaats inneemt.

Derhalve zal het gebruik van speciale leerboeken voor de akte wiskunde l.o., behalve voor planimetrie, niet noodzakelijk meer zijn. Elk niet te eenvoudig, maar degelijk leerboek voor scholen van v.h.m.o. geeft voldoende leerstof en vraagstukkenmateriaal.

Bij de examens voor de akte wiskunde l.o. zal in 1967 en volgende jaren bij het schriftelijk gedeelte het accent minder op het juiste antwoord alleen, langs de weg van welke logische kronkelredeneringen ook verkregen, maar meer op de methode van oplossing en de exactheid van de gevolgde redeneringen liggen. Het mondeling

examen zal geen doublure van het schriftelijk examen zijn met grote vraagstukken, maar aan de hand van kleine sommen zal het begrip en het formuleren van de kandidaten getoetst worden.

Op deze wijze opent het nieuwe programma een weg in de richting van de moderne wiskunde, waarbij een grote hoeveelheid niet-functionerende parate kennis van weinig belang wordt geacht, maar waarbij het accent van de opleiding verschoven wordt naar logische opbouw, scherp formuleren en wiskundig inzicht.

Deze nieuwe ontwikkeling in het wiskundeonderwijs stelt zeker niet minder eisen aan de toekomstige wiskundeleraar dan vroeger, zodat een tweejarige opleiding voor dit examen in C-cursusverband met vier lesuren per week, aansluitend bij het niveau m.u.l.o.-B, naar het oordeel van vele opleiders niet meer voldoende is. Ernstig zal moeten worden overwogen of een driejarige opleiding in een rustiger tempo niet veel meer succes voor de kandidaten zal opleveren.

BOEKBESPREKING

S. Goldberg, *Die Wahrscheinlichkeit, Eine Einführung in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Vieweg, Braunschweig 1964, VIII+324 blz., DM 24.80.

Kenmerkend voor de behandelingswijze is de kansdefinitie, waarvan de schrijver uitgaat. Gegeven is een verzameling S van mogelijke uitkomsten van een experiment. Aan elk element van S wordt een positief getal toegevoegd. Aan elke deelverzameling van S wordt toegevoegd het getal, dat gelijk is aan de som van de getallen toegevoegd aan de elementen van deze deelverzameling. De getallen zijn zo gekozen, dat aan S het getal 1 toegevoegd wordt. Dit is dus de kansdefinitie, die overeenkomt met de axiomatische fundering van de kansrekening. Goldberg beperkt zich in zijn boek tot het geval van een eindige verzameling S .

Uitgaande van deze definitie wordt de kansrekening wiskundig streng opgebouwd. Daarbij komen ter sprake de gewone kanswetten, de wet van Bayes, gemiddelde, variatie en spreiding, covariatie en correlatie, binomiale verdeling en steekproeven.

Karakteristiek voor dit boek is, dat enerzijds de theorie zuiver wiskundig opgezet is, maar dat anderzijds voortdurend voor een rijk geschakeerd contact met de toepassing zorg gedragen is. Zodoende is het geenszins alleen maar een abstracte inleiding. Voor degene die de eerste beginselen van de statistiek goed wil begrijpen zonder zich te verdiepen in de veelvuldigheid van statistische methoden, is dit boek een voortreffelijk hulpmiddel. Voor leraren, die Statistiek van Dr. Bunt bij hun lessen in de A-afdeling van het gymnasium gebruiken, kan ik het boek het beste karakteriseren door: het is een beschouwing over de in het boek van Bunt behandelde stof, maar vanuit hoger gezichtspunt gezien. Inzonderheid voor deze docenten is het kennismaken van dit werk zeer aan te bevelen.

P. G. J. Vredenduin

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN

Op 17 december 1826 is Riemann te Breselenz (Hannover) geboren. In 1846 is hij te Göttingen gaan studeren. Van Pasen 1847 tot Pasen 1849 studeerde hij te Berlijn en daarna weer te Göttingen, waar hij op 16 december 1851 bij Gauss promoveerde. In 1855 volgde Dirichlet Gauss op te Göttingen; in 1859 werd deze op zijn beurt weer door Riemann opgevolgd, die al sinds 1857 buitengewoon hoogleraar was. Vanaf november 1862 verblijft Riemann vanwege zijn zwakke gezondheid in Italië. Tweemaal is hij nog voor korte tijd in Göttingen terug geweest. Op 20 juli 1866 — nu dus een eeuw geleden — is hij te Selasco aan het Lago Maggiore overleden, nog geen veertig jaren oud.

In zijn proefschrift *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* voert hij in wat sindsdien als „Riemann-oppervlakken” bekend is en met behulp waarvan een meerwaardige complexe functie als eenwaardig beschouwd kan worden.

Van zijn benoeming als privaatsdocent te Göttingen in 1854 stammen twee verhandelingen. In *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* begint § 4 met: „Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit. Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)dx$ zu verstehen?” De daarna gedefinieerde integraal wordt sindsdien naar hem genoemd. Aansluitend daarop leidt hij in § 5 nog een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor (Riemann-)integreerbaarheid van een functie af.

De andere verhandeling, die hij op 10 juni 1854 zelf voordragen heeft, is *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. In deze zeer algemeen opgezette beschouwing vinden mogelijke meetkunden een plaats; o.a. roert Riemann de meetkunden op oppervlakken met constante kromming aan. Hiermee krijgt de niet-euklidische meetkunde definitief een eigen en gelijkwaardige plaats naast de euklidische. Ook wijst hij op het belangrijke onderscheid tussen onbegrensde en oneindige van een ruimte: „... jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Massverhältnissen, ...”

De van Riemann afkomstige zeta-functie wordt behandeld in *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* van 1859.

A. J. E. M. Smeur

FUNCTIONIES EN FUNCTIE-NOTATIES

door

Prof. Dr. H. FREUDENTHAL

Utrecht

Sinds enige tijd is bij ons (en elders) de functie onderwerp van discussie. Nu qua verwarring wel het uiterste bereikt is¹⁾, waag ik het, mijn vinger op te steken, in de overtuiging dat het geen kwaad meer kan. Ik wil me dan onthouden van het verleidelijke gebruik van termen zoals „ouderwets” en „modern”, die blijkbaar niet alleen als het om dameskleding gaat tot meningsverschillen kunnen leiden.

Wel wil ik consequent van elkaar scheiden de problemen van functie-*definitie* en functie-*notatie*.

Ik preciseer meteen: met definitie bedoel ik niet een netjes neergeschreven volzin, maar het proces van het definiëren, de psychologische en didactische voorbereiding van het functiebegrip en de wijze waarop wij het actief hanteren. Veiligheidshalve wil ik daarom van functie-presentatie spreken. Het gaat dus nu om functie-presentatie en functie-notatie.

Het woord „functie” komt van Leibniz, maar het valt moeilijk om bij Leibniz ons functie-begrip te ontdekken, en in elk geval ontbreekt bij hem elke functie-notatie. Newton, Leibniz en Leibniz’ leerlingen opereren met — wat we tegenwoordig zouden noemen — grootheden. Die grootheden $x, y, z, \dots$ kunnen variëren, niet los van elkaar, maar in een zekere afhankelijkheid. Men geeft x een virtuele toeslag dx , kijkt naar de dy waarmee y oploopt, deelt dy door dx en krijgt een nieuwe grootheid, die men aan het systeem grootheden toevoegt. De relaties, die tussen de $x, y, z, \dots$ bestaan, worden niet of nauwelijks expliciet neergeschreven. Zo beoefende men in de 18e eeuw analyse, en aangezien de analytische mechanica in die tijd is ontstaan, doet men het tegenwoordig in de mechanica nog meestal net zo: men differentieert *de* weg naar *de* tijd, *de* snelheid naar *de* tijd, maar desnoods ook *de* snelheid naar *de* weg en *de* weg naar *de* snelheid, en bedoelt dan afgelegde weg,

¹⁾ Euclides 41, 144 — 151.

momentele snelheid van een zeker massapunt op een bepaald (variabel) tijdstip. Deze methode, ook op andere gebieden der fysica gebruikelijk (maar niet op alle, zeker niet op de nieuwere), hoewel iets naïef, is uiterst praktisch, en het ware te wensen, dat wiskundigen er meer aandacht aan besteedden en trachten haar te analyseren, om tot een logisch sluitend geheel te geraken. Jammer genoeg is deze methode in de vorige eeuw, voornamelijk door het toedoen van Jacobi, gecontamineerd met het functiebegrip. Het resultaat ervan is een inconsistente mengtaal, die geleidelijk, althans onder mathematici, buiten gebruik raakt. Onvolmaakte talen kunnen als communicatie-middel uitstekend voldoen. Als ik een figuur op het bord getekend heb en erop wijs, kan ik met naamgevingen als „dit punt” en „dat punt” volstaan om door de toehoorders (toezieners) te worden begrepen, en gebrekkig geformaliseerde redeneringen b.v. in de fysica worden door iedereen begrepen, die er dezelfde aanschouwelijke voorstellingen mee verbindt als de spreker. Maar in veel gevallen verdient een betrouwbaar formalisme de voorkeur boven het nogal omslachtige en onbetrouwbare aanschouwelijk redeneren.

Functie-notaties komt men voor het eerst bij Euler en d'Alembert tegen, bij de behandeling van de trillende snaar. Tot in 't begin van de 19e eeuw blijven dit echter geïsoleerde gevallen. Systematische uiteenzettingen van het functie-begrip vindt men pas in de 19e eeuwse leerboeken, b.v. in de geest van: een functie is een wet, die aan elk getal uit een zeker gebied een getal laat beantwoorden. Iets dergelijks was men trouwens ook in de 19e eeuwse meetkunde tegengekomen, onder de naam „afbeelding”. In de 20e eeuw kwam men erachter, dat functies eigenlijk speciale afbeeldingen zijn, en tegenwoordig worden de termen „functie” en „afbeelding” in principe synoniem gebruikt, met een zekere voorkeur voor de term „functie”, indien de beeldverzameling uit getallen of zoiets als getallen bestaat.

In de boven gegeven definitie van wat een functie zou zijn, verscheen het woord „wet”. Wat is een wet? Goed, laten we in plaats van wet zeggen: toevoeging. Het wordt er niet mooier door. Wel, een functie (afbeelding) van R in S is bekend, als ik voor elk element van R het element van S ken, dat erbij hoort. Dus is die functie niets anders dan een verzameling van paren, met het eerste lid uit R en het tweede uit S — een verzameling die uiteraard nog aan zekere eisen voldoen moet. Men zegt ook weleens, dat een functie een speciale relatie is, waarbij met relatie (tussen R en S) dan een willekeurige verzameling van paren met eerste lid uit R en tweede

uit S bedoeld is.

A propos relatie: Tot kort geleden verstond men onder relatie zo iets als „... ouder dan ...” d.w.z. een schéma waardoor aan een paar subjecten (b.v. Piet en Jan) een predicaat („Piet is ouder dan Jan”) werd toegevoegd. Aan deze „relatie” in logische zin beantwoordt er een in de boven genoemde verzamelingszin, zodra men de subjecten beperkt tot zekere verzamelingen R en S ; die paren, die de *logische relatie* waarmaken, vormen dan een *verzamelingsrelatie*. Maar natuurlijk zijn logische- en verzamelingsrelatie niet hetzelfde. Ik vind het jammer dat men de logici van hún term relatie, die ze dringend nodig hebben, heeft beroofd.

De laatste alinea is geen overbodig zijsprongetje. Wat met het woord „wet” daarstraks bedoeld wordt, is namelijk een logische relatie, een relatie, die, waargemaakt aan elk element van R een van S toevoegt. Het is een aardigheid, om deze logische relatie in een verzamelingstheoretische te vertalen, maar meer dan een aardigheid is het dan ook niet. De verzamelingstheoretische definitie van functie is niets exakter dan de oorspronkelijke mits men de term „wet” verstaat als „logische relatie met die en die eigenschappen”.

En nu de hoofdvraag: Hoe moet men de functie aan de leerling presenteren? Volgens de eerste methode („een wet, ...”) of volgens de tweede („een deelverzameling van ...”). Laten we enkele functies de revue passeren, die als voorbeelden dienst kunnen doen. „Het huisnummer van ...” — moet ik eerst aan elk huis alle denkbare huisnummers plakken en dan de niet gewenste doorschrappen, om in te zien, dat dit een functie is, of moet ik doodsimpel zeggen: bij elk huis staat een nummer, dat nummer is eraan toegevoegd en die toevoeging noem ik een functie (of afbeelding)? „Moeder van ...”, „het dubbele van ...”, „bovengrens van ...” — al deze functies vertonen dezelfde aanschouwelijke structuur van het afbeelden, van het toevoegen van het een aan het ander — door het algemeen relatie-begrip (logisch of verzamelingstheoretisch) erbij te halen, verduistert men ze alleen.

Dit was punt één. Punt twee is het samenstellen van functies. Het laat zich redelijk motiveren alleen vanuit het afbeeldingskarakter van de functie; van het relatie-standpunt is het een gezochte en onbegrijpelijke operatie.

Punt drie, het gewichtigste: De relatie-definitie van de functie wordt naar inhoud en schrijfwijze nooit toegepast. Ik heb dit in tal van boeken geverifieerd. Een keer ingevoerd, mag zij onmiddellijk worden vergeten en zij blijft zelfs in die enkele gevallen

vergeten, waar men haar nog eens met succes zou kunnen toepassen. Wel, ik moet een uitzondering maken: in sommige schoolboeken is er oefenmateriaal om met deze definitie te exerceren, uiteraard ook weer om, na ingeoefend te zijn, te worden bijgezet. Een noodlottige nasleep: iets wat gebleken is, voor geen reële toepassing vatbaar te zijn, ontwikkelt zich, omdat het toch maar geoefend moet worden, tot een apart hoofdstuk schoolwiskunde, dat met de werkelijke wiskunde niets gemeen heeft — iedereen weet hoe hardnekkig zich zoiets, een keer geïntroduceerd, kan handhaven.

Tot zover de presentatie van het functiebegrip.

Nu de notatie.

In de laatste kwarteeuw is er geweldig veel veranderd in het mathematisch taalgebruik — ik bedoel hiermee zowel de formuletaal als ook de taal rondom de formules. Achteraf verbaast men zich er wel over, hoe lang het heeft geduurd. Ook de wiskundige gooit zijn oude schoenen niet weg voor hij er zeker van is, dat de nieuwe niet knellen. Men bezigt spreekwijzen en notaties, waaraan men gewend is, zolang als het enigszins kan, en nog iets langer, en men bekeert zich tot de nieuwe, als het absoluut niet anders meer kan.

Een functie werd traditioneel door $f(x)$ of door $y = f(x)$ of door $F(x, y) = 0$ aangegeven (waarbij nog in het midden bleef, wie functie van wie was).

Met die traditionele functie-notatie ging het zolang goed, als men telkens met één functie te maken had. Met de functionaalanalyse, met de homotopie in de topologie, en geleidelijk op steeds meer gebieden, deden verzamelingen, ruimten, ringen, idealen van functies hun intrede. Hoe nu aan te duiden, dat zo'n functie tot een zekere verzameling A van functies behoort? $f(x) \in A$ zegt iets over het toebehoren van de functiewaarde, niet van de functie, tot A , en $(y = f(x)) \in A$ of $(F(x, y) = 0) \in A$ zijn volmaakte nonsens. De enige oplossing: de bedoelde functie heet f en zijn toebehoren tot A wordt door $f \in A$ aangeduid. Dit is één voorbeeld uit vele, om de onhoudbaarheid van zekere slecht doordachte functie-notaties aan te tonen. (Ze zijn snel aan het verdwijnen, althans in de wiskunde.) De functie (afbeelding), die aan elke mens zijn moeder toevoegt, wordt thans door „moeder van” en niet door „moeder van x ” aangeduid, de functie die $f(x)$ aan x toevoegt, door f , de functie, die $\log x$ aan x toevoegt, door $\log$.

Wat nu te doen met de functie die aan x toevoegt $x^2 - 3x + 2$? Men moet op de ene of andere wijze aanduiden, dat en hoe de variabele x in deze uitdrukking gebonden wordt. Sommigen doen

het door omschrijvingen, b.v.

zij f de functie, gedefinieerd door

$$f(x) = x^2 - 3x + 2. \quad (1)$$

Dit is uiterst omslachtig en op den duur nauwelijks door te voeren.

Anderen preferen

$$x \rightarrow x^2 - 3x + 2; \quad (2)$$

logici zijn aan Church's λ gewend, dus

$$(\lambda x)(x^2 - 3x + 2). \quad (3)$$

Ik heb in navolging van Russell

$$\forall (x^2 - 3x + 2)$$

willen voorstellen, maar heb achteraf om typografische redenen de $\forall$ op een stokje voor de variabele geplaatst, dus

$$\forall_x (x^2 - 3x + 2).$$

Het gebied, waarin de variabele x zal variëren, kan hier gemakkelijk worden vermeld, b.v.

$$\forall_{3 \leq x < 4} (x^2 - 3x + 2).$$

Bij (2) is dat minder gemakkelijk. Bij (3) wordt de anders onmisbare letter λ gefixeerd; dit is zeer bezwaarlijk. Tegen (1) en (2) is er nog een ander bezwaar.

Stel we beschouwen een vector-ruimte R .

$$\forall_x (x + a)$$

is de translatie over de vector a .

$$\forall_a \forall_x (x + a)$$

is de (vaak nodige) afbeelding die aan de vector a de translatie over a toevoegt.

Volgens de methode (1) zou men zo iets als volgt moeten formuleren:

Zij T_a gedefinieerd door

$$T_a x = x + a \text{ voor alle } x \in R.$$

Dan wordt T gedefinieerd door:

$$Ta = T_a \text{ voor alle } a \in R.$$

Volgens (2) zou men de te definiëren afbeelding door

$$a \rightarrow (x \rightarrow x + a)$$

moeten aanduiden, hetgeen moeilijk leesbaar is — vooral bij verdere ophoping van pijlen.

Een analoog voorbeeld: We beschouwen een groep G ,

$$\bigcup_x axa^{-1}$$

is een inwendig automorfisme van G .

$$\bigcup_a \bigcup_x axa^{-1}$$

is een belangrijk homomorfisme, nl. van de groep der inwendige automorfismen van G op G .

Nog een voorbeeld: f is een functie van een reële variabele,

$$\bigcup_x f(x - a)$$

is de over a verschoven functie,

$$\bigcup_f \bigcup_x f(x - a)$$

is de verschuiving (over a) van functies,

$$\bigcup_a \bigcup_f \bigcup_x f(x - a)$$

is de afbeelding die aan a de verschuiving over a van functies toevoegt.

Tenslotte: hoort deze of een dergelijke functie-notatie op de school thuis? Het antwoord is ja, indien de behoefte eraan zich voordoet. Of dit het geval is, zal van het programma en van zijn uitwerking afhangen.

BOEKBESPREKING

R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis* dl. I, J. Wiley and Sons, London, 1965, 650 blz., 80/—.

In de juiste zin van het woord is dit boek een inleiding in de klassieke theorie van functies van een variabele. De vrees, dat een in 1965 versijnd boek voor een beginner „onleesbaar” is door het grote aantal symbolen en de uiterste abstractie, is ongegrond. Integendeel, de schrijvers verliezen de band met de historische ontwikkeling niet uit het oog en abstracties komen nooit zo maar uit de lucht vallen. Door de prettige stijl is dit een zeer bruikbaar studieboek.

Ter oriëntatie een korte inhoudsopgave.

De verzameling van de reële getallen, het begrip functie, (rationale, algebraïsche, trigonometrische, exponentiële, logaritmische, samengestelde en inverse functies), rijen, volledige inductie, limieten, convergentie-kenmerken, continuïteit, integraalrekening, de afgeleide, differentieerbaarheid, de theorie van vlakke krommen, vectoren in R_2 , ontwikkeling volgens Taylor, differentiaalvergelijkingen, oneindige produkten, rijen van functies, machtreksen, fourier reeksen.

En alle onderwerpen worden begeleid met geheel uitgewerkte voorbeelden, goed geïllustreerd en met opgaven, dus oefenmateriaal in overvloed.

Burgers

NODIG EN VOLDOENDE, ONNODIG EN ONVOLDOENDE.¹⁾

door

Prof. Dr. H. J. A. DUPARC

Delft

Zodra een wiskundige in de formulering van een stelling de woorden nodig en voldoende gebruikt, zijn zijn collegae stellig geneigd te oordelen dat hij uit het ware wiskundige hout is gesneden. Er zijn echter momenten waar de woorden nodig en voldoende een iets minder absolute betekenis hebben, zeker als het gaat om de stof in de diverse stadia van wiskunde-onderwijs. Het is daarbij nodig dat men de bedoeling van dit onderwijs bij de onderscheiden categorieën leerlingen niet uit het oog verliest.

Een aantal jaren geleden is bij het V.H.M.O. een wijziging in het programma opgetreden, waarbij de pijl zijn entree in het onderwijs deed, de pijl in de notatie bij het limietbegrip, nodig voor de differentiaal- en integraalrekening. Er zijn vernieuwers die wel drie pijlen op hun boog hebben, namelijk ook nog de pijlen der implicatie en der vectorrekening. Is dat ook nodig? Modern lijkt het stellig, maar dat feit alleen is onvoldoende om zoiets te propageren.

Laten wij ons even bezinnen op mutaties in het programma in het algemeen. Dat ze er zijn is duidelijk en dat onderwerpen die eens in het H.O. werden gegeven „devalueren” en via V.H.O. zelfs naar het L.O. kunnen doordringen is bekend: voor het rekenen, vroeger een geheime kunde van weinigen, haalt men nu al zijn neus op bij het L.O.: zoiets kan een automaat, desgewenst een rekenautomaat. De mens en de leerlingen zijn, zo oordeelt men dan, voor hogere zaken geschapen. De schaduwzijde van deze ontwikkeling is echter niet weg te cijferen.

Dat het onderwijs evolueert is duidelijk. Het is een bekend verschijnsel dat men zich bepaalde stof goed eigen maakt als men die in een of andere vorm globaal de lijn der historische ontwikkeling laat volgen. Opvallend is het dat de oude meetkunde van Euclides nog steeds — terecht — haar stempel sterk op dit onderwijs kan blijven drukken. Ook thans nog oordelen wiskundigen dat de

¹⁾ Voordracht gehouden tijdens het Tweede Nederlandse Mathematische Congres op 15 april 1966 te Heerlen.

Elementen van Euclides tot een der beste ooit geschreven leerboeken behoren.

Vreemd kan het lijken dat het vervolg, de beschrijvende meetkunde (der 19e eeuw) werd vervangen door de analytische meetkunde (der 17e eeuw): in dit geval was een vooruitgang een stap terug van eeuwen. Moeten wij dit nu inhalen en overgaan tot de lineaire algebra, een uitgewerkt produkt van de 20e eeuw (en wellicht weldra tot zaken van de 21e eeuw)? Ik geef toe dat de lineaire algebra zich uiterst fraai laat formaliseren en zelfs dat leerlingen — als ik goed ben ingelicht — reeds op zeer jeugdige leeftijd in staat zijn tot het verwerken van en werken met dergelijke systemen. Maar als het bij dit spelletje blijft, is men er niet. Te vaak blijken de leerlingen niet in staat te zijn de dan ontwikkelde calcul toe te passen op concrete gevallen, zodat de dan gevolgde methode onvoldoende is.

Er wordt wel beweerd dat het veel educatiever is om de leerlingen te trainen in een fraai eenvoudig stelsel als de lineaire algebra is, dan in het ingewikkelde systeem der meetkunde van Euclides, een warboel voor hen tot wie het blijkbaar onvoldoende heeft gesproken. Gaarne teken ik daartegen verzet aan. Wie klassieke meetkunde bedrijft dient voor een hem gesteld vraagstuk uit de rijke veelheid der stellingen die uit te zoeken, die hem de oplossing van het vraagstuk zullen brengen, net als iemand die zich door een dicht bos met vele wegen een weg moet banen naar een begeerd punt. Men moet daarbij ingenieus zijn: het ontwikkelen van dit soort talent is uiterst nuttig voor hen die zich later een of ander (praktisch) probleem gesteld krijgen en maar moeten zien hoe zij met de hun ter beschikking staande middelen de oplossing vinden. Deze wijze van ingenieus zijn is een kunde die elke ingenieur alleen maar van nut kan zijn. Bij de vlakke meetkunde is het nog extra plezierig, dat men zijn vermoedens kan verifiëren aan een tekening, een duidelijke weerspiegeling van het feit dat de meetkunde ons een beschrijving geeft van onze fysische ruimte (niet-euclidische afwijkingen daargelaten).

Misschien is het aan te bevelen enkele wijzigingen in de meetkunde van Euclides te tolereren. Axiomatisch is deze lang niet eenvoudig. In het begin liggen moeilijke stellingen en eigenschappen waarvan soms de bewijzen in het bewuste stadium van het leerplan voor de leerlingen onverteerbaar zijn, ofwel van een dusdanige afwijkende structuur, dat zij in latere bewijzen niet meer optreden. Ik zou er voor zijn bepaalde eigenschappen over evenwijdige lijnen en daarbij optredende hoeken maar zonder bewijs te poneren. Ook

ben ik bereid de congruentiegevallen als axioma's te nemen; handtastelijke bewijzen met opnemen van driehoeken of figuren treden erna in de meetkunde niet meer op. Verdere stellingen kunnen juist met behulp van die congruentiegevallen worden geleverd. (Evenmin voel ik veel voor een poging om met spiegelingen dit complex van eigenschappen op te bouwen).

Na de planimetrie en stereometrie is naar mijn oordeel de analytische meetkunde in het V.H.M.O. zeer op haar plaats. De lineaire algebra zag ik liefst bij het H.O. Wie al te veel moderne theorieën naar het V.H.M.O. wil verwijzen, ondervindt dat klassieke nuttige feiten daar in het gedrang komen. Dan zou men bij het H.O. moeten inhalen wat bij het V.H.M.O. thuis hoort, juist doordat het V.H.M.O. wezenlijke H.O.-stof tot zich heeft getrokken. De chaos wordt compleet.

Ook bij het algebra-onderwijs traden en treden mutaties op. Reeds heeft de infinitesimaalrekening er haar entree gedaan, waarvoor in het programma enkele minder nuttige traditionele onderwerpen dienden plaats te maken. Er zijn groeperingen, die het daarbij niet willen laten. Men speelt met de gedachte aan verzamelingsleer en logica en dan moet men andermaal enkele klassieke zaken laten schieten. Zolang de nieuwe onderwerpen dienen om de terminologie wat scherper te maken dan voorheen, bestaat er naar mijn oordeel geen bezwaar tegen ze in te voeren. Nu reeds schijnt de pijn der implicatie populairder te zijn in ons onderwijs, dan het klassieke drietal puntjes voor het begrip „dus”.

Men vermijde het de nieuwe symbolen tot systeem te verheffen en de er dan uit te voorschijn komende calcul tot cultus. Zo'n calcul spreekt pas tot een leerling als de calcul met normale getallen al behandeld is en stellig niet voordien. Het manipuleren met logische formules kan bij het H.O. een doel in zichzelf zijn, bij het V.H.M.O. beseffe men terdege waar de grenzen liggen en houde men de aansluiting met dat deel der wiskunde, waarop het wordt toegepast, in het oog. Er zouden anekdotes te vertellen zijn over leerlingen of studenten, die menen dat een iets scherpere terminologie moeilijke stellingen ineens een bewijs verschaft. Zij doorzien de bedoeling van de nieuwe begrippen niet, wellicht door een teveel aan aandacht die de abstracte uiteenzettingen over het nieuwe systeem hebben genoten.

Bij het V.H.M.O. is een te sterk formalisme in abstracto verwerpelijk. Zo zijn er mensen die de grafieken of functies willen invoeren via een relaas over relaties en getallenparen. Lettend op het concrete nut van deze begrippen prefereer ik een aanschouwelijke

behandeling met een plaatje. In verreweg de meeste gevallen is men daar meer mee gebaat.

Ook als nieuwe begrippen een nuttige basis voor later gebruik geven (logica voor programmeren; lineaire algebra voor economische problemen), houde men bij hun invoering er terdege rekening mee, dat men concreet blijve. Dat is de primaire taak voor het V.H.M.O., evenzeer voor het toekomstige H.A.V.O. en M.A.V.O. De vreugde over introductie van nieuwe gebieden moge nimmer voeren tot een onnodige abstracte uitbouw van zo'n gebied. Een abstracte uitbouw dient pas te geschieden bij het H.O. en alleen maar voor de relatief zeer kleine groep der eigenlijke wiskunde-studenten.

Tot slot nog een enkele opmerking over weglaten van onderwerpen uit het traditionele programma. Men zij daarmee zeer voorzichtig. Vele op zichzelf minder belangrijke onderwerpen kunnen een goede training bieden van uiterst nuttige theorie. Wie deze — zelfs als vraagstuk — niet meer wil behandelen, maakt dat de eigenlijke theorie onvoldoende vaak wordt gebruikt, zodat de leerlingen deze onvoldoende of minder voldoende beheersen, een euvel dat zich vaak later pas ernstig manifesteert.

Als men zich met een te eng bepaald of verschaald vakgebied tevreden stelt, riskeert men dat het onvoldoende het geestelijke eigendom wordt van de leerlingen; zo'n beperking is onnodig en ongewenst.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXIII. *Een kwestie van wrijving*

Een horizontale stok rust in A_1 en in A_2 op de snede van een gestrekte hand. Beweegt men de armen langzaam naar elkaar toe, dan constateert men dat aanvankelijk slechts in één der beide steunpunten een relatieve verplaatsing van stok en hand tot stand komt, en wel in dat steunpunt dat het verst van het zwaartepunt Z verwijderd is. Vanaf het ogenblik dat ZA_1 en ZA_2 gelijk zijn geworden bewegen A_1 en A_2 met gelijke, tegengesteld gerichte snelheid langs de stok en onder het punt Z ontmoeten zij elkaar.

Het verschijnsel vindt zijn eenvoudige verklaring in de wetten van de wrijving. Zij G het gewicht van de stok, f de-voor beide steunpunten en voor de gehele stok constant veronderstelde-wrijvingscoëfficiënt, $ZA_i = x_i$, voor de beginstand $x_i = a_i$ en voorts G_i de normale reactiekracht in A_i ($i = 1, 2$). Dan is

$$G_1 = G \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad G_2 = G \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

en de maximale waarde van de wrijvingskracht in A_i is fG_i .

Zij $a_1 > a_2$, dan is aanvankelijk $G_2 > G_1$. Wil men de beide steunpunten met de geringste krachtsinspanning naar elkaar toe brengen, dan moet op A_1 de naar Z gerichte kracht fG_1 werken — in het begin even een iets grotere kracht om de beweging in te leiden. Deze constellatie duurt totdat x_1 is afgenomen tot a_2 , van dan af is $G_1 = G_2 = \frac{1}{2}G$ en twee naar elkander gerichte krachten, elk $\frac{1}{2}fG$ houden de zaak gaande.

(Als men de proef uitvoert, wil wel eens één van de handen achterblijven en dan weer gaan inhalen, vermoedelijk omdat de maximale wrijvingskracht voor bewegend contact toch kleiner is dan in het statische geval).

Men kan vragen naar de (minimale) arbeid, die verricht moet worden om A_1 en A_2 tot elkaar te brengen. Voor de eerste fase van

de beweging is blijkbaar vereist

$$W_1 = \int_{a_1}^{a_2} -fG \frac{a_2}{x_1 + a_2} dx_1 = fGa_2 \log \frac{a_1 + a_2}{2a_2}$$

en voor de tweede fase

$$W_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} fGa_2 = fGa_2$$

en dus voor het gehele proces de arbeidsprestatie

$$W = W_1 + W_2 = fga_2 \left(1 + \log \frac{a_1 + a_2}{2a_2} \right)$$

BERICHTEN

VAKANTIECURSUS 1966

uitgaande van het Mathematisch Centrum, georganiseerd voor leraren in de wiskunde en andere belangstellenden.

Op *donderdag 18 en vrijdag 19 augustus*, a.s. zal in het Geologisch Instituut der Universiteit van Amsterdam, Nwe Prinsengracht 130 te Amsterdam, de Vakantiecursus 1966 plaatsvinden. Als centraal thema is een onderwerp gekozen uit de Analyse, te weten

„Zadelpuntsmethoden”.

Over dit onderwerp zal een 6-tal lezingen plaatsvinden, welke alle zullen worden gegeven door Prof. dr. N. G. de Bruijn (T. H. Eindhoven); de eerste dag 's morgens één en 's middags twee lezingen, de tweede dag 's morgens twee lezingen en 's middags één. Elke lezing zal ongeveer één uur duren.

Opening de eerste dag te 10.30 uur, sluiting de tweede dag te omstreeks 15.30 uur.

De deelnemerskosten bedragen f 5,—, waarin de kosten van de uit te reiken syllabus zijn inbegrepen.

Op beide dagen bestaat gelegenheid tot deelneming aan een gezamenlijke lunch, waarvan de kosten f 2.50 per persoon per lunch bedragen.

Het ligt in de bedoeling aan deze cursus wederom een tentoonstelling van wiskunde leer- en studieboeken te verbinden.

Aanmelding voor de cursus bij voorkeur vóór 10 augustus a.s.

De aandacht wordt er op gevestigd, dat logies niet door het Mathematisch Centrum kan worden verzorgd.

Leraren V.H.M.O. kunnen gehele of gedeeltelijke reiskostenvergoeding ontvangen. Gegadigden dienen gebruik te maken van een declaratieformulier, dat op de cursus zal worden uitgereikt.

MATHEMATISCH CENTRUM

WIMECOS

De penningmeester van Wimecos maakt de leden er op attent dat het reeds nu mogelijk is hun contributie voor het verenigingsjaar 1966—1967 ten bedrage van f 9.— (inclusief toezending van Euclides) te storten op postrekening 143917 t.n.v. Wimecos, Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen wordt verzocht hun contributie ten bedrage van f 3.50 over te maken.

BOEKBESPREKING

A. J. van Rooy, *Die onderwys van wiskunde, algemene wiskunde en rekenkunde aan die openbare middelbare en hoërskole vir blankes in Suid-Afrika*, 579 blz., Navorsingsreeks nr. 24 van het Nasionale Buro vir Opvoedkundige en Maatskaplike Navorsing, Pretoria, 1965.

Ook Zuid-Afrika staat ten aanzien van het wiskunde-onderwijs aan de vooravond van ingrijpende herzieningen. De bevoegde autoriteiten hebben naar aanleiding van een verzoek van de Zuid-Afrikaanse Wiskundevereniging in 1961 een Adviescomité van brede samenstelling in het leven geroepen dat tot taak kreeg over de huidige stand van het wiskunde-onderwijs te rapporteren. De toevoeging „vir blankes” in de titel van het rapport wijst er echter op dat het lijvige en ongetwijfeld belangrijke rapport dat voor ons ligt, tenslotte toch slechts betrekking heeft op een deel van de Zuid-Afrikaanse bevolking. Dankbaar voor de hier verstrekte inlichtingen blijven we uitzien naar een analoog rapport over het wiskunde-onderwijs aan de niet-blanke bevolking.

Basis voor het onderzoek is geweest een viervoudige enquête gehouden onder de schoolleiders van middelbare scholen, de universiteiten, de wiskundedocenten en de leraren in de methodiek van het wiskundeonderwijs.

Doel van het onderzoek was daarbij:

- a. informatie te verstrekken over de gangbare opvattingen die men aantreft over doel en waarde van het wiskunde onderwijs;
- b. een kritische analyse te geven van de huidige onderwijsmethoden;
- c. wegen te wijzen waarlangs de kloof tussen middelbaar en universitair onderwijs in de wiskunde zou kunnen worden overbrugd;
- d. aan te geven op welke wijze een wezenlijke verbetering van het onderwijs zou kunnen worden tot stand gebracht.

De opzet van het onderzoek brengt mede, dat we geconfronteerd worden met een bonte veelheid van meningen. De rapporteur is zelf pessimistisch ten aanzien van het niveau van een deel van zijn materiaal. „Wanneer gevraagd wordt wat bijvoorbeeld die sentrale begrip is, bly die meerderheid 'n antwoord skuldig, terwyl dit duidelik is dat baie van dié wat wel geantwoord het, geraai het. Talle onderwysers het deur hulle antwoorde getoon dat hulle niet eers weet wat 'n wiskundige begrip is nie” (247).

Voorts zal het niet verwonderen dat de voorstellen tot verbetering parallel lopen aan die welke in West-Europa en Amerika worden gelanceerd of waarmee reeds wordt geëxperimenteerd.

Uitvoerige citaten illustreren de gangbare opvattingen en de uitgeoefende kritiek. Ze zijn gekozen uit 123 verschillende geschriften waaronder we tal van Nederlandse aantreffen. Er wordt o.a. verwezen naar Beth, van Dantzig, Bunt, Brinkman, Vredenduin, naar de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en naar de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Het aantal verwijzingen naar „*Euclides*” is groot. Dit is niet zo verwonderlijk als men bedenkt dat de naam van een der comitésleden, prof. D. J. van Rooy, tot diens dood (1964) in de lijst van medewerkers van ons tijdschrift te vinden is geweest. Het valt op dat de Belgische experimenten, met name die onder leiding van Papy, niet worden vermeld. De oorzaken van deze niet-vermelding liggen waarschijnlijk op taalkundig gebied; er wordt alleen naar Nederlandse (Afrikaanse) en Engelse lectuur verwezen.

Als in Nederland kent ook Zuid-Afrika oriënteringscursussen, en wel onder de naam „opknappingskursusse”. Als in Nederland heeft men te kampen met een lerarentekort. „’n Poging om meer dogters aan te moedig om wiskunde-onderwyzeresse te word, mag die tekort verlig” (445) Als onderwerpen geschikt om aan de gangbare leerstof toe te voegen worden o.a. genoemd onderwerpen uit de verzamelingsleer, de topologie, de statistiek, de infinitesimaalrekening, de lineaire algebra.

Interessant is het na te gaan welke de centrale begrippen in de wiskunde volgens de ondervraagden zijn. Bijna een derde deel van de docenten onthoudt zich hier van elk oordeel. Verder wordt aangegeven:

- de logische redenering als centraal begrip voor de wiskunde;
- het verhoudingsbegrip als centraal begrip in rekenkunde en driehoeksmeting;
- de begrippen functie en vergelijking als centrale begrippen in de algebra;
- de begrippen betrekking en congruentie als centrale begrippen in de meetkunde.

Voor het verzamelingsbegrip als centraal begrip in de wiskunde spreekt zich minder dan 1 % van de ondervraagden uit.

Aan het probleem van een betrouwbare toetsing van leer- en onderwijsresultaten (het evaluatieprobleem) wordt in het rapport veel aandacht besteed. Meer dan 60 % van de docenten blijkt behoefte te hebben aan wetenschappelijk opgestelde toetsen (281); de behoefte is bij de bevoegde leraren groter dan bij de onbevoegde! Slechts 24 % van de docenten „maak gebruik van meetmiddels waarmee die wiskundige en rekenvermoë van leerlinge objektief bepaal kan word”. Ik zou het op prijs gesteld hebben als in het rapport voorbeelden waren opgenomen waaruit in concreto bleek wat men nu precies onder deze objectieve tests verstaat.

Er wordt in Zuid-Afrika behoefte gevoeld aan een wiskunde-tijdschrift voor jongeren. Terwijl bijvoorbeeld van de Nederlandse Wiskunde-Olympiades uitvoerig gewag wordt gemaakt, blijkt echter uit niets dat men ginds ook van het succes van ons tijdschrift „*Pythagoras*” op de hoogte is.

Ik moet ervan afzien te specificeren welke de onderwerpen zijn die in de hoofdstukken over de leerlingen, de leerstof, de methoden, de beschikbare tijd, de leerboeken en de examens achtereenvolgens aan de orde komen. Voor allen die belang stellen in de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in het buitenland, in het bijzonder voor allen die belast zijn met de pedagogisch-didactische vorming van de wiskundeleraren acht ik dit rapport vanwege de extensieve informatie die het bevat van betekenis.

Voor een eerste oriëntatie over de wiskunde op de scholen in Zuid-Afrika moge ik tenslotte verwijzen naar een artikel van dr. H. Turkstra in de 36e jaargang van *Euclides* (p. 97—108).

Joh: H. Wansink.

Erwin Kreyszig, *Statistische Methoden und ihre Anwendungen*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965, 422 blz., 32 DM.

Het boek geeft een traditionele inleiding in de statistiek: beschrijvende statistiek, kansrekening, kansverdelingen, beoordelende statistiek (tests, methode van de kleinste kwadraten, foutenanalyse, correlatierekening, e.d.). Het boek is in eerste instantie ingesteld op hen, die kennis van statistiek nodig hebben om deze te kunnen toepassen. Degene, die een boek over statistiek wenst om zich op de hoogte te stellen van de theoretische achtergronden van dit vak, zal bij lezing enige teleurstelling ondervinden. Zo vindt men wel een zeer goede behandeling van de poissonverdeling, maar helaas geen daarmee parallel lopende behandeling van de normaalverdeling. Dit vindt zijn oorzaak daarin, dat de schrijver bij het laatste onderwerp het hoe primair stelt boven het waarom. Soms ook is de uiteenzetting niet helder. Zo zal de niet ingewijde m.i. moeite hebben met de behandeling van de steekproeven op blz. 207—210; in het bijzonder komt de rol van u_1 niet uit de verf.

Het boek is typografisch zeer goed verzorgd. Veel voorbeelden, aan de praktijk ontleend, lichten de bedoeling van de theorie toe.

P. G. J. Vredenduin

Dutch Classics on History of Science, deel XV, Stevin, S., De thiende 1585. Facsimile with an introduction by A. J. E. M. Smeur, De Graaf, Nieuwkoop, 1965, 72 blz., f 32.—

In dit boekje vindt men de behandeling van het rekenen met tiendelige breuken in de ons zo vanzelfsprekende decimale ontwikkeling.

Van de oorspronkelijke uitgave zijn nog slechts een klein aantal exemplaren over.

Voor historisch geïnteresseerden. Van deze uitgave werden slechts 600 exemplaren gedrukt.

Burgers

Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc.; New York/London/Sidney, 1964, 612 pages, 150 sh.

Een gedegen standaardwerk over de theorie der gewone differentiaalvergelijkingen. Hartman, hoogleraar aan de John Hopkins University in Maryland (U.S.A.), schreef dit boek naar aanleiding van een aantal door hem gegeven colleges voor gevorderde studenten in de wiskunde, natuurkunde en technische wetenschappen. Hij greep daarbij de gelegenheid aan om een aantal onderwerpen diepgaander te behandelen dan meestal in studieboeken het geval is.

De eerste hoofdstukken bevatten de basis voor de behandeling van de overige stof: existentie- en uniciteitstheorema's, differentiaal-ongelijkheden. Vervolgens neemt de bespreking van stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen een belangrijke plaats in; daarbij wordt aan de afhankelijkheid der oplossingen van begin- (rand-) voorwaarden veel aandacht besteed. De meetkundige interpretatie van oplossingen van differentiaalvergelijkingen in een plat vlak geeft de auteur de gelegenheid een fraai hoofdstuk te schrijven, waarin uitvoerig op de theorie van Poincaré-Bendixson wordt ingegaan. Andere belangrijke problemen als: linearisering van differentiaalvergelijkingen, gestoorde lineaire systemen, lineaire systemen van de tweede orde, asymptotische benaderingen van oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen, komen in andere hoofdstukken aan de orde. Hartman laat zien hoe sommige in gebruik zijnde methoden gegeneraliseerd dan wel vereenvoudigd

kunnen worden, bijv. door gebruik te maken van methoden uit de functionaal-analyse of door de problemen als afbeeldingsproblemen te beschouwen. Het boek besluit met enkele capita selecta (algemene theorie van niet-homogene stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste orde in banach-ruimten; dichotomieën voor oplossingen van lineaire vergelijkingen; monotoniekwesties).

De behandeling van de theorie wordt voortdurend door toepasselijke opgaven onderbroken. Voor het oplossen der minder eenvoudige problemen worden aan het einde van het boek aanwijzingen gegeven, die 22 bladzijden beslaan. Ieder hoofdstuk besluit met een overzicht van de herkomst der behandelde theorema's en lemma's, met literatuurverwijzing. Aan het slot van het boek is een alfabetische bibliografie van 25 bladzijden opgenomen.

Een standaardwerk als dat van Hartman stelt aan degenen die het bestudeert uiteraard eisen. Voor wie de studiezijn opbrengt om zich in boeiende problemen, verbonden aan differentiaalvergelijkingen, te verdiepen, is het een uitstekende gids.

W. J. Claas

Georges Papy, *Einführung in die Vektorräume*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965, 74 blz., DM 8.80.

(Vertaald uit het Frans; de Franse titel luidt: Initiation aux espaces vectoriels.)

Het boekje is een inleiding in de lineaire algebra. Behandeld worden de grondbeginselen, daarna volgen de lineaire afbeeldingen en een instructief hoofdstuk over lineaire vergelijkingen, waarna ten slotte nog kort de factorruimten en de homomorfismen ter sprake komen. De wijze van behandeling is, zoals we dat van de schrijver gewend zijn. Centraal is bij hem het aankweken van de kennis van de fundamentele begrippen. Men vindt dan ook veel definities, toegelicht aan voorbeelden en door vraagstukken. Hoewel stellingen natuurlijk een rol spelen, is deze toch secundair. De stellingen, die voorkomen, vereisen slechts eenvoudige bewijzen. Zeer fraai is het bewijs van de stelling der uniciteit van de dimensie. Degenen, die in kort bestek een overzicht over de grondprincipes van de lineaire algebra wensen op een zodanige wijze, dat ze er werkelijk wat van leren, kan ik dit boekje warm aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

Dr. A. F. Monna: *Beschouwingen over onderzoek en onderwijs in de wiskunde*, rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar aan de R.U. te Utrecht, J. B. Wolters, Groningen, f 1,90.

Professor Monna heeft getracht iets mee te delen — ik citeer hem zelf — over het moderne onderzoek in de wiskunde en over de consequenties daarvan voor het onderwijs, in het bijzonder voor V.H.M.O. Hij merkt terecht op, dat het hierbij gaat om een belangrijke problematiek. Er worden enige opmerkingen gemaakt over het laten aansluiten van de leerstof en de behandelingswijze bij de moderne wiskunde.

Hoewel de aard van de beschouwing geen uitputtende behandeling toestaat, zijn die opmerkingen alleszins de moeite waard. Ook de leraarsopleiding komt aan de orde; daarnaast de postacademiale vorming. Professor Monna prefereert een eigen instituut voor de vorming, omdat de organisatievorm bij het H.O. niet bevredigend zou zijn. Belangrijk vind ik de volgende opmerking. Sprekend over de motivering van de leerstof, zegt Professor Monna: Als men deze kwestie wil analy-

seren, zal men er zich eerst klaarheid over moeten verschaffen oyer welke tak van onderwijs men wil spreken.

Ik dacht dat die opmerking de moeite waard was en onderschrijf haar ten volle: Wat doet het gros van onze huidige HBS-ers met de moderne wiskunde? Maar misschien geldt dat ook wel voor de „klassieke” schoolwiskunde van thans. Dan zou het toch lood om oud ijzer zijn.

Groenman

W. E. Boyce and R. C. Di Prima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons, Inc., New York/London/Sydney, 1965, 485 p., 68 sh.

Dit boek is een uitstekende inleiding in het uitgestrekte gebied van de differentiaalvergelijkingen. Het munt uit door een heldere stijl en een methodische opbouw van de behandelde stof, terwijl de auteurs hun uiteenzettingen op evenwichtige wijze onderbroken hebben door de als studiemateriaal tussen de tekst gestrooide paragrafen van opgaven, die het betoog in belangrijke mate toelichten en aanvullen.

De auteurs hebben zich consequent aan het inleidende karakter van hun werk gehouden. Dit houdt in dat zij alleen voor de gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde een existentie- en uniciteitstheoremata bewijzen. Toch verwaarlozen zij de theoretische aspecten bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen niet. In de gevallen dat theorema's niet bewezen worden, worden zij wel geformuleerd en wordt hun draagwijdte uiteengezet; bovendien wordt in deze gevallen steeds naar boeken verwezen, waar de bewijzen in zijn opgenomen.

Na de (gewone) lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde worden de lineaire vergelijkingen van de tweede orde (ook met oplossingen door middel van reeksontwikkeling) en van hogere orde behandeld. De beide belangrijke oplossingsmethoden, die der onbepaalde coëfficiënten en die van de variatie der parameters worden daarbij uitvoerig besproken. Het volgende hoofdstuk is aan de laplace-transformatie gewijd, met zijn voordeel direct een oplossing van het beschouwde beginvoorwaarden-probleem te geven. Na de bespreking van stelsels van vergelijkingen van de eerste orde komen numerieke oplossingsmethoden aan de beurt. Op systematische wijze worden vervolgens tweede-orde-vergelijkingen met randvoorwaarden bestudeerd; daarbij wordt het hoofdstuk over fourierreksen, dat hierna komt, voorbereid. In het laatste hoofdstuk worden de klassieke partiële lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde (warmtegeleidings-vergelijking, golfvergelijking, de vergelijking van Laplace) ter sprake gebracht. Het boek besluit met een uitvoerige lijst van antwoorden van in de tekst opgenomen opgaven.

De auteurs hebben op diverse plaatsen differentiaalvergelijkingen opgenomen en besproken, die in de toegepaste wetenschappen van belang zijn.

Dit boek is een waardevolle gids voor iedereen die zich in de problemen betreffende het oplossen van differentiaalvergelijkingen wil verdiepen, niet in het minst door de stevige basis die het verschaft bij verdergaande studie op dit gebied.

W. J. Claas

Martin Gardner, *Mathematische Rätsel und Probleme*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1966, IX + 158 blz., DM 10.80 (2. Aufl.) (vertaald uit het Engels).

Wie Martin Gardner kent uit de artikelen, die hij maandelijks schrijft voor Scientific American, weet, dat men van hem een boek kan verwachten, dat mathe-

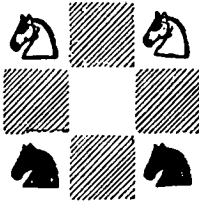
matische recreatie in de beste zin van het woord geeft. Het boek behelst een bloemlezing uit de recreatieve literatuur op wiskundig gebied. Het bevat een veelheid van aardige vondsten, puzzels, problemen en spelen op verschillend gebied. Sommige hoofdstukken zijn gewijd aan topologie, andere aan logica, aan waarschijnlijkheidsrekening, weer andere behandelen werk van beroemde puzzelaars als Sam Loyd en Dudeney, terwijl enkele ook slechts een opsomming van puzzels geven. De behandeling is steeds smakelijk en boeiend, zoals we dat van Gardner gewend zijn. Voor liefhebbers is dit boekje het geld dubbel en dwars waard.

Om u nieuwsgierig te maken, volgen hieronder een drietal aan het boek ontleende opgaven.

P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.



157. Gevraagd wordt op nevenstaand miniatuur schaakbord de witte en de zwarte paarden van plaats te doen verwisselen in een minimaal aantal zetten. De witte paarden komen dus op de plaats van de zwarte en de zwarte op de plaats van de witte.

158. In een bassin zwemmen vier koningsvissen en dertien duivelsvissen. Als een koningsvis niet door minstens drie duivelsvissen bewaakt wordt, begint hij direct duivelsvissen op te eten. Wordt hij door precies drie duivelsvissen bewaakt, dan houden de partijen elkaar in evenwicht en heerst er status quo. Wordt een koningsvis door vier duivels aangevallen, dan zullen deze 1 minuut nodig hebben om hem te doden. Wordt hij door een groter aantal duivels aangevallen, dan is de voor het doden benodigde tijd omgekeerd evenredig met het aantal aanvallers. Bij vijf aanvallers is dit dus $\frac{1}{5}$ minuut, bij 6 aanvallers $\frac{1}{6}$ minuut, enz.

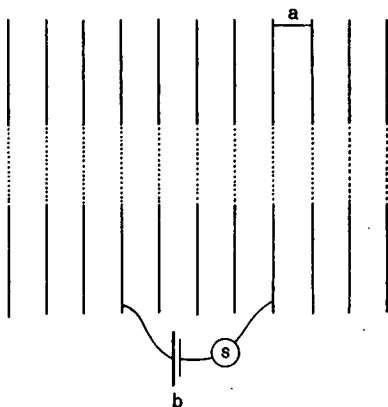
Als enige duivels eenmaal een koning aanvallen, zetten ze hun aanval voort, totdat de koning gedood is. Het is wel mogelijk, dat ze bij hun werk versterking krijgen, voordat het beëindigd is. In dat geval gaat het werk evenredig sneller vanaf het moment, dat de versterking gearriveerd is. Het gaan naar een andere prooi kost geen tijd.

Gevraagd wordt het minimale aantal minuten, dat de duivels nodig hebben om de vier koningen te doden.

(Sam Loyd)

159. Een elektricien vindt op zolder de uiteinden van elf draden. In de kelder vindt hij de andere uiteinden van deze elf draden. Helaas weet hij niet op welke wijze de uiteinden op zolder en in de kelder bij elkaar horen. Hij kan draden met elkaar verbinden, zoals bij a gebeurd is. Ook kan hij door middel van een batterij

en een schel controleren of een gesloten circuit ontstaan is, zoals bij b gebeurd is. Kennelijk zal in het getekende geval de schel niet werken. Hoe zal hij vinden, welke uiteinden bij elkaar horen, als hij een minimaal aantal keren van de kelder naar de zolder of omgekeerd mag gaan? (Dudeney)



OPLOSSINGEN

155. Twee spelers A en B leggen om beurten een stokje op een zijde van een veld van een schaakbord. Degene, die het eerst een stokje zo legt, dat een veld door stokjes omsloten wordt, verliest (resp. wint). Wat is de ideale speelwijze en wie wint dan?

Het schaakbord heeft een middelpunt M . De zijde, die ontstaat door een zijde p t.o.v. M te spiegelen, noemen we p' .

a. Telkens als A een stokje op een zijde p legt, legt B een stokje op p' . Als A nog kans ziet een stokje te leggen zonder een veld te omsluiten, kan B dat daarna ook nog. B wint dus.

b. De speelwijze is dezelfde. Als A op een of ander moment kans zou zien een veld te ontsluiten, had B te voren het t.o.v. M ermee symmetrisch gelegen veld reeds kunnen omsluiten. Ook nu wint B dus.

156. Welke rechthoeken kunnen in 9 vierkanten verdeeld worden zo, dat aan de volgende twee voorwaarden voldaan is: geen twee aangrenzende vierkanten zijn congruent en geen vierkant neemt de hele breedte van de rechthoek in beslag? Laat zien, dat een verdeling in minder dan 8 vierkanten onder deze voorwaarden nooit mogelijk is.

We moeten een netwerk construeren, dat uit 10 draden bestaat. Dit netwerk bestaat uit een aantal veelhoeken. Deze veelhoeken noemen we de mazen van het net. Tot de mazen rekenen we ook het buitengebied. Dan geldt: elke zijde van het net is zijde van twee mazen.

Verder kunnen we bij het tekenen van het net elke maas tot buitenomtrek maken. We krijgen dit gedaan door een punt binnen de maas te kiezen en t.o.v. dit punt het net te inverteren.

Uit de gestelde twee voorwaarden blijkt, dat in het net geen tweehoeken kunnen voorkomen, d.w.z. elke maas wordt begrensd door ten minste drie draden. En, zo we al weten, komen in elk hoekpunt ten minste drie draden samen.

Ons net moet uit 10 draden bestaan. De mazen van het net moeten dus in totaal 20 zijden hebben. Er blijken nu twee gevallen mogelijk:

- a. het net bestaat uit 1 vijfhoek en 5 driehoeken,
- b. het net bestaat uit 2 vierhoeken en 4 driehoeken.

In het laatste geval moeten de beide vierhoeken twee hoekpunten gemeen hebben. Er zijn dan echter nog twee mogelijkheden:

- b₁. de twee vierhoeken hebben een zijde gemeen,
- b₂. de twee vierhoeken hebben twee overliggende hoekpunten gemeen.

Men vindt de bijbehorende netwerken in resp. fig. 1, 2 en 3. (In extenso de redenering weer te geven, dat er geen andere mogelijkheden zijn, zou te langdradig worden.)

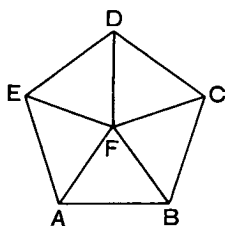


fig. 1

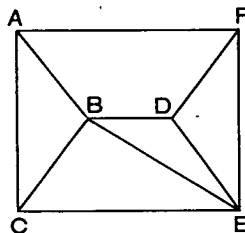


fig. 2

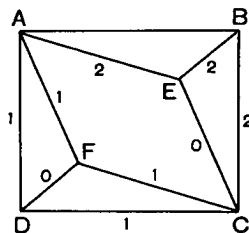


fig. 3

Geval a. Men kan de batterij in AB zetten. Dan worden de stroomsterkten in AF en BF gelijk, wegens de symmetrie. Men kan ook de batterij in DF zetten. Dan worden ook de stroomsterkten in AF en BF gelijk. In beide gevallen komt men dus in strijd met de eerste gestelde voorwaarde (twee aangrenzende vierkanten worden namelijk congruent).

Geval b₁. Men kan nu de batterij zetten in AF , BE , AB , BD , BC , AC .

Zet men de batterij in AF , dan krijgt men het in het artikel „Recreatie en rekenmachines” besproken geval. Men kan nu ook deze figuur een kwartslag draaien, d.w.z. de stroom links laten binnenkomen en rechts laten uitgaan. Men zal dan een oplossing krijgen, waarbij de stroom uit de batterij zich in drie takken splitst en waarbij aan de andere zijde drie takken weer in de batterij samenkomen. Een dergelijke mogelijkheid ontstaat alleen door de batterij in BE te plaatsen. Dit geval is dus meteen afgehandeld. De oplossing, die verkregen wordt met batterij in BE , is dezelfde als die met batterij in AF .

Op gelijke wijze blijkt, dat de gevallen batterij in AB en in BD dezelfde oplossing geven en eveneens de gevallen batterij in BC en AC . (In de eerste twee gevallen krijgt men boven en onder 2 en 3 vierkanten, links en rechts ook 2 en 3. In de laatste twee gevallen boven en onder 2 en 3, links en rechts 2 en 2 resp. boven en onder 2 en 2, links en rechts 2 en 3.)

De gevallen batterij in BD en batterij in BC zijn resp. getekend in fig. 4 en 5.

Batterij in BD . In de figuur zijn de stroomsterkten aangegeven. Men moet nu voldoen aan de wetten van Kirchhoff. Dus moet

$$\begin{aligned} 3a - 3c &= -6a + 3b + 5c \quad (2e \text{ wet in maas } ACB) \\ -5a + 4b + 3c &= 3a - 2b - c \quad (2e \text{ wet in maas } CAFE). \end{aligned}$$

Men vindt hieruit:

$$a = 18, b = 14, c = 15.$$

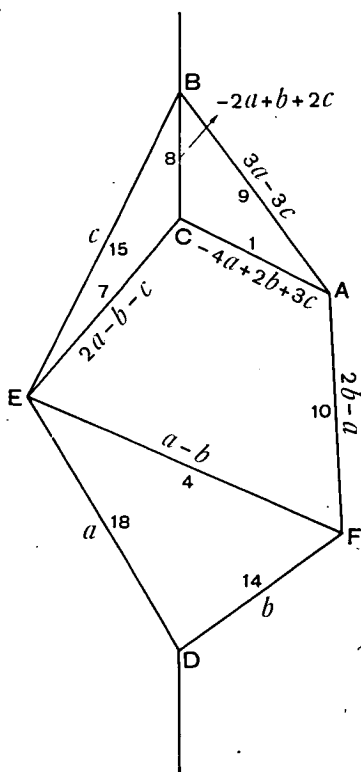


fig. 4

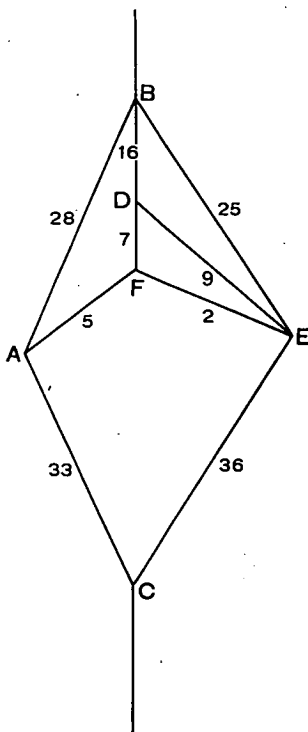


fig. 5

De maten van de vierkanten zijn in fig. 4 naast de zijden geplaatst.

Batterij in CD . Men vindt nu de maten, die in fig. 5 naast de zijden gezet zijn.

Geval b_2 . Men kan de batterij in AB , AE of BE zetten. Wegens de symmetrie levert batterij in BE geen toelaatbare oplossing. De beide andere mogelijkheden leveren eventueel oplossingen, die uit elkaar door draaiing over een kwartslag ontstaan. We behoeven dus alleen nog maar het geval batterij in AB te onderzoeken. De stroomsterkten, die men vindt, zijn in fig. 3 naast de zijden geplaatst. We vinden in dit geval dus geen oplossing.

In totaal vinden we dus slechts drie mogelijkheden. Behalve de verdeling, die reeds in het artikel vermeld werd, is het nog mogelijk een rechthoek te verdelen, waarvan de zijden zich verhouden als $32 : 33$ of als $61 : 69$ (fig. 6). De vierkanten, die men dan krijgt, hebben de eigenschap, dat geen enkel paar congruent is.

De netwerken met minder dan 10 zijden zijn in fig. 7 getekend. In alle gevallen is de symmetrie de oorzaak voor het ontbreken van een oplossing. Alleen in het derde geval is het niet direct zichtbaar, dat de symmetrie optreedt, als men de batterij plaatst in AB , AC of AD . Dit blijkt echter, als men het netwerk opnieuw tekent met A boven en B , C resp. D beneden.

(Het zou ook voldoende zijn op te merken, dat door inversie t.o.v. een punt binnen driehoek ACD blijkt, dat er geen principieel verschil bestaat tussen AD

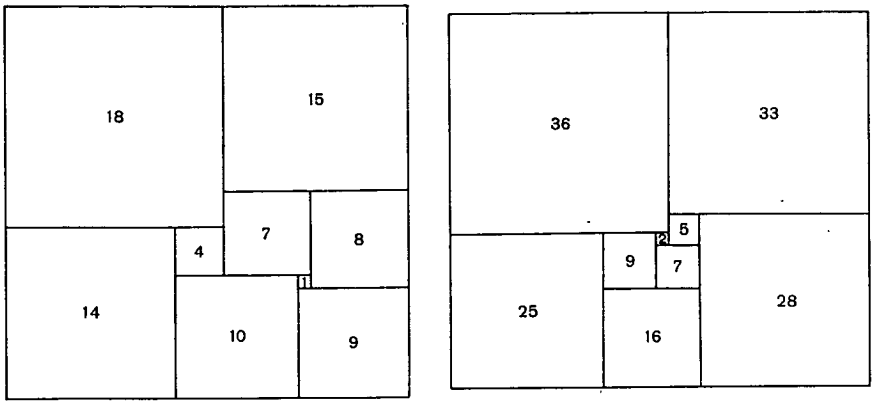


fig. 6

en AB en tussen AC en AE , door inversie t.o.v. een punt binnen driehoek ABC , dat er geen principieel verschil bestaat tussen AB en BC .)

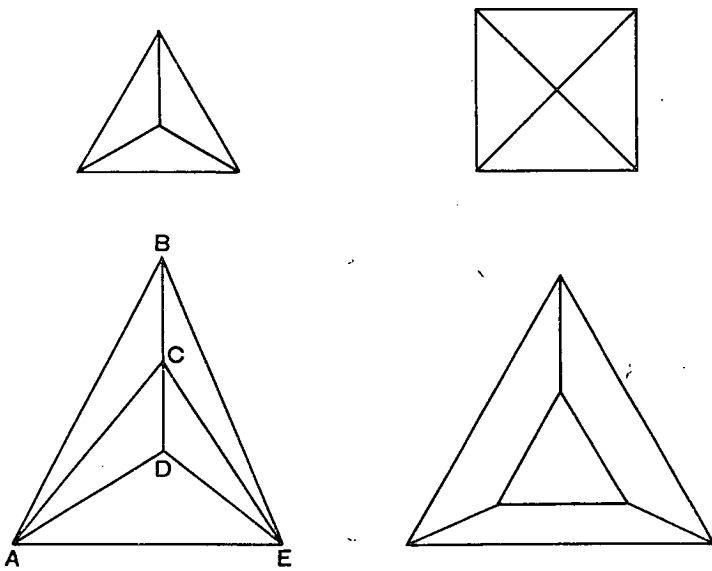


fig. 7

VRAAGSTUKKEN OVER LINEAIRE ALGEBRA

door J. F. H. Bor (Dr. J. Ch. Boland, Dr. F. Oort en Dr. H. van Rossum)

Dankzij een jarenlange ervaring bij het onderwijs in de lineaire algebra aan de Universiteit van Amsterdam en aan een m.o.-A cursus konden de auteurs een rijk geschaakte verzameling vraagstukken bijeenbrengen. Met het samenstellen daarvan hebben zij een tweeledig doel nagestreefd. In dit werk is een zo gevarieerd mogelijk oefenmateriaal bijeengebracht, zodat het gebruikt kan worden als waardevol hulpmiddel bij het bestuderen van de lineaire algebra zoals die tegenwoordig aan de universiteiten en m.o.-A cursussen wordt onderwezen. Ook zijn er vraagstukken over analytische meetkunde opgenomen.

Verder is dit werk zeer aan te bevelen voor hen, die de stof nog eens willen herhalen b.v. met het oog op toepassingen in andere vakken. Het aantal theoretisch getinte opgaven is betrekkelijk groot.

Achterin het boek zijn de oplossingen c.q. de antwoorden opgenomen.

103 blz., ing. f 9,75

CONTINU EXPERIMENT

Natuurkunde-methode in werkschriften voor het vmo door Ir. H. M. Mulder e.i.

werkschrift 1 - vaste stoffen, vloeistoffen

werkschrift 5 - stromen, spanningen

werkschrift 2 - kracht, temperatuur

werkschrift 6 - licht

werkschrift 3 - warmte, fasen

werkschrift 7 - trillingen, geluid

werkschrift 4 - magnetisme, stromen

werkschrift 1 t/m 6 - f1.35 / 7 - f1.50

STEREOVISIE

Een nieuw werkschrift stereo voor vmo met 75 opgaven in beeld door Ir. H. M. Mulder e.i.

In de op schaal getekende hulpfiguren kan het rekenproces worden vastgelegd. De rechterbladzijden bieden ruimte voor het bewijs en voor de berekening. Achterin het werkschrift symbolen, kwadratentafel, uitkomsten en opmerkingen.

Ing. f 2.50

250 OPGAVEN

samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie door C. J. Alders, Dr. L. N. H. Bunt, A. Holwerda, Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. Joh. Wansink.

Algemeen gedeelte, bespreking van de afzonderlijke vakken, algebra, infinitesimaalrekening, goniometrie, stereometrie (A.- theorie van de scheve projectie; B.-vraagstukken), analytische meetkunde, antwoorden. / 7e druk, ing. f 1.90

P. Noordhoff nv

Zojuist verschenen:|

EXAMENOPGAVEN WISKUNDE VOOR H.A.V.O.

samengesteld door de Wimecos-commissie bestaande uit

C. J. Alders, Dr. A. van Dop, Dr. Ir. B. Groeneveld, C. de Groot en Ir. C. van Vliet.

Deze uitgave is het resultaat van de opdracht van het bestuur van Wimecos. De Wimecos-commissie werd op 29 december 1964 belast met de taak een concept-leerplan te ontwerpen voor het wiskunde programma voor het h.a.v.o. Deze taak werd uitgebreid met het samenstellen van een aantal opgaven ter bepaling van het eindexamen-niveau van het vak wiskunde bij het h.a.v.o.

De titel geeft aanleiding tot de veronderstelling dat het boek alleen bestaat uit examen-opgaven, er dient echter vermeld te worden dat zij worden voorafgegaan door het concept-leerplan, zoals de commissie dit heeft samengesteld, terwijl zij tevens haar motivering in een „Verantwoording” heeft neergelegd.

Het boek behandelt de volgende onderwerpen: Ontwerp-leerplan Wiskunde voor h.a.v.o. - inleiding tot verzamelingen - examenopgaven wiskunde voor h.a.v.o. - goniometrische tafels - antwoorden.

Het boekje is voornamelijk bestemd voor docenten wiskunde, die hun leerlingen opleiden voor het eindexamen wiskunde 1968 en de daarop volgende jaren. De prijs van deze uitgave bedraagt ing. f 3,25.

P. Noordhoff nv

ALGEBRA

EEËN GEPROGRAMMEERDE CURSUS VOOR HET VHMO

door F. Bouman, Ir. W. Geerts en Dr. D. J. Lock

De eerste drie delen van deze cursus zijn nu verschenen. Het eerste deel behandelt de natuurlijke getallen met de bewerkingen optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen; deel 2 behandelt de gehele getallen met de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en machtsverheffen. Het onlangs verschenen derde deel behandelt de natuurlijke getallen met de bewerkingen optellen, vermenigvuldigen, machtsverheffen en aftrekken; daarnaast de rationale getallen met de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen en de vergelijkingen met één onbekende. Deze laatste behandeling is geheel gebaseerd op de gelijkwaardigheid van vergelijkingen. Achterin dit deel zijn enkele extra vraagstukken opgenomen. De stofbehandeling is in alle delen op dezelfde wijze geschied.

De geprogrammeerde boeken kunnen op verschillende wijze worden gebruikt, zowel voor klassikaal als voor meer individueel gericht onderwijs; het is echter wel de bedoeling dat de leerling het geheel doorwerkt.

Per deel ing. f 5,90. Binnenwerk voor ring- of multiband per deel f 5,90.

SOO-UITGAVE. Besteladres: Nijgh & van Ditmar, Badhuisweg 232, 's-Gravenhage

Alle geadvertende uitgaven zijn ook via de boekhandel verkrijgbaar