

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

V — 1 FEBRUARI 1966

INHOUD	
In Memoriam Prof. Dr. Fred. Schuh	129
Drs. J. D. de Jong overleden	130
Dr. P. G. J. Vredenduin:	
Onderwijsvernieuwing in België	131
Julius Wilhelm Richard Dedekind	142
B. van Rootselaar: Nog eens iets over functie-notaties	144
Kalender	151
Dr. J. T. Groenman: Isotrope coördinaten	152
Boekbespreking	158
Recreatie	160

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516;
secretaris;

Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;

Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;

Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;

Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;

Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;

Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;

Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;

Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

Dr. J. KOKSMA, Haren;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;

Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;

Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;

Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;

Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;

Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;

P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

IN MEMORIAM

Prof. Dr. FRED. SCHUH

1875—1966

Op 6 januari 1966 is in de ouderdom van bijna 91 jaar in Den Haag overleden prof. dr. Frederik Schuh, oud-hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft (1907—1909 en 1916—1945) en aan de Rijksuniversiteit te Groningen (1909—1916). Zijn naam is onder de oudere generatie van Nederlandse wiskundedocenten van een algemene bekendheid en zijn leerboeken zijn door tallozen ook buiten de kring van zijn eigenlijke leerlingen bestudeerd. We noemen hier slechts zijn „*Lessen over de Hoogere Algebra*”. Honderden hebben de opleiding voor de akten K1 en K5 gevolgd door hem in samenwerking met prof. dr. J. G. Rutgers gegeven en zij allen bewaren aan de uren doorgebracht in het als klaslokaal ingerichte vertrek op de bovenverdieping van zijn woning aan de Van Boetzelaerlaan dankbaar vele goede herinneringen.

Moge het aantal bijdragen van Schuh's hand in „*Euclides*” betrekkelijk gering zijn, des te groter is het aantal artikelen door hem in het „*Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*” gepubliceerd; het overtreft de 50. En reeds voor het totstandkomen van dit tijdschrift verschenen er van hem in „*De Vriend der Wiskunde*” artikelen o.a. over de congruenties van Fermat en Euler die door hun gedegenheid en uitgebreidheid ongetwijfeld de belangstelling van de Nederlandse wiskundeleraar voor de getallenleer zullen hebben gestimuleerd.

Verder heeft Schuh nog 18 jaar lang een afzonderlijk tijdschrift geredigeerd, „*Christiaan Huygens*”, dat zich ook weer in het bijzonder tot de toekomstige wiskundeleraar richtte door het behandelen van onderwerpen die in verband stonden met de studie voor de akte K5 of die het niveau van deze akte te boven gingen.

In 1940 verscheen zijn „*Didactiek en methodiek van de Wiskunde en de Mechanica*”, een werk vol praktische wenken voor allen die wiskunde studeerden en in dit vak enig examen wensten af te leggen.

Het is hier niet de plaats een overzicht te geven van Schuh's gehele oeuvre. Wijdenes gaf reeds een uitvoerige opsomming in het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* bij gelegenheid van Schuh's 90e verjaardag.

Schuh bleef produktief tot in het laatst van zijn leven. Ruim een jaar geleden schreef hij nog een artikel getiteld „*Vragen betreffende een onbepaalde vergelijking*” en een populair boekje over kansrekening „*Hoe bepaal ik mijn kans?*”

We gedenken in Schuh de universitaire docent van hoge be-
gaafdheid die in de eerste helft van de twintigste eeuw voor de
opleiding van de wiskundedoecent en daardoor voor het gehele
wiskunde-onderwijs in ons land van grote betekenis is geweest.

Joh. H. Wansink.

Drs. J. D. DE JONG overleden.

Op 24 november overleed de heer J. D. de Jong, penningmeester van Wimecos.

Jan de Jong werd 13 mei 1901 te Hengelo geboren, studeerde wis- en natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht, en was achtereenvolgens leraar in Groningen, Warffum en Zaandam; vanaf 1948 was hij leraar aan het Laurens Coster Lyceum te Haarlem. In 1956 werd hij bestuurslid van Wimecos, en vanaf sept. 1960 was hij penningmeester.

Jan de Jong was een bijzonder waardevol bestuurslid. Bergen werk heeft hij als penningmeester van onze vereniging verzet; hij deed dit met een nauwkeurigheid die niemand hem kon verbeteren, en met de bescheidenheid, die een kenmerk van zijn karakter was. De vereniging is hem hiervoor grote dank verschuldigd.

Voor zijn vrienden was hij een uitstekende kameraad, erg gevoelig voor gezelligheid en vriendelijkheid, die hij dan ook dubbel en dwars terugschonk. Alleen ingewijden wisten, dat hij de laatste jaren dikwijls moeilijk kon lopen. Pas de laatste maanden klaagde hij hierover, maar niemand, ook hijzelf gelukkig niet, had enig idee van de ziekte waaraan hij leed. Zijn dood is dan ook erg onverwacht gekomen. Zijn vrouw en zoons kunnen niet door mensen getroost worden; daarvoor is het verlies te groot. Wij kunnen alleen maar hopen, dat de herinnering aan het vele goede dat hij als man en vader gedaan heeft, op den duur de wonde zal verzachten.

Zijn nagedachtenis zal ook bij zijn vrienden lang voortleven.

C. J. Alders

ONDERWIJSVERNIEUWING IN BELGIË

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Twee jaar geleden vermeldde ik in het verslag van de studiedagen te Arlon (Euclides 39, pag 76 e.v.), dat een ontwerp-programma gereed lag, volgens welk de leraren in de zesde (d.i. de laagste) klasse zouden mogen experimenteren. Helaas is door een samenloop van omstandigheden de bekrachtiging van dit programma vertraagd. In verband daarmee is de publikatie van de Nederlandse vertaling van het boek van Papy, *Mathématique Moderne I* (besproken in Euclides 39, p. 237 e.v.) opgeschort¹⁾. Tot mijn grote vreugde bemerkte ik, toen ik dit jaar in Arlon kwam om de zevende serie studiedagen bij te wonen, dat de gerezen moeilijkheden tot het verleden behoorden. Men had intussen niet stil gezeten en was doorgegaan met het experimenteren in de vijfde en vierde klasse aansluitend bij de experimenten, die in de zesde genomen waren. Dit leidde ertoe, dat het wenselijk werd de experimenten te coördineren en een doorvoering van vernieuwingen in het officiële programma voor te bereiden. In het hier volgende ministerieel rondschrijven werd dit tot uitdrukking gebracht.

Ministerieel rondschrijven van 14 mei 1965

Het is wenselijk dat in alle 6de, 5de en 4de klassen die betrokken zijn in de hernieuwingsbeweging van het onderwijs in de wiskunde, de proefneming op basis van eenzelfde programma zou doorgevoerd worden.

Met dit doel heb ik besloten dat, van 1 september 1965 af, alleen het programma, voorgesteld door het Belgisch Centrum voor Methodiek van de Wiskunde en goedgekeurd door de Verbeteringsraad van het Middelbaar Onderwijs, als keuzeprogramma in de 6de, 5de en 4de klassen zal toegelaten worden. Het zal door alle leerkrachten, die zulks wensen kunnen aangenomen worden, mits goedgekeurd door de Inspectie.

Dit programma, eventueel geamendeerd rekening houdend met de resultaten van het experiment, zal het traditionele programma vervangen voor de 6des van 1 september 1968 af.

Het is van belang dat de betrokken leerkrachten zich op de hoogte stellen van de elementen van de nieuwe wiskunde en van de methodiek van haar onderwijs. Het is hun ten zeerste aangeraden regelmatig de cursussen te volgen van het Belgisch

¹⁾ Die Nederlandse vertaling is intussen verschenen.

Centrum voor Methodiek van de Wiskunde en deel te nemen aan de congressen en stages, ingericht door de Belgische Vereniging van Wiskundeleraars en door het Departement.

De Minister,
(g.) H. Janne.

Het programma voor de experimenten in de klassen 6, 5 en 4 is gereed. U vindt het hierachter afgedrukt. En tegelijk hiermee is de toegezegde Nederlandse vertaling van *Mathématique Moderne I* verschenen en de verschijning van het tweede deel nog dit jaar (in het Frans) is in het vooruitzicht gesteld.

Om het programma beter te kunnen begrijpen is het verstandig een korte uitleg vooraf te laten gaan van de opvattingen van de Belgen omtrent het meetkunde-onderwijs. Ze zijn voorstander van een axiomatische fundering van de meetkunde, die op de duur plaats maakt voor een opbouw van de meetkunde uitsluitend met behulp van de middelen der lineaire algebra. Op de duur maakt de synthetische meetkunde dus plaats voor de theorie van de vectorruimte met inwendig produkt.

Natuurlijk kan men niet beginnen met het opstellen van axioma's. In plaats daarvan wordt langs intuïtieve weg een stuk meetkunde beschreven, waarna de resultaten kort samengevat worden in een bewering, die dan het predikaat axioma verkrijgt. In *Mathématique Moderne* kan men deze methode uitgewerkt vinden. De axioma's, waartoe men op deze wijze komt, zijn:

1. Het platte vlak Π is een oneindige verzameling punten.
2. Elke rechte lijn is een oneindige echte deelverzameling van Π .
3. Elk puntenpaar is bevat in één en niet meer dan één rechte lijn.
4. Elke richting is een partitie (verdeling in ekwivalentieklassen) van Π (d.w.z. door P gaat één rechte evenwijdig l). (Het spreekt vanzelf, dat aan dit axioma een definitie van „richting” vooraf dient te gaan. Analoge opmerkingen gelden voor de volgende axioma's. De lezer kan de lacunes gemakkelijk zelf aanvullen.)
5. De ekwipollentie is transitief. (Twee geordende puntenparen A_1B_1 en A_2B_2 heten ekwipollent, als de middens van A_1B_2 en A_2B_1 samenvallen.)
6. Twee totale ordeningen van een rechte lijn zijn mogelijk, die elkaars inverse zijn.
7. Elke parallelprojectie van een georiënteerde rechte op een georiënteerde rechte bewaart de ordening of keert deze om.
8. Het axioma van Archimedes.
9. Het continuïteitsaxioma: elke tot 0 inkrappende intervalrij heeft een limietpunt.

Men moet zich dus voorstellen, dat de inhoud van deze axioma's de leerlingen in de loop van de cursus als juist gedemonstreerd wordt. Dit geschiedt niet ineens, maar stap voor stap. Telkens als een of meer axioma's zijn toegevoegd, worden conclusies eruit getrokken, maar deze geschieden op mathematisch verantwoorde wijze. De keuze van de axioma's is zo, dat het ook werkelijk mogelijk wordt voor leerlingen er op een voor hen begrijpelijke wijze deductief op voort te bouwen. Wat dat betreft is er een groot verschil tussen het hier geponeerde systeem (dat veel overeenkomst vertoont met het door Choquet in Aarhus verdedigde stelsel ¹⁾) en het klassieke systeem van Hilbert.

Zo men ziet speelt de metriek in de genoemde negen axioma's nog geen rol. Nu volgen nog een drietal axioma's, die later eerst bewezen kunnen worden, als een inproduct gedefinieerd is. Het zijn:

10. Loodrecht is een betrekking tussen richtingen, die de eigenschap heeft aan elke richting één en niet meer dan één richting toe te voegen en bovendien symmetrisch is.

11. Bij elk paar halve rechten met hetzelfde eindpunt is er één en niet meer dan één spiegeling, waarbij de eerste het beeld van de tweede is.

12. En bovendien is er één en niet meer dan één rotatie met deze eigenschap.

Als men nu het experimentele programma beziet, zal men merken, hoe daarin deze overgang van op intuïtie gebaseerde axiomatische meetkunde naar de lineaire ruimte met inproduct verwerkt wordt. De studiedagen in Arlon hadden als inhoud deze overgang te verduidelijken en na het bespreken van de isometrieën en de gelijkvormigheidstransformaties hiervan uitgaande een eenvoudige fundering te geven van de goniometrie en van de theorie der complexe getallen. Het zou te ver voeren hierop in te gaan.

Hier volgt het programma van de experimenten in de klassen 6, 5 en 4, zoals dit opgesteld is door het Belgische Centrum voor Methodiek van de Wiskunde. Voor een juist begrip nog een paar terminologische opmerkingen:

een koppel is een geordend puntenpaar,

Π_0 is het platte vlak, waarin één punt gekozen is, dat met de nulvector correspondeert,

de stelling van Thales is de stelling volgens welke verhoudingen van lijnstukken invariant zijn bij evenwijdige projectie.

¹⁾ Aarhus Universitet, Elementaer Afdeling Nr. 7, Lectures on Modern Teaching of Geometry and Related Topics, 1960.

EXPERIMENTEEL PROGRAMMA VOOR DE ZESDE

(12 tot 13 jaar)

A. Verzamelingen

1. *Verzamelingen*

Voorbeelden — elementen van een verzameling — voorstelling door Venn-diagrams — lege verzameling — verzameling die slechts een element bevat.

Termen en objecten — gelijkheden.

De symbolen $=$, $\in$, $\emptyset$; de notatie $E = \{x \mid P(x)\}$ en haar varianten.

2. *Delen van een verzameling*

Deelverzameling of deel van een verzameling.

Inclusie — de symbolen $\subset$ (is omvat in) en $\supset$ (omvat).

Delenverzamelingen van sommige verzamelingen.

3. *Algebra van de verzamelingen*

Doorsnede — vereniging — verschil (facultatief: het symmetrisch verschil).

Commutativiteit en associativiteit van $\cup$ en van $\cap$.

Wederzijdse distributiviteiten van $\cap$ en van $\cup$.

(enkele tegenvoorbeelden: niet-associativiteit van onderlinge situaties van $\setminus$ en van $\cup$)

4. *Partitie*

Voorbeelden van partities van een verzameling — definitie.

B. Relaties en Graffen

5. *Relaties en grafen*

Talrijke voorbeelden van relaties — graf van een relatie — de relatie, verzameling koppels — relatie van de verzameling A naar de verzameling B — het produkt $A \times B$ — omgekeerde relatie van een relatie — beeld van een verzameling door een relatie.

Onderlinge eigenschappen van $\times$, $\cap$, $\cup$.

6. *Eigenschappen van sommige relaties*

Reflexiviteit — symmetrie — transitiviteit — antisymmetrie.

7. *Samenstelling van relaties*

Voorbeelden van een samengestelde relatie — associativiteit van de samenstelling — omgekeerde relatie.

8. *Functies*

Functies — afbeeldingen — bijecties — samenstelling van functies — transformaties en permutaties van een verzameling.

(Facultatief: injectie en surjectie)

9. *Equivalentie*

Voorbeelden.

Equivalentie en partitie.

10. *Orde*

Voorbeelden — definities — totale orde.

De symbolen $\leq$, $\geq$, $<$, $>$.

C. *Rationale gehele getallen*11. *Natuurlijke getallen*

Gelijkmachtige verzamelingen — kardinaal van een verzameling (zeer elementaire begrippen).

Eindige verzamelingen en oneindige verzamelingen.

Natuurlijke getallen: kardinalen van een eindige verzameling.

Vraagstukken over de kardinaal van de vereniging, van de doorsnede, en van het produkt van een koppel verzamelingen.

Vinden van de definitie van de optelling en van de vermenigvuldiging van de natuurlijke getallen uitgaande van de bewerkingen met verzamelingen.

Verklaren en rechtvaardigen van de elementaire eigenschappen van de optelling en van de vermenigvuldiging uitgaande van de eigenschappen van de bewerkingen met verzamelingen.

12. *Talstelsels*

Binaire telling en tiendelige telling.

13. *Elementaire studie van Z , $+$, $\cdot$*

Elementaire eigenschappen van Z , $+$, $\cdot$.

Vergelijkingen in Z , $+$.

Rekenoefeningen met getallen en met letters.

D. Meetkunde

14. *Vlak — punt — lijn*

Het vlak, oneindige verzameling punten.

De lijnen, echte delen van het vlak.

De verzameling van de lijnen van het vlak.

Incidentieëigenschappen — gebruik van de Venn-diagrams.

Evenwijdigheid — het symbool $//$. De richting van een lijn, partitie van het vlak.

15. *Evenwijdige lijnen en loodrechte lijnen*

Het symbool $\perp$.

Relatie tussen $\perp$ en $//$.

Georiënteerde lijnen.

16. *Georiënteerde lijnen*

Twee omgekeerde totale orden van elke lijn.

Oriëntatie van de lijnen.

Open halve lijnen en gesloten halve lijnen.

Open segmenten, gesloten segmenten — half-open segmenten.

Opzoeken van de definitie van de convexe verzamelingen.

17. *Evenwijdige projecties*

Voorbeelden en definitie.

Beeld van een deel van het vlak door een projectie.

Evenwijdige projectie van een lijn A op een lijn B en haar omkeringsrelatie.

De evenwijdige projectie van een georiënteerde lijn op een georiënteerde lijn is stijgend of dalend — bijzonder geval van een georiënteerde lijn op een evenwijdige georiënteerde lijn — evenwijdige georiënteerde lijnen in dezelfde zin of in tegengestelde zin.

Halve vlakken gedefinieerd door een lijn.

18. *Equipollentie en translatie*

Equipollente koppels

De equipollentie is een equivalentie.

Projectie van equipollente koppels — kleine stelling van Thales.

Midden van een lijnstuk — stellingen van het parallellogram.

Eigenschappen van de equipollentie — kruisen van equipollenties.

Translaties of vectoren.

Voorbeelden van translaties — beelden van delen van het vlak door een translatie — beelden van lijnen van halve lijnen, van lijnstukken en van koppelpunten door een translatie.

EXPERIMENTEEL PROGRAMMA VOOR DE VIJFDE (13 tot 14 jaar)

De reële getallen en de vectorruimte van het vlak

1. *De groep van de translaties of vectoren*

Samenstelling van translaties.

De commutatieve groep van de translaties van het vlak.

Opzetting in vectoriële, additieve notatie.

Beginselen van vectorrekening.

2. *De groep $\Pi_0, +$*

Nieuwe voorstelling van de groep van de translaties of groep van de vectoren.

Deelgroepen van $\Pi_0, +$.

Som van delen van Π_0 .

Rekenen in $\Pi_0, +$ — Vergelijkingen — Vraagstukken.

3. *De totaal geordende groep $D_0, +, \leq$*

Elke lijn D_0 die 0 bevat, is een deelgroep van $\Pi_0, +$.

Studie van de geordende groep $D_0, +, \leq$.

Som van lijnstukken — Eerste inzicht in de benadering van een som.

4. *Eerste synthese van het begrip groep*

Het begrip groep doen uitkomen, uitgaande van de reeds gegeven voorbeelden.

Rekenen in een willekeurige groep.

Additieve notatie en multiplicatieve notatie.

Gehele coëfficiënt en exponent.

Vergelijkingen in een groep.

5. *Reële getallen*

Schaalverdeling van de lijn — Axioma van Archimedes.

Binaire en decimale deelschaalverdelingen.

Begrensde binaire en decimale getallen.

Onbegrensde binaire en decimale getallen; continuïteitsaxioma, eerste verschijning van het begrip.

6. *Stelling van Thales*

Stelling van Thales in algemene vorm.

Verhouding van evenwijdige vectoren.

7. *Homothetieën*

Beelden van delen van het vlak door een homothetie.

Homothetische verhouding.

De homothetieën met verhouding $\neq 0$ bewaren: de lineariteit, de incidentie, de evenwijdigheid, het midden, de verhouding van evenwijdige vectoren, de verzameling van de lijnstukken. Groep van homothetieën en translaties of groep van de dilataties (facultatief).

8. *Optelling van de reële getallen*

De geordende additieve groep van de reële getallen.

Vergelijkingen en ongelijkheden met onbekende — Benaderde berekeningen.

Absolute waarde.

9. *Vermenigvuldiging van de reële getallen*

Voor de homothetieën met gehele verhouding en zelfde centrum: de verhouding van de samengestelde homothetie van 2 homothetieën is gelijk aan het produkt van de verhouding.

Definitie van de vermenigvuldiging van de reële getallen door veralgemening van voorgaande eigenschap.

Associativiteit en commutativiteit van de vermenigvuldiging van de reële getallen.

De multiplicatieve groep van de niet-nul reële getallen R_0 .

Vergelijkingen in R_0 .

10. *Vermenigvuldiging van de vectoren met een reëel getal*

Gemengde associativiteit.

Dubbele distributiviteit.

Lineaire combinatie en projectie.

11. *Het geordend reëel veld R , $+$, $\cdot$, $\leq$*

Doen uitkomen van de structuur van geordend veld.

Berekeningen in dit veld.

Merkwaardige produkten.

12. *Breuken*

Breuken met reële termen.

Wetten en rekenoefeningen met breuken.

Het veld van de rationale getallen.

13. *Lineaire vergelijkingen met één onbekende in het veld van de reële getallen*

Vergelijkingen met één onbekende — Vraagstukken.

14. *Ongelijkheden met onbekende — Benaderingen — Eerste beginselen van de foutenrekening*15. *De vectorruimte van het vlak*

Vectorrekening.

Vectorvergelijking van de lijn.

Bases en coördinaten.

Vraagstukken.

16. *Puntsymmetrieën*

Beelden van delen van het vlak door een puntsymmetrie.

Symmetriecentra van een deel van het vlak.

Samenstellen van twee en meerdere puntsymmetrieën.

Groep van de puntsymmetrieën en de translaties.

17. *Evenwijdige symmetrieën en spiegelingen*

Beeld van delen van het vlak en in 't bijzonder van lijnen.

Bewaarde eigenschappen.

Symmetrieassen van een deel van het vlak.

EXPERIMENTEEL PROGRAMMA VOOR DE VIERDE (14 tot 15 jaar)

A. 1. De relatie „deelt” in Z en in de verzameling van de natuurlijke getallen.

Priemdelers en primaire delers van een getal.

Stabiele delen en deelgroepen van Z , +

Alle deelgroepen van Z , + zijn cyclisch.

G.G.D. en K.G.V. van een deel van Z .

Relatie van Bezout.

2. *Vergelijkingen van de rechte lijn*

Vectorvergelijking, parametrische vergelijkingen en cartesische vergelijkingen van de rechte lijn.

3. *Functies van R in R . Veeltermfuncties*

Voorbeelden.

Cartesiaanse voorstelling.

Optelling en vermenigvuldiging van functies.

Ring van afbeeldingen van R in R .

4. *Algebra van de reële veeltermen in een onbepaalde*

Algebra van de veeltermen.

Deling door $x - a$. Deling met rest.

Ontbindingsoefeningen in de eenvoudige gevallen.

5. *Vierkantswortel van een positief reëel getal*

Vierkantswortel en zijn toepassingen.

6. *Stelsels lineaire vergelijkingen in een, twee en drie onbekenden*

Oplossing door de methode van Gauss.

Vraagstukken.

7. *Stelsels lineaire vergelijkingen en ongelijkheden in 2 onbekenden*

Oplossing van eenvoudige stelsels.

Vraagstukken. Meetkundige vertolking.

B. 8. *Groep van verplaatsingen en groep van de isometrieën van het vlak*

Spiegelingen.

Verschuivingen (translaties), draaiingen (rotaties) en omkeringen als samengestelde transformaties van spiegelingen.

Elke omkering van het vlak is een schuifspiegeling (samengestelde transformatie van een spiegeling en een verschuiving evenwijdig met de spiegelas).

Commutatieve groep van de draaiingen met gegeven middelpunt.

Groep van de verplaatsingen. Groep van de isometrieën.

9. *Afstand*

Afstand. Cirkels. Open schijven, gesloten schijven.

10. *(Georiënteerde en niet georiënteerde) hoeken*

(Georiënteerde) hoek van een draaiing.

(Georiënteerde) hoek van een koppel halve rechten.

Groep van de (georiënteerde) hoeken.

(Niet georiënteerde) hoek van een paar halve rechten.

Maat van de hoeken.

11. *Cosinus en scalair produkt*

Cosinus van een hoek.

Een niet georiënteerde hoek is bepaald door zijn cosinus.
Scalair produkt en het invariant zijn van het scalair produkt
voor de isometrieën.

Stelling van Pythagoras.

Elementaire formules van Driehoeksmeting.

12. *Driehoeksongelijkheid*

Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. Driehoeksongelijkheid.

Convexiteit van de schijf.

Doorsnede van een rechte lijn en een schijf of een cirkel.

Benaderend berekenen in het vlak.

13. *Congruenties en rechtstreekse congruenties*

Congruente delen van het vlak.

Rechtstreeks congruente delen van het vlak.

Congruente koppels punten.

Congruente drietallen punten.

14. *Groep van gelijkvormigheden van het vlak en deelgroep van de rechtstreekse gelijkvormigheid*15. *De oppervlakten en hun maat*

Oppervlakten van elementaire delen van het vlak.

Berekenen van de oppervlakten met behulp van de vectorrekening en de driehoeksmeting.

Het spreekt vanzelf, dat dit begin aangevuld moet worden met een programma voor de bovenbouw. Men is dan ook al bezig geweest met het opstellen van een programma voor de derde klasse. Het afgelopen jaar is dit door Mevrouw Papy in praktijk gebracht bij haar onderwijs. Ze heeft ons daarover voorgelicht. Het programma behelst de beginselen van de combinatorische analyse (aantal afbeeldingen van een verzameling, aantal deelverzamelingen, e.d.), de studie van de reële getallen als geordend volledig lichaam, aritmetica (ondergroepen van Z , $+$, ggd en kgv en het daarop gebaseerde tralie, priemgetallen), algemene theorie van vectorruimten (ze gaf ons een zeer aardig bewijs van de stelling, dat een vectorruimte geen twee verschillende dimensies kan hebben), het lineaire euclidische vlak (scalair produkt, lengte, afstand, cosinus, Pytha-

goras, de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, driehoeksongelijkheid, orthogonaliteit, de groep van de orthogonale transformaties en de ondergroep van de rotaties, de directe gelijkvormigheidstransformaties, het lichaam van de complexe getallen, de elementaire goniometrie).

De voordrachten van Papy behelsden de toelichting van dit programma en de wetenschappelijke achtergronden ervan. Het aantal deelnemers was 600!

Al met al mogen we de Belgen feliciteren met het tot stand komen van dit programma en mogen zij zich gelukkig prijzen, dat Papy zich zoveel moeite getroost heeft om zijn gedachten doorgevoerd te krijgen. Het enige, dat mij van het hart moet, is dat ik enige twijfel heb ten aanzien van de vraag, of de leerling nog voldoende vaardigheid krijgt in de techniek van de wiskunde om later, als hij geen mathematicus wordt maar wel wiskunde nodig heeft, zich te kunnen redden. De toekomst zal leren, of mijn vrees gegrond is of niet.

JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND

Deze maand is het 50 jaar geleden, dat Dedekind te Brunswijk overleden is, namelijk op 12 februari 1916. In diezelfde stad is hij op 6 oktober 1831 geboren. Hij studeerde te Göttingen, waar hij in 1852 bij Gauss promoveerde. Later heeft hij zich er wel eens over uitgelaten, dat de wiskunde toen te Göttingen niet meer geheel bij de tijd was, in tegenstelling tot bijv. Berlijn, waar Jacobi, Steiner en Dirichlet doceerden. Toen in 1855, na het overlijden van Gauss, Dirichlet naar Göttingen kwam, volgde Dedekind nog enkele jaren diens colleges en in 1863 gaf hij diens *Vorlesungen über Zahlentheorie* uit (Dirichlet was in 1859 overleden) met een aanhangsel waarin hij zijn eigen opvattingen over getallentheorie weergaf. Van 1854 tot 1858 was Dedekind privaattoecent te Göttingen, vervolgens hoogleraar te Zürich tot 1862 en daarna tot 1894 in zijn geboortestad Brunswijk, beide keren aan een technische hogeschool. 't Is een vraag waarom hij, gezien zijn wetenschappelijke verdiensten, nooit een professoraat aan een vooraanstaande universiteit vervuld heeft; een goed verantwoorde biografie van hem is nog niet geschreven.

Dedekind's naam is bekend gebleven door zijn theorie van het irrationale getal. In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Brunswijk, 1872) definieert hij, als eerste, een irrationaal getal, en wel met de

naar hem genoemde „snede van Dedekind”. De rationale getallen worden in twee klassen gescheiden waarbij ieder getal van de ene groter is dan ieder getal van de andere. Bevatten deze klassen geen kleinste, resp. grootste (rationaal!) getal, dan definieert zo’n „snede” een irrationaal getal. Met het nodige voorbehoud kan men zeggen, dat een soortgelijke snede te vinden is in de van *Eudoxos* (408-355) afkomstige „Redentheorie” in boek V van *Euclides’ Elementen*, welke theorie handelt over onmeetbare verhoudingen (bijv. van een zijde en een diagonaal van een vierkant). Deze theorie geeft een kenmerk voor het gelijk zijn van twee dergelijke verhoudingen, wat leidt tot een indeling der meetbare verhoudingen in twee klassen. Er zijn echter belangrijke verschillen. Eudoxos’ theorie gaat uit van bestaande onmeetbare verhoudingen (dus geen irrationale getallen!) en plaatst deze tussen de meetbare; Dedekind gaat uit van het rationale getalsysteem en breidt dit uit tot dat der reële getallen.

Was sind und was sollen die Zahlen (Brunswijk, 1888) was een begin voor de verzamelingsleer. Een oneindige verzameling karakteriseert Dedekind hierin door de eigenschap, dat ze één-éénduidig af te beelden is op een echte deelverzameling.

Tenslotte vermelden we nog, dat Dedekind bijgedragen heeft aan een generalisatie der priemfactorstelling voor gehele algebraïsche getallen (nulpunten van veeltermen $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, met gehele coëfficiënten) met behulp van idealen en priemidealen.

A. J. E. M. Smeur

OUDE NUMMERS EUCLIDES

Collega Dr. H. Turkstra, Moerbeilaan 58, Hilversum zoekt de volgende oude nummers van *Euclides*:

5e Jg. (1928/29), 2; 7e Jg., 1 en 2; 9e Jg., 3; 14e Jg., 2 en 3; 16e Jg., 5.

Als wederdienst kan hij aanbieden.

27e Jg., 4; 28e Jg., 5; 32e Jg., geheel; 33e Jg., geheel, behalve 1; 34e Jg., geheel, behalve 3 en 8.

Wie kan Dr. Turkstra helpen?

NOG EENS IETS OVER FUNCTIE-NOTATIES

door

B. VAN ROOTSELAAR

Amsterdam

Ongerust over een al te ver doorgedreven modernisme heeft P. G. J. Vredenduin met succes een discussie uitgelokt met het doel te geraken tot een notatie voor functies, welke met een minimum aan bezwaren bruikbaar is bij het onderwijs in de wiskunde aan middelbare scholen.

In zijn eerste korrel ¹⁾ daarover merkt hij op, dat het gebruik in de schoolwiskunde, waarbij sommige formules

$$F(x)$$

met vrije variabele x voor reële getallen functies heten, waarvan men eventueel opmerkt dat ze voor zekere getallen niet gedefinieerd is, niet modern is. De moderne opvatting zou zijn, dat een functie een afbeelding is. Deze moderne opvatting resulteert dan in de volgende beschrijving van de door Vredenduin als voorbeeld aangevoerde functie

$$f: R/\{2, 4\} \rightarrow R: x \rightarrow (x-2)^{-2}(x-4)^{-2}$$

Vredenduin is hier niet gelukkig mede. Dat is begrijpelijk.

Maar wat houdt die moderne opvatting, dat een functie een afbeelding is, nu wel precies in? Om dat na te gaan zal ik eerst de ouderwetse opvatting weergeven.

Reeds in *Principia Mathematica* van A. N. Whitehead en B. Russell vinden we de opvatting (van G. Frege), dat een functie een bijzondere relatie is. Dit is de opvatting, die in de loop der tijden geperfectioneerd is en in alle onderdelen der wiskunde goede diensten bewijst. Elke functie treedt daarbij op als een deelverzameling van het directe produkt van twee verzamelingen met een bijzondere eigenschap, b.v. f is een reële functie van een veranderlijke juist dan wanneer geldt:

$$f \subset R \times R \text{ \& } (x)(y)(z) ((x, y) \varepsilon f \text{ \& } (x, z) \varepsilon f \rightarrow y = z)$$

Hierbij is (x, y) een notatie voor het geordende paar x, y .

¹⁾ Euclides 39 (1963/64), 275—276.

En nu de moderne opvatting. Hiervoor kies ik twee bronnen. De eerste is door Vredenduin in genoemde korrel aangevoerde G. Papy. Deze introduceert eerst het ouderwetse functiebegrip en dan het begrip afbeelding, wat zoveel is als een overal op een zekere verzameling gedefinieerde functie, dus een afbeelding f van verzameling A in B (genoteerd $f: A \rightarrow B$) is een functie met de eigenschap, dat elk element van A een beeld heeft.

De tweede bron is H. Freudenthal in *Exacte Logica*. Op pag. 11 van dat boekje vind ik, dat het begrip afbeelding een generalisatie is van het begrip functie en op p. 68 vind ik een formele definitie van het begrip afbeelding, waaruit duidelijk blijkt, dat het een specialisatie is van het ouderwetse begrip functie. Er zijn meer van dergelijke uitspraken uit de vaderlandse literatuur te verzamelen.

Nu kan men bij elke functie f definiëren het definitiegebied (of met een door N. H. Kuiper ingevoerde term: bron van f), zijnde de verzameling

$$D(f) = \{x; (Ey)((x, y)ef)\}$$

en dan levert f een afbeelding van $D(f)$ (en ook van elke deelverzameling van $D(f)$).

Het kan voor allerlei onderzoeken nuttig zijn zich te beperken tot het beschouwen van afbeeldingen en wel in het bijzonder bij die onderzoeken waarbij men geïnteresseerd is in de lotgevallen van de functie zelf, de af te beelden verzamelingen en hun beelden. Het is echter de vraag of deze beschouwingen nu zo op de voorgrond treden bij het middelbaar onderwijs. Deze vraag heeft niets te maken met het al of niet modern zijn van dat onderwijs, want er zijn vele onderzoeken in de wiskunde, waarbij het de voorkeur verdient te werken met het algemene functiebegrip, o.a. bij het onderzoek van locale eigenschappen van functies in de analyse en topologie.

Een wat meer stelselmatige toepassing van de ouderwetse opvatting van functie als bijzondere relatie lijkt me de eenvoud en aanschouwelijkheid in het onderwijs ten goede te komen.

Bij elke relatie (predicaat)

$$R(x, y)$$

kan men beschouwen de verzameling

$$\{(x, y); R(x, y)\}$$

van geordende paren (van getallen). De aanschouwelijke voorstelling daarvan is de grafiek van de relatie. Is de relatie een functie dan krijgen we de grafiek van de functie.

Is $f \subset R \times R$ een functie, dan is de bij zekere x behorende y , zodat $(x, y) \in f$, eenduidig bepaald. Deze y kunnen we aangeven met $f(x)$ en we kunnen f ook zo voorstellen:

$$f = \{(x, y); y = f(x)\}$$

Deze formule drukt uit, dat de functies die relaties zijn, welke op een normaalvorm gebracht kunnen worden (expliciete functie). Natuurlijk is $\{(x, y); y - f(x) = 0\}$ dezelfde functie.

In veel gevallen is de functie reeds in normaalvorm gegeven. Het is dan ook — een soms veroordeeld — gebruik om in plaats van de functie zelf het definiërende predicaat aan te geven, b.v.

$$y = f(x)$$

of in het bijzonder

$$y = ax^2 + bx + c$$

Er is geen bezwaar tegen het vastleggen van een functie op deze wijze; minder gelukkig is het evenwel de functie met deze formulering van zijn bepalend predicaat te identificeren.

Als afkorting onder de afspraak, dat x en y variabelen zijn voor eerste resp. tweede element van een geordend paar is ze echter zeer praktisch. Men bedenke tevens, dat de ouderwetse benamingen „onafhankelijke variabele” en „afhankelijke variabele”, waarvan men niet altijd de betekenis inziet ²⁾, op natuurlijke wijze te rechtvaardigen zijn. Namelijk, daar (x, y) een geordend paar is, is er onderscheid tussen eerste element en tweede element en er is niets tegen om een variabele voor het eerste element onafhankelijke variabele te noemen en die voor het tweede element afhankelijke variabele.

Men merke op, dat variabelen voor getallen geen getallen zijn, noch variabele getallen, noch willekeurige getallen. Behalve de variabelen kent men in de functie soms ook nog symbolen welke verwijzen naar willekeurig te kiezen getallen; in de uitdrukking

$$y = ax^2 + bx + c$$

is het gebruikelijk de a , b en c als zulke symbolen op te vatten (parameters). Het kan voorkomen dat op zeker ogenblik dergelijke symbolen de rol van variabele gaan spelen, zoiets moet men dan wel aankondigen om verwarring te vermijden.

²⁾ Vergel. A. Nijenhuis, *Een beschouwing over functie-notatie*, Euclides 40 (1964/65), 33–45 (i.h.b. p. 36).

Een andere weg om met grote precisie functies aan te geven is ingeslagen door A. Church in 1933 in zijn stelsels van λ -conversie. Hierbij heeft men b.v. voor de functie

$$f = \{(x, y); y = ax^2 + bx + c\}$$

de notatie

$$\lambda x \cdot ax^2 + bx + c$$

Een voordeel van deze notatie is, dat men met groot gemak aan parameters de betekenis van variabelen kan geven, zo is

$$\lambda xa \cdot ax^2 + bx + c$$

een functie van de variabelen x en a , enz.

Een nadeel is dat deze notatie geen afkortend effect heeft indien men lang over dezelfde functie spreekt. Functiewaarden noteert men ook niet zo gemakkelijk, nl. waar we in het eerste geval $f(3)$ schrijven, moeten we met de λ -notatie schrijven

$$\lambda x \cdot ax^2 + bx + c(3)$$

hetgeen natuurlijk is $9a + 3b + c$. Of om een ander voorbeeld te noemen ³⁾:

$$\lambda x \cdot (x > 0)(-2) = (-2 > 0).$$

Het is niet nodig om hier verder op in te gaan, omdat ik een algemeen gebruik van de λ -notatie niet zou willen aanbevelen.

Ten overvloedige zij opgemerkt dat de ouderwetse notatie weinig didactische problemen geeft bij de samengestelde functies.

Als nl.

$$f = \{(x, y); y = f(x)\}$$

en

$$g = \{(x, y); y = g(x)\}$$

dan is dus

$$f \circ g = \{(x, y); (Ez)(z = g(x) \& y = f(z))\}$$

en men heeft de normaalvorm:

$$f \circ g = \{(x, y); y = f(g(x))\}$$

d.w.z.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \text{ voor alle } x \in D(f \circ g).$$

³⁾ zie H. Freudenthal, *Exakte logica*, p. 74, opg. 9 (deoplossing op p. 117 is fout).

In recreatie 113 ⁴⁾ komt Vredenduin op andere wijze terug op het probleem van een juiste notatie voor functies en in korrel CXXII ⁵⁾ gaat hij uitvoerig in op de „wonderlijke notatie” dx^2/dx . Omdat ondoordachte toepassing van substitutiegewoonten tot ongewenste resultaten leidt en omdat men, om het gewenste resultaat te verkrijgen, te veel moet denken (en bijvoorbeeld de begrippen vrij respectievelijk gebonden voorkomen van variabelen zou moeten uitleggen) wordt deze notatie als ongeschikt verworpen.

Dat is wel terecht, want een geschikte notatie is een zodanige, welke ons de denkarbeid helpt verlichten, zonder dat daarbij al te veel aan precisie verloren gaat. Als geschikte notatie voor de afgeleide functie aanvaardt Vredenduin f' (Lagrange). Men kan het hier in het algemeen mee eens zijn, hoewel men dan b.v. voor de onbenoemde, expliciet gegeven veelterm

$$x^3 + 5x + 3$$

voor de afgeleide niet veel anders kan schrijven dan

$$(x^3 + 5x + 3)'$$

wat niet geheel volgens de bedoeling is, maar er toch nog wel mee door kan volgens mij. De afwijking van de bedoeling is net het verschil tussen de notaties $f'(x)$ en $f(x)'$.

Vredenduin merkt nu op, dat deze notatie ons in de steek laat indien we b.v. $\sin 2x$ willen differentiëren naar $2x$, d.w.z. indien we een functie naar een andere functie willen differentiëren. Inderdaad, indien we zoiets als d/dg willen aangeven met de notatie f' voor de afgeleide van f , dan lukt dat niet goed. De bedoeling van d/dg wordt juist uitgedrukt door $f' \circ g$, maar Vredenduin is hiermede niet tevreden, want deze uitdrukking zou praktisch onbruikbaar zijn vanwege haar omslachtigheid en hij stelt daarom de opgave te zoeken naar een toelaatbare en praktische bruikbare notatie.

Inmiddels zijn al krachtig veroordeeld de notaties dfx/dx , dfx/dgx , enz.

Hoewel men bij het symbool d/dg wel een zinnige definitie kan fabriceren ⁶⁾ vraag ik me af of er wel behoefte is aan zoiets als d/dg , d.w.z. of we $\sin 2x$ wel zo vaak naar $2x$ willen differentiëren. Ik stel

⁴⁾ Euclides 39(1963/64), 287—288.

⁵⁾ Euclides 39(1963/64), 310—312.

⁶⁾ Zie b.v. A. Nijenhuis in Euclides 40(1964/65), 33—45, al kan men dat ook anders, nl. met behulp van differentialen doen.

hierbij, dat we de behoeften bij het middelbaar onderwijs op het oog hebben. Waarschijnlijk ontstaat die behoefte aan het differentiëren van $\sin 2x$ naar $2x$ uit een lezing van de kettingregel in de zin van: als ik $\sin 2x$ naar x moet differentiëren, dan differentieer ik eerst $\sin 2x$ naar $2x$ en dan $2x$ naar x , enz. Ik acht dat geen verstandige lezing, hoewel ik niet wil ontkennen dat ze suggestief is. Er is echter bij het differentiëren van $\sin 2x$ absoluut geen behoefte om $\sin 2x$ naar $2x$ te differentiëren!

$\sin 2x$ is een samengestelde functie en in het algemeen is afgeleid, naar ik aanneem, dat de afgeleide $(f \circ g)'$ van de samengestelde functie $f \circ g$ als volgt is vastgelegd: het differentiaalquotiënt $(f \circ g)'(x)$ is het produkt van het differentiaalquotiënt van f in het punt $g(x)$ (d.w.z. $f'(g(x))$) maal het differentiaalquotiënt van g in het punt x (d.w.z. $g'(x)$), dus door de vergelijking:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Wil men dit als gelijkheid van functies beschrijven, dan wordt men inderdaad gedwongen tot de formulering

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g';$$

Deze laatste stap is misschien te abstract voor de middelbare school met zijn zeer gemengde publiek. Maar ook in de notatie met argument x is er geen sprake van het differentiëren van f naar g .

Bij functies van meer veranderlijken heeft men natuurlijk hetzelfde probleem met de notaties $\partial_x f$, $\partial_y f$, f_x , f_y , $\partial f / \partial x$ en $\partial f / \partial y$. Ik wijs hierbij slechts op het reeds vrij algemeen ingeburgerde gebruik van $\partial_1 f$ voor $\partial_x f$, ... en van $\partial_2 f$ voor $\partial_y f$, ..., enz.

Tenslotte wil ik van de gelegenheid gebruik maken om te wijzen op een consequentie voor het onderwijs van de toenemende populariteit van eenvoudige verzamelingstheoretische begrippen (en notaties). Ik bedoel hier de praktijk van het stellen (en oplossen) van zinvolle opgaven en neem hiervoor het volgende door Vredenduin in korrel CXXIII ⁷⁾ aangevoerde vraagstuk.

„Opgave. Welke waarden kan de functie ${}^2\log(-x^2 + 4x)$ aannemen”. Nu is het aantal waarden oneindig en deze waarden kunnen het beste beschreven worden met verzamelingssymbolen, nl. zo

$$W = \{y; (Ex)(y = {}^2\log(-x^2 + 4x))\}.$$

Men kan volhouden, dat hier de oplossing staat, de functie kan nl. precies die waarden aannemen, die element zijn van W . De bedoe-

⁷⁾ Euclides 40(1964/65), 45–46.

ling is echter, dat men de verzameling beschrijft met een overzichtelijker predicaat en wel zo $W = \{y; y \leq 2\}$.

Nu kan men op de goede wil en de dressuur van de leerling vertrouwen en zeggen dat het wel goed gaat. We moeten echter niet te veel goede wil aankweken en zeker niet dressereren. Onze tamelijk twijfelachtige bedoeling W te beschrijven door $\{y; y \leq 2\}$ zouden we duidelijker moeten uitdrukken, b.v. door een omschrijving — op welke wijze dan ook — van overzichtelijk predicaat, d.w.z. predicaat dat we in de oplossing dulden. Dit verschijnsel is niet nieuw en komt ook in andere situaties voor; voor zover ik kan nagaan is daar de bedoeling echter beter omschreven, dan in het hier gesignaleerde geval, waar we te maken hebben met zeer eenvoudige en zeer algemene begrippen en hun voorstellingen.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

COLLEGES STERRENKUNDE VOOR AFGESTUDEERDEN

Evenals in vorige jaren organiseert de Utrechtse Sterrewacht ook in het voorjaar van 1966 een reeks colleges voor leraren en andere afgestudeerden.

Het thema zal deze keer zijn:

EVOLUTIE

De voordrachten zullen worden gehouden op vier achtereenvolgende donderdagsavonden in februari 1966 in het hoofdgebouw van de Universiteit, Domplein 29, Utrecht, en duren dan van 19.30 tot 21.15 uur.

De sprekers en onderwerpen zijn:

- | | | |
|-------------------|-------------------------|--|
| 3 februari 1966: | PROF. DR. M. MINNAERT: | De ontwikkeling van het planetenstelsel. |
| 10 februari 1966: | DR. E. W. ELST: | Sterren en hun eigenschappen, in verband met hun evolutie. |
| 17 februari 1966: | DRS. E. VAN DEN HEUVEL: | De levensloop van de sterren. |
| 24 februari 1966: | | De ontwikkeling van sterrenstelsels. |

Men geve zich vooraf schriftelijk voor deelname op bij de administratie van de Sterrewacht, Zonnenburg 2, Utrecht. U ontvangt daarna het definitieve programma.

Leraren kunnen na afloop van de cursus op declaratie hun reiskosten vergoed krijgen.

C. de Jager

ISOTROPE COÖRDINATEN

door

Dr. J. T. GROENMAN

Groningen

§1. Wij nemen een rechthoekig coördinatenstelsel (x, y) en definiëren de isotrope coördinaten (X, Y) als volgt:

$$\boxed{\begin{matrix} X = x + iy \\ Y = x - iy \end{matrix}} \dots (1) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \frac{1}{2}(X + Y) \\ y = -\frac{1}{2}i(X - Y) \end{matrix}} \dots (1a)$$

De isotrope lijnen door de oorsprong met vergelijking $x \pm iy = 0$ treden als coördinaatassen op.

§2. De afstand d van twee punten P en Q wordt:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{\{x_P - x_Q + i(y_P - y_Q)\}\{x_P - x_Q - i(y_P - y_Q)\}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{d = \sqrt{(X_P - X_Q)(Y_P - Y_Q)}}. \quad (2)$$

De vergelijking van een cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 wordt dus:

$$\boxed{XY = 1} \quad (3)$$

Een punt A op deze cirkel kan men dus de coördinaten $X = \alpha$ en $Y = 1/\alpha$ geven.

Twee punten $A(\alpha, 1/\alpha)$ en $B(\beta, 1/\beta)$ hebben dus een afstand d , die naar (2) als volgt wordt gevonden.

$$\boxed{d = \sqrt{(\alpha - \beta)(1/\alpha - 1/\beta)} = \sqrt{\frac{-(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta}} = \frac{i(\alpha - \beta)}{\sqrt{\alpha\beta}}}. \quad (4)$$

Omdat d positief moet zijn, dient uit de beide mogelijkheden voor $\sqrt{\alpha\beta}$ een keus gemaakt te worden. Men kiese in de gerichte eenheids-cirkel van figuur 1 het punt K_1 (en niet K_2)

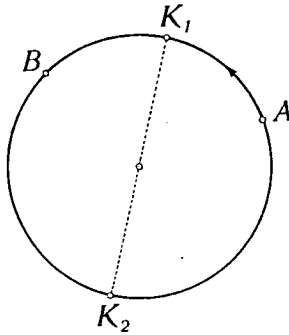


fig. 1.

§3. Een rechte lijn krijgt weer een lineaire vergelijking.

$$y = \lambda x + a \rightarrow -\frac{1}{2}i(X - Y) = \frac{1}{2}\lambda(X + Y) + a \rightarrow$$

$$Y = \frac{\lambda + i}{-\lambda + i} X + b \quad \text{waarin } b \text{ een constante is.}$$

De „richtingscoëfficiënt” μ wordt dus gegeven door de betrekkingen:

$$\boxed{\mu = \frac{\lambda + i}{-\lambda + i}} \dots (5) \longrightarrow \boxed{\lambda = i \frac{\mu - 1}{\mu + 1}} \dots (5a)$$

Hieruit volgt:

1. Evenwijdige lijnen hebben dezelfde „richtingscoëfficiënten”.
2. Bij loodrechte lijnen zijn die gelijk en tegengesteld, immers uit $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ volgt bij substitutie van (5a): $\boxed{\mu_1 + \mu_2 = 0}$

Voor de richtingscoëfficiënt λ van de deellijnen van twee lijnen met richtingscoëfficiënten λ_1 en λ_2 geldt:

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{1 + \lambda \lambda_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda}{1 + \lambda \lambda_2};$$

substitueert men daarin (5a) dan volgt

$$\boxed{\mu = \pm \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \quad (6)$$

§4. Met behulp van §3 kan men de vergelijkingen van deellijnen en hoogtelijnen opstellen: *als eenheidscirkel neme men dan de omschreven cirkel van de betrokken driehoek*. Als voorbeeld zullen we de

coördinaten van het hoogtepunt uitrekenen.

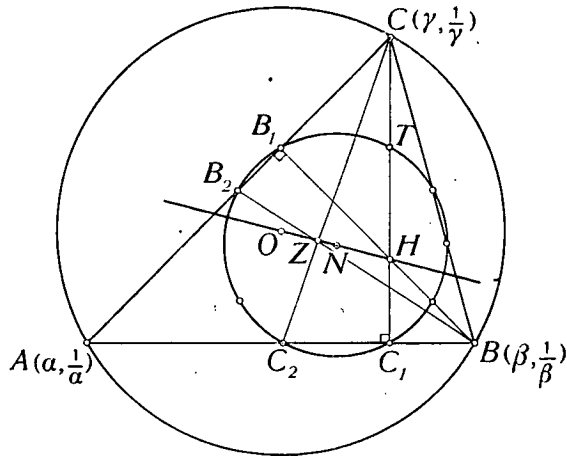


fig. 2.

$$\mu_{AB} = \frac{1/\beta - 1/\alpha}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow AB \dots Y - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha\beta} (X - \alpha)$$

$$\boxed{AB \dots X + \alpha\beta Y = \alpha + \beta.} \quad (7)$$

$$\mu_{CC_1} = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow CC_1 \dots Y - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta} (X - \gamma)$$

$$\boxed{CC_1 \dots X - \alpha\beta Y = \frac{-\alpha\beta}{\gamma} + \gamma.} \quad (8)$$

$$BB_1 \dots X - \alpha\gamma Y = \frac{-\alpha\gamma}{\beta} + \beta.$$

Het snijpunt H van BB_1 en CC_1 wordt dan:

$$\boxed{H\left(\alpha + \beta + \gamma, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right).}$$

Het zwaartepunt Z vindt men op de wijze, die voor orthogonale coördinaten geldt.

$$\therefore \boxed{Z\left[\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right].}$$

$\therefore O, Z, H$ liggen op één lijn (*de rechte van Euler*); daarbij geldt $OZ : OH = 1 : 3$.

C_1 vindt men als snijpunt van CC_1 en AB

$$\therefore C_1 \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right]$$

Het midden van CH wordt:

$$T \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\gamma} \right].$$

Het midden N van OH heeft de coördinaten:

$$N \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \right).$$

De cirkel met middelpunt N en straal $\frac{1}{2}$ heeft de vergelijking

$$\left[X - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \right] \left[Y - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \right] = \frac{1}{4}.$$

Vult men de coördinaten van T , C_1 en C_2 (midden AB) in, dan constateert men dat zij alle aan deze vergelijking voldoen. Daarmee is de *cirkel van Feuerbach* voorgerekend.

§5. De coördinaten zijn goed te gebruiken indien de figuur — bv. driehoek of koordenvierhoek — een omschreven cirkel bezit. Wij bewijzen voor de koordenvierhoek de *stelling van Ptolemeus*.

$$A \left(\alpha, \frac{1}{\alpha} \right); \quad B \left(\beta, \frac{1}{\beta} \right); \quad C \left(\gamma, \frac{1}{\gamma} \right); \quad D \left(\delta, \frac{1}{\delta} \right).$$

Volgens (4) is

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA =$$

$$\begin{aligned} & \frac{i(\alpha - \beta)}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{i(\gamma - \delta)}{\sqrt{\gamma\delta}} + \frac{i(\beta - \gamma)}{\sqrt{\beta\gamma}} \cdot \frac{i(\alpha - \delta)}{\sqrt{\alpha\delta}} \\ &= \frac{i^2(\alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\delta + \gamma\delta)}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}} \\ &= \frac{i^2(\alpha\beta + \gamma\delta - \beta\gamma - \alpha\delta)}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}} \\ &= \frac{i(\alpha - \gamma)}{\sqrt{\alpha\gamma}} \cdot \frac{i(\beta - \delta)}{\sqrt{\beta\delta}} = AC \cdot BD. \end{aligned}$$

§6. Een uitgebreide behandeling vindt men bij A. Haarbleicher in „*de l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées; nouvelle géométrie du triangle*” (1931). Daarin vindt men naast minder bekende — maar wel belangwekkende — zaken o.a. *de rechte van Simson*, *de isogonale verwantschap* en *de stelling van Morley* over de trisectrices van een driehoek.

§7. In het Wiskundig Tijdschrift (4e jaargang 1908) vond ik de volgende stelling over een koordenvierhoek. Zij wordt daar bewezen door Chou Ta.

Gegeven is een koordenvierhoek $ABCD$. Men beschouwt de driehoeken ABC , BCD , CDA , DAB . Van deze driehoeken neemt men de middelpunten der ingeschreven cirkels. Zij zijn de hoekpunten van een rechthoek.

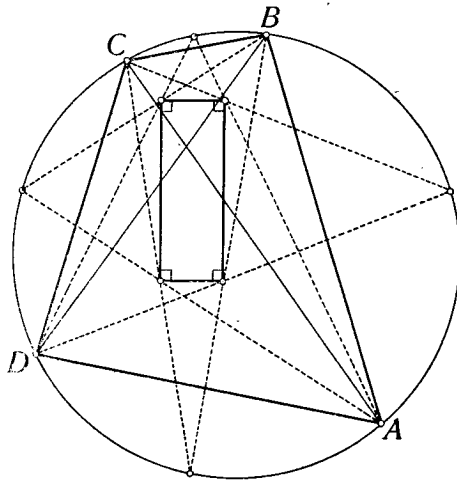


fig. 3.

Deze stelling kon ik met isotrope coördinaten narekenen. Beschouwen we van deze driehoeken ook de middelpunten van de aangeschreven cirkels, dan komt er een „rechthoekig traliwerk” van 4 bij 4 „stangen”, waarvan de 16 middelpunten de snijpunten zijn; voor een schets zie men hieronder; de figuur heeft nog meer bijzonderheden, die in figuur 4 niet verwerkt zijn.

Prof. Bottema wijst mij erop, dat deze stelling voorkomt bij Johnson p. 255 (zie §8).

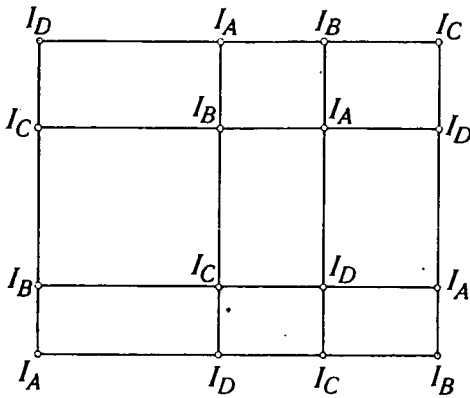


fig. 4.

§8. Tenslotte een stelling, die ik aantrof bij R. A. Johnson (*Advanced Euclidean Geometry*, p. 210 Dover Publications)

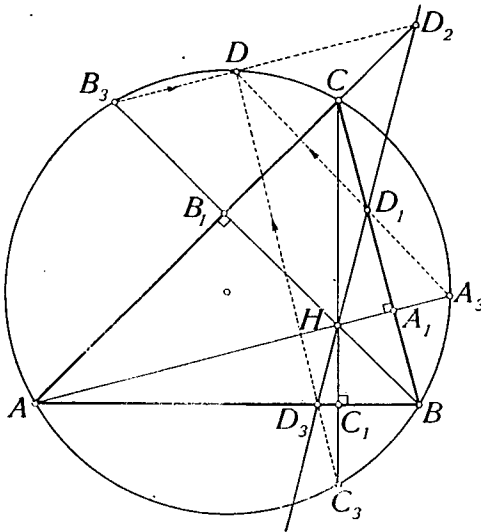


fig. 5.

D ligt op de omschreven cirkel van $\triangle ABC$; de hoogtelijnen snijden die cirkel voor de tweede maal in A_3, B_3, C_3 ; DA_3 snijdt BC in D_1 , DB_3 snijdt CA in D_2 en DC_3 snijdt AB in D_3 . Dan zijn — zie figuur 5 — D_1, D_2, D_3 en H collineair

$$AB \dots\dots\dots X + \alpha\beta Y = \alpha + \beta \quad (7)$$

$$CH \dots\dots\dots X - \alpha\beta Y = -\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \gamma \quad (8)$$

Het snijpunt van CH met de omschreven cirkel vindt men dan uit (8) en $XY = 1$:

$$C_3 \left[-\frac{\alpha\beta}{\gamma}, -\frac{\gamma}{\alpha\beta} \right].$$

Laat D gegeven zijn als $D(\delta, 1/\delta)$. Dan heeft C_3D — vergelijk (7) — de vergelijking:

$$C_3D \dots \dots \dots \boxed{X - \frac{\alpha\beta\delta}{\gamma} Y = \delta - \frac{\alpha\beta}{\gamma}} \quad (9)$$

Uit (7) en (9) volgen de coördinaten van D_3 :

$$\boxed{D_3 \left[\frac{\delta}{\gamma + \delta} \left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{\alpha\beta}{\delta} \right), \frac{\gamma}{\gamma + \delta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{\delta}{\alpha\beta} \right) \right]}.$$

HD_3 heeft dus de „richtingscoëfficiënt”

$$\frac{\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{\delta}{\alpha\beta} \right) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)}{\frac{\delta}{\gamma + \delta} \left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{\alpha\beta}{\delta} \right) - (\alpha + \beta + \gamma)}$$

Na enige herleiding volgt hiervoor de waarde $\delta/\alpha\beta\gamma$, welke vorm symmetrisch is in α, β, γ .

HD_1, HD_2, HD_3 hebben dus dezelfde richting, waarmee het gestelde is bewezen.

Opmerking: Het zal niet moeilijk zijn in te zien, dat deze lijn ontstaat als men de *Wallace-(Simson-)lijn* van D t.o.v. $\triangle ABC$ vanuit D met 2 vermenigvuldigt. De richtingscoëfficiënt van deze Wallace-lijn blijkt overigens ook $\delta/\alpha\beta\gamma$ te zijn.

BOEKBESPREKING

Prof. Dr. G. Hoheisel, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage 1965, Walter de Gruyter & Co (Sammlung Götschen 920/920a), Berlin, DM 5.80.

Vergelijking van deze 7de druk met de 2de uit 1930, die ik nog in mijn bezit had, bracht met moeite enige gelijkkluidende zinnen te voorschijn. Hieruit blijkt wel, dat deze Götschen-uitgave niet steeds zonder meer is herdrukt, maar dat de tekst is aangepast aan nieuwere inzichten.

H. W. Lenstra

R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1964, 83/—.

Een modern handboek, dat de stof bevat, die in de regel wordt behandeld op de „strengere” colleges analyse voor het kandidaatsexamen.

Als inleiding bevat het een en ander over verzamelingen, functies, reële getallen, over de topologie van Cartesische ruimten, convergentie enz., waarna de differentiaal- en integraalrekening en de reeksen worden behandeld. De stukken, die ik bij het doorbladeren nauwkeuriger las, waren duidelijk en overzichtelijk en vooral exact. Het boek bevat vele aardige vraagstukken. Een aantal hiervan is verenigd tot 33 „projects”, waarin telkens een stukje theorie wordt opgebouwd. De didactische voordelen van dit laatste zijn voor mij een van de voornaamste attracties van dit boek.

H. W. Lenstra

Dr. D. Burger, *Galileo Galilei*, Phoenix Pocket No. 106, W. de Haan N.V., Zeist, 181 blz., prijs f 3.50.

Het zal wel duidelijk zijn, dat dit boekje feitelijk alleen de strijd behandelt tussen de opvattingen van Galilei en die van de R.K. Kerk. Een uitermate tragisch gebeuren, waarvan de lezing nu 3 eeuwen later, toch weer boeit.

Burgers

Roy Dubisch, *Introduction to abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Inc., London, 1965, 193 blz., 45/—.

Men behoeft waarachtig niet te klagen, dat er niet voldoende lectuur verschijnt, die de docent de gelegenheid geeft zich te oriënteren in de ontwikkeling van de wiskunde. Er is keuze te over. Zo nu weer dit boek van Dübisch.

„For a student with a background of four years of conventional secondary school mathematics, the material in this text should serve for approximately two-thirds of a years course in abstract algebra”.

Om niet in herhalingen te vervallen in het kort de inhoud: Verzamelingen, de ontwikkeling van het getalbegrip (Peano)integriteitsgebieden, groepen, ringen en lichamen. Tenslotte vectorruimte.

Burgers

W. L. Schaaf, *Basic Concepts of Elementary Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. London, 2de druk, 1965, 384 blz., 53/—.

Het boek is geschreven om studenten en oudere docenten kennis te laten maken met een moderne behandeling van de wiskunde. Het hoofdstuk „verzamelingen” behandelt ook afbeeldingen en operaties, het hoofdstuk „elementaire logica” ook waarheidstabellen. Klassieke en moderne (een analytische benadering) meetkunde worden na elkaar besproken. De ontwikkeling van het getalbegrip via de natuurlijke getallen vermijdt niet historische bijzonderheden te vermelden. Permutaties, combinaties en waarschijnlijkheid worden gevolgd door een hoofdstuk „meetkunst” (betrouwbaarheid, precisie, afronding). Oppervlakte, inhoud en de trigonometrie van de rechthoekige driehoek besluiten dit boek. De moderne opzet waarborgt een goede koop voor hen die zich hiermee opnieuw willen oriënteren.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

146. We schrijven alle getallen van 1 tot en met 2093 in het drietallig stelsel. In hoeveel van deze getallen komt dan minstens eenmaal het cijfer 2 voor?

(B. Kootstra)

147. Men heeft met krijstreden een rechthoekig stuk land afgetekend, waarvan de lengte gelijk is aan 2 maal de breedte. Daarbinnen op een afstand van 1 m van de zijden van de rechthoek heeft men met krijt een tweede rechthoek aangebracht. Op een willekeurig punt van elk van de vier zijden van de binnenste rechthoek heeft men een paal in de grond geslagen. De volgende dag blijken hevige regens de krijstreden uitgewist te hebben; de palen staan nog op hun plaats. Hoe reconstrueert men de beide rechthoeken? (B. Kootstra).

148. Op het O.E.E.C. Seminar in 1961 over „The mathematical knowledge required by the physicist and engineer” heeft M. Jacob (Lyon) een voordracht gehouden, waarin hij verdedigde, dat op de middelbare school een lesuur gereserveerd moet worden voor een soort wiskunde-practicum. In dit uur zouden de leerlingen onderwerpen uit de praktijk moeten uitwerken. Onder meer gaf hij het volgende voorbeeld van een onderwerp voor een dergelijke les.

Drie mannen, A, B en C, hebben bij het schieten, als ze op iemand richten, een kans om deze persoon dood te schieten van resp. 1, $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{2}$. In welke volgorde ze schieten, wordt door het lot bepaald. De gelote volgorde wordt cyclisch over-anderd gelaten, totdat twee van de drie personen dood zijn. Wordt gevraagd wie de beste overlevingskansen heeft en hoe groot zijn overlevingskansen is. (Wie aan de beurt is, kiest vrij op wie hij schieten wil.)

Probeert u het, voordat u met uw practicum begint, liever zelf eerst even.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

144. Noteer de naam, die A aan B geeft: AB .

Uit de eerlijkheid van de jongens volgt dan:

a. $AA = A$.

Uit het feit, dat de namen eventueel gepermuteerd worden, volgt:

b. $AB = AC \rightarrow B = C$.

En het verdere gecompliceerde gegeven is niets anders dan een verkapt manier van uitdrukken van de associatieve eigenschap:

c. $D(AB) = (DA)B$.

Nu zien we:

$A(AB) = (AA)B$ (volgens c)

$A(AB) = AB$ (volgens a)

$AB = B$ (volgens b).

En dus geeft elke jongen aan ieder de juiste naam.

Onlangs verscheen

VRAAGSTUKKEN OVER LINEAIRE ALGEBRA

door J. F. H. Bor (Dr. J. Ch. Boland, Dr. F. Oort en Dr. H. van Rossum)

Dankzij een jarenlange ervaring bij het onderwijs in de lineaire algebra aan de Universiteit van Amsterdam en aan een m.o.-A cursus konden de auteurs een rijk geschaakte verzameling vraagstukken bijeenbrengen. Met het samenstellen daarvan hebben zij een tweeledig doel nagestreefd. In dit werk is een zo gevarieerd mogelijk oefenmateriaal bijeengebracht, zodat het gebruikt kan worden als waardevol hulpmiddel bij het bestuderen van de lineaire algebra zoals die tegenwoordig aan de universiteiten en m.o.-A cursussen wordt onderwezen. Ook zijn er vraagstukken over analytische meetkunde opgenomen.

Verder is dit werk zeer aan te bevelen voor hen, die de stof nog eens willen herhalen b.v. met het oog op toepassingen in andere vakken. Het aantal theoretisch getinte opgaven is betrekkelijk groot.

Achterin het boek zijn de oplossingen c.q. de antwoorden opgenomen.

103 blz., ing. f 9,75

P. Noordhoff nv

Neuerscheinung

THEORETISCHE STRÖMUNGSLEHRE

EINE EINFÜHRUNG



Von Dr. rer. nat. habil. K. WIEGHARDT, o. Prof an der Universität Hamburg
Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 4. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. K. Magnus, Stuttgart, Prof. Dr. F. K. G. Odqvist, Stockholm, und Prof. Dr. E. Stiefel, Zürich herausgegeben von Prof. Dr. H. GÖRTLER, Freiburg i. Br.

226 Seiten mit 98 Bildern. DIN A 5. 1965. Ln. DM 35,80

„In den letzten Wochen habe ich Gelegenheit gefunden, mich eingehend mit dem Werk zu beschäftigen. Ich habe es nahezu vollständig durchgelesen und dabei die bei Herrn Wieghardt bekannte klare Darstellung sowohl des mathematischen als auch des physikalischen Inhaltes bestätigt gefunden.

Verglichen mit anderen Lehrbüchern zur theoretischen Strömungslehre zeichnet sich das Buch in hohem Maße durch seine überzeugende Beschreibung des nicht immer einfachen Gebietes der Strömungsmechanik aus. Die getroffene Stoffauswahl erscheint mir als sehr gelungen. Das Ziel des Buches für Mathematiker, theoretisch interessierte Physiker und Ingenieure eine Einführung in die klassischen Grundlagen der Strömungslehre zu sein, ist m. E. voll erreicht worden.

Ich werde das Werk daher in meinen im wesentlichen für Maschineningenieure bestimmten Vorlesungen zur „Strömungsmechanik“ vorrangig empfehlen. . .”

(Professor Dr. E. Truckenbrodt, München)

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT - STUTTGART

ALGEBRA

EEN GEPROGRAMMEERDE CURSUS VOOR HET VHMO

door F. Bouman, Ir. W. Geerts en Dr. D. J. Lock

De eerste twee delen van deze cursus zijn verschenen; deel 1 behandelt de natuurlijke getallen met de bewerkingen optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen; deel 2 behandelt de gehele getallen met de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en machtsverheffen. De stof is in beide delen op dezelfde wijze behandeld.

De geprogrammeerde boeken kunnen op verschillende wijze worden gebruikt, zowel voor klassikaal als voor meer individueel gericht onderwijs; het is echter wel de bedoeling dat de leerling het geheel doorwerkt.

Drs. W. J. Brandenburg zegt in het tijdschrift 'Geprogrammeerde Instructie': 'Ik ben blij met de verschijning van deze geprogrammeerde instructie. Ik heb met een proefpersoon het resultaat ervan nagegaan en heb kunnen constateren dat de p.p. zonder hulp deze instructie kan doorwerken en de toets kan maken en dat hij met goed resultaat (8) een proefwerk, dat ik nog uit mijn schoolpraktijk had liggen, kon maken.'

Deel 1. Ing. f 5,90. Deel 2. Ing. f 5,90. Binnenwerk voor ringband of voor multiband, per deel f 5,90. Deel 3 verschijnt binnenkort.

SOO-UITGAVE. Besteladres: Nijgh & van Ditmar, Badhuisweg 232, 's-Gravenhage

CONTINU EXPERIMENT

Natuurkunde-methode in werkschriften voor het vhm door Ir. H. M. Mulder e.i.

werkschrift 1 - vaste stoffen, vloeistoffen	werkschrift 5 - stromen, spanningen
werkschrift 2 - kracht, temperatuur	werkschrift 6 - licht
werkschrift 3 - warmte, fasen	werkschrift 7 - trillingen, geluid
werkschrift 4 - magnetisme, stromen	werkschrift 1 t/m 6 - f1.35 / 7 - f1.50

STEREOVISIE

Een nieuw werkschrift stereo voor vhm met 75 opgaven in beeld door Ir. H. M. Mulder e.i.

In de op schaal getekende hulpfiguren kan het rekenproces worden vastgelegd. De rechterbladzijden bieden ruimte voor het bewijs en voor de berekening. Achter-in symbolen, kwadratentafel, uitkomsten en opmerkingen. Ing. f 2.50

250 OPGAVEN

samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie door C. J. Alders, Dr. L. N. H. Bunt, A. Holwerda, Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. Joh. Wansink.

Algemeen gedeelte, bespreking van de afzonderlijke vakken, algebra, infinitesimaal-rekening, goniometrie, stereometrie (A.- theorie van de scheve projectie; B.-vraagstukken), analytische meetkunde, antwoorden. / 7e druk, ing. f 1.90

P. Noordhoff nv postbus 39 / Groningen ook via de boekhandel

Alle geadverteerde uitgaven zijn ook via de boekhandel verkrijgbaar