

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

VIII — I MEI 1966

INHOUD

Dr. W. Burgers: Groepen van eindige orde	225
S. Straszewicz: Sur les nouveaux programmes de mathématiques scolaires en Pologne	238
Prof. Dr. J. Popken: De reële getallen van getaltheo- retisch standpunt uit bekeken	244
Cursussen moderne wiskunde voor leraren	254
Recreatie	255
Boekbesprekingen	237, 256

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516;
secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z., tel. 020/715778;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;
Dr. J. KOKSMA, Haren;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143919, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender“ in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

GROEPEN VAN EINDIGE ORDE

Een didaktisch experiment ¹⁾

door

DR. W. BURGERS

Wassenaar

Uitgangspunt is een korte behandeling van de permutaties. Voorlopig is een permutatie een bepaalde ordening van de beschouwde elementen. Zo noemen we:

$$P_1 = 1 \ 2 \ 3$$

$$P_2 = 1 \ 3 \ 2$$

$$P_3 = 2 \ 1 \ 3$$

$$P_4 = 2 \ 3 \ 1$$

$$P_5 = 3 \ 1 \ 2$$

$$P_6 = 3 \ 2 \ 1$$

Het aantal permutaties van n elementen blijkt $n!$ te zijn. We bespreken de verdeling in even en oneven permutaties al naar gelang het aantal inversies even of oneven is en we tonen dan aan, dat door een transpositie, de pariteit van de permutatie verandert. Het gevolg is dan, dat het aantal even permutaties even groot is als het aantal oneven permutaties.

We vergelijken nu de bekende operaties: optellen en vermenigvuldigen los van de elementen waarop ze worden toegepast.

We constateren dan, dat: beide operaties een z.g. neutraal element bezitten, en dat beide operaties, toegepast op getallen, èn associatief èn commutatief zijn.

Kennelijk is er weinig verschil en naast elkaar gezien zelfs geen verschil.

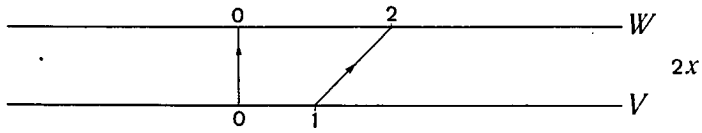
$$\begin{array}{ll} N + a = a + N = a & N \cdot a = a \cdot N = a \\ (a + b) + c = a + (b + c) & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ a + b = b + a & a \cdot b = b \cdot a \end{array}$$

Kunnen we deze operatie toepassen op elementen die geen getallen zijn?

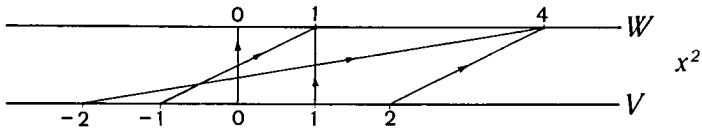
¹⁾ Voordracht gehouden voor Liwenagel, 2 sept. 1965.

Kunnen we b.v. spreken over „het produkt van twee permutaties?”

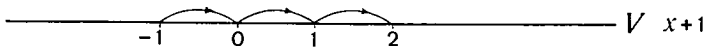
Daartoe gaan we permutaties als functies ¹⁾ beschouwen, d.w.z. als één-duidige afbeeldingen van de elementen van een verzameling V in V die van een verzameling W , waarbij W ook V mag zijn.



één-éénduidige afbeelding van V op W



éénduidige afbeelding van V in W



één-éénduidige afbeelding van V op V

(bij een één-éénduidige afbeelding bestaat zonder meer een inverse functie)

1 2 3,	1 2 3,	1 2 3,	1 2 3,	1 2 3,	1 2 3
↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓
1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1	3 1 2	3 2 1

De functie, die de afbeelding tot stand brengt willen we nu aanduiden met een *operator*, bekende operatoren zijn b.v. $\sqrt{}$, $\log$, $\sin$. We voeren nu 6 operatoren in: p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 en p_6 . Deze operaties leggen we nu vast m.b.v. cykels.

$$p_1 = (1), p_2 = (23), p_3 = (12), p_4 = (123), p_5 = (132) \text{ en } p_6 = (13)$$

We kunnen nu deze operaties toepassen op alle permutaties.

Zo zal $p_1(P_1) = P_1$, $p_1(P_2) = P_2$ enz. d.w.z. de operatie p_1 fungeert als neutraal element.

$$p_2(P_1) = P_2, p_2(P_2) = P_1, p_3(P_5) = P_6, \text{ enz.}$$

Nu kunnen we echter $p_3(P_5)$ ook a.v. opschrijven:

$$p_3\{p_5(P_1)\} \text{ of als } p_3p_5(P_1)$$

Hiermede is nu het „produkt” van twee operaties gedefinieerd.

¹⁾ Een permutatie is nu een één-éénduidige afbeelding van V op V .

We schrijven: $p_3 \circ p_5 = p_6$.

Om de berekeningen uit te voeren, gaan we a.v. te werk

$$p_3 \circ p_5 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \circ & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 & & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

We wijzigen nu de volgorde in de linker „teller” in die van de „rechter” noemer met *behoud* van de afbeelding. Er komt dan:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \circ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & = & \downarrow & \downarrow & \downarrow & = & p_6 \\ 3 & 2 & 1 & & 3 & 1 & 2 & & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Uiteraard is dit systeem gesloten t.o.v. de gedefinieerde bewerking. En daar elke afbeelding één-éénduidig is, heeft elke operatie een inverse operatie, die we met p_i^{-1} zullen aanduiden.

$$p_i \circ p_i^{-1} = p_1$$

We verenigen alle resultaten in het schema:

		Rechter factor					
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
linker factor	P ₁	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
	P ₂	P ₂	P ₁	P ₅	P ₆	P ₃	P ₄
	P ₃	P ₃	P ₄	P ₁	P ₂	P ₆	P ₅
	P ₄	P ₄	P ₃	P ₆	P ₅	P ₁	P ₂
	P ₅	P ₅	P ₆	P ₂	P ₁	P ₄	P ₃
	P ₆	P ₆	P ₅	P ₄	P ₃	P ₂	P ₁

Onmiddellijk valt het op, dat deze vermenigvuldiging *niet* commutatief is, althans niet altijd.

Zo is:

$$p_2 \circ p_3 = p_5 \text{ en } p_3 \circ p_2 = p_4$$

$$p_2 \circ p_4 = p_6 \text{ en } p_4 \circ p_2 = p_3$$

maar

$$p_4 \circ p_5 = p_5 \circ p_4$$

p_4 en p_5 noemen we permutabele elementen. Blijkbaar zijn p_1 , p_4 en p_5 de enige onderling permutabele elementen. Blijft nog de vraag of deze bewerking associatief is. Dat bewijzen we nu a.v.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

We veranderen de volgorde van de middelste „teller” in die van de rechtse „noemer” met behoud van de afbeelding. Dan zullen de b_i 's gepermuteerd worden. We noemen de nieuwe volgorde $x_1 \dots x_n$. Tenslotte veranderen we de eerste „teller” in $x_1 \dots x_n$ de noemer wordt dan: $y_1 \dots y_n$. Verkort:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & c & 1 & x & c & 1 \\ \downarrow \circ \downarrow \circ \downarrow & = & \downarrow \downarrow \downarrow & = & \downarrow \circ \downarrow \circ \downarrow \\ a & b & c & a & x & c & y & x & c \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x & c \\ \downarrow \circ \downarrow & x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \downarrow \\ y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \downarrow \\ y \end{pmatrix} \text{ evenals } \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & \downarrow \circ \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ x & c \end{pmatrix}.$$

N.B. De bewerking $p_i \circ p_k$ is zo gedefinieerd, dat men éérs p_k en daarna p_i toepast.

In de gevallen waarin men de additieve notatie toepast, is de volgorde soms van links naar rechts.

Een verzameling $V(a, b, \dots)$ heet een groep, als er een bewerking gedefinieerd wordt tussen de elementen, die *eenduidig* en *gesloten* is. De verzameling dient een *neutraal* element t.o.v. deze bewerking te bezitten, elk element een *invers* element in de groep, en tenslotte moet de bewerking associatief zijn.

Het aantal elementen van de verzameling noemt men dan de *orde* van de groep.

We kunnen het schema van blz. 4 gebruiken, om enigszins „thuis” te raken in deze groep, die we als G_6 aanduiden zullen. (De officiële benaming is: de symmetrische groep S_3 . De symmetrische groep S_n is van de orde $n!$). We merken op: elke rij en elke kolom bevat alle elementen.

Men konstateert: $p_2^2 = p_1$, $p_3^2 = p_6^2 = p_1$, $p_4^3 = p_1 = p_5^3$.

Men zegt: p_2 , p_3 en p_6 zijn van de orde 2, p_4 en p_5 zijn van de orde 3. (Grappig, dit zijn delers van 6).

$p_5 \circ x = p_2$ kan opgelost worden, door beide leden links met p_5^{-1} te vermenigvuldigen.

$x = p_5^{-1} \circ p_2 = p_4 \circ p_2 = p_3$, wat direct uit de tabel is af te lezen.

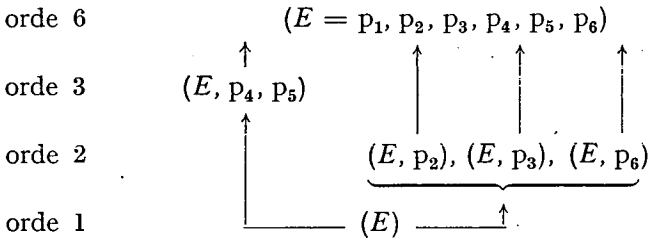
$(p_3 \circ p_4) \circ (p_4^{-1} \circ p_3^{-1}) = E$ de inverse van $p_3 \circ p_4$ is dus $p_4^{-1} \circ p_3^{-1}$.

Zo is $p_4 = p_3 \circ p_2$ maar ook $p_6 \circ p_3$.

De vergelijking $x^2 = p_6$ is vals terwijl

$$x^2 = p_5 \text{ maar één oplossing heeft n.l. } p_4.$$

Men kan „echte ondergroepen” opsporen n.l. drie van de orde 2 en één van de orde 3. (hé, alweer delers van 6)



De nieuwsgierigheid is nu opgewekt.

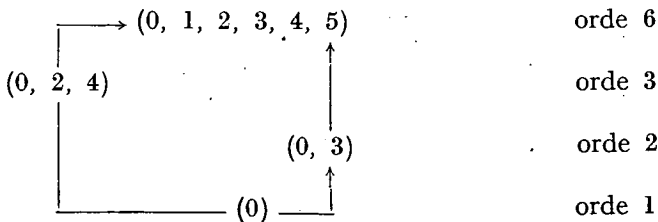
We merken nu eerst op, dat de gehele getallen een groep vormen, als men de optelling als bewerking toevoegt. Men spreekt dan van een additieve groep.

We zien nu, dat b.v. alle zesvouden ook een groep vormen. We brengen deze zesvouden onder in één klasse K_0 . Alle zes-vouden $+ 1$ vormen een klasse K_1 , maar geen groep, alle zesvouden $+ 2$ een klasse K_2 enz. Zo ontstaan dus 6 klassen: K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 en K_5 , de nevenklassen van K_0 . Uit elke klasse kiezen we nu één element als representant n.l. 0, 1, 2, 3, 4 en 5. Deze 6 elementen vormen nu een groep van de orde 6. De tabel ziet er a.v. uit

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

We zullen deze groep met C_6 aanduiden (een z.g. cyclische groep). Blijkbaar is deze groep van totaal andere structuur. C_6 heeft n.l. twee elementen van de orde 6, G_6 geen, C_6 heeft één element van de orde 2 en twee van de orde 3. Bovendien is C_6 commutatief.

De splitsing in ondergroepen geeft:



Men kan nu met zekerheid de vraag verwachten:

„Zijn er nog meer typen van de orde 6?”

We trachten nog enkele groepen van de orde 6 te construeren. Neem b.v. de rest- of nevenklassen mod. 9, die onderling ondeelbaar zijn met 9: H_6 .

$$(1, 2, 4, 5, 7, 8)$$

en de vermenigvuldiging als bewerking.

Aardig is ook, iets te vertellen over de dubbelverhouding: $(ABCD)$. Aangezien $(ABCD) = (BADC) = (DCBA) = (CDAB)$ ontstaan er zo $3! = 6$ verschillende uitkomsten n.l.

$$x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1-x, \quad 1-\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x} \text{ en } 1-\frac{1}{1-x}.$$

Nemen we als bewerking de substitutie, dan ontstaat er opnieuw een groep van de orde 6.

En wat te denken van (E, a, b, c, d, e) als:

$\times$	E	a	b	c	d	e
E	E	a	b	c	d	e
a	a	E	c	d	e	b
b	b	c	E	e	a	d
c	c	d	e	E	b	a
d	d	e	a	b	E	c
e	e	b	d	a	c	$E?$

De tijd is nu rijp om over te gaan tot de behandeling van isomorfie resp. automorfie.

Beschouwen we de volgende tabellen:

A_6							C_6							
$\times$	E	a	b	c	d	e	$+$	0	1	2	3	4	5	
E	E	a	b	c	d	e	0	0	1	2	3	4	5	
a	a	b	E	d	e	c	1	1	2	3	4	5	0	
b	b	E	a	e	c	d	2	2	3	4	5	0	1	
c	c	e	d	E	b	a	3	3	4	5	0	1	2	
d	d	c	e	a	E	b	4	4	5	0	1	2	3	
e	e	d	c	b	a	E	5	5	0	1	2	3	4	

H_6								G_6						
$\times$	1	2	4	5	7	8		$\times$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	1	2	4	5	7	8		P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
2	2	4	8	1	5	7		P_2	P_2	P_1	P_5	P_6	P_3	P_4
4	4	8	7	2	1	5		P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	P_6	P_5
5	5	1	2	7	8	4		P_4	P_4	P_3	P_6	P_5	P_1	P_2
7	7	5	1	8	4	2		P_5	P_5	P_6	P_2	P_1	P_4	P_3
8	8	7	5	4	2	1		P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

K_4					C_4				
$\times$	E	a	b	c	$\times$	E	a	b	c
E	E	a	b	c	E	E	a	b	c
a	a	E	c	b	a	a	b	c	E
b	b	c	E	a	b	b	c	E	a
c	c	b	a	E	c	c	a	b	E

$$\begin{array}{c} (Eabc) \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ (Ea) \quad (Eb) \quad (Ec) \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \uparrow \\ (E) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (Eabc) \leftarrow \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ (E) \quad \quad (Eb) \end{array}$$

A_6 en G_6 zijn isomorf, A_6 en C_6 zijn niet isomorf.

C_6 en H_6 zijn isomorf, K_4 en C_4 zijn niet isomorf.

Twee groepen G_1 en G_2 heten *isomorf*, als er een *één-éénduidige* afbeelding bestaat van de elementen van G_1 op die van G_2 , met de eigenschap, dat het produkt van de beelden, gelijk is aan het beeld van het produkt, waarbij we ten overvloede opmerken, dat in beide groepen „het produkt” de eigen operatie is, dus:

$$\begin{array}{ccc} a \circ b = c \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ A \circ B = C \end{array}$$

Is $G_1 = G_2$ dan spreekt men van een *automorfie*.

Wil men de isomorfie van twee groepen vaststellen, dan zullen de orden van de op elkaar af te beelden elementen moeten overeenstemmen:

Zo geldt in A_6 : $a^3 = E \rightarrow a$ heeft de orde 3 evenals b , terwijl c , d en e van de orde 2 zijn. C_6 bevat twee elementen van de orde 6, twee van de orde 3 en een van de orde 2. A_6 en C_6 zijn dus niet isomorf.

C_6 :	(0,	1,	2,	3,	4,	5)	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	← isomorfe afbeelding
H_6 :	(1	2	4	8	7	5)	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	← automorfe afbeelding
H_6 :	(1	5	7	8	4	2)	
		↑	↑	↑	↑	↑	
	orde:	6	3	2	3	6	
G_6 :	(p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6)	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	← isomorfe afbeelding
A_6 :	(E	c	d	a	b	e)	
		↑	↑	↑	↑	↑	
	orde:	2	2	3	3	2	

Zo kan men 6 automorfieën construeren van K_4

E	E	E	E	E	E
a	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
b	c	c	c	c	c

Noemen we deze zes afbeeldingen:

N , A , B , C , D , F

dan ziet men direct:

$$A^2 = B^2 = C^2 = N = D^3 = F^3$$

$$DF = FD = N$$

de „automorfismen groep” is isomorf met G_6 .

Ook G_6 bezit zes automorfieën:

E	E	E	E	E	E
a	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	a	a
b	c	c	c	b	b
c	$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
d	e	e	e	e	e

Noemen we deze afbeeldingen weer:

N , A , B , C , D , F

dan vormen deze een groep, die isomorf is met G_6 .

We willen nu de gedachte ontwikkeld bij het bepalen van de restklassen mod. 6 transponeren op b.v. G_6 .

We nemen de ondergroep (p_1, p_2) .

We vermenigvuldigen deze elementen met een element van G_6 , dat *niet* tot de uitverkoren ondergroep behoort, b.v. p_3 . De vermenigvuldiging kan nu zowel links als rechts gekozen worden.

$$(p_1, p_2) \circ p_3 \rightarrow (p_1 \circ p_3, p_2 \circ p_3) = (p_3, p_5)$$

$$p_3 \circ (p_1, p_2) \rightarrow (p_3 \circ p_1, p_3 \circ p_2) = (p_3, p_4)$$

(p_3, p_5) is een rechternevenklas, (p_3, p_4) een linkernevenklas van (p_1, p_2) . (p_1, p_2) zelf is natuurlijk ook een nevenklas. Letten we nu alleen op de rechternevenklassen, dan zijn 4 elementen opgetreden. Kiezen we weer een nieuw element b.v. p_4 dan wordt

$$(p_1, p_2) \circ p_4 \rightarrow (p_1 \circ p_4, p_2 \circ p_4) = (p_4, p_6)$$

De ondergroep verdeelt de groep dus in klassen, die evenveel elementen bezitten, die alle verschillend zijn. Zo komt men tot de stelling van Lagrange, dat de orde van een ondergroep een deler is van die van de groep zelf. Het aantal nevenklassen, dat een ondergroep produceert noemt men de *index* van de ondergroep. Vallen de linker en rechter nevenklassen samen, dan noemt men de ondergroep een *normaal deler* of ook wel *invariante ondergroep*. Zo is elke ondergroep in G_6 een normaal deler terwijl (p_1, p_4, p_5) een normaal deler van G_6 is.

Ténslotte nog iets over *equivalente* of *geconjugeerde* elementen van een groep. Een relatie is een equivalentierelatie als de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is. Het is een generalisatie van de gelijkheidsrelatie.

Indien in een groep: $ab = ac$ ¹⁾ dan volgt door linksvermenigvuldiging met a^{-1} : $b = c$ Als echter $ab = ca$, dan geldt i.h.a. niet, dat $b = c$. We zeggen nu, dat in dit geval b *equivalent* is met c ($b \sim c$).

b en c zijn dus equivalente elementen van een groep, als de groep een element a bevat, zó dat

$$ab = ca.$$

Men kan dit ook a.v. schrijven: $b = a^{-1}ca$ vandaar dat men zegt: b is de getransformeerde van c t.o.v. a of b en c zijn *geconjugeerde*.

We tonen nu aan, dat deze relatie een equivalentierelatie is.

- 1) $E^{-1}aE = a$ dus $a \sim a$
- 2) als $a^{-1}ba = c$ dan is $b = aca^{-1} = (a^{-1})^{-1}ca^{-1}$ dus $b \sim c \rightarrow c \sim b$
- 3) $\left. \begin{array}{l} a = p^{-1}bp \\ b = q^{-1}cq \end{array} \right\} a = p^{-1}q^{-1}cqp = (qp)^{-1}cqp$

¹⁾ We laten nu het operatieteken maar achterwege.

dus als $a \sim b$ en $b \sim c$ dan is $a \sim c$. Wil men nu de elementen van G_6 bepalen, die *equivalent* zijn met b.v. p_2 , dan berekene men $x^{-1}p_2x$, waarbij x alle elementen van G_6 doorloopt.

Men vindt: $E^{-1}p_2E = p_2 \rightarrow E$ en p_2 zijn permutabel

$$p_2^{-1}p_2p_2 = p_2 \rightarrow p_2 \text{ en } p_2 \text{ eveneens.}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_3^{-1}p_2p_3 = p_6 \rightarrow p_2 \sim p_6 \\ p_4^{-1}p_2p_4 = p_3 \rightarrow p_2 \sim p_3 \end{array} \right\} \rightarrow p_6 \sim p_3$$

$$p_5^{-1}p_2p_5 = p_6$$

$$p_6^{-1}p_2p_6 = p_3 \quad p_2, p_3 \text{ en } p_6 \text{ zijn equivalent.}$$

Op deze manier vindt men behalve de equivalente elementen, ook de elementen permutabel met p_2 .

Dit laatste is daarom belangrijk, omdat, zoals gemakkelijk blijkt, alle elementen van een groep die met één element permutabel zijn, een ondergroep van die groep vormen. Nemen we nog een G_8 (E, a, b, c, d, e, f, g) (de rotatiegroep van het vierkant)

	E	a	b	c	d	e	f	g
E	E	a	b	c	d	e	f	g
a	a	e	E	f	g	b	d	c
b	b	E	e	g	f	a	c	d
c	c	g	f	E	e	d	b	a
d	d	f	g	e	E	c	a	b
e	e	b	a	d	c	E	g	f
f	f	c	d	a	b	g	E	e
g	g	d	c	b	a	f	e	E

Men konstateert:

c, d, e, f en g zijn van de orde 2.

a en b van de orde 4.

equivalent zijn (a en b), (c en d), (f en g).

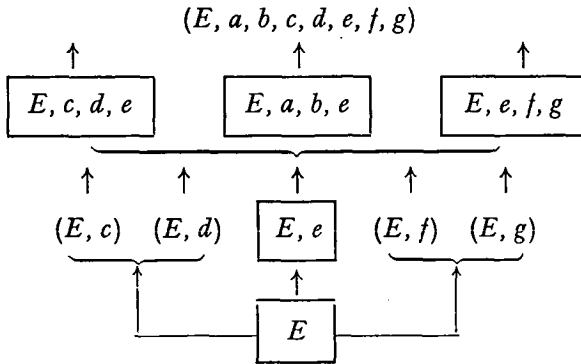
permutabel met a zijn: (E, a, b, e)

permutabel met c zijn: (E, c, d, e)

permutabel met f zijn: (E, f, e, g)

permutabel met E en e zijn: *alle* elementen van G_8 .

We hebben nu *vijf* ondergroepen van de orde 2 en *drie* van de orde 4 gevonden. Deze laatste drie zijn natuurlijk normaaldelers van G_8 , evenals (E, e), het centrum van de groep.



Tevens. blijkt, dat de relatie „permutabel zijn” wel reflexief en symmetrisch is, maar *niet* transitief.

a is permutabel met e

e is permutabel met d

maar a is niet permutabel met d .

Dat equivalente elementen dezelfde orde hebben is gemakkelijk in te zien.

$$\begin{aligned} A^3 &= E, \quad (B^{-1}AB)^3 = B^{-1}AB \cdot B^{-1}AB \cdot B^{-1}AB = \\ &= B^{-1}A^2BB^{-1}AB = \\ &= B^{-1}A^3B = \\ &= B^{-1}EB = E. \end{aligned}$$

Het omgekeerde hoeft echter niet juist te zijn.

Een andere groep van de orde 8 krijgt men (er bestaan 5 verschillende typen van de orde 8) als men de 8 deelverzamelingen neemt van een verzameling van 3 elementen en dan het symmetrisch verschil als bewerking toevoegt.

Stel men neemt een groep, b.v., $A_6: (E, a, b, c, d, e)$ en men beschouwt:

$X = a^{-1}xa$, waarbij x alle elementen van A_6 doorloopt. Dan geldt:

$$a^{-1}xa = a^{-1}ya \rightarrow x = y.$$

Door deze transformatie t.o.v. a , ontstaan weer de zes elementen van A_6 . Als $pq = r$ en we beschouwen

$$(a^{-1}pa) \cdot (a^{-1}qa) = a^{-1}p(aa^{-1})qa = a^{-1}(pq)a = a^{-1}ra,$$

d.w.z. door deze transformatie ontstaat een automorfie. Men noemt dit een *inwendige* automorfie. Elke andere een uitwendige.

Is de groep abels, dan levert de inwendige automorfie slechts de identieke afbeelding. Immers

$$a^{-1}xa = a^{-1}ax = x.$$

De automorfismengroep van K_4 heeft slechts één inwendige, doch 5 uitwendige automorfismen. De zes automorfismen van A_6 zijn alle inwendige automorfismen. Zo heeft de rotatiegroep van het vierkant: G_8 slechts vier inwendige automorfismen. E en e leveren beide de identieke afbeelding, a en b , c en d , f en g leveren de andere drie. Er zijn natuurlijk nog uitwendige automorfismen ook.

Men kan natuurlijk „de spanning” wel eens breken, door te wijzen op de z.g. dektransformaties.

C_6 blijkt dan meetkundig te verklaren als een serie rotaties van de regelmatige zeshoek. Vandaar de naam cyclische groep. De zes rotaties worden voortgebracht door herhaling van de rotatie over 60° . De groep kan dan voorgesteld worden als $(E, a, a^2, a^3, a^4, a^5)$ en a heet voortbrengend element van de groep. Elk element van een groep is voortbrengend element van een ondergroep, die dezelfde orde heeft als het element zelf. Hieruit volgt dus dat de orde van een element, ook een deler is van de orde van de groep, waartoe dat element behoort.

De groep G_6 blijkt dan te behoren bij de dektransformaties van een gelijkzijdige driehoek (rotaties t.o.v. het zwaartepunt, spiegelingen t.o.v. de bissectrices). $G_8 \rightarrow$ rotaties t.o.v. het zwaartepunt, spiegelingen t.o.v. de diagonalen en spiegelingen t.o.v. de symmetrieassen. Ook kan men de regelmatige veelvlakken in de illustratie betrekken (tetraëder-, hexaëder- en octaëdergroep resp. van de orde 12, 24 en 60).

Een nadere beschouwing van het XOY -vlak voert ons dan tot het definiëren van het Cartesiaans produkt van twee verzamelingen (X) en (Y). Men kan dan opnieuw de begrippen relatie en functie aan de orde stellen.

$$(a, b, c) \times (p, q, r) = (ap, bp, cp, aq, bq, cq, ar, br, cr).$$

Men kan nu nagaan of de nevenklassen van een ondergroep, zelf elementen zijn van een groep. Evenals bij de restklassen mod. 6 kan men dan uit elke nevenklas een representant kiezen. Zo komt men tot homomorfe afbeeldingen. Gaat men n.l. uit van een normaal deler b.v. (E, a^3) uit C_6 dan zijn de nevenklassen:

$$(E, a^3), (a, a^4) \text{ en } (a^2, a^5)$$

Deze vormen een C_3 , die natuurlijk cyclisch is.

(E, a^1) is het neutrale element, want

$$\begin{aligned} (E, a^3) \cdot (a, a^4) &= (a, a^4, a^7) = (a, a^4) \\ (E, a^3) \cdot (a^2, a^5) &= (a^2, a^5, a^8) = (a^2, a^5) \\ \text{terwijl } (a, a^4) \cdot (a^2, a^5) &= (a^3, E). \end{aligned}$$

De homomorfie afbeelding is dan

$$\left. \begin{matrix} E \\ a^3 \end{matrix} \right\} \rightarrow (E, a^3)$$

$$\left. \begin{matrix} a^4 \\ a \end{matrix} \right\} \rightarrow (a, a^4)$$

$$\left. \begin{matrix} a^2 \\ a^5 \end{matrix} \right\} \rightarrow (a^2, a^5)$$

(E, a^3) heet de kern van de homomorfie.

Uiteindelijk kan men de permutaties weer centraal stellen, door de stelling van Cayley te bewijzen, die zegt, dat elke eindige groep isomorf is met een ondergroep van een symmetrische groep S_n .

Tot besluit kan men nu nog wijzen op het bestaan van meer gecompliceerde structuren zoals de ring, met twee operaties, een integriteitsgebied en een lichaam.

LECTUUR

- 1) *Anschauliche Mathematik* II^{ter} Teil-Algebra, Endliche Gruppen, H. Noack (F. Hirt, Kiel).
- 2) *Konstruktive Abbildungs Geometrie*, Max Jeger (Räber, Luzern).
- 3) *Introduction à la théorie des groupes*, Alexandroff (vert. door A. Gloden) (Dunod-Paris).
- 4) *Theory of groups of finite order*, W. Burnside (Dover Publ. Inc.).
- 5) *Introduction to the theory of finite groups*, W. Ledermann (Cambr. Un. Press).
- 6) *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, A. Speiser (Birkhaus, Basel).
- 7) *Gruppentheorie* (S.G. 837), Baumgartner.
- 8) *Inleiding tot de algebra*, dr. F. Loonstra (Noordhoff).

BOEKBESPREKING

Dutch Classics on History of Science, Deel XII, van Wissekerke, *Liber Desideratus* 1494; Deel XIV, Georgius de Hungaria, *Arithmeticae summa tripartita*, 1499. Uitgever: De Graaf, Nieuwkoop, 1965, f 34, — per deel.

Deel XII is een historische studie van D.J. Struik. De eerste 50 bladzijden zijn een bespreking van de door van Wissekerke geconstrueerde planetaria (met 12 figuren) met een inleiding in de toenmalige opvattingen omtrent de bewegingen van de planeten. De oorspronkelijke tekst is in facsimile toegevoegd.

Deel XIV is van de hand van A. J. E. M. Smeur. In de eerste 42 bladzijden volgt een uiteenzetting van de rekenmethoden, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, somming van enkele rijen, worteltrekken en enkele praktische toepassingen. Ook nu is de oorspronkelijke tekst in facsimile toegevoegd. Van beide werkjes zijn slechts 500 exemplaren gedrukt, wat zijn invloed heeft gehad op de prijs.

Burgers

SUR LES NOUVEAUX PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES SCOLAIRES EN POLOGNE

par

S. STRASZEWICZ

Varsovie

La question d'une amélioration de l'enseignement scolaire des mathématiques a été largement discutée en Pologne au cours des dernières années. Il en résulta un nouveau programme pour l'école secondaire qui entre graduellement en vigueur depuis deux ans.

Notre école secondaire comprend maintenant 12 classes. Le premier cycle, obligatoire pour tous les enfants est constitué par les 8 classes inférieures, l'âge des élèves est de 7 à 14 ans. Le 2^d cycle c'est le lycée avec ses 4 classes (élèves de 15 à 18 ans). Il n'y a là aucune subdivision en sections, tous les élèves suivent le même enseignement. Les mathématiques sont enseignées à raison de 4 heures (45 min) par semaine dans les classes I-III et 3 heures dans la IVe.

Je me propose de présenter ici un aperçu général du programme de mathématiques dans nos lycées. Mais auparavant je donnerai une brève caractéristique de l'enseignement dans les 4 classes supérieures du 1^{er} cycle (11—14 ans).

Arithmétique et algèbre. Dans la 5^e année il s'agit d'abord de systématiser et de compléter les connaissances des élèves sur les nombres naturels en accentuant les lois fondamentales des opérations et des inégalités. L'arithmétique des fractions est enseignée aussi en 5^e et en partie en 6^e, les nombres négatifs sont introduits en 7^e. On s'est demandé si l'ordre inverse n'aurait pas été préférable, mais l'opinion contraire a finalement prévalu. Dans la dernière classe du 1^{er} cycle on donne quelques informations sur les nombres irrationnels et on exerce les élèves aux calculs approximatifs avec estimation des erreurs.

Dès la 5^e année on commence à introduire la notation algébrique; se sont d'abord les simples formules des lois fondamentales qu'on exprime en lettres, puis on passe successivement aux expressions algébriques plus compliquées et à leur transformation. En même temps on entraîne les élèves à la résolution des équations et des

inéquations du premier degré. Ici on se contente d'abord d'utiliser les propriétés des opérations; en 7^e année on base la résolution des équations et des inéquations sur leur équivalence.

A partir de la 5^e année on introduit la méthode des équations pour les problèmes textuels au lieu de divers procédés artificiels bien connus. On prend enfin grand soin de préparer graduellement la notion de fonction en discutant plusieurs exemples de correspondance. Dès la 6^e année on se sert du système cartésien pour représenter graphiquement les plus simples fonctions données par des expressions algébriques (proportionnalité directe et inverse, x^2 , x^3 etc.).

Comme on le voit, l'algèbre n'est pas séparée de l'arithmétique. On arrive à des notions mathématiques par une voie inductive en partant de l'observation et de l'expérience. Mais en même temps on doit peu à peu initier les élèves au raisonnement logique en introduisant des fragments déductifs aux endroits indiqués (divisibilité des nombres, équivalence des équations etc.).

La *géométrie* est enseignée dans toutes les 4 classes supérieures du 1^{er} cycle. C'est un cours intuitif mais systématique, qui fait connaître les principales notions et vérités de la géométrie dans le plan et dans l'espace.

La méthode n'est d'abord qu'expérimentale. On conduit les élèves à des définitions et des théorèmes en les faisant dessiner des figures, construire des modèles et effectuer des mesurages. Au cours de l'enseignement on commence à se servir du raisonnement déductif dont le rôle s'accroît de plus en plus. En établissant les propriétés des figures on utilise largement des déplacements, des symétries, et des homothéties, les cas d'égalité des triangles ne sont que mentionnés.

Au programme de la dernière classe figure une étude élémentaire des fonctions trigonométriques d'un angle aigu avec leurs applications pratiques. On y explique aussi les premiers principes de la géométrie descriptive.

Je passe au 2^e cyclé (15—18 ans). Ici le programme a subi une refonte générale. En vue d'une modernisation de l'enseignement on a introduit des matières nouvelles en supprimant ou réduisant plusieurs sujets anciens.

L'idée directrice était d'orienter l'enseignement vers les conceptions mathématiques contemporaines et leurs applications et de lui donner un langage moderne.

Mais, d'autre part, il importait de former un projet réalisable dans les conditions actuelles. Questions du personnel enseignant, de manuels, d'horaires etc. et aussi des possibilités intellectuelles des élèves imposent des limites qu'on devait respecter. Il fallait aussi

prendre en considération que l'enseignement secondaire n'a nullement en vue la formation de futurs mathématiciens, mais bien une préparation aux études supérieures en général. Il s'agissait donc de ne pas surcharger le programme par trop de sujets et de ne pas pénétrer trop loin dans des théories abstraites.

Je vais passer en revue les matières du programme en commençant par les rudiments de la théorie des *ensembles* et de la *logique mathématique* qu'on a placés au début de la 2^e année et en partie déjà en 1^{er} pour pouvoir se servir au plus tôt des notions et des symboles introduits.

L'étude des ensembles concerne les points suivants: Relations d'appartenance, d'inclusion et d'égalité. Notions: réunion, intersection et différence des ensembles, complémentaire d'un ensemble, ensemble vide. Formules fondamentales de l'algèbre des ensembles. Produit cartésien des ensembles.

Le programme de la logique comprend 2 chapitres:

1^o Calcul des propositions. Notion de proposition et de ses valeurs logiques. Opérations: négation d'une proposition, conjonction, disjonction, implication et implication réciproque des propositions. Quelques tautologies fondamentales, entre autres les principes de contradiction, du tertium non datur, de double négation, de transposition, transitivité de l'implication.

Relation entre l'algèbre des ensembles et la logique des propositions.

2^o Fonctions propositionnelles (que j'aimerais appeler plutôt „formes propositionnelles”). Fonctions propositionnelles à une variable et les ensembles correspondants. Fonctions à 2 variables ou relations binaires. Quantifications des fonctions propositionnelles. Propriétés fondamentales de quantificateurs, en particulier leur négation.

Les instructions aux programmes soulignent l'importance d'une bonne compréhension des quantificateurs. Leur mauvais emploi se manifeste dans des erreurs bien connues des élèves, par exemple, quand ils concluent que $\neg \bigwedge_x f(x) \Rightarrow \bigwedge_x \neg f(x)$.

L'enseignement de l'*arithmétique* et de l'*algèbre* commence dans la 1^{re} année avec l'étude du système des nombres réels. Il s'agit de systématiser et d'approfondir les connaissances acquises au 1^{er} cycle. On est tenu à établir et commenter la liste des propriétés de l'ensemble des nombres entiers, des nombres rationnels et de tous les nombres réels en dégagant les structures d'ordre, de groupe, d'anneau et de corps. On mettra aussi en lumière la continuité de l'ensemble des réels en postulant, par exemple, que tout ensemble de nombres majoré a une borne supérieure.

J'ajouterais une remarque à ce sujet. Beaucoup de professeurs éminents — chez nous comme ailleurs — estiment qu'une construction du système des réels à partir des rationnels ne peut être un objet de l'enseignement secondaire et qu'il suffit de définir ce système axiomatiquement comme un corps commutatif ordonné et continu. Je ne partage pas cette opinion. Si l'on se borne à faire croire à l'existence des nombres irrationnels et à décréter les lois des opérations, la chose reste nébuleuse pour l'élève; à ce niveau il a besoin de définitions explicites et il faut bien les lui donner. Ce n'est pas que je pense aux théories de Dedekind, de Cantor ou de Weierstrass. Mais je n'hésiterais nullement à définir les nombres réels et les opérations en utilisant les fractions décimales illimitées; les démonstrations nécessaires sont alors assez simples; on pourrait d'ailleurs se limiter aux choses principales. J'ajouterai que les instructions officielles de nos programmes ne s'opposent pas à ce que le professeur entame ce sujet.

Le chapitre suivant du programme de la 1^{re} année concerne la notion générale de fonction et ses applications. Il comprend en particulier l'étude des fonctions, des équations et des inéquations du 1^{er} et du 2^d degré.

On complète ces connaissances dans la classe suivante en considérant les propriétés des polynômes et des fonctions rationnelles ou on fera ressortir les structures d'anneau et de corps.

L'étude des ensembles de nombres prévue pour la 1^{re} année laisse une grave lacune à combler. Je parle du principe de l'induction complète. On l'introduit dans la 2^e année avec plusieurs applications notamment à l'analyse combinatoire et à la formule du binôme. Le sujet est jugé par nos pédagogues comme étant difficile pour les élèves; jusqu'à présent on le remettait à la dernière classe. Je crois que ces craintes sont exagérées; selon mes expériences personnelles on peut faire comprendre ce principe assez tôt.

La seconde partie du programme se rapporte à la *géométrie*. La question comment enseigner la géométrie au 2^d cycle est difficile et la solution proposée par le programme n'est, peut être, que provisoire. On est généralement d'accord que l'enseignement traditionnel de la géométrie avec ses dizaines de théorèmes relatifs aux particularités des figures et de démonstrations artificielles basées sur les cas d'égalité ou de similitude des triangles ne pourrait être maintenu. Il est nécessaire de le modifier en changeant son contenu et sa méthode.

On peut présenter la géométrie euclidienne comme l'étude d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Un petit nombre d'axiomes suffit alors pour déduire les théorèmes de la géométrie

d'une manière précise et élégante. Des mathématiciens éminents ont recommandé cette méthode pour les classes supérieures de l'école secondaire. Mais on peut se demander, si une telle algébrisation de la géométrie est vraiment convenable à ce niveau. Nous pensons, en Pologne, que même au lycée on devrait enseigner la géométrie d'une manière moins abstraite pour permettre l'appel constant à l'imagination de l'élève.

Nous sommes donc arrivés à la conclusion, que tout en abandonnant l'axiomatique d'Euclide-Hilbert il convient néanmoins de baser la géométrie scolaire sur un système d'axiomes intuitifs exprimant les propriétés des notions géométriques telles que l'incidence, l'ordre, le parallélisme, la distance, la symétrie etc. Il faudrait que les axiomes soient peu nombreux mais assez forts, pour qu'on ait un accès facile à l'étude de la structure vectorielle de l'espace et des transformations élémentaires.

Une axiomatique satisfaisant à ces principes a été construite, comme on le sait, par M.G. Choquet. Nos nouveaux manuels qui vont bientôt paraître utiliseront sans doute ses idées, au moins partiellement.

La géométrie figure dans le programme de toutes les classes du lycée. La première partie comprend les propriétés affines et les isométries du plan. La seconde — les similitudes et les propriétés métriques. Dans la troisième classe il y a un cours élémentaire de la géométrie analytique plane. Son but est d'initier les élèves à la méthode cartésienne, en particulier à l'emploi des vecteurs et des transformations linéaires dans l'étude des courbes. Beaucoup des sujets traditionnels, comme par exemple, plusieurs propriétés des coniques, ont été supprimés.

La dernière partie est consacrée à l'étude de la géométrie dans l'espace, y compris une initiation à la géométrie analytique à 3 dimensions. L'enseignement sera guidé par les mêmes principes qu'en géométrie plane. Le niveau cependant sera un peu plus élevé. On pourra perfectionner la construction axiomatique; les connaissances acquises sur les groupes seront enrichies, en particulier, par la considération des groupes correspondant aux polyèdres réguliers.

Les *notions d'analyse* ont été admises dans le programme des deux classes moyennes.

En 2^e il y a un chapitre sur les suites de nombres et la notion de limite. Ensuite on donne la définition de la dérivée d'une fonction et on expose les premiers principes du calcul différentiel qu'on applique à l'étude des variations des fonctions rationnelles. Il s'agit ici d'une étude en partie intuitive. Le professeur est autorisé d'omettre certaines démonstrations à la condition d'énoncer les

théorèmes d'une façon précise. Il devra prendre souci de montrer aux élèves la portée et l'utilité du calcul des dérivées en l'appliquant aux questions de géométrie, de mécanique, de physique et d'autres sciences.

En 3^e on fait d'abord une étude des fonctions transcendentes élémentaires. On généralise la notion de puissance, puis on introduit la fonction exponentielle et le logarithme. Ici aussi il est permis d'admettre quelques théorèmes sans démonstrations. On montrera aux élèves l'usage de la règle à calcul.

Ensuite on établit les propriétés fondamentales des fonctions trigonométriques en considérant aussi les fonctions inverses. Les exercices usuels sur les identités et les équations trigonométriques sont à limiter aux cas simples. Les instructions du programme suggèrent de mentionner comment on pourrait définir les fonctions trigonométriques analytiquement, par exemple par des équations fonctionnelles.

Le dernier chapitre du domaine d'analyse comprend quelques compléments au calcul des dérivées, la notion de fonction primitive et diverses applications. En partie majeure elles concernent les questions d'analyse numérique: interpolation, résolution approximative des équations, construction et emploi de simples nomogrammes.

Il ne me reste à dire que quelques mots sur l'enseignement du *calcul des probabilités*, matière toute nouvelle dans notre école secondaire mais souhaitée depuis longtemps en vue de son importance croissante dans la vie de tous les jours. C'est un sujet attrayant mais pas facile pour un débutant, surtout quand il s'agit d'appliquer correctement la théorie aux problèmes. Le calcul des probabilités a été placé dans la classe terminale; l'étude se limite aux questions suivantes:

Notion d'événement comme sous-ensemble d'un ensemble fini d'événements élémentaires et sa probabilité (définition classique). Événements incompatibles, événements contraires, addition des probabilités. Probabilité conditionnelle, événements indépendants, multiplication des probabilités.

Epreuves répétées, la loi des grands nombres de Bernoulli. Notion de variable aléatoire et de sa fonction de répartition. Espérance mathématique: espérance de la somme et du produit des variables aléatoires. Variance et l'écart moyen quadratique.

Dans la 4^e classe on aura encore un cours supplémentaire des mathématiques /4 heures par semaine/ destiné à ceux des élèves qui vont étudier les sciences exactes ou techniques. Le programme n'en est pas encore fixé.

DE REËLE GETALLEN VAN GETALTHEORETISCH STANDPUNT UIT BEKEKEN ¹⁾

door

PROF. DR. J. POPKEN

Amsterdam

1. Bij de opbouw van ons getallensysteem gaan we gewoonlijk uit van de natuurlijke getallen; we komen daarna, meestal via de gehele getallen, tot de rationale. Met behulp van de rationale getallen worden dan de reële gegenereerd. Deze laatste overgang is een enorme sprong. We gaan hier niet nader op in, maar herinneren slechts aan het feit, dat de rationale getallen nog een aftelbare verzameling vormen, dat de reële getallen daarentegen een hogere machtigheid hebben.

De verzameling van de reële getallen is voor de hedendaagse wiskunde van fundamentele betekenis. Geen wonder dat deze verzameling telkens weer het uitgangspunt is van wiskundig onderzoek. Vaak is dit axiomatisch van aard; soms ook streeft men naar generalisaties. Het individuele karakter van de elementen zelf, de reële getallen, speelt daarbij doorgaans geen enkele rol. Anders wordt dit als we de reële getallen vanuit getaltheoretisch oogpunt willen bekijken. Dan is dit individuele karakter juist het hoofddoel van ons onderzoek. We hebben hier te maken met een wezenskenmerk van de getaltheorie: het zich toespitsen op het discrete. Dit laatste zal dus in het volgende het geval zijn.

We gaan uit van de rationale getallen, die we in het vervolg steeds zullen voorstellen door x/y , waarbij x en y steeds gehele getallen representeren met $y \geq 1$. Wij interesseren ons nu voor de vraag hoe een irrationaal getal α gelegen is ten opzichte van de verzameling van de rationale getallen en in het bijzonder hoe goed of hoe slecht het getal α door rationale getallen x/y benaderd kan worden; m.a.w. we willen het negatieve begrip „irrationaliteit” een iets meer positieve inhoud geven.

We houden voor een ogenblik het natuurlijke getal $y = y_0$ vast en laten x alle gehele waarden $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ doorlopen. De getallen x/y_0 liggen dan equidistant op de reële getallenlijn met rooster-

¹⁾ Voordracht Vakantiecursus Mathematisch Centrum 1965.

lengte $1/y_0$. Het irrationale getal α ligt tussen twee opeenvolgende getallen x_1/y_0 en $(x_1 + 1)/y_0$. Zij $\Delta(y_0)$ de afstand van α tot het dichtstbijzijnde getal van dit paar. Laten we $y = 1, 2, \dots$ nu weer lopen, dan vinden we voor alle x, y de relatie

$$|\alpha - x/y| \geq \Delta(y) > 0,$$

waarbij het gelijktteken voor iedere y bij geschikte keuze van x wordt aangenomen.

Bij elk irrationaal getal α is er nu zo'n functie $\Delta(y)$ en het is deze functie die we in het volgende nader willen onderzoeken. Voor een goed overzicht is het misschien beter om bij eerste lezing de bewijzen van de individuele stellingen over te slaan. Dit geldt niet voor het eenvoudige bewijs van stelling 1.

2. Voor elk irrationaal getal α en voor elke y geldt vanzelfsprekend

$$0 < \Delta(y) < \frac{1}{2}y^{-1}.$$

Een veel scherper resultaat, dat echter slechts geldig is voor oneindig vele y 's, geeft de volgende beroemde klassieke stelling:

Stelling 1. Voor elk irrationaal getal α heeft de ongelijkheid

$$|\alpha - x/y| < y^{-2}$$

oneindig vele verschillende oplossingen (x, y) .

Anders geformuleerd: Er geldt $\Delta(y) < y^{-2}$ voor oneindig vele y 's. Een voor de hand liggende bewijsmethode werkt met de kettingbreukontwikkeling van α ; in dat geval neemt men voor de benaderingen x/y de naderende breuken van deze ontwikkeling.

Het hier volgende bewijs vermijdt de kettingbreuktheorie, maar werkt in plaats daarvan met de „ladenmethode”, een beroemd bewijsprincipe dat het eerst door Dirichlet systematisch is ingevoerd. Dit principe luidt: Heeft men $n + 1$ voorwerpen te verdelen over n laden, dan is er minstens één lade, waarin meer dan één voorwerp komt.

Let op dat in het hier volgende bewijs van stelling 1 de irrationaliteit van α pas op het allerlaatste moment gebruikt wordt.

Hulpstelling. Zij α reëel; zij n een natuurlijk getal. Dan zijn er gehele getallen x en y , met

$$|\alpha - x/y| < n^{-1}y^{-1}, \quad 1 \leq y \leq n.$$

Bewijs: a) de $n + 1$ voorwerpen:

Neem de $n + 1$ reële getallen

$$0, \alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$$

en trek van elk van deze getallen een geheel getal (eventueel 0) af, zodat de resten in het interval $0 \leq u < 1$ komen te liggen (de z.g. resten modulo 1):

$$0, \{\alpha\} = \alpha - x_1, \{2\alpha\} = 2\alpha - x_2, \dots, \{n\alpha\} = n\alpha - x_n.$$

Dit zijn de $n + 1$ voorwerpen.

b) De „laden” zijn de n volgende deelintervallen van $0 \leq u < 1$:

$$0 \leq u_1 < n^{-1}, n^{-1} \leq u < 2n^{-1}, \dots, (n-1)n^{-1} \leq u < 1.$$

Conclusie: in minstens één lade bevinden zich minstens twee voorwerpen $\{h_1\alpha\}$ en $\{h_2\alpha\}$ met $0 \leq h_1 < h_2 \leq n$. Maar dan is

$$\begin{aligned} |\{h_2\alpha\} - \{h_1\alpha\}| &< n^{-1}, \\ |(h_2 - h_1)\alpha - (x_{h_2} - x_{h_1})| &< n^{-1}. \end{aligned}$$

Stellen we $y = h_2 - h_1 \geq 1$ en $x = x_{h_2} - x_{h_1}$, dan volgt de bewering van de hulpstelling onmiddellijk.

Bewijs van stelling 1: Pas de hulpstelling successievelijk toe met $n = 1, 2, \dots$. Dit geeft

$$1 \leq y_n \leq n, |\alpha - x_n/y_n| < n^{-1}y_n^{-1} \begin{cases} \leq y_n^{-2} \\ \leq n^{-1} \end{cases}.$$

We hebben dus nog slechts te bewijzen dat bij een irrationaal getal α de rij (x_n/y_n) oneindig vele verschillende rationale getallen bevat. Dit volgt uit

$$\alpha - x_n/y_n \rightarrow 0,$$

gecombineerd met het feit dat α irrationaal is.

3. Het bovenstaande resultaat kan verscherpt worden. Een zeer bekende stelling van Hurwitz luidt n.l.

Stelling 2. Voor elk irrationaal getal α heeft de ongelijkheid

$$|\alpha - x/y| < 5^{-\frac{1}{2}}y^{-2}$$

oneindig vele oplossingen.

Een eenvoudig bewijs van deze stelling vindt men in Perron [6], p. 135. Men vergelijk ook de voordracht van Prof. Mullender in deze serie. In Stelling 2 is $5^{-\frac{1}{2}}$ de „beste” constante, want voor sommige irrationale getallen α is de bewering onjuist als men $5^{-\frac{1}{2}}$ door een kleiner getal vervangt. Neemt men n.l. voor α een wortel van de vergelijking

$$u^2 + u - 1 = 0,$$

bekend uit de theorie der gulden snede, n.l. $\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, dan kan men met zeer elementaire middelen bewijzen dat

$$|\alpha - x/y| < \frac{1}{\sqrt{5} + \varepsilon} y^{-2} \quad (\varepsilon > 0)$$

slechts eindig vele oplossingen (x, y) kan hebben; $5^{-\frac{1}{2}}$ is dus de „kritieke” constante voor deze twee getallen α . Het bewijs hiervan wordt in de volgende paragraaf gegeven. Men kan zelfs gemakkelijk alle getallen aangeven waarvoor $5^{-\frac{1}{2}}$ de kritieke constante is; dit zijn n.l. alle getallen α equivalent met $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Hierbij heten twee getallen α en β equivalent als de een door een unimodulaire transformatie in de andere kan overgaan d.w.z. als

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},$$

waar a, b, c, d gehele getallen zijn met $ad - bc = \pm 1$.

Laat men de getallen equivalent met $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ buiten beschouwing, dan kan men de stelling van Hurwitz verscherpen door invoering van een nieuwe constante $8^{-\frac{1}{2}}$ en het spel van zoëven herhaalt zich. Op de hiermee samenhangende theorie kan ik hier niet verder ingaan. Zie daartoe Cassels [2], Chapter I, II.

4. In het voorgaande ging het om schattingen van $\Delta(y)$ naar boven. Nu kijken we juist naar schattingen naar beneden; d.w.z. we zoeken antwoord op de vraag: hoe ver is $\Delta(y)$ minstens van 0 verwijderd? Daartoe voeren we het begrip irrationaliteitsmaat in.

Om dit begrip te verduidelijken beginnen we met een eenvoudig concreet geval. We vangen dan drie vliegen in één klap, doordat de te volgen redeneermethode later ook zal voeren tot een veel algemenere stelling (stelling 3 uit de volgende paragraaf) en doordat we tevens een bewering uit de vorige paragraaf waar maken (n.l. dat $5^{-\frac{1}{2}}$ de kritieke constante is voor het irrationale getal $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$). Zij $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; verder zij $\varepsilon > 0$ vast gekozen. Nu is $(u - \alpha_1)(u - \alpha_2) = u^2 + u - 1$; dus voor gehele x en y , $y \geq 1$ is

$$y^2(x/y - \alpha_1)(x/y - \alpha_2) = y^2(x^2/y^2 + x/y - 1)$$

geheel, echter ongelijk nul; in absolute waarde is dit getal dus minstens 1. Er volgt

$$|\alpha_1 - x/y| |\alpha_2 - x/y| \geq y^{-2}.$$

Beschouwen we alleen waarden van x en y met $|\alpha - x/y| < \varepsilon$. Dan is

$$|\alpha_2 - x/y| = |\alpha_1 - x/y + \alpha_2 - \alpha_1| \leq |\alpha_1 - x/y| + |\alpha_2 - \alpha_1| < \varepsilon + \sqrt{5}$$

en dus

$$|\alpha - x/y| > \frac{1}{\sqrt{5} + \varepsilon} y^{-2}.$$

Uit $|\alpha - x/y| < \varepsilon$ volgt dus de bovenstaande ongelijkheid; ofwel

$$|\alpha - x/y| \geq \min\left(\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{5} + \varepsilon} y^{-2}\right).$$

Kies nu het natuurlijke getal y_0 zo groot dat $\frac{1}{\sqrt{5}} y_0^{-2} < \varepsilon$. Dan

volgt voor alle x en y met $y \geq y_0$

$$|\alpha - x/y| \geq \frac{1}{\sqrt{5} + \varepsilon} y^{-2}.$$

Nog anders uitgedrukt: de ongelijkheid

$$|\alpha - x/y| < \frac{1}{\sqrt{5} + \varepsilon} y^{-2}$$

heeft slechts eindig vele oplossingen (d.w.z. $5^{-\frac{1}{2}}$ is de kritieke constante voor α).

We noemen nu $\frac{1}{\sqrt{5} + \varepsilon} y^{-2}$ een „irrationaliteitsmaat” voor het getal $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Meer algemeen voeren we de volgende definitie in:

Definitie. Zij α een gegeven irrationaal getal. Is nu $\mu(y)$ een zodanige functie van y dat

$$|\alpha - x/y| \geq \mu(y) > 0$$

voor *alle* gehele x en y met $y \geq y_0(\alpha)$, dan heet $\mu(y)$ een *irrationaliteitsmaat* voor α .

Soms kunnen we $y_0(\alpha)$ precies aangeven en dan spreken we van een *complete* irrationaliteitsmaat. In vele gevallen weten we echter alleen dat bij een gegeven functie $\mu(y)$ zo'n getal y_0 bestaan moet, zonder deze effectief te kunnen aangeven.

Dat bij elk irrationaal getal α zo'n maat bestaan moet, volgt al uit de inleidende beschouwing; we kunnen b.v. $\mu(y) = \Delta(y)$ nemen. Slechts in zeer bijzondere gevallen is dan echter $\mu(y)$ effectief aan te geven.

Een generalisatie van het begrip irrationaliteitsmaat is het begrip *transcendentia maat*. Hierbij wordt de rol van het vaste irrationale getal overgenomen door een transcendent getal τ , terwijl de rationale benaderingen x/y in dat geval vervangen worden door algebraïsche benaderingen ξ . Een transcendentia maat voor τ geeft dus een positieve ondergrens voor de afstand van τ tot een willekeurig algebraïsch getal ξ .²⁾

De kennis van een irrationaliteits- of transcendentia maat geeft ons soms belangrijke informatie op geheel andere gebieden van de wiskunde: al of niet oplosbaarheid van bepaalde diophantische vergelijkingen (zie b.v. Landau [4], pag 37 e.v.), convergentie of divergentie van bepaalde reeksen, al of niet voortzettingbaarheid van analytische functies (zie b.v. Popken [7]).

5. Al in 1844 heeft Liouville een eenvoudige irrationaliteitsmaat aangegeven voor algebraïsche irrationale getallen. Zijn resultaat luidt:

Stelling 3. Zij α een algebraïsch getal van de graad $n \geq 2$. Dan bestaat er een positief getal $c_0 = c_0(\alpha)$, zodat voor alle x en y geldt

$$(1) \quad |\alpha - x/y| \geq c_0 y^{-n}.$$

Bewijs. Omdat α een algebraïsch getal van de graad n is, bestaat er een irreducibel polynoom met rationale coëfficiënten

$$f(u) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

zodanig dat $f(\alpha) = 0$.

Zonder bezwaar mogen we daarbij aannemen dat $a_0, a_1, \dots, a_n$ zelfs geheel zijn. Essentieel is nu de simpele constatering, dat dan ook $y^n f(x/y)$ geheel moet zijn. Bovendien kan de laatste uitdrukking niet nul zijn, daar anders volgens de reststelling $f(u)$ door $u - x/y$ deelbaar zou zijn (dus reducibel zou zijn). Er volgt:

$$\left| f\left(\frac{x}{y}\right) \right| \geq y^{-n}.$$

Laat nu $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de reële en complexe nulpunten van $f(u)$ voorstellen, zodat

$$f(u) = a_0(u - \alpha)(u - \alpha_2) \dots (u - \alpha_n).$$

²⁾ Voor de theorie der transcendentia maten zie b.v. Schneider [8], IV Kapitel. In de laatste tientallen jaren zijn op dit gebied zeer diepzinnige onderzoeken verricht, culminerend in het uiterst moeilijke werk van de Rus Sprindžuk van verleden jaar.

is. Er volgt

$$(2) \quad \left| a_0 \right| \left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \left| \frac{x}{y} - \alpha_2 \right| \cdots \left| \frac{x}{y} - \alpha_n \right| \geq y^{-n}.$$

Nu mogen we aannemen, dat $\left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \leq 1$ is, daar anders (1) juist is voor elke keuze van c_0 met $c_0 \leq 1$. Dan is echter voor elke $\nu = 2, 3, \dots, n$

$$\left| \frac{x}{y} - \alpha_\nu \right| = \left| \left(\frac{x}{y} - \alpha \right) + (\alpha - \alpha_\nu) \right| \leq 1 + \max_\nu |\alpha - \alpha_\nu| = B$$

en we krijgen uit (2)

$$|a_0| \left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \cdot B^{n-1} \geq y^{-n},$$

zodat (1) zeker geldt met

$$c_0 = |a_0|^{-1} B^{-(n-1)}, \quad \text{q.e.d.}$$

Liouville heeft dit resultaat gebruikt om de transcendentie van zekere getallen aan te tonen. Vóór hem had nog niemand het bestaan van transcendente getallen bewezen. Dit gaat als volgt: Stel b.v. dat α gegeven is door de alternerende reeks

$$\alpha = 1 - 2^{-1!} + 2^{-2!} + \dots + (-1)^m 2^{-m!} + \dots$$

Breekt men deze reeks af bij de laatst opgeschreven term, dan krijgt men een rationaal getal x/y met $y = 2^{m!}$, terwijl

$$0 < |\alpha - x/y| < 2^{-(m+1)!} = y^{-(m+1)}.$$

Hieruit volgt weer dat voor elke positieve waarde c , hoe groot ook gekozen,

$$(3) \quad 0 < |\alpha - x/y| < y^{-c}$$

oneindig vele oplossingen heeft; m.a.w. α is wat we noemen *een getal van Liouville*. Gemakkelijk volgt uit (3) dat α niet rationaal kan zijn, maar ook wegens stelling 3, dat α geen algebraïsch getal van de graad $n \geq 2$ kan zijn, α is dus transcendent. Meer algemeen hebben we bewezen:

Een getal van Liouville is transcendent.

6. De irrationaliteitsmaat van Liouville $c_0 y^{-n}$ geeft voor algebraïsche getallen van hoge graad n geen erg scherpe grens. Immers, omdat het hier gaat om een grens aan de benedenkant, wordt het

resultaat slechter naarmate de exponent van y sterker negatief is. Dit blijkt al uit de grote kloof tussen dit resultaat en b.v. de stelling 1. Alleen voor $n = 2$, dus voor kwadratische irrationaliteiten, is er een mooie overeenstemming tussen beide resultaten. Er is echter een z.g. metrische stelling die dit nog meer in het licht stelt:

Stelling 4. Zij $\delta > 0$ vast gekozen, dan hebben „bijna alle” reële getallen de irrationaliteitsmaat

$$\mu(y) = y^{-2-\delta}.$$

„Bijna alle” betekent hier dat de uitzonderingsgetallen een verzameling vormen met Lebesgue-maat nul ¹⁾. Stelling 4 kunnen we daarom ook als volgt uitspreken: Zij $\delta > 0$. De getallen α met de eigenschap dat

$$(4) \quad |\alpha - x/y| < y^{-2-\delta}$$

oneindig vele oplossingen (x, y) toelaat, vormen een verzameling V met de maat nul.

Bewijs. Zonder bezwaar kunnen we V beperken tot de getallen α met $0 \leq \alpha < 1$. Zij y een willekeurig natuurlijk getal. Om elk van de $y + 1$ punten

$$0, 1/y, 2/y, \dots, y/y$$

als middelpunt slaan we een interval ter lengte $2 \cdot y^{-2-\delta}$ (s.v.p. tekenen!) en de vereniging van al die intervallen noemen we U_y . Blijkbaar is dan de maat van $U_y \leq (y + 1) \cdot 2y^{-2-\delta} \leq 4y^{-1-\delta}$. Nu convergeert de reeks $\sum_{y=1}^{\infty} y^{-1-\delta}$. Kies nu $y_0 = y_0(\varepsilon)$ zo groot, dat

$$\sum_{y=y_0}^{\infty} 4y^{-1-\delta} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Stellen we

$$U = \bigcup_{y \geq y_0} U_y,$$

dan is U een intervallen verzameling met totale lengte der intervallen $< \varepsilon$. Zij nu $\alpha \in V$, dus $0 \leq \alpha < 1$, zodat (4) oneindig vele oplossingen (x, y) toelaat. We zullen nu bewijzen dat α in U ligt. Er is n.l. zeker een oplossing (x, y) met $y \geq y_0$. Was nu $x \leq -1$, dan zou $|\alpha - x/y| \geq y^{-1}$ zijn; dit geeft een tegenspraak, daar $|\alpha - x/y| < y^{-2-\delta}$. Op analoge wijze zien we in dat $x \geq y + 1$ onmogelijk is.

¹⁾ Een verzameling V heeft de maat nul als bij elke $\varepsilon > 0$ een overdekking van V door eindig of oneindig vele intervallen bestaat met totale lengte der intervallen $< \varepsilon$.

Dus is $0 \leq x \leq y$; verder is aan (4) voldaan, zodat α tot een der intervallen uit U_v behoort. Wegens $y \geq y_0$ behoort α tot U . De verzameling V der getallen α is dus overdekt door de verzameling U met maat $< \varepsilon$. Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig is heeft V de maat nul. q.e.d.

Het voorgaande resultaat is een der eenvoudigste voorbeelden van een „metrische” stelling. Zo’n theorema schrijft het normale gedrag van een reëel getal voor. Men is hier zeer dicht in de buurt van de waarschijnlijkheidstheorie en ergodentheorie. Er zijn tegenwoordig dan ook diepgaande theorieën die met behulp van waarschijnlijkheids- of ergodentheorie allerlei metrische stellingen opleveren. Zo ontstond in de laatste 30 jaar een geheel nieuwe tak van de getaltheorie.

We zullen hier een reëel getal met irrationaliteitsmaat $y^{-2-\delta}$ voor elke vaste $\delta > 0$ een „normaal” getal noemen. Dit begrip moet niet verward worden met het verwant en gelijknamig begrip van E. Borel.

Metrische stellingen hebben doorgaans het voordeel van grote algemeenheid, maar een groot nadeel is dat ze slechts zelden een antwoord geven op concrete vragen ¹⁾. Zo volgt b.v. uit stelling 4 niets over de irrationaliteitsmaten van e en π . Deze moet men langs geheel andere weg bereiken. Voor e ligt de zaak tamelijk eenvoudig, omdat in dit geval een eenvoudige kettingbreukontwikkeling tot onze beschikking staat (zie b.v. Perron [6], p. 113-116). Men vindt dat e een normaal getal in onze zin is. Voor π is een dergelijk resultaat niet bekend. Mahler [5] vond uit een diep onderzoek dat π de irrationaliteitsmaat y^{-42} bezit.

7. De vraag rijst nu of men voor algebraïsche irrationale getallen geen betere irrationaliteitsmaat kan vinden dan de $c_0 y^{-n}$ van Liouville. We komen dan echter in één der moeilijkste en diepste vaarwateren van de moderne wiskunde, waarover we maar enkele dingen hier kunnen zeggen. In 1909 kon Thue dit resultaat met een verrassend nieuwe methode verscherpen. Dit gaf al direct aanleiding tot tal van toepassingen op het gebied der diophantische vergelijkingen. Een volgende stap deed Siegel in 1921 en, na verwoede pogingen van tal van mathematici, kon Roth in 1955 een tamelijk afsluitend resultaat bereiken:

¹⁾ Dit is wellicht de reden dat een groot man als H. Weyl geen hoge dunk van dergelijke theorieën had. Na zelf zo’n metrische stelling bewezen te hebben schreef hij eens: „Ich glaube dass man den Wert solcher Sätze nicht eben hoch einschätzen darf.” De snelle ontwikkeling op dit gebied heeft hij echter niet voorzien.

Stelling 5. Elk irrationaal algebraïsch getal is, in onze terminologie, een normaal getal.

Deze stelling kan men ook zo uitspreken: „Voor elk irrationaal algebraïsch getal α heeft de ongelijkheid

$$|\alpha - x/y| < y^{-2-\delta} \quad (\delta > 0, \text{ vast})$$

slechts eindig veel oplossingen.”

Voor een bewijs van deze bijzonder diepe stelling, zie b.v. Cassels [2], Chapter VI. Roth won hiermee de Fields medaille bij gelegenheid van het Internationaal Congres te Edinburgh in 1958. Voor dit probleem is typerend dat men met grote tussenpozen telkens een stapje verder komt.

8. Zij nu $c = 2 + \delta$ een vast getal > 2 . Beschouw de verzameling M_c van de reële getallen α met de eigenschap dat

$$0 < |\alpha - x/y| < y^{-c}$$

oneindig vele oplossingen (x, y) bezit.

We weten dat zulke getallen bestaan; immers elk getal van Liouville voldoet aan deze eis. Volgens de stelling van Roth (stelling 5) zijn alle getallen van M_c transcendent, terwijl volgens de metrische stelling 4 de verzameling M_c de maat nul heeft.

Zij nu $2 < c_1 < c_2$. Blijkbaar is M_{c_2} , waaraan de sterkste eis wordt gesteld, een deel van M_{c_1} . Wil men de relatieve „grootte” van beide verzamelingen vergelijken, dan moet men een fijner maatbegrip gebruiken dan dat van Lebesgue. Dit onderzoek is door Jarník verricht. Hij maakte daarbij gebruik van het „maat” begrip dat Hausdorff gebruikt had om de beroemde lacunaire verzameling van Cantor (die immers ook de maat nul heeft) te meten. Hausdorff noemde dit de „dimensie” van de betreffende verzameling. Jarník vond voor de dimensie van M_c het bedrag $2/c$, dat inderdaad afneemt als c groter wordt. Uit Jarník's resultaat volgt in het bijzonder, dat er oneindig vele α 's bestaan zodat

1e) $0 < |\alpha - x/y| < y^{-c_1}$ oneindig vele oplossingen bezit; maar

2e) $0 < |\alpha - x/y| < y^{-c_2}$ slechts eindig vele oplossingen heeft.

(Zie b.v. A. S. Besicovitch [1]).

Meer en meer komt thans het dimensiebegrip bij fijner verzamelings-theoretisch onderzoek in het centrum van de belangstelling te staan.

- 1) A. S. Besicovitch, *Sets of fractional dimensions II*, Math. Ann. 110 (1934), 321-330; *IV*. J. London Math. Soc. 9 (1934), 126-131.
- 2) J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Tracts, 1957.
- 3) V. Jarnik, *Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass*, Rec. Math. Moscou 36 (1929), 371-382.
- 4) E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie III*, New York, 1947.
- 5) K. Mahler, *On the approximation of π* , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56 (= Indag. Math. 15) (1953), 30-42.
- 6) O. Perron, *Irrationalzahlen*, vierte Auflage, Berlin 1960.
- 7) J. Popken, *Irrational power series*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 66 (= Indag. Math. 25) (1963), 691-694.
- 8) Th. Schneider, *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer Verlag, 1957.

CURSUSSEN MODERNE WISKUNDE VOOR LERAREN

Aan de directeurs en rectoren van VHMO- en kweekscholen is door de Staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen de volgende brief (R.A.i.A.D., no 1476 I/U, 28 maart 1966) toegezonden:

„De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft mij voorgesteld in september 1966 en januari 1967 nogmaals een cursus in moderne wiskunde te organiseren voor bevoegde leraren. Daar ik er van overtuigd ben dat deze inmiddels reeds enkele malen gehouden cursussen van grote waarde zijn voor het onderwijs in de wiskunde, verenig ik mij wederom gaarne met dit voorstel.

De cursus zal colleges en praktische oefeningen omvatten. Te Utrecht, Groningen en Amsterdam wordt de cursus georganiseerd in twee fasen, van 16-17 september 1966 en daarop aansluitend van 9-13 januari 1967, te Eindhoven van 12-16 september 1966. De deelneming is kosteloos; reis- en verblijfskosten komen voor Rijksrekening.

Ik verzoek U de leraren, die willen deelnemen, hiertoe in de gelegenheid te stellen. Ik keur goed, dat U hiervoor buitengewoon verlof verleent. Voor verdere bijzonderheden verwijs ik U naar de hierbij gevoegde circulaire van de Commissie.

Ik verzoek U de inhoud van deze brief en de bijgaande circulaire ter kennis te brengen van de aan Uw school verbonden bevoegde leraren in de wiskunde”.

De in de brief genoemde circulaire - van de secretaris van de commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Prof. Dr. A. F. Monna - heeft de volgende tekst:

„Blijkens zijn brief van heden, R.A.i.A.D., no. 1476 I/U, heeft de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde wederom belast met de organisatie van een cursus in de wiskunde voor leraren wiskunde. De Commissie deelt U dienaangaande het volgende mede.

De organisatie wijkt dit keer - behalve voor de cursus te Eindhoven - af van die van de vorige cursussen. De cursus wordt gegeven in Utrecht, Groningen en Eindhoven en bovendien aan de Universiteit van Amsterdam (met medewerking van het Mathematisch Centrum).

Het onderwerp zal zijn de waarschijnlijkheidsrekening.

Te Utrecht, Groningen en Amsterdam wordt de cursus georganiseerd in twee fasen. Op 16 en 17 september 1966 wordt in deze plaatsen een cursus gegeven die dient ter voorbereiding van een cursus van 9-13 januari 1967. Het is dus de bedoeling dat degenen, die de tweedaagse cursus in september 1966 bijwonen, ook de cursus van een week in januari 1967 meemaken.

Om verschillende dwingende organisatorische redenen was een dergelijke splitsing te Eindhoven niet uitvoerbaar. In Eindhoven wordt de cursus gegeven van 12-16 september 1966.

Ter voorbereiding voor deze cursus wordt aanbevolen de studie van het boek van prof. dr. H. Freudenthal: *Waarschijnlijkheid en Statistiek*, verschenen in de serie Volksuniversiteit, Uitgegeven door Bohn - Haarlem, kosten circa f. 7,50.

Bij de brief aan de rectoren en directeuren is een tweetal aanmeldingsformulieren gevoegd. Meer exemplaren zijn verkrijgbaar bij het secretariaat der Commissie, Boothstraat 17, Utrecht. De aandacht zij er op gevestigd dat ieder die aan de cursus wil deelnemen een formulier behoort in te zenden, ook zij die al eerder aan cursussen deelnamen.

De formulieren moeten vóór 15 mei 1966 aan het secretariaat worden toegezonden.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Keppelhoutweg 12, Oosterbeek.

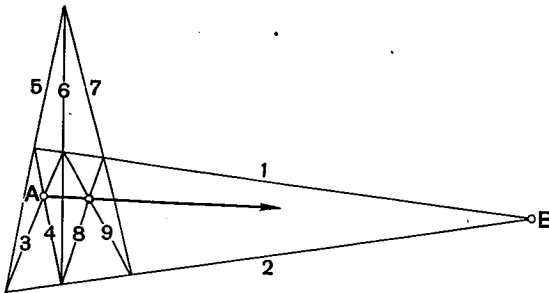
153. Een boer heeft een vierkant stuk weiland met zijden 16 meter. Hij heeft een geit, een pin en een stuk touw. Hij zet de pin in de grond, bindt de geit eraan en laat haar grazen. Hij kiest het touw zo lang, dat het mogelijk is de pin op drie plaatsen achtereenvolgens zo te plaatsen, dat de geit in totaal het hele land kan afgrazen. Hoe lang moet het touw minimaal gekozen worden?

154. Vijf personen doen mee in een atletiekkamp. Elk paar bestrijdt elkaar hetzij in kogelstoten, hetzij in discuswerpen, hetzij in speerwerpen, hetzij in hoogspringen, hetzij in verspringen. Niemand bestrijdt twee anderen in dezelfde tak van sport: Op hoeveel principieel verschillende manieren is dit mogelijk? We noemen twee manieren principieel verschillend, als ze niet door een permutatie van de takken van de sport in elkaar overgevoerd kunnen worden.

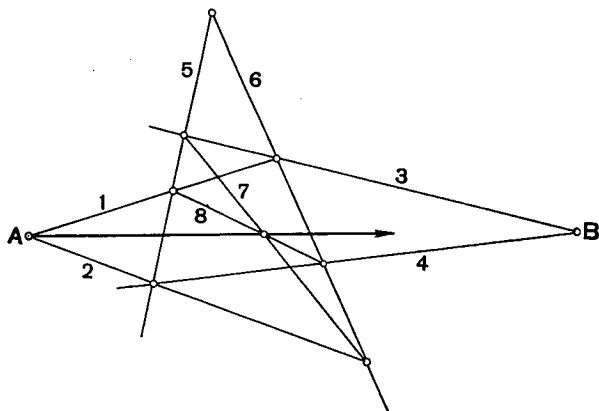
OPLOSSINGEN

151. Met een liniaal, die iets kleiner is dan AB , de lijn door twee gegeven punten A en B te construeren.

a. Met behulp van de stelling van Desargues (aantal hulplijnen: 9).



b. Met behulp van de stelling van Pappus (aantal hulplijnen: 8).



152. Een onbekend aantal knikkers is het kwadraat van een natuurlijk getal en moet onder 3 jongens verdeeld worden, zodat de eerste de helft plus 1 en de tweede het derde deel van de rest krijgt.

Stel het aantal knikkers bedraagt n^2 . Dan krijgt

de eerste jongen $\frac{1}{2}n^2 + 1$ knikkers,

de tweede jongen $\frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}$ knikkers.

Uit het eerste volgt, dat n een even getal is. Stel $n = 2k$. Dan is het aantal knikkers, dat de tweede jongen krijgt $\frac{2}{3}k^2 - \frac{1}{3}$. Dus is $2k^2 - 1$ deelbaar door 3. Nu is $k^2 = 0 \pmod{3}$ of $k^2 = 1 \pmod{3}$. In geen van beide gevallen is $2k^2 - 1$ deelbaar door 3. Aan de opgave kan dus niet voldaan worden.

BOEKBESPREKING

W. I. Layton, *Essential Business Mathematics*, John Wiley & Sons, Londen, 1965, 300 blz., 47/—.

De titel doet al vermoeden, dat hier de elementairste kwesties aan de orde zullen komen. Men kan zeggen, dat blijkbaar de eerste beginselen van de algebra niet als bekend verondersteld worden: interestberekeningen, annuïteitsberekeningen enkel via een tabel, kortom zaken die we toch wel niet meer bij ons V.H.M.O. op deze manier zullen behandelen.

De uitvoering laat niets te wensen over.

Burgers

Drs. A. P. Snoek, *Practische Ruimtemeetkunde* voor het technisch onderwijs, m.m.v. Drs. C. Streefkerk en Ir. G. van Dijk, Uitg. H. Stam, Culemborg, 1965, 160 blz., f 9,75.

Dit leerboek voor de leerlingen van het voorbereidend jaar aan de hogere technische scholen, bestaat uit twee onderdelen: de stereometrie tot en met de inhoud van bol en boldelen, waarna de beschrijvende meetkunde (orthogonale parallel-projectie). De behandeling geschiedt op traditionele wijze. De uitvoering is degelijk.

Burgers

Wiskunde uitgaven voor het vhmO

ALGEBRA VOOR HET VHMO door C. J. Alders

deel 1 - 51/55e druk - ing. f 3.25; geb. f 4.15 / deel 2 - 51/55e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / deel 3 - 24/26e druk - ing. f 2.70; geb. f 3.60 / antwoorden 1 - f 1.— / 2 - f 0.90 / 3 - f 0.90

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / antwoorden gratis

GONIOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.15 / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

21/23e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.80

PLANIMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

31/35e druk - ing. f 3.75; geb. f 4.65

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

29e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.40

ALGEBRA VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

3e druk - ing. f 4.50 / antwoorden f 1.—

MEETKUNDE VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

deel 1 - 2e druk - ing. f 3.90 / deel 2 - ing. f 4.50

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR HET VHMO door Dr. H. Streefkerk

deel 1 - 5e druk - ing. f 3.25 / deel 2 - 5e druk - ing. f 3.90

deel 3 - 3e druk - ing. f 3.75

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET VHMO

door J. C. Kok

2e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.— / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door A. A. Lucieer

13e druk - ing. f 5.—; geb. f 5.75 / antwoorden

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Dr. D. J. E. Schrek - m.m.v. H. Pleysier

4e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.25 / antwoorden

NOORDHOFF'S TAFEL IN VIER DECIMALEN

Gewone logaritmen; Logaritmen sinustafel; Machten, wortels en omgekeerden; Sinustafels; Rentetafels.

25e druk. Geb. f 2.25

NOORDHOFF'S SCHOOLTAFEL IN VIJF DECIMALEN

Gewone logaritmen; Logaritmen sinustafel; Sinustafel; Gon. verhoudingen.

21e druk. Geb. f 3,25

P. Noordhoff nv

postbus 39 | Groningen

LEERBOEK DER NATUURKUNDE

Methode voor het vhmó door Dr. H. Lindeman en Drs. G. H. Frederik

deel IA - mechanica (krachten), vloeistoffen, gassen en warmteleer.
235 blz. 8e druk. Ing. f 7,50

deel IB - geometrische optica en electriciteit. 208 blz. 7e druk. Ing. f 7,50

deel IIA - mechanica, mechanische warmtetheorie. 235 blz. 6e druk. Ing. f 7,50

deel IIB - golven en geluid, fysische optica. 146 blz. 6e druk. Ing. f 5,90

deel III - electriciteit, atoom- en kernfysica. 286 blz. 4e druk. Ing. f 6,50

- het experiment krijgt volle aandacht
- vele vragen in de tekst; achterin vraagstukken met antwoorden
- uitgebreide verzameling vraagstukken in ieder deel
- duidelijke en beknopte uitleg
- overzichtelijk en typografisch goed verzorgd; alle delen zijn geïllustreerd

P. Noordhoff nv

VREEMDE WOORDEN IN DE NATUURKUNDE

en namen der chemische elementen

door Prof. dr. P. H. van Laer

Dit werk is niet bestemd voor linguïsten, maar voor beoefenaars van de natuurwetenschappen en anderen die belangstelling hebben voor de in de natuurkunde gebruikte wetenschappelijke termen. Het boek is verdeeld in twee afdelingen, waarvan de eerste de vreemde vaktermen in de natuurkunde behandelt en de tweede meer speciaal de namen der chemische elementen.

Hoofddoel van dit werk is een etymologische verklaring te geven van de vreemde woorden, gevolgd door een korte zaakbepaling waarin de betekenis van de naam in de fysica of chemie tot uitdrukking komt.

Inhoud: Lijst van de gebruikte afkortingen en tekens; Keuze van de behandelde woorden; Iets over de gegeven etymologieën; Vorming van nieuwe woorden door achtervoegsels; Opmerkingen; Het Griekse alfabet; Uitspraak van de Griekse woorden; Griekse en Latijnse telwoorden; Vreemde woorden in de natuurkunde; Namen der chemische elementen; Behandeling; Overzichten: Tijd der ontdekking, oorsprong der namen, namen van de chemische elementen in de volgorde van hun rangnummer in het periodiek systeem, - in de alfabetische volgorde van hun symbolen.

149 pag. Ing. f 3.75; geb. f 4.50

P. Noordhoff nv

postbus 39 / Groningen