

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

VII — 1 APRIL 1966

INHOUD

Drs. M. D. Bos: De vierde Nederlandse Wiskunde-Olympiade (1965)	193
Wiskunde-Olympiade in Zuid-Afrika	201
Puntspiegeling. Een les gegeven door R. Holvoet	202
Ir. G. A. Oosterholt: Eliminatie van parameters	208
Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften	212
Openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos tot de Algemene Vergadering	218
Boekbespreking	221
Post-universitaire cursussen te Mons	221
Recreatie	221
Wimecos	224

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516;
secretaris;

Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;

Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;

Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;

Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;

Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;

Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;

Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;

Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

Dr. J. KOKSMA, Haren;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;

Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;

Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;

Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;

Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;

Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;

P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143919, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE VIERDE NEDERLANDSE WISKUNDE-OLYMPIADE (1965)

door

Drs. M. D. Bos

Breukelen

1. De organisatie van de Wiskunde-Olympiade werd ook in 1965 mogelijk gemaakt door een extra-subsidie van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen aan de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

2. Voor de achtergronden, de doelstelling en de organisatievorm van de wedstrijden wordt verwezen naar het verslag over de eerste Nederlandse Wiskunde-Olympiade, opgenomen in Euclides, 38e jaargang, p. 161—178.

3. De adviescommissie voor de Wiskunde-Olympiade 1965 was als volgt samengesteld:

Prof. Dr. F. van der Blij, Bilthoven, voorzitter,

Drs. H. de Jong, Utrecht,

Prof. Dr. S. C. van Veen, Delft,

A. F. van Tooren, 's Gravenhage.

Drs. M. D. Bos fungeerde als secretaris.

De adviescommissie stelde de opgaven samen voor de beide ronden, en beoordeelde het ingezonden werk.

De eerste ronde vond plaats op donderdag 29 april. Er namen 2526 leerlingen aan deel, verdeeld over 262 scholen. Dit houdt een kleine teruggang in van het aantal deelnemers; deze wordt vermoedelijk verklaard door het feit, dat de datum van de eerste ronde niet erg gelukkig was gekozen, in verband met de paasvakantie.

Op grond van de bij de eerste ronde behaalde resultaten werden 63 deelnemers door de Adviescommissie geselecteerd voor deelname aan de tweede ronde.

De tweede ronde vond plaats op donderdag 14 oktober. Deze wedstrijd kon plaats hebben in het Stedelijk gymnasium te Utrecht, dank zij de medewerking van de rector van die school, Dr. J. A. G. van der Veer.

Toezicht op het werk der deelnemers werd uitgeoefend door mej. E. J. J. van Rijckevorssel, Amersfoort, en door de heren

A. P. de Jong, Utrecht, H. de Jong, Utrecht en M. D. Bos, Breukelen.

Begin december ontvingen de prijswinnaars bericht dat zij tot de topploeg van tien behoorden. Hun namen werden aan alle deelnemers aan de tweede ronde en aan hun scholen bekend gemaakt. De rangorde van de tien prijswinnaars bleef hierbij echter nog geheim.

De prijsuitreiking had plaats op vrijdag 17 december in het gebouw van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen te den Haag, door de directeur-generaal van het onderwijs, Mr. J. G. M. Broekman, die tijdens zijn toespraak opnieuw blijk gaf van de grote belangstelling, welke er op het ministerie voor deze jaarlijks weerkerende wedstrijd bestaat. De directeur-generaal rijkte de prijzen uit, die bestonden uit een of meer wiskundeboeken en een boekenbon.

Bij de plichtigheid ten departemente waren aanwezig: de secretaris-generaal van het Ministerie, Mr. H. J. Schölvinck, de chef van de hoofdafdeling V.H.M.O., Dr. J. A. A. Verlinden, de inspecteurs van het V.H.M.O., Dr. H. A. Gribnau, Dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof,

de leden van de Adviescommissie Prof. Dr. S. C. van Veen, Drs. H. de Jong en A. F. van Tooren,

de secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, Prof. Dr. A. F. Monna, en de gewezen secretaris van de Wiskunde-Olympiade, Dr. Joh. H. Wansink.

Verder behalve de prijswinnaars zelf, hun ouders en tal van rectoren en docenten.

De leiding van de bijeenkomst berustte bij Prof. Dr. A. F. Monna, die zijn erkentelijkheid betuigde voor de medewerking, die telkenjare door de leraren in den lande wordt verleend bij de organisatie van de wedstrijd.

4. Waardering van het gemaakte werk.

a. Voor de eerste ronde kon maximaal 40 punten worden behaald. De puntenverdeling over de 2526 deelnemers was als volgt:

0— 1 punten	198 deelnemers	20—22 punten	66 deelnemers
2— 4 „	312 „	23—25 „	23 „
5— 7 „	431 „	26—28 „	8 „
8—10 „	569 „	29—31 „	2 „
11—13 „	407 „	32—34 „	1 „
14—16 „	349 „	35—37 „	0 „
17—19 „	159 „	38—40 „	1 „

Het gemiddelde puntental van alle deelnemers bedroeg 9,5 op een bereikbaar maximum van 40, hetgeen inhoudt, dat de deelnemers gemiddeld 23,7 % van het maximaal bereikbaar puntental behaalden.

In 1962, 1963 en 1964 was dit percentage respectievelijk: 15,0 %, 18,5 % en 26,7 %.

Het gemiddelde puntental behaald door de 63 deelnemers aan de tweede ronde bedroeg 25,9 op een bereikbaar maximum van 50, zodat deze 63 deelnemers gemiddeld 51,8 % van het maximum aantal punten behaalden.

Het betreffende percentage bedroeg in 1962, 1963 en 1964 respectievelijk 37,0 %, 41,0 % en 53,6 %.

b. De maxima van de deelnemende scholen voorzover de resultaten door de scholen werden doorgegeven:

0— 4 punten	0 scholen	21—24 punten	45 scholen
5— 8 „	1 „	25—28 „	17 „
9—12 „	22 „	29—32 „	1 „
13—16 „	93 „	33—36 „	1 „
17—20 „	81 „	37—40 „	1 „

Het gemiddelde maximum bedraagt 17,8, d.i. in procenten van het theoretisch maximum (40): 45 %. In de voorafgaande drie jaren was dit percentage respectievelijk 33 %, 44 % en 53 %.

c. Wat de eerste ronde betreft, kan worden geconstateerd, dat in het algemeen na een sterke stijging over de eerste drie Olympiades, het resultaat bij de vierde Olympiade weer een weinig is teruggelopen.

Bij de tweede ronde bleef het peil van de inzendingen constant ten opzichte van het vorige jaar.

d. De volgorde in moeilijkheid van de in de eerste ronde opgegeven vraagstukken, beoordeeld naar de behaalde puntentallen, bedroeg:

(1) voor alle deelnemers aan de eerste ronde:

7, 6, 5, 8, 2, 4, 3, 1.

(2) voor de 63 deelnemers aan de tweede ronde:

7, 5, 6, 2, 8, 4, 3, 1.

Uit deze volgorde blijkt, dat de deelnemers de meeste moeite hadden met de vraagstukken, die door de Adviescommissie als de eenvoudigste werden beschouwd; een verschijnsel, dat ook reeds bij eerdere Olympiades optrad.

e. De volgorde in moeilijkheid van de opgaven gesteld in de tweede ronde bedroeg:

(1) voor alle deelnemers aan de tweede ronde:

4, 1, 3, 2, 5.

(2) voor de tien prijswinnaars:

4, 1, 5, 2, 3.

De tien prijswinnaars behaalden voor de vijf vraagstukken gemiddeld de volgende puntentallen:

8,9 8,6 7,1 9,6 8,6

Voor alle 63 deelnemers aan de tweede ronde waren deze gemiddelden:

5,1 4,4 4,5 7,8 4,1

f. Er waren slechts weinig deelnemers, voor wie het verschil in rangnummer bij de tweede ronde behaald, opvallend groot bleek te zijn, vergeleken met hun bij de eerste ronde behaalde resultaat.

In de eerste jaren trad dit verschijnsel veelvuldig op. De selectieve waarde van de eerste ronde schijnt in de loop van de jaren groter te zijn geworden. De deelnemer, die na de eerste ronde bovenaan stond met 38 punt, behaalde tenslotte de tweede prijs. De deelnemer die daar op volgde met 34 punt, behaalde de eerste prijs. Van de topploeg van 10 uit de eerste ronde vielen er na de tweede ronde drie af. De winnaars van de vijfde en de negende prijs kwamen pas bij de tweede ronde sterk naar voren.

g. Voor de vaststelling van de einduitslag zijn zowel de prestaties uit de eerste ronde als die uit de tweede ronde in rekening gebracht. Bij het aantal punten behaald in de eerste ronde is het viervoud van het aantal punten van de tweede ronde opgeteld om de eindscore te bepalen. Het theoretisch maximum dat in de Wiskunde-Olympiade 1965 kon worden gehaald, werd daardoor 240.

h. De leeftijden van de deelnemers aan de tweede ronde lagen ongeveer tussen dezelfde grenzen als in de voorafgaande jaren. De leeftijden van de tien prijswinnaars lagen in vergelijking met vorig jaar opvallend laag. Onder de tien prijswinnaars waren 8 gymnasiasten en 2 hbs-ers. Ook dit jaar waren er onder de deelnemers aan de tweede ronde enige meisjes; maar zij vielen ook dit maal buiten de prijzen.

5. Reacties op de aard der gestelde opgaven.

Van vele zijden werd wederom waardering geuit over de opgaven van de eerste ronde. Sommigen achtten enige opgaven te moeilijk. Over het algemeen kwam het oordeel overeen met hetgeen uit de door de deelnemers behaalde resultaten ook wel valt af te leiden.

6. Einduitslag van de Wiskunde-Olympiade 1965.

De prijswinnaars zijn:

1. R. van Tijen, 228 punten (194 + 34)
Lorentz Lyceum, Eindhoven; oud 16 jaar, 3 maand; hbs.
2. H. W. Lenstra, 221 punten, (183 + 38)
Vossius Gymnasium, Amsterdam; oud 16 jaar, 8 maand; gymn.
3. P. G. Kluit, 218 punten (192 + 26)
Chr. Lyceum Populierstraat, den Haag; oud 17 jaar, 6 maand; gymn.
4. H. Barendregt, 198 punten (172 + 26)
Montessori Lyceum, Amsterdam; oud 18 jaar, 0 maand; gymn.
5. J. B. van Rongen, 197 punten (176 + 21)
Chr. Lyceum M. v. St. Aldegonde, Haarlem; oud 17 jaar, 10 maand; gymn.
6. J. H. H. Perk, 191 punten (162 + 29)
Vossius Gymnasium, Amsterdam; oud 17 jaar, 1 maand; gymn.
7. J. Moormann, 189 punten (163 + 26)
Gymnasium Canisius-College, Nijmegen; oud 17 jaar, 5 maand; gymn.
8. Th. H. Beneder, 186 punten (162 + 24)
Stedelijk Gymnasium, Middelburg; oud 17 jaar, 6 maand; gymn.
9. C. D. Holzscherer, 177 punten (156 + 21)
Chr. Lyceum, Bernhardlaan, Arnhem; oud 17 jaar, 8 maand; gymn.
10. R. H. Bourgonjon, 171 punten (146 + 25)
Het Nieuwe Lyceum, Hilversum; oud 18 jaar, 5 maand; hbs.

EERSTE RONDE

Donderdag 29 april, 14.00—17.00 uur

1. l en m zijn twee snijdende rechten.

Op l liggen de punten A en B , op m de punten A' en B' .

Gegeven is: $AB = A'B'$

M is het midden van AA'

N is het midden van BB' .

- a.* Bewijs, dat MN gelijke hoeken maakt met l en m .
 - b.* Onderzoek, of $MN = AB \cos \frac{1}{2}\varphi$, waarbij φ de niet-stompe hoek tussen l en m is.
2. Een dunne draad is om een dun rechthoekig plankje $ABCD$ gewonden, waarbij de uiteinden van de draad in de hoekpunten A en C zijn bevestigd.
- Aan de ene zijde van het plankje ziet men acht stukken van de draad en aan de andere zijde ziet men er negen; de eindpunten van die stukken liggen op de lange zijden van rechthoek $ABCD$. Een kortere draad zou niet op deze manier om het plankje gewonden kunnen worden.
- Wel kan de gegeven draad ook nog zo gewonden worden, dat er aan de ene zijde één stuk en aan de andere zijde twee stukken te zien zijn, waarbij die stukken dan hun eindpunten op de korte zijden van de rechthoek hebben.
- Ook dit zou met een kortere draad weer niet mogelijk zijn.
- Bereken uit deze gegevens de verhouding van de lengten van de zijden van de rechthoek; verwaarloos daarbij de dikte van het plankje en die van de draad.
3. Bewijs, dat voor alle reële getallen a en b geldt:

$$(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$$
 4. n is een natuurlijk getal.
 - a.* Bewijs, dat $n(n^4 - 5n^2 + 4)$ voor elke waarde van n deelbaar is door 120.
 - b.* Bewijs, dat $n(n^4 - 5n^2 + 4)$ voor elke waarde van n , die geen drievoud is, zelfs deelbaar is door 360.
 - c.* Bewijs, dat $n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ voor elke waarde van n deelbaar is door 10.
 - d.* Door welk natuurlijk getal groter dan 1 is $n(n^4 + 4)$ altijd deelbaar?

5. Gevraagd: een vijfhoek $ABCDE$ te construeren en een punt P binnen deze vijfhoek, zodat:
- 1° $\angle A = \angle B$
 - 2° $AE = BC$
 - 3° $CD = DE$
 - 4° het voetpunt van de loodlijn uit P op de zijde AB tussen A en B ligt.
 - 5° de voetpunten van de loodlijnen uit P op de andere zijden buiten de vijfhoek liggen.
6. In ieder zijvlak van een kubus met zwarte ribben tekent men met rood een ingeschreven vierkant, waarvan de hoekpunten de middens van de zwarte ribben zijn.
Zo ontstaan rode vierkanten en rode driehoeken, die een lichaam L vormen.
- a. Bepaal van L het aantal zijvlakken, ribben en hoekpunten. Vervolgens beschrijft men in de rode vierkanten groene vierkanten, waarvan de hoekpunten de middens van de rode zijden zijn en in de rode driehoeken op dezelfde wijze groene driehoeken. Zo wordt een lichaam K gevormd, begrensd door groene ribben.
 - b. Bepaal van K het aantal zijvlakken, ribben en hoekpunten.
 - c. Hoeveel zijvlakken van K zijn vierkanten?
7. Meneer A en meneer B spelen om geld.
Aan het begin van de eerste ronde zet ieder één gulden in de pot. Wie wint, mag de pot leeghalen en heeft dus één gulden gewonnen. Bij het begin van de tweede ronde wordt de inzet verdubbeld en bij iedere volgende ronde wordt de voorafgaande inzet verdubbeld. Na 5 ronden stopt men het spel.
- a. Bewijs, dat meneer A met dit spel onmogelijk tien gulden winnen kan.
 - b. Geef aan, bij welk spelverloop hij negen gulden wint.
8. Twee veeltermen $f(x)$ en $g(x)$ noemen we congruent, als $f(x) - g(x)$ deelbaar is door x^2 .
Zo is bv. $1\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ congruent met x^4 en ook $x^2 + 1$ met 1. In dat geval schrijven we: $f(x) \equiv g(x)$.
- a. Zoek een veelterm $f(x)$ zo dat $(1 + x)f(x) \equiv 1$.
 - b. Zoek een veelterm $f(x)$ zo dat $f^2(x) \equiv 1 + x$.
 - c. Bewijs, dat uit $f(x) \equiv g(x)$ en $h(x) \equiv k(x)$ volgt

$$f^2(x) \equiv g^2(x)$$

$$\text{en } f(x) \cdot h(x) \equiv g(x) \cdot k(x)$$
 - d. Bewijs, dat uit $f(x) \cdot g(x) \equiv 0$ volgt, dat $f^2(x) \equiv 0$ of $g^2(x) \equiv 0$

TWEEDE RONDE

Donderdag 14 oktober, 14.00—17.00 uur

1. We beschouwen de rij $t_1, t_2, t_3, \dots$.
 Onder P_n verstaan we het produkt van de eerste n termen van deze rij.
 Gegeven is: $t_{n+1} = t_n \cdot t_{n+2}$ voor elke n
 $P_{40} = 8$ en $P_{80} = 8$.
 Bereken t_1 en t_2 .
2. We beschouwen tien opeenvolgende gehele getallen.
 Onder S_1 verstaan we de som van de kwadraten van de eerste vijf getallen en onder S_2 de som van de kwadraten van de laatste vijf getallen.
 Bewijs:
 - a. S_1 is deelbaar door 5.
 - b. S_1 is niet het kwadraat van een geheel getal.
 - c. het produkt $S_1 \cdot S_2$ is deelbaar door 150.
3. In een plat vlak zijn de punten A en B gegeven.
 Zij x een rechte in dat vlak, die niet samenvalt met de middenloodlijn van het lijnstuk AB . We bepalen dan het aantal op die rechte x gelegen punten C , die de eigenschap hebben dat driehoek ABC gelijkbenig is; we noemen dat aantal „het gewicht van de rechte x ”.
 - a. Toon aan, dat het gewicht van een willkeurige rechte x ten hoogste gelijk aan 5 is.
 - b. Bepaal de verzameling van de punten P in dat vlak, waardoor wel een rechte gaat, waarvan het gewicht 1 is, maar waardoor geen rechte gaat, waarvan het gewicht 0 is.
4. We beschouwen een aantal punten in een plat vlak.
 Elk van deze punten wordt met minstens een van de andere punten door een lijnstuk verbonden en wel zo, dat er een figuur ontstaat, die niet uiteenvalt in verschillende delen (d.w.z. van ieder punt uit kunnen we langs getekende lijnstukken ieder ander punt bereiken).
 Een punt kennen we de „orde” n toe, wanneer in dit punt n lijnstukken samenkomen.
 De verkregen figuur kenmerken we nu door achter elkaar op te schrijven de orde van ieder van zijn punten.

Zo wordt een zeshoek gekenmerkt door de combinatie $\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ en een ster met zes stralen door $\{6, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

a. Schets een figuur, die behoort bij de combinatie $\{4, 3, 3, 3, 3\}$.

b. Geef de combinaties van alle mogelijke figuren, waarvan de som van de ordegetallen gelijk aan 6 is.

c. Beredeneer, dat in iedere dergelijke combinatie een even aantal oneven getallen voorkomen.

5. Van de funktie f , die gedefinieerd is voor alle reële getallen, is gegeven dat voor iedere x en y geldt:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$

Bewijs:

a. $f(0) = 0$

b. $f(-x) = f(x)$ voor iedere x

c. $f(2x) = 4f(x)$ voor iedere x

d. $f(x + y + z)$

$$= f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) - f(x) - f(y) - f(z)$$

voor iedere x , y en z .

Wiskunde-Olimpiade in Zuid-Afrika

Uit een brief van de Direkteur van het Nasionale Buro vir Opvoedkundige en Maatskaplike Navorsing van het Departement van Onderwijs, Kuns en Wetenskap aan die redactie van Euclides:

„Dit is vir my aangenaam om u mee te deel dat die Suid-Afrikaanse Akademie vir Wetenskap en Kuns besluit het om 'n Wiskunde-Olimpiade vanaf 1966 in te stel. Die twee hoogste klasse van alle hoërskole (vhmo) sal hieraan kan deelneem. Die Olimpiade van 1966 sal uit twee rondtes bestaan, die eerste op 27 April en die tweede op 10 Augustus. Die vraestel van die eerste rondte sal van die vyf-antwoorde-keuse-tipe wees en masjinaal nagesien word. Die beste 60 kandidate sal aan die tweede rondte deelneem. Die vraestel sal van 'n meer ortodokse tipe wees, maar met onortodokse vrae!”

Die wijze van organisasie van deze Olimpiade lijkt veel op die van de onze. Het zal de organisatoren van de Nederlandse Olimpiade een genoegen doen dit te lezen.

PUNTSPIEGELING

Een les gegeven door R. HOLVOET

Antwerpen

In het kader van de door de Technische Hogeschool te Delft georganiseerde Belgische Week heeft R. Holvoet een les gegeven aan een klas leerlingen van het Koninklijk Atheneum te Hoboken (Antwerpen). De leeftijd van de leerlingen was 14 jaar; ze zaten in een volgens Belgische telling vierde en volgens onze telling derde klasse. Het onderwerp van de les was: puntspiegeling. De leerlingen hadden te voren niets over dit onderwerp gehoord. Natuurlijk zal wel blijken uit het verloop van de les, dat ze over voorkennis beschikten, die onze leerlingen niet plegen te hebben. Ze waren namelijk opgeleid volgens een modern experimenteel programma.

De les werd gegeven op donderdag 28 oktober 1965 te Delft voor een uitgebreid publiek.

Helaas gaat een deel van de charme van de les in het rapport verloren, doordat het niet mogelijk is de veelheid van kleuren te reproduceren, die gebruikt werd en die voor een helder begrip van het gebodene onontbeerlijk is.

Lr (leraar) roept een leerling voor het bord, wijst op het bord en vraagt: wat stelt dit voor?

Ll (leerling). Vlak Π .

Lr tekent punt a en punt x , verlengt xa met zichzelf en vindt zo punt y . Vraagt Ll er een pijl in te zetten. Ll zet een pijl van x naar a en een van a naar y (fig. 1).

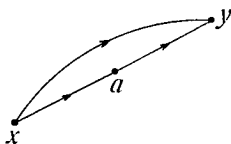


fig. 1

Lr. Kan je geen betere pijl zetten? Zo zit a in de weg.

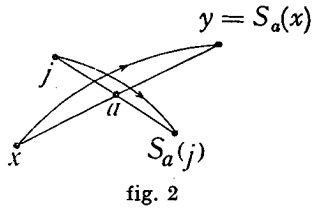
Ll. Tekent een boog van x naar y en zet daar een pijl in.

Lr. Deze bewerking heet een puntspiegeling. We schrijven haar s_a . Hoe heet y nu?

Ll. $s_a(x)$.

Lr. Kies een ander punt j . Teken nu $s_a(j)$.

Ll vult fig. 1 aan tot fig. 2.

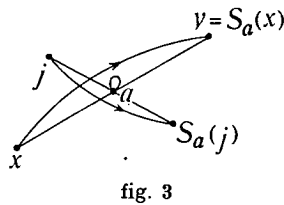


Lr. Nu ontstaat er een parallellogram. Waarom?

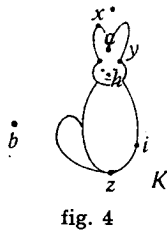
Na enige moeite komt uit de klas het antwoord: omdat de diagonalen elkaar middendoor delen.

Lr roept een ander voor het bord. Teken nog eens een punt en zijn beeld.

Ll wijst punt a aan en voorziet dat punt van een lus (fig. 3). Schrijft erbij: $a = s_a(a)$.



Lr tekent nu op bord punt b en konijn K (fig. 4). Vraagt een leerling $s_b(K)$ te tekenen.



Ll kiest een aantal punten: x, y, z, h, i, a , en tekent daarvan de beelden. Daarna tekent hij keurig het beeld van het konijn.

Oefening. Bereken $s_c \circ s_c$.

Lr. Wat betekent „bolleke”?

Ll. Na.

Ll moet nu voor het bord nagaan, wat $s_c \circ s_c$ wordt. Hij tekent c en kiest willekeurig een punt x . Daarna tekent hij $s_c(x)$ (fig. 5).

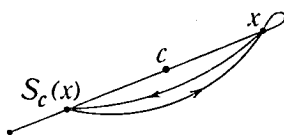


fig. 5

Nu gaat het mis. Hij tekent een nieuw punt links van $s_c(x)$ en komt dan niet verder. Klas en Lr samen komen tot de conclusie, dat nu $s_c(x)$ t.o.v. c gespiegeld moet worden. We vinden dan weer punt x . En dus is $s_c \circ s_c$ de identieke transformatie. Het resultaat wordt in de figuur weergegeven door de lus aan punt x .

Hiermee is gevonden: $s_c \circ s_c = 1_H$.

Oefening. Bereken s_c^{-1} .

Lr tekent fig. 6 en vraagt: wat is nu s_c^{-1} ?

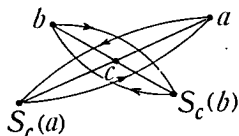


fig. 6

Na enkele verkeerde antwoorden komt het goede: het is weer s_c .

Lr. Wat zouden we ons nu kunnen afvragen?

Blijkbaar zijn de leerlingen een dergelijke vraag gewoon, want spontaan komt het antwoord: Vormen de puntspiegelingen een groep?

Lr. Wat moeten we ons nu eerst afvragen?

Ll. Is „na” een interne bewerking?

Lr. We moeten dus puntspiegelingen gaan samenstellen. Daarvoor eerst de volgende oefening.

Lr tekent op bord de punten a, b, c (fig. 7). Neemt nu het midden m van ab en het midden n van ac . Beschouw nu de vector $\vec{bc}$ en de vector $\vec{mn}$. Wie weet nog de relatie ertussen?

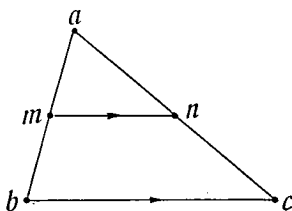


fig. 7

Antwoord uit de klas. $\vec{bc} = 2 \vec{mn}$.

Wie kan het nog bewijzen?

Ll komt voor het bord en schrijft op:

$$\begin{aligned}\vec{bc} &= \vec{ba} + \vec{ac} \\ &= \vec{bm} + \vec{ma} + \vec{an} + \vec{nc} \\ &= 2\vec{ma} + 2\vec{an}.\end{aligned}$$

Hij zegt nu „volgens de distributiviteit weten we” en schrijft verder:

$$\begin{aligned}&= 2(\vec{ma} + \vec{an}) \\ &= 2\vec{mn}.\end{aligned}$$

Gegeven: s_a, s_b .

Gevraagd: Bereken $s_b \circ s_a$.

Ll komt voor het bord en tekent fig. 8 (zonder y en y').

Lr laat hem nu een punt y tekenen en op dezelfde manier y' vinden. (In fig. 8 is de constructie van y' , zoals die op het bord kwam, weggelaten.)

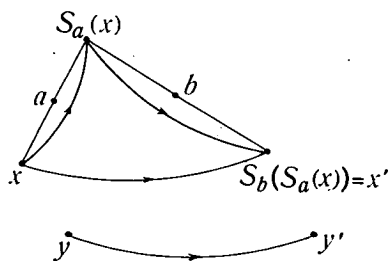


fig. 8

Lr. Wat is nu het verband tussen

en $\begin{array}{l} \text{het koppel } x, s_b(s_a(x)) \\ \text{het koppel } y, s_b(s_a(y)) \end{array}$?

Antwoord uit de klas. Die twee koppels lopen evenwijdig.

Lr. Dat antwoord is niet nauwkeurig.

Nieuw antwoord uit de klas. Ze zijn ekwipollent.

Lr. Wat kan je nu zeggen van de vector $\vec{xx'}$?

Ll. $\vec{xx'} = 2 \vec{ab}$.

Lr. Wie kan er nog zo'n relatie opschrijven?

Antwoord. $\vec{yy'} = 2 \vec{ab}$.

Lr kiest nu een ander punt z . Waaraan is $\vec{zz'}$ gelijk? Geef het antwoord zonder erbij te tekenen.

Antwoord. $\vec{zz'} = 2 \vec{ab}$.

Lr. Dus zijn alle vectoren $\vec{xx'}$, $\vec{yy'}$, $\vec{zz'}$ gelijk. Wat hebben we dan?

Antwoord uit de klas. Een verschuiving.

Hiermee is dus bewezen: $s_b \circ s_a = 2 \vec{ab}$.

Oefening (fig. 9). Bereken $(s_a \circ s_c)(x)$. Teken ineens de pijl, die van x vertrekt (het zo geschikte Vlaamse woord „vertrekt” laat ik ongewijzigd).

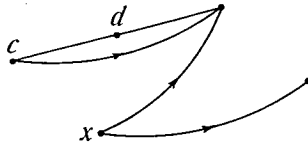


fig. 9

De leerlingen zoeken een tijdje elk voor zich. Lr kiest een leerling, die het niet kon vinden. Hij laat hem eerst $2 \vec{cd}$ tekenen. Daarna vraagt hij de pijl te tekenen, die van x vertrekt. Ll tekent de pijl van x naar het punt, dat op het verlengde van cd verkregen is. De klas helpt en zo komt het goede antwoord tot stand.

Oefening. Teken $(s_b \circ s_a)(b)$.

Zonder veel moeite komt fig. 10 tot stand. Hierin is dus $\vec{bb'} = 2 \vec{ab}$.

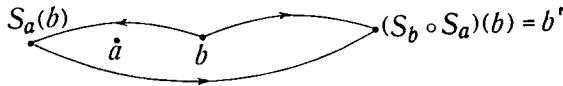


fig. 10

Ll. Je had ook a kunnen nemen. (Hij bedoelt: je had ook kunnen vragen $(s_b \circ s_a)(a)$ te tekenen.)

Lr. Goed, kom het maar tekenen.

De leerling tekent eerst (fig. 11) alleen de lus bij a . Herstelt dit later en tekent ook de pijl van a naar a' .

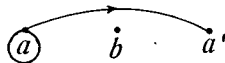


fig. 11

Probleem. Gegeven zijn s_a, s_b, s_c (fig. 12).

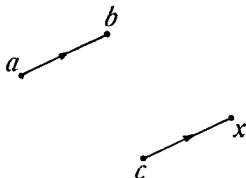


fig. 12

Gevraagd: s_x zo, dat $s_b \circ s_a = s_x \circ s_c$.

Lr. Vraag je af: wat staat er links en wat staat er rechts?

De leerlingen zoeken een tijd zelf. Daarna komt als antwoord:

$$2 \overrightarrow{ab} = 2 \overrightarrow{cx}.$$

Lr. Wat volgt daaruit? En daarna, als het antwoord uitblijft: twee keer jouw kapitaal is gelijk aan twee keer mijn kapitaal. Als ik zo rijk was, wat dan?

Ll vindt nu, dat $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cx}$.

Oefening (als huiswerk). Laat zien, dat de samengestelde van drie puntspiegelingen weer een puntspiegeling is.

Lr. Vormen de puntspiegelingen nu een groep? Welke eigenschappen heeft een groep?

Ll. Bolleke is intern. Er is een neutraal element en er is een inverse.

Lr. Laten we eerst het eerste eens onderzoeken. Wat moeten we ons nu afvragen?

Ll. Als we twee puntspiegelingen achter elkaar uitvoeren, krijgen we dan weer een puntspiegeling?

Lr. En is dit zo?

Dit geeft voor de leerlingen moeilijkheden. Bij de verschuiving is er geen punt, dat op zijn plaats blijft. Een verschuiving is dus geen puntspiegeling. En dus vormen de puntspiegelingen geen groep.

Opmerkingen. Alle figuren werden zowel door de leraar als door de leerlingen met de hand geschetst. Dit verhoogt het tempo en maakt de les levendiger, hoewel het een enkele keer misschien de duidelijkheid kan schaden. Een voordeel is ook, dat je minder gemakkelijk een conclusie uit de figuur afleidt.

Het heeft me verbaasd, dat de conclusie, dat de puntspiegelingen geen groep vormen, zo laat kwam en niet direct gegeven werd na de samenstelling van twee puntspiegelingen. Waarschijnlijk is de oorzaak niet zo zeer van didactische, maar van esthetische aard. De les zou namelijk 60 minuten duren. En de slotconclusie kwam nu precies aan het einde van het uur.

P. G. J. Vredenduin

ELIMINATIE VAN PARAMETERS

door

Ir. G. A. OOSTERHOLT

Oegstgeest

In de analytische meetkunde wordt bij het bepalen van verzamelingen met behulp van een parameter λ in de meeste leerboeken een redenering gegeven, die op het volgende neerkomt:

Er zijn twee vergelijkingen opgesteld, waaraan de coördinaten x en y van een punt S van de verzameling moeten voldoen; in die vergelijkingen komt ook λ voor. Met elke reële waarde van λ correspondeert een punt S . Wanneer de verzameling van de punten S gevraagd wordt, moet een relatie tussen x en y worden gevonden, die onafhankelijk van λ is. Na de eliminatie van λ wordt een vergelijking $f(x, y) = 0$ gevonden, die door sommige auteurs wordt gekwalificeerd als de vergelijking van de verzameling. Enkele auteurs geven een voorzichtiger uitspraak; zij stellen dat $f(x, y) = 0$ een vergelijking is waaraan de coördinaten van ieder punt S voldoen.

Vervolgens wordt de meetkundige betekenis van $f(x, y) = 0$ besproken. Voorbeelden met het gebruik van twee of meer parameters volgen, zonder dat belangrijke toevoegingen worden gegeven.

De eerste formulering komt reeds een halve eeuw in onze leerboeken voor ondanks principiële tekortkomingen. In de laatste jaren is echter een tendens te bemerken (b.v. in eindexamenvraagstukken) om de zaken scherper te stellen. Ook in de tweede versie komt niet duidelijk uit, dat het voldoen aan de gevonden relatie noodzakelijk maar niet voldoende is. Wanneer men wil trachten met meer begrip te laten werken, zal bij de theorie iets dieper op de gelijkwaardigheid moeten worden ingegaan.

Als we bij het werken met één parameter vergelijkingen hebben in de vormen $g(x, y, \lambda) = 0$ (1) en $h(x, y, \lambda) = 0$ (2) dan staan we allereerst bij het afleiden van de eliminant $f(x, y) = 0$ (3) voor de eis dat elke stap in die herleiding omkeerbaar moet zijn. Bij invoeren resp. verduisteren van wortelstellen zal de figuur die door (3) wordt voorgesteld de gevraagde figuur als deelverzameling bevatten resp. deelverzameling van die figuur zijn. In de praktijk

stuiten we (b.v. bij kwadrateren van vergelijkingen) soms op grote moeilijkheden; bij de voorbeelden wordt daarop teruggekomen, maar voor de volgende beschouwing nemen we aan dat aan genoemde eis is voldaan. De stelsels (1) met (2), (1) met (3) resp. (2) met (3) zijn dan equivalent.

Het stellen van (3) als de vergelijking van de verzameling betekent het veronachtzamen van die gelijkwaardigheid; (3) is immers gecomconditioneerd door (1) of (2). Ook in dit geval kunnen dus nog puntverzamelingen bij (3) optreden, die niet tot de gevraagde behoren! Het probleem is meetkundig vaak duidelijker te overzien dan algebraïsch; (3) stelt een figuur F voor en de vraag is welke punten van F als snijpunt S kunnen optreden. We zijn echter m.i. verplicht om de oplossing niet alleen in de figuur te bepalen.

Algebraïsch uitgedrukt komen we op de vraag bij welke stellen wortels van (3) een reële waarde voor λ volgt uit (1) of (2) en voorts of die waarde is toegelaten. Zolang men op deze vraag niet ingaat, wordt er geen duidelijk inzicht verkregen in de betekenis van het elimineren (zie het 1e voorbeeld).

Bij de leerlingen moet men wel enige weerstand overwinnen om op dit punt door te zetten; ze zijn doorgaans geabsorbeerd door de techniek van het elimineren en slaken een zucht van verlichting als (3) een bekende figuur voorstelt.

Het gros van de vraagstukken laat echter een oplossing van λ uit (1) of (2), eventueel met gebruikmaking van (3) toe, waarbij uitsluitel op de gestelde vraag wordt verkregen. Vaak kan men teruggrijpen op een formule uit de gemaakte berekening, b.v. als λ door substitutie is geëlimineerd. Zo zijn alle vergelijkingen van het type $y - b = \lambda(x - a)$ als $x \neq a$ prettig, omdat $\lambda = \frac{y - b}{x - a}$ reëel is voor alle beschouwde x en y .

Bij de eliminaties die het „leukst” zijn is controle achteraf echter vaak noodzakelijk.

1e Voorbeeld. Bij de parabool $y^2 = 2x$ wordt de verzameling gevraagd van de snijpunten van twee raaklijnen met tegengestelde richtingscoëfficiënten.

Uit $y = \lambda x + \frac{1}{2\lambda} (\lambda \neq 0)$ (1.1) en $y = -\lambda x - \frac{1}{2\lambda}$ (1.2) krijgen we door optelling $y = 0$ (1.3).

De oplossing schijnt geheel in orde te zijn; zou men uit (1.3) echter concluderen dat de X -as de gevraagde verzameling is dan zou dit onjuist zijn, zoals meetkundig evident is.

Een steekproef met b.v. $P(1,0)$ laat algebraïsch het euvel ook zien; vergelijking (1.1) gaat over in $0 = \lambda + \frac{1}{2\lambda}$ welke geen reële wortel heeft.

We moeten dus (1.3) met b.v. (1.1) combineren om de oplossing zuiver algebraïsch te verkrijgen. Vullen we (1.3) in (1.1) in en herleiden we vervolgens, dan ontstaat

$$2\lambda^2 x = -1$$

waaruit blijkt dat $x < 0$ moet zijn.

2e Voorbeeld. Bepaal de verzameling projecties van $P(a, 0)$ op lijnen door O .

De bekende oplossing met $y = mx$ (2.1), $y = -\frac{1}{m}(x - a)$ (2.2)

en na vermenigvuldiging $x^2 + y^2 = ax$ (2.3) is dus onvolledig. Elk stel wortels van (2.3) geeft bij substitutie in (2.1) echter een waarde voor m . De enige uitzondering is het stel $(0, 0)$; het hoort tot de verzameling en het uitvallen wordt veroorzaakt door het werken met een richtingscoëfficiënt als parameter.

Voegen we aan de opgave b.v. de beperking toe dat de lijnen uitsluitend in het eerste en derde kwadraat mogen liggen, dan moet $m > 0$. Uit (2.1) volgt nu $y/x > 0$ en daar x in (2.3) positief is, moet y dat ook zijn, zodat alleen de boog in het eerste kwadraat voldoet.

3e Voorbeeld. Aan de halve cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ ($y > 0$) trekken we twee onderling loodrechte raaklijnen. Bepaal de verzameling van hun snijpunten.

De raaklijnen zijn voor te stellen door

$$y = mx + r\sqrt{m^2 + 1} \quad (3.1)$$

$$\text{en } y = -\frac{x}{m} + r\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} \quad (3.2);$$

de ordinaten van de raakpunten zijn dan inderdaad positief. De kortste eliminatie gebeurt door (3.2) met m te vermenigvuldigen en de wortelvormen te isoleren waarna kwadrateren en optellen $(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = 2r^2(m^2 + 1)$ geeft dus $x^2 + y^2 = 2r^2$ (3.3).

Planimetrisch ziet men met één oogopslag dat aan (3.3) de voorwaarde $y > r$ moet worden toegevoegd.

Er zit dus een addertje onder het algebraïsche gras. Het probleem zal de lezer van „Euclides” misschien enige recreatie bezorgen maar is voor de leerlingen te moeilijk.

Men vindt een soortgelijke eliminatie wel bij de bepaling van de orthoptische cirkel van een ellips; het valt echter te betwijfelen of daarbij begrepen wordt dat de kunstig verkregen eliminant geen wortelstel te veel bevat. Persoonlijk vind ik zo'n behandeling didactisch onverantwoord.

4e Voorbeeld. Bepaal de verzameling van de middens der koorden die van de parabool $y^2 = 4x$ worden afgesneden door lijnen die door $(-2, 0)$ gaan.

De vergelijkingen $y = m(x + 2)$ (4.1) en $y = \frac{2}{m}$ (4.2) geven na vermenigvuldiging $y^2 = 2(x + 2)$ (4.3).

Uit (4.2) volgt $m = \frac{2}{y}$ en als $y \neq 0$ is er dus een waarde voor m .

De punten van (4.3) waarvoor $x \leq 2$ vormen een deelverzameling die niet tot de gevraagde behoort. De fout is deze keer niet bij de eliminatie gemaakt, maar bij het ongelimiteerde gebruik van (4.2). Daardoor geeft (4.3) de verzameling snijpunten van de lijnen één aan één uit de bundels (4.1) en (4.2).

In de literatuur wordt de term parasitisch wel gebruikt voor zo'n deelverzameling. Men dient hier uiteraard te zorgen dat de lijnen (4.1) de parabool snijden. We substitueren y uit (4.1) dus in $y^2 = 4x$:

$$m^2 x^2 + 4(m^2 - 1)x + 4m^2 = 0$$

en stellen

$$D = 16(1 - 2m^2) > 0$$

waaruit volgt: $|m| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Het is nu duidelijk dat (4.2) voert tot $|y| > 2\sqrt{2}$ en (4.3) tot $x > 2$.

5e Voorbeeld. Bepaal de produktfiguur van de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ bij vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong met een factor k .

We noemen $Q(x_2, y_2)$ het produktpunt van een punt $P(x_1, y_1)$ van de cirkel. Dan geldt:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \quad (5.1)$$

$$x_2 = kx_1 \quad (5.2)$$

$$y_2 = ky_1 \quad (5.3)$$

waaruit na eliminatie van x_1 en y_1

$$x_2^2 + y_2^2 = k^2 r^2 \quad (5.4)$$

wordt verkregen.

Het stelsel (5.1), (5.2), (5.3) is gelijkwaardig met (5.2), (5.3), (5.4); alle punten van $x^2 + y^2 = k^2 r^2$ voldoen omdat de vergelijkingen (5.2) en (5.3) één-één-correspondenties tussen x_2 en x_1 , resp. y_2 en y_1 zijn.

Pogingen om ondoordacht werken tegen te gaan vindt men de laatste jaren o.a. in vraagstukken waarbij aan de parameters beperkingen worden opgelegd. Op zichzelf bezien ligt dit streven geheel in de lijn van bovenstaand betoog; uit eindexamenvraagstuk 1965, 3b is echter duidelijk gebleken, dat men moet waken tegen gezochte voorwaarden en te moeilijke ongelijkheden.

Nu dergelijke vraagstukken ook in de leerboeken verschijnen lijkt het mij gewenst dat de theorie wat vollediger zal worden behandeld.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN *)

1. *Mathematica et Paedagogia* (X; 27-28; 1965).
 - E. Etienne, L'analyse au service de l'enseignement secondaire; compte rendu des journées de Knokke, 1964;
 - R. Holvoet, Het onderwijs van het experimenteel programma wiskunde voor de 6e, 5e, 4e klassen (12-15 jaar);
 - Y. Hernalsteen, L'étude des homothéties dans une classe de cinquième;
 - R. Bex, Une démonstration de la commutativité du groupe des homothéties non constante de centre O .
 - W. Servais, Une répartition moderne des matières mathématiques pour les sections scientifiques des écoles secondaires;
 - G. Noel, Parties convexes du plan euclidien;
 - J. Depienne, La géométrie métrique dans le tronc commun;
 - E. Bouque, Klarheid in de regel der haakjes;
 - J. M. Nachtergaele, XVIIIe rencontre internationale de professeurs de mathématiques;
 - A. Revuz, Pour l'enseignement de la géométrie la route est tracée;
 - A. Revuz, Motion votée à l'unanimité à Ravenne.
2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLIV; 247-249; mars 1965 - septembre 1965)
 - M. Chazel, Les mathématiques modernes dans l'enseignement du second degré;
 - J. Bouteloup, Espaces affines;
 - J. Itard, Mathématiques insolites;

*) Alle vermelde tijdschriften bevinden zich in de *Wimecos-leesportefeuille*. Belangstellenden kunnen zich wenden tot G. J. J. Boost, Parklaan 107a, Roosendaal (NB).

- R. Heller e.a.; Echos de la grande commission;
 Ch. Pérol e.a.; Sur les mots et les symboles;
 B. Leclerc de la Herverie, L'initiation à la technologie vue par un professeur de mathématiques;
 A. Fouché, Forme, configuration, similitude;
 M. Duvey, De l'étude des fonctions en Troisième;
 G. Walusinski, L'espace affine à portée de la main;
 Nathan-Altshiller, An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle;
 G. Cagnac et R. Maillard, Rapport sur les épreuves théoriques du C.A.P.E.S. 1964.
- M. Fréchet, Sur l'enseignement des mathématiques et l'abstraction;
 Gounon, Anciens et modernes;
 J. Bouteloup, In medio stat virtus;
 — Matériaux pour un dictionnaire;
 — Documents officiels sur le Concours Général 1964.
- J. Itard, Un illustre, Pierre Fermat;
 R. Badiou, Sur les nombres en tiers „riches en diviseurs”;
 —, Convention de Ravenne et Traité d'Echternach;
 De Possel, La lecture automatique;
 R. Mougnot, Sur l'enseignement programmé;
 A. Brailly-Marchand, Le groupe de Sèvres;
 A. Adler, Cercle mathématique Condorcet;
 J. Gaudel, Journées de Chaumont;
 R. Prud'homme, Sur un problème insolite;
 Toussaint-Delarue, Olympiades mathématiques en U.R.R.S.;
 —, Documents officiels; la réforme de 10 juin 1965.
3. *Praxis der Mathematik* (VII, 4–11; April 1965 – November 1965).
- W. Eichel, Extremwertaufgaben;
 B. Riethmüller, Analytische Abbildungsgeometrie mit Matrizen;
 H. Rössler, Die leere Menge als Untermenge;
 I. Paasche, Ein Analogon zu den Determinanten;
 R. Brinker, Gründliches Arbeiten durch programmierten Unterricht?
- Jos. E. Hofman, Pierre Fermat, ein Pionier der neuen Mathematik (†12.1.1665);
 W. Götz, Zur Umgangssprache rings um die Aussageform;
 A. Langkavel, Zum Begriff der Ableitung;
 Kl. Wigand, Fördervereinstagung in Nürnberg.
- O. Köhler, Über das Höchstzahlverfahren nach d'Hondt;
 Naja, „Funktionen”;
 G. Schostack, Das Ankreisviereck;
 P. Gohlke, Automat und Mensch.
 K. Steinbuch, Automat und Mensch;
 K. R. Biermann, Primzahl- und Zufallserien;
 K. D. Schmidt, Mathematisches an einem Kirchturm;
 K. H. Hürten, Über das Auffinden von Lehrsätzen;
 F. Speitkamp, Die Definition der leeren Menge;
 J. Mall, Auffinden von Gleichungen iterativ;

K. Kursawe, Zur Einführung der Irrationalzahlen;
W. Ness, Deutung des Transportproblems.

S. Herz, Einige Grundbegriffe der Topologie;
H. Kemper, Wohin gehören die negativen Zahlen im Unterricht?
G. Schostack, Das Inkreisviereck;
H. von Majewski, Eine Einteilung der Vierecke,
Jos. E. Hofmann, Oskar Becker †.

H. Töpfer, Über die Preisschrift von K. Wuchterl;
K. Wuchterl, Zur Idee einer operativen Mathematik;
G. Pickert, Eine Bemerkung zur leeren Menge;
B. Kyewski, Zum 150. Geburtstag von Karl Weierstrass;
D. Dorsch, Quadratwurzelziehen auf Rechenmaschinen;
H. Athen, Zum MNU-Lehrplan-Entwurf;
Jos. E. Hofmann, Eduard Jan Dijksterhuis zum Gedenken.

G. Steidle, PU- Anregung zu einem Einspurverfahren;
Kl. Wigand, Programmierter Unterricht, zu Voraussetzung und Folgerungen;
A. Kirsch, Relation oder Funktion?
H. Rixecker, Axiome und Sätze der Mengenalgebra;
K. A. Keil, Erprobung von PU auf breiter Basis.

4. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVIII, 1-7; April 1965-Oktober 1965).

Fr. Mutscheller, Nürnberger Lehrpläne des deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts;
H. Stengel, 100 Jahre Mendelsche Gesetze;
H. Kemper, Rings um die Dezimalzahl;
H. Heise, Der Berliner Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts im Jahre 1964.

O. Höfling, Neue Definition der Zeiteinheit (die Sekunde ist der 31.556.925,9747-te Teil des tropischen Jahres für den 0 Januar 1900, 12 Ephemeridenzeit);
W. Scholz, Der Logarithmus als Gruppen-isomorphismus;
H. Zeitler, Über endliche Inzidenzgeometrien.

F. Bachmann, Punkte, Vektoren, Spiegelungen;
F. Denk, Fehlentwicklungen bei der Modernisierung des Mathematikunterrichts;
A. Engel, Entdeckung und Förderung mathematischer Talente durch Wettbewerbe.
H. Etter, Mitteilungen am Trapez.

H. Wegener, Die Gruppentheorie als Ordnungsschema der Elementarteilchen;
W. Ness, Die Divergenz der Reihe der reziproken Primzahlen;
K. Fladt und H. Schwartze, Eine Kegelschnittkonstruktion mittels zweier feste Kreise und dreier Geraden.

5. *Elemente der Mathematik* (XX, 2-5; März 1965-Sept. 1965).

W. Wunderlich, Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtfäche;
A. Kirsch, Eine ordnungstheoretische Charakterisierung des elementaren Flächeninhalts;

- G. J. Rieger, Zur Selbergschen Gleichung für die arithmetische Progression;
 A. Rotkiewicz, Sur les nombres pseudopremiers carrés.
- M. Goldberg, Packing of 18 equal circles on a sphere;
 H. Davenport and A. Schinzel, A note on sequences and subsequences;
 J. Steinig, Note on a geometric inequality.
- H. Zeitler, Eine reguläre Horosphären-Überdeckung des hyperbolischen Raumes;
 W. Sierpinsky, Sur trois nombres triangulaires en progression arithmétique à difference triangulaire;
 S. Tauber, Sur les opérateurs A et B;
 L. Kieffer, Remarque sur l'axonométrie dimétrique;
 G. D. Chakerian, On estimating the perimeter of an ellipse.
- J. Mall, Axiomatischer Aufbau der sphärisch-elliptischen Geometrie;
 P. Burgat, Programmation linéaire et enseignement secondaire;
 A. Rothkiewicz, Sur les nombres pseudopremiers;
 L. Biederbach, Dreiblatt und Brocardsche Punkte;
 H. Tverberg, Über den Wilsonschen Satz;
 J. Surány, Ein Beweis des Wilsonschen Satzes.
6. *The Mathematical Gazette* (XLIX, 367-368; February 1965-May 1965).
- C. M. Pratt, Linear programming as a means of introducing matrices in the middle school;
 Sir Graham Suttor, Centenary of the birth of W. H. Young;
 R. J. Wilson, An experiment in the teaching of „Modern Mathematics” in school;
 A. J. Sherlock, Experimental theory at school;
 J. W. Moon, On a problem of Ore;
 B. E. Oakley and R. L. Perry, A sampling process;
 W. R. Andress, On a generalization of Leibniz' Theorem;
 R. C. Smith, Restricted maxima and minima,
 S. S. Mittra, On some properties of elliptic circles;
 A. S. Besicovitch and R. O. Davies, Two problems on convex functions.
- S. Summersbee, The programming of digital computers in sixth form;
 R. S. Heritage, The Shropshire mathematics experiment;
 B. Astle, Pantactic squares;
 A. Oppenheim, On inequalities connecting arithmetic means and geometric means of two sets of three positive numbers;
 M. V. Jambunathan, A direct method of determining the axis, focus, directrix of a parabola;
 H. Jeffreys, Orthogonal matrices in three dimensions;
 T. W. Sampson, Exponents; a suggested replacement for the standard treatment.
7. *School Science and Mathematics* (LXV, 2-5; 571-574; February 1965-May 1965).
- Th. C. Gibney, Articulation between the primary grades and the junior high school mathematics program;
 J. P. Dubois, Creativity, the end result of education;
 Ch. J. Merchant, An extension of the overaging method of computing square roots to the computation of roots of any order;
 J. F. Newport, A look at the university of Illinois astronomy materials.

Cecil B. Read, The use of the history of mathematics as a teaching tool;
 M. F. Willerding, Let's improve the teaching of college mathematics;
 D. M. Bailey, Some lines determined by the circles of de Longchamps.

R. Braunwart, Negative and imaginary radices;
 Fr. B. May, Innovations in senior high school mathematics;
 L. Panush, New books on the high school science shelf.

R. A. Sawyer, Reflections on the high school curriculum;
 D. D. Paige, A symmetric numeration system;
 M. C. Herrick, Innovation in education-programmed instruction;
 A. P. Riess, The new arithmetic and „abstraction“;
 H. Ruchlis, A basic concept- the impossibility of continuous growth;
 Th. V. Baucom, Division of fractions for understanding.

School Science and Mathematics (LXV, 6-8; 575-577; June 1965-November 1965).

G. P. Speck, a^b versus b^a ;
 M. J. Pryor, Effects on the earth's rotation;
 E. G. Summers and B. Hubrig, Doctoral dissertations; research in mathematics reported for 1963;
 S. J. Saden, New horizons for space-age youth.
 F. H. Heinke, Sufficient and necessary condition;
 H. E. Hall, Another look at quadratic functions;
 P. Geisert, Graphing technique;
 D. Markewitsch, On Pythagorean triples.

N. G. Sprague, Landing on the moon; vertically or horizontally;
 M. E. Schaff, Illogical inequalities;
 L. Y. Hollis, A study to compare the effects of teaching first and second grade mathematics by the Cuisenaire-Gattegno method with a traditional method;
 A. Cook, Outdoor education; a reason why ten-year olds excel in mathematics;
 D. Tredway, Other number bases for better teacher understanding;
 M. O. Pella, Some observations concerning science and mathematics instruction in three countries of the Middle East.

8. *The Mathematics Teacher* (LVIII, 2-6; February 1965-October 1965).

C. B. Allendoerfer, Angles, arcs and Archimedes;
 I. A. Barnett, Introducing number theory in high school algebra and geometry;
 D. C. Duncan, Ten mathematical refreshments;
 M^a. Heidlage, A coordinate approach to the 25-point miniature geometry;
 A. D. Proctor, A world of hope; helping slow learners enjoy mathematics;
 I. Fischer, How far is it from here to there?
 O. Rindung, The new mathematics program in the Danish gymnasium.
 J. M. Elkin, A deceptively easy problem;
 J. H. Manheim and S. R. Manheim, Connectionism and the teaching machine;
 D. H. Hoy, Reflexive, symmetric and transitive properties of relations;
 G. W. Horton, A boolean switchboard;
 Ch. H. D'Augustine, Definitions without exceptions;
 O. Lexton Buchanan, Opinions of college teachers of mathematics regarding content of the twelfth-year course in mathematics;
 H. E. Taylor and Th. L. Wade, On the meaning of structure in mathematics;

- K. J. S. Sassé, Mathematics for the non college-bound junior high school;
 M. Wenninger, The world of polyhedra;
 J. P. Phillips, The history of the dodecahedron;
 H. G. Steiner, Relations and functions.
- R. A. Thompson, Using high school algebra and geometry in Doppler satellite tracking;
 L. O. Kattsoff and A. J. Simone, A recursion formula for solving n linear equations in n variables;
 Chow Chi-Ming, The relation between distance and sight area.
- L. W. Smith, Conditions governing numerical equality of perimeter, area, and volume;
 M. Narbara Stastny, Divisibility patterns in number bases;
 B. Bold, A general test for divisibility by any prime (except 2 and 5);
 D. Tredway, The secondary teacher and elementary school mathematics;
 H. F. Duncan, Fermat's last problem;
 A. M. Glicksman, Vectors in algebra and geometry;
 D. F. Siemens, The mathematics of the honey comb;
 L. Gafney, Gaspard Monge and descriptive geometry;
 J. D. Wiseman, Complex contra-positives;
 G. Papy, Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary school.
- Cl. R. Perisho, The use of transformations in deriving equations of common geometric figures;
 W. Hofman, Computers for school mathematics;
 E. A. Rosenberg, Checking computation in non-decimal bases;
 J. M. Ivanhoff a.o., Use of discriminant analysis for selecting students for ninth-grade algebra or general mathematics;
 A. L. Loeb, Remarks on some elementary volume relations between familiar solids;
 B. Sharpe, A reachable research area;
 Fr. J. Mueller, More on Pascal's triangle and powers of 11;
 H. Feiner, Divisibility test for 7;
 A. Singer, On determining a linear combination of a set of variables from a given system of linear equations;
 E. S. Kennedy and J. Hamdanizadeh, Applied mathematics in eleventh-century Iran;
 G. Papy, Methods and techniques, part 2;
 Ph. Peak a.o. Aids for evaluation of mathematical textbooks.
- B. E. Meserve, The NCTM; its growth and growing pains;
 Fr. Botts, Problem solving in mathematics;
 D. B. Lloyd, Finding nonlinear factors of polynomials by modern methods;
 L. M. Rotando, Continued square roots;
 G. R. Thomas, Precision, accuracy, and other ambiguities;
 A. H. Pedley, A radical approach to $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
 E. J. Stone, New domains;
 N. D. Turner, Careers in mathematics;
 L. Råde, A course in probability theory for secondary schools;
 D. I. Carpenter, Adam Riese.

OPENINGSTOESPRAAK
van de VOORZITTER VAN WIMECOS

Dr. Ir. B. Groeneveld, tot de

ALGEMENE VERGADERING van 28 december 1965.

Dames en Heren,

Op deze algemene ledenvergadering heet ik u allen van harte welkom. In het bijzonder noem ik de ereleden P. Wijdenes, Dr. J. H. Wansink, Prof. Dr. O. Bottema, de inspecteur-generaal Mr. Ir. M. Goote, de inspecteurs Dr. D. N. van der Neut, Dr. H. A. Gribnau, Drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van Liwenagel Dr. Th. J. Korthagen, van de wiskunde werkgroep W.V.O. Drs. H. C. Vernout en van de redactie van Euclides Drs. A. M. Koldijk.

Het feestelijke karakter van deze bijeenkomst, vanwege het 40-jarig bestaan van onze vereniging wordt helaas overschaduwd door het overlijden van onze penningmeester Drs. J. D. de Jong op 24 november j.l. te Haarlem. Ik verzoek u de aan hem gewijde woorden staande te willen aanhoren.

Onze vriend Jan de Jong is 9 jaren bestuurslid van onze vereniging geweest. Gedurende die tijd heeft hij zijn functie van penningmeester op bijzonder lofwaardige wijze vervuld. Het belang van de vereniging was daarbij voor hem primair. Alle uitgaven werden door hem getoetst op hun noodzaak en met bewonderenswaardig volhardingsvermogen wist hij trage leden tot betaling te manen. Zijn accuratesse bij de boekhouding viel bij iedere kascontrole van de door de vereniging aangewezen kas-commissie op. In onze bestuurskring zullen we hem node missen. Zijn welwillendheid, bescheidenheid en opgewektheid zullen we niet vergeten. Zijn dagelijkse werk begon hem zwaar te vallen, omdat zijn gezondheid achteruit ging. Hij stelde zich veel voor van zijn zo dichtbij lijkende pensioen, dat hij helaas niet heeft mogen bereiken. Op zijn eigen verzoek heeft zijn crematie in alle stilte plaatsgevonden. Ik verzoek u thans enkele ogenblikken stilte te zijner nagedachtenis.

In het laatste nummer van Euclides treffen we een bericht aan over de werkzaamheden van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Het heeft ons verheugd, dat aan een aantal scholen

met experimenten is begonnen. Het meetkunde-onderwijs in de eerste klasse op basis van de leer der transformaties wordt nu op zijn bruikbaarheid getoetst. Ook voor de algebra en analyse worden experimenten uitgevoerd, maar dan in hogere klassen. Daarbij wordt echter niet met een door de Commissie uitgegeven syllabus gewerkt. We hopen spoedig resultaten te vernemen.

Dankzij het colloquium, georganiseerd door het Mathematisch Centrum en gegeven in Amsterdam, en de heroriënteringscursussen voor wiskunde-leraren is de belangstelling voor de wiskunde-vernieuwing in het docentencorps belangrijk toegenomen. Hoewel de normale gang van het onderwijs door de cursus enigszins wordt gestoord, is het voortzetten van de heroriënteringscursussen van essentieel belang. Het is van groot belang dat de cursisten worden geconfronteerd met fundamentele begrippen van de moderne wiskunde. We denken in dit verband speciaal aan de vele ingenieurs, die ons onderwijs dienen, de M.O.-leraren met de K_1 - en K_5 -akten, de naar het onderwijs overgegangene officieren en ook aan een aantal oudere docenten, die tijdens hun universitaire opleiding deze stof niet gehad hebben en later niet in de gelegenheid zijn geweest zich deze stof eigen te maken.

Verder treffen we in de laatste aflevering van Euclides een verslag aan van de werkzaamheden van de Wimecos-commissie ten aanzien van de wiskunde op het h.a.v.o. De leden van deze commissie zijn de heren C. J. Alders, A. van Dop, C. de Groot, C. van Vliet en ikzelf. Zoals reeds in de vorige jaarrede is gezegd heeft het bestuur deze commissie samengesteld op verzoek van de Inspectie. Eén van de taken van deze commissie was het opstellen van voorbeelden van toekomstige wiskunde-examens h.a.v.o. In februari 1966 zal bij de uitgeverij P. Noordhoff een verzameling verschijnen van 36 stellen examenwerk voor wiskunde. Deze verzameling kan als richtlijn dienen voor de docenten, die nu reeds bij het h.a.v.o. werkzaam zijn. Met het uitgeven van dit boekwerkje beschouwt de commissie haar taak als beëindigd. We zijn ons er terdege van bewust, dat dit werk een voorlopig karakter heeft. We weten, dat er in diverse werkgemeenschappen diepgaand wordt gewerkt aan het opstellen van een modern wiskunde-programma voor het h.a.v.o.

De vakantiecursus van het Mathematisch Centrum, die het afgelopen jaar op 30, 31 aug. en 1 sept. werd gehouden, is nu voor het eerst op twee verschillende plaatsen gegeven en wel in Amsterdam en in Eindhoven. Getuige het aantal deelnemers mogen we constateren, dat deze decentralisatie geslaagd is. De zorg waarmee de

cursus werd gegeven, was weer voortreffelijk. Zowel de sprekers als het Mathematisch Centrum verdienen hiervoor veel lof. We hopen, dat het geven van deze cursussen nog lang mag voortduren.

Ook de samenkomsten van onze vereniging zijn dit jaar voor het eerst gedecentraliseerd. Op 2 nov. '65 vond een bijeenkomst plaats, waarbij we de gast waren van de N.V. Philips te Eindhoven. De ruim 90 deelnemers hebben zeer genoten van de boeiende voordrachten van Ir. Nijenhuis en van Prof. Bouwkamp, beiden uit Eindhoven. De manier waarop hier de computer werd gedemonstreerd getuigde van een bijzonder didactisch inzicht. De vele reacties op deze lezingen waren daarvoor het bewijs. Het bestuur hoopt volgend jaar weer een dergelijke samenkomst te organiseren. Misschien wordt het houden van deze excursies wel een traditie.

Het overbekende tijdschrift *Pythagoras* gaat zijn 5e jaargang in. Het aantal abonnees zal nu wel stabiel zijn geworden. Het blijkt duidelijk, dat de inhoud in de smaak valt. De gehouden enquête naar de appreciatie van de diverse artikelen garandeert de frisheid van het tijdschrift.

In de dit jaar gehouden Wiskunde Olympiade is weer met veel enthousiasme gestreden. Het peil van de opgaven was zowel in de eerste als in de tweede ronde bijzonder goed. We zijn allen, die met deze veelomvattende organisatie te maken hebben gehad veel dank verschuldigd.

Het komende jaar werkt Wimecos weer samen met de zusterverenigingen bij het organiseren van het Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen. Dit 16e congres wordt gehouden in Utrecht op 18 april '66. Het thema luidt: *De wetenschappelijke basis van de lerarenopleiding, mede in verband met de exacte wetenschappen in de 20e eeuw.*

Het bijwonen van dit congres wordt u zeer warm aanbevolen. Een voldoende aantal deelnemers is een garantie voor het blijven voortbestaan van dit soort congressen.

De eindexamen-opgaven voor de wiskunde bij het VHMO hebben dit jaar nogal wat stof doen opwaaien. Vooral de omvang van de vraagstukken heeft veel kandidaten in grote moeilijkheden gebracht. Wij betreuren het, dat de volgorde van de opgaven bij de algebra om didactische redenen minder gelukkig was.

Terugkomend op het 40-jarig jubileum van onze vereniging deel ik u mede, dat dit heugelijke feit in de middagpauze enkele tastbare consequenties zal hebben.

Ik hoop, dat deze dag voor u allen waardevol zal zijn en verklaar de algemene ledenvergadering voor geopend.

BOEKBESPREKING

Kam-Ting Leung and Doris Lai-Chue-Chan, *Elementary Set Theory*, part I. Hong Kong University Press, Oxford University Press, 1965; —/15/—.

Zoals de titel aangeeft: een elementaire inleiding in de verzamelingenleer, zowel bestemd voor de hoogste klasse van de middelbare school als voor de beginnende studenten, ontstaan tijdens de modernisering van de eerste-jaarscolleges aan de Chinese universiteit te Hong Kong. Het bevat een wel zeer uitvoerige inleiding over: 1°. enige logica en de notaties; 2°. verzamelingen; 3°. relaties; 4°. afbeeldingen. Het boek geeft, zoals ook in de eerste plaats de bedoeling is, een goede voorbereiding voor de lineaire algebra.

H. W. Lenstra

POST-UNIVERSITAIRE CURSUSSEN te MONS

„Van donderdag 18 augustus, aanvang te 10.00 uur tot woensdag 24 augustus 1966 te 14.00 uur, organiseert het Belgische Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur internationale post-universitaire cursussen, welke zullen plaats vinden in de Polytechnische Faculteit te Mons (België). Het Belgische Ministerie nodigt dertig bevoegde leraren voor wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie uit om aan deze cursussen deel te nemen. De verblijfkosten worden door de Belgische regering betaald; de reiskosten worden door de Nederlandse regering vergoed. Deelnemers moeten behoorlijke kennis van het Frans hebben. De colleges en discussies vinden grotendeels in die taal plaats.

Gegadigden kunnen zich binnen 10 dagen na het verschijnen van dit Tijdschrift opgeven bij het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, t.a.v. dr. J. B. Drewes, Lange Voorhout 50 te 's-Gravenhage, onder vermelding van naam, leeftijd, bevoegdheid, functie. Deelnemers aan eerder gehouden post-universitaire cursussen in België wordt verzocht op te geven aan welke cursussen zij hebben deelgenomen.”

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

151. Gegeven zijn twee punten A en B . Men heeft een liniaal tot zijn beschikking waarvan de lengte iets kleiner dan AB is. Construeer met behulp van alleen dit instrument de lijn AB . (L. A. Rang)

152. Ditmaal een puzzel, die voor leraren aan de makkelijke kant is, maar uitstekend dienst kan doen als recreatie voor de klasse.

Iemand heeft een hoeveelheid knikkers, waarvan het aantal gelijk is aan het kwadraat van een natuurlijk getal. Hij verdeelt de knikkers onder drie jongens. De eerste krijgt de helft van het aantal knikkers plus 1, de tweede het derdedeel van de rest en de derde de knikkers, die dan nog over zijn. Hoeveel knikkers had hij minstens? (B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

149. Noem de ribben van het gevraagde blok a , b en c . Dan moet

$$a + b + c = 6 + 9 + 15 \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 6^2 + 9^2 + 15^2 \quad (2)$$

$$ab + ac + bc = 6 \cdot 9 + 6 \cdot 15 + 9 \cdot 15 \quad (3)$$

Kwadrater beide leden van (1) en trek van de uitkomsten de leden van (2) af. Het blijkt dan, dat (3) een gevolg is van (1) en (2) en dus verder buiten beschouwing kan blijven.

We maken er gebruik van, dat elk kwadraat te schrijven is als som van opeenvolgende getallen, b.v. $6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$. Schrijf nu op

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tellen we de getallen uit de eerste rij op tot de verticale streep, dan krijgen we 6^2 . De beide andere rijen leveren evenzo 9^2 en 15^2 . Ga nu in de bovenste rij één plaats naar links, in de tweede twee plaatsen naar rechts en in de derde één plaats naar links. De verticale stippellijnen geven aan, wat er gebeurd is. We hebben nu 6, 9 en 15 vervangen door resp. 5, 11 en 14. De som is dus niet veranderd. Verder zien we, dat de kwadraten resp. verminderd zijn met 11, vermeerderd met $19 + 21$ en vermindert met 29. De som van de kwadraten is dus ook onveranderd gebleven.

We moeten dus in de drie rijen een aantal plaatsen naar rechts en links gaan, dat gelijk is, en er daarbij voor zorgen, dat de som van de geschrapte getallen gelijk is aan de som van de toegevoegde. Als men dit even rustig nagaat, ziet men in, dat er geen andere mogelijkheid is. We vinden dus alleen als nieuwe ribben 5, 11 en 14.

150. a. A raadt 3, B 7 en C een willekeurige ander getal, maar niet 1 of 9. De kansen op winst zijn dan resp. $7/18$, $7/18$, $2/9$.

Om dit te verifiëren, gaan we nog na, wat de kansen zijn bij elk ander door A te noemen begintal.

A kiest 1. Dan kiest B 7 en C een getal tussen 1 en 7. Kansen resp. $2/9$, $4/9$, $1/3$.

A kiest 2. Dan kiest B 7 en C een getal tussen 2 en 7. Kansen resp. $11/36$, $5/12$, $5/18$.

A kiest 4. Dan kiest B 7 en C 3. Kansen resp. $2/9$, $4/9$, $1/3$.

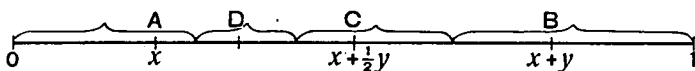
A kiest 5. Dan kiest B 4 en C 6. Kansen resp. $1/9$, $4/9$, $4/9$.

Spiegeling van alle getallen t.o.v. 5 levert hetzelfde resultaat.

b. Het is duidelijk, dat de voordelige keuzen getallen zijn, die aan de rand liggen en zo gekozen worden, dat het voor de opvolgers onvoordelig is het naast kleinere (naast grotere) getal te kiezen.

We vereenvoudigen nu het probleem eerst iets door aan te nemen, dat geraden moet worden een willekeurig reëel getal tussen 0 en 1 en dat daarbij reële getallen tussen 0 en 1 gekozen mogen worden.

Onderstel A begint met x te kiezen. We nemen aan, dat x zo gekozen is, dat B, C en D getallen groter dan x zullen kiezen. Neem verder aan, dat B kiest het getal $x + y$. Dit kiest B zo, dat het voor C onvoordelig is een getal groter dan $x + y$ te kiezen. De beste keus voor C is dan $x + \frac{1}{2}y$. Voor D zijn nu alle keuzen tussen x en y even goed. Ze geven alle een kans $\frac{1}{2}y$. Het mag voor D niet voordeliger zijn een getal kleiner dan x of groter dan y te kiezen. Dus moet $x < \frac{1}{2}y$ en $1 - (x + y) < \frac{1}{2}y$. Kies nu gemakshalve $x = \frac{1}{3}y$ en $1 - (x + y) = \frac{1}{3}y$. Dan worden de keuzen van A, B, C en D, als we aannemen dat C en D tussen x en y blijven kiezen, resp. $1/6$, $5/6$, $1/2$, een getal tussen $1/6$ en $5/6$ en $\neq \frac{1}{2}$. De kansen worden resp. $7/24$, $7/24$, $1/4$, $1/6$. De eerste twee kansen zijn bovenste grenzen, de laatste twee onderste grenzen. Opmerking. Men kan ook beginnen met aan te tonen, dat $x + y = 1 - x$.



Toegepast op geval b levert dit, dat A zal kiezen 17, B 83, C 50 en D een getal tussen 17 en 83 ($\neq 50$). De kansen worden dan resp. $7/24$, $7/24$, $1/4$ en $1/6$ en ditmaal werkelijk.

c. B zal kiezen 77, C 24 en D een getal tussen 30 en 77. De kansen van A, B, C en D verhouden zich als 59, 137, 106 en 94. Duidelijk wordt hier gedemonstreerd de schadelijke invloed van een keus, die geen randgetal blijkt te blijven.

145. (december-nummer). Een man valt in een kanaal. Wat is de kortste route, die hij blind zwemmende moet afleggen om zeker te zijn een oever te bereiken? Zeven collega's hebben een oplossing ingezonden in de hoop het minimum bereikt te hebben. Dit werd gevonden op bijzonder fraaie wijze door de heer A. F. Boons te Tilburg. Hier volgt zijn oplossing.

Gevraagd de minimumlengte van een vlakke kromme waarvan de projectie op elke rechte van het vlak ≥ 1 is.

Duiden we gemakshalve de projecties van punten aan met accenten, en noemen we de projecterende rechten door de eindpunten van de projectie randprojectoren, dan kunnen we achtereenvolgens over de minimum-kromme het volgende aantonen:

1. Beginpunt A en eindpunt B vallen niet samen (anders zou er een verkorting mogelijk zijn door A en B te verplaatsen naar de eindpunten van de projectie van de kromme op een „raaklijn” door A).

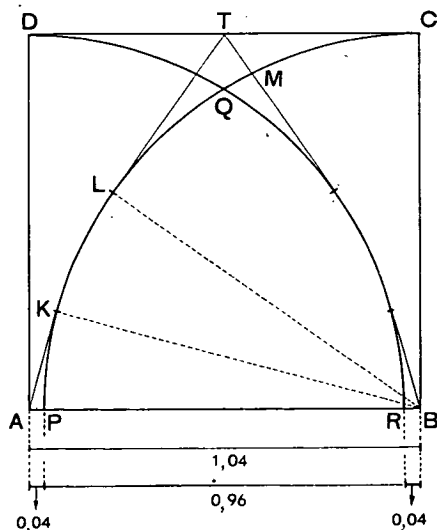
2. De gesloten kromme die verkregen wordt door lijnstuk AB te trekken is convex. Dit heeft tot gevolg dat door elk punt van de kromme minstens één randprojector gaat.

3. Projectie van de kromme op lijn AB is lijnstuk AB , dus $AB = a \geq 1$. Bewijs als van (1). Dit heeft tot gevolg dat elke projectie A' of B' of beide als eindpunt heeft.

4. De hoogte van de kromme boven AB is ≥ 1 .

5. $a \geq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (in het andere geval is de kleinste kromme die A verbindt met B en een hoogte 1 heeft $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ en dit is niet het minimum).

We beschouwen nu de figuur, gevormd door de rechthoek $ABCD$ met hoogte 1, en PQR gevormd door de bogen PC en RD van de cirkels met middelpunt B en A , en straal 1. (zie figuur).



6. Van de minimumkromme ligt geen punt binnen PQR .

Bewijs: Stel X op de minimumkromme binnen PQR en zij x een randprojector door X , dan is de afstand van A en van B tot x kleiner dan 1, dus is zowel $A'X'$ als $B'X'$ in deze projectierichting kleiner dan 1 hetgeen volgens punt (3) in strijd is met het gegeven.

7. C en D liggen niet op de minimumkromme (berekening van de in dit geval kortst mogelijke kromme toont dit aan).

8. De minimumkromme heeft slechts één punt T gemeen met CD (stel X en Y op CD en op de minimumkromme $AXYB$, dan snijdt AX de boog DQ in een punt Z en geeft lijnstuk YZ een verkorting der kromme).

9. Het deel AT van de kromme heeft minstens één punt gemeen met boog PC , en dat deel BT idem met boog RD .

Bewijs: Stel het deel AT heeft geen punt gemeen met boog PC , dan doen zich de volgende drie mogelijkheden voor:

a) Lijnstuk AT raakt boog PC . In dat geval geeft lijnstuk AT een verkorting.

b) Lijnstuk AT snijdt boog PC . In dat geval geeft de raaklijn uit A aan boog PC een verkorting.

c) Lijnstuk AT heeft geen punt gemeen met boog PC . Dan is lijnstuk AT een deel van de minimumkromme. De kromme is dan te verkorten door B (dus ook boog PC) te verplaatsen in de richting BA , tot lijnstuk AT boog PC raakt en vervolgens de projector loodrecht op AB door het verplaatste punt B te betrekken bij de kromme.

10. De kortste kromme door A , een punt van boog PC , van DC en van boog DR en door B , bestaat uit de raaklijnstukken uit A , B en T aan de bogen PC en RD en de tussen de raakpunten gelegen bogen. Zij $TD = x$, dan is de lengte van zodanige kromme

$$a + 2\sqrt{a^2 - 1} + \pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{a^2 - 1} - 2 \operatorname{arctg} (a - x) - 2 \operatorname{arctg} x.$$

Bij constante a bereikt dit zijn minimum by $x = \frac{1}{2}a$, zodat T het midden is van CD .

11. De lengte van de kromme is dan

$$a + 2\sqrt{a^2 - 1} + \pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}a - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{a^2 - 1}.$$

Dit bereikt zijn minimum bij het tussen 1 en $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ gelegen nulpunt van

$$3a^6 + 36a^4 + 16a^2 - 64.$$

Dit is voor $a = 1,04$ (voldoende afgerond) en het minimum is dan in drie decimalen nauwkeurig 2,278

WIMECOS

DE EINDEXAMENS

Uit ervaringen van andere jaren blijkt het nuttig, een centrale plaats in te stellen, waarheen gedurende een bepaalde periode commentaar op het schriftelijk eindexamen-wiskunde van het Gymnasium B en de HBS-B kan worden gezonden.

Deze plaats zal zijn het adres van de secretaris van Wimecos:

Bosboomstraat 20, Arnhem.

De periode eindigt 13 mei 1966.

Namens het bestuur,

A. J. Th. Maassen, secr.

LEERBOEK DER NATUURKUNDE

Methode voor het vmo door Dr. H. Lindeman en Drs. G. H. Frederik

deel IA - mechanica (krachten), vloeistoffen, gassen en warmteleer.
235 blz. 8e druk. Ing. f 7,50

deel IB - geometrische optica en electriciteit. 208 blz. 7e druk. Ing. f 7,50

deel IIA - mechanica, mechanische warmtetheorie. 235 blz. 6e druk. Ing. f 7,50

deel IIB - golven en geluid, fysische optica. 146 blz. 6e druk. Ing. f 5,90

deel III - electriciteit, atoom- en kernfysica. 286 blz. 4e druk. Ing. f 6,50

- het experiment krijgt volle aandacht
- vele vragen in de tekst; achterin vraagstukken met antwoorden
- uitgebreide verzameling vraagstukken in ieder deel
- duidelijke en beknopte uitleg
- overzichtelijk en typografisch goed verzorgd; alle delen zijn geïllustreerd

P. Noordhoff nv



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

De onderafdeling der Wiskunde vraagt

DOCTORANDI EN INGENIEURS

als (hoofd)-medewerkers bij haar wetenschappelijk onderzoek, onderwijs en wiskundige dienstverlening.

Geïnteresseerden kunnen zich voor nadere inlichtingen wenden tot de voorzitter van de onderafdeling der wiskunde, prof. dr. G. R. Veldkamp.

Schriftelijke sollicitaties, onder vermelding van nummer V 1437 te richten aan het hoofd van de centrale personeelsdienst van de technische hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven.

AANGEBODEN: Noordhoff's verz. wiskundige werken en andere Ned. wiskundige boeken; ook enkele buitenlandse titels. Titellijst op aanvraag. R. Lijdsman, Stadhouderslaan 97, Utrecht. Tel. (030) 2 09 97.

Wiskunde uitgaven voor het vmo

ALGEBRA VOOR HET VHMO door C. J. Alders

deel 1 - 51/55e druk - ing. f 3.25; geb. f 4.15 / deel 2 - 51/55e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / deel 3 - 21/23e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.10 / antwoorden 1 - f 1.— / 2 - f 0.90 / 3 - f 0.90

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / antwoorden gratis

GONIOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.15 / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

21/23e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.80

PLANIMETRIE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

31/35e druk - ing. f 3.75; geb. f 4.65

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET VHMO door C. J. Alders

29e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.40

ALGEBRA VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

3e druk - ing. f 4.50 / antwoorden f 1.—

MEETKUNDE VOOR M.M.S. door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

deel 1 - 2e druk - ing. f 3.90 / deel 2 - ing. f 4.50

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR HET VHMO door Dr. H. Streefkerk

deel 1 - 5e druk - ing. f 3.25 / deel 2 - 5e druk - ing. f 3.90

deel 3 - 3e druk - ing. f 3.75

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET VHMO

door J. C. Kok

2e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.— / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO door A. A. Lucieer

13e druk - ing. f 5.—; geb. f 5.75 / antwoorden

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Dr. D. J. E. Schrek - m.m.v. H. Pleysier

4e druk - ing. 4.50; geb. f 5.25 / antwoorden

NOORDHOFF'S TAFEL IN VIER DECIMALEN

Gewone logaritmen; Logaritmen sinustafel; Machten, wortels en omgekeerden; Sinustafels; Rentetafels.

25e druk. Geb. f 2.25

NOORDHOFF'S SCHOOLTAFEL IN VIJF DECIMALEN

Gewone logaritmen; Logaritmen sinustafel; Sinustafel; Gon. verhoudingen.

21e druk. Geb. f 3,25

P. Noordhoff nv

postbus 39 | Groningen

verkrijgbaar bij boekhandel en uitgever