

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966
III — 1 NOVEMBER 1965

INHOUD	
Prof. Dr. H. Freudenthal 60 jaar	65
Engelse examens - nieuwe stijl	67
Korrel	83
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	86
Wimecos	91
Wiskundewerkgroep W.V.O.	91
Boekbespreking	93
Recreatie	95

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516;
secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Dr. J. KOKSMA, Haren;	P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos*, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de *Wiskunde-werkgroep W.V.O.* te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

PROF. DR. H. FREUDENTHAL 60 JAAR

Op 17 september 1965 is prof. dr. H. Freudenthal, die ook medewerker is van „Euclides”, 60 jaar geworden.

Een comité van oud-leerlingen onder leiding van de professoren dr. W. T. van Est te Leiden en J. J. de Iongh te Nijmegen, heeft de jubilaris een receptie aangeboden die gehouden is in het nieuwe Transitorium van de Rijksuniversiteit te Utrecht op 17 september onmiddellijk na afloop van de heroriënteringscursus voor leraren, die in de week van 13 tot 17 september in dit gebouw werd gehouden. Er was voor deze receptie een zeer grote belangstelling.

Prof. Freudenthal werd toegesproken door prof. Van Est, die de leiding van de bijeenkomst op zich had genomen, door de rector magnificus prof. mr. L. J. Hijmans van den Bergh, door dr. A. van Heemert als een der oudste oud-leerlingen, door drs. H. J. Jacobs namens de W.V.O. en door prof. dr. F. van der Blij als naaste vak-collega.

In zijn toespraak liet Jacobs uitkomen, welke verdiensten prof. Freudenthal in de na-oorlogse periode gehad heeft voor didactische activiteiten in en buiten de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O., waarvan hij in 1950 het voorzitterschap op zich had genomen. Hij herinnerde aan de betekenis van de sinds 1946 bijna jaarlijks gehouden weekend-conferenties onder Freudenthal's leiding, aan zijn strijd tegen de beschrijvende meetkunde en tegen de mechanica op de hogereburgerschool, aan zijn aandeel in de tot stand koming van „het wiskunde-programma voor het v.h.m.o.”, ontwerp van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O., en aan de betekenis van dit ontwerp voor de later volgende herziening van het wiskunde-programma op gymnasium en h.b.s.

Jacobs wees er op, hoezeer Freudenthal's belangstelling voor didactische problemen gestimuleerd werd door de wezenlijke behoeften van zijn schoolgaande kinderen. Nu de periode van didactische observatie van eigen kinderen voorbij is, drogen ook de bijdragen die Freudenthal aan de Wiskunde-werkgroep placht te geven, op. Namens de Wiskunde-werkgroep sprak Jacobs de wens uit, dat deze didactische bijdragen weer ruimer zullen gaan vloeien zodra straks kleinkinderen in plaats van eigen kinderen tot dit werk zullen stimuleren.

Hieraan kunnen we toevoegen, dat Freudenthal's belangstelling

voor didactische problemen zich geenszins tot de W.V.O.-kring heeft beperkt. Sinds 1955 is prof. Freudenthal voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en opgenomen in het Comité exécutif van de C.I.E.M. (commission internationale de l'enseignement mathématique).

Onder zijn leiding zijn tal van rapporten verschenen die op de internationale mathematische congressen te Edinburg (1958) en te Stockholm (1962) zijn ingediend. Aan alle scholen voor v.h.m.o. zijn deze rapporten bij hun verschijning toegezonden, waardoor ze voor alle wiskunde-leraren in Nederland bereikbaar blijven. Enige van deze rapporten zijn tot stand gekomen onder redactie van Freudenthal, die ze ook op de congressen te Edinburg en Stockholm indiende en verdedigde.

In het werk van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (Commissie Leeman) neemt prof. Freudenthal een werkzaam aandeel. In diverse syllabi voor de heroriënteringscursussen geschreven herkennen we mede zijn hand.

Wie een poging waagt een lijst op te maken van het didactisch oeuvre van Freudenthal zal onder de indruk komen van het grote aantal publikaties dat hij in de loop van de jaren voor binnen- en buitenlandse tijdschriften heeft geschreven. Didactisch werk, naast belangrijk wetenschappelijk werk op het gebied van de wiskunde zelf.

Wij wensen prof. Freudenthal nog zeer vele actieve jaren toe op alle gebieden waarop hij tot dusver werkzaam is geweest.

Namens de redactie,

Joh. H. Wansink

ENGELSE EXAMENS — NIEUWE STIJL

Het leek ons gewenst aan het artikel van drs. Snoép¹⁾ met Engelse eind-examenopgaven van traditionele structuur enige opgaven toe te voegen van meer moderne stijl. Dit is mogelijk gemaakt door het werk van het School Mathematics Project onder leiding van Prof. B. Thwaites te Southampton. Van Prof. Thwaites en van Mr. A. E. E. B. McKenzie, secretaris van de Oxford and Cambridge Examinations Board ontvingen we toestemming tot het opnemen in Euclides van enige stellen opgaven. Die voor Advanced Level zijn overgenomen uit het Director's Report 1963/64. Wij zijn voor de ontvangen toestemming dankbaar en we zijn ervan overtuigd, dat vele Nederlandse docenten met belangstelling kennis zullen nemen van de Engelse opgaven om zich te kunnen oriënteren ten aanzien van een richting waarin eindexamens zich in een nabije toekomst zouden kunnen ontwikkelen.

De opgaven voor Ordinary Level bestaan uit twee series, Elementary Mathematics I and Elementary Mathematics II, voor elk waarvan $2\frac{1}{2}$ uur werd uitgetrokken. Deze examens hadden plaats op 11 en 12 juni 1964. Paper I bevat 12 vragen, waarop alleen antwoorden behoeften te worden gegeven (Section A), 8 vragen in multiple-choice vorm, waarbij de kandidaten de keuze hadden uit vier mogelijkheden (Section B), en nog weer 10 vragen, waarbij alleen antwoord gegeven diende te worden (Section C). Bij de beoordeling werd aan B en C een hoger gewicht toegekend dan aan A. Paper II bevat 10 vragen waaruit de kandidaten er 6 konden kiezen; hierop werden oplossingen in normale vorm ingewacht. De opgaven Advanced Level zijn nog geen authentieke examenopgaven, maar een model voor te stellen opgaven. De kandidaten dienen 12 van de 20 A-opgaven en 4 van de 5 B-opgaven te maken en krijgen de raad van de beschikbare 3 uren hoogstens de helft van de tijd voor afdeling A te besteden.

Tot slot is opgenomen een stel werk in de geest van toegepaste wiskunde onder de titel „Special paper” als onderdeel van het examen voor Advanced Level. De kandidaten worden geacht 6 van de 8 opgaven in 3 uren te kunnen maken.

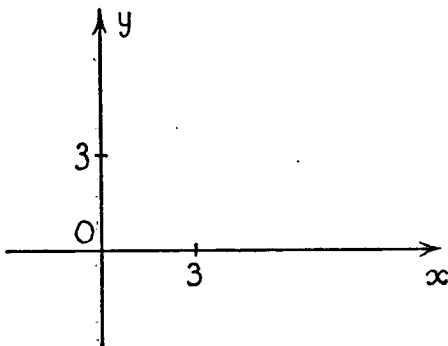
Redactie Euclides.

¹⁾ Zie Euclides 41, p. 20—27.

ORDINARY LEVEL — ELEMENTARY MATHEMATICS I

SECTION A

1. If $44^{\circ} - 41^{\circ} = 3p$, state the value of p .
2. If $n(X \cup Y) = 25$, $n(X \cap Y) = 5$, and $n(Y) = 14$, draw a Venn diagram to illustrate these data, and find $n(X)$.
3. Calculate x and y if $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. State the probability that a throw of a die will result in a score of 3 or more.
5. When p and q are positive numbers, $p * q$ denotes the positive number $\sqrt{(pq)}$. Find the value of $24 * (4 * 9)$.
6. The numbers of the principal farm animals in Great Britain are (to a sufficient degree of accuracy): cattle 12 million, sheep 30 million and pigs 60 million. A Pie Chart is to be drawn to illustrate the proportions of the three kinds of animals. State the angle of the sector which represents pigs.
7. State the latitude and longitude of the place which is at the opposite end of a diameter of the earth from Cape Kennedy, the position of which is: Lat 28° N., Long. $80^{\circ} 40'$ W.



8. Show in the diagram, by shading, the set $A \cap B$, where $A = \{(x, y): x > 3\}$ and $B = \{(x, y): x > y\}$.
9. If P means 'reflect in the y -axis'; and Q means 'translate +3 units parallel to the x -axis'; and if PQ means 'first Q , then P ',
 - (i) find $PQ(2, 4)$;
 - (ii) find (x, y) if $QP(x, y) = (4, 3)$.
10. Use a slide rule to find the value of $\frac{2.1 \times \sqrt{14.7}}{0.854}$.
11. Multiply 3.2×10^6 by 4×10^{-3} giving the answer in the same, standard, form.
12. State the ratio of the length of the shortest side to the length of the hypotenuse of a right-angled triangle having one angle of 32° .
If the length of the shortest side is 3 in., find the length of the hypotenuse.

SECTION B.

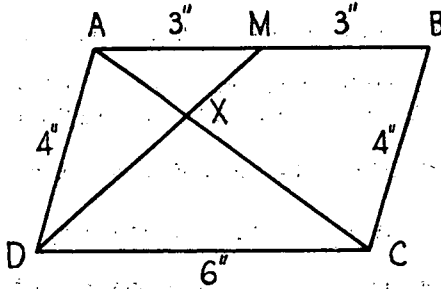
13. (In this question x belongs to the set of real numbers.)

(i) The statement $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ is true for (a) all values of x ; (b) only two values of x ; (c) only one value of x ; (d) no value of x .

(ii) The statement $(x + 3)^2 = x^2 + 4x + 6$ is true for (a) all values of x ; (b) only two values of x ; (c) only one value of x ; (d) no value of x .

14. The shortest route from A (Lat. 70° N., Long. 10° W.) to B (Lat. 70° N., Long. 175° E.) is (a) due east; (b) due west; (c) directly over the north pole; (d) none of these.

15.



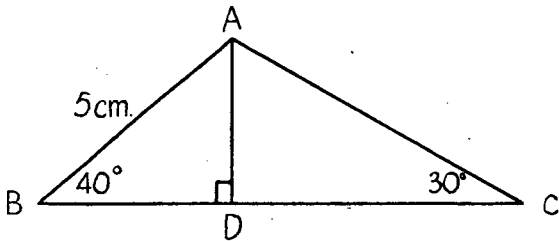
(i) The fraction $\frac{\text{Area of } \triangle AMX}{\text{Area of } \triangle CDX}$

is equal to (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{3}$; (c) $\frac{1}{4}$; (d) none of these.

(ii) The fraction $\frac{\text{Area of } \triangle CDX}{\text{Area of parallelogram } ABCD}$

is equal to (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) $\frac{1}{5}$; (d) none of these.

16.



The length DC , in cm., is

(a) $5 \sin 40^\circ \tan 30^\circ$;

(b) $5 \sin 40^\circ \tan 60^\circ$;

(c) $5 \cos 40^\circ / \cos 60^\circ$;

(d) $5 \cos 40^\circ \tan 60^\circ$.

17. In a certain district 70% of the families own a TV set, and 30% of the families own cars. Which of the following statements are *not necessarily* true, but *could be* true?

- (a) All families have either a TV set or a car.
 (b) Most car owners have a TV set.
 (c) Fewer than half of the owners of TV sets have cars.
 (d) If the number of car owners increased by 50% of the present number there would be more car owners than TV owners.

18. A triangle ABC in which no two sides are equal is given a clockwise turn equal to the angle A about the vertex B . Which of the following statements are true and which false?

- (a) The angle between the old and new directions of AC is A .
 (b) The angle between the old and new directions of BC is B .
 (c) B is the mediator (perpendicular bisector) of AA' , where A' is the new position of A .
 (d) No side of the new triangle is parallel to a side of the original triangle.

19. To ensure that a number is understood to be in decimal notation we write, for example, 24_{10} . Similarly 12_5 is to be read as meaning that the number is in the scale of 5.

If $p = 12_5$, $q = 24_5$ and $r = 24_{10}$, which of the following statements are true and which false?

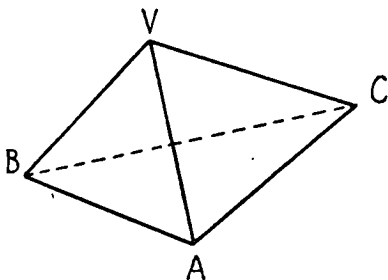
- (a) $q < r$; (b) $q = 2p$; (c) $p + q = 42_5$; (d) $5q = 240_5$.

20. (In this question x belongs to the set of real numbers.) Which of the following statements are true and which false?

- (a) $(x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ or $x = 2$.
 (b) $x = 3 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$.
 (c) $x(x - 3) < 0 \Rightarrow 3 > x > 0$.
 (d) $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

SECTION C.

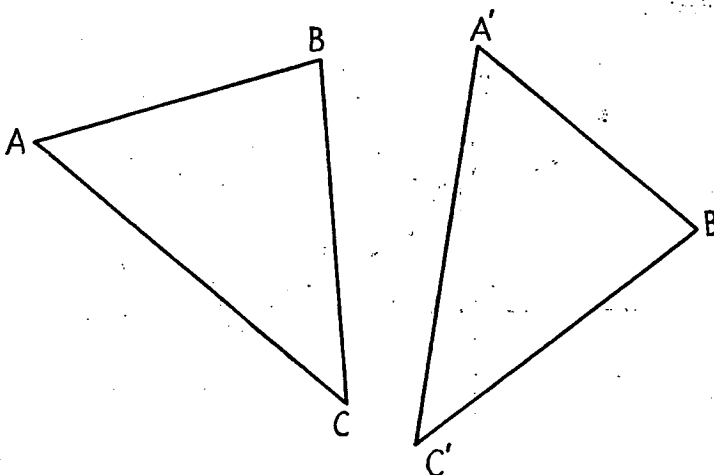
21.



In the pyramid shown, the face VAB is equilateral with sides of 6 units; $CA = CB = 10$ units; $VC = 8$ units.

- (i) State which angles formed by adjacent edges are right angles.
 (ii) State the position of any plane of symmetry of the pyramid.
 (iii) Adding extra lines to the diagram if necessary, mark angles which are:
 (a) the angle between the planes VAB , CAB (mark this x);
 (b) the angle between the planes VBC , VAC (mark this y).

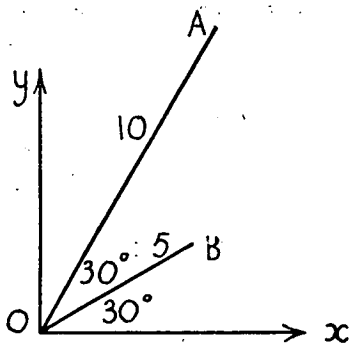
22. Triangle $A'B'C'$ is the image of triangle ABC under a rotation. Find, by drawing, the centre of this rotation. Mark this centre R on the diagram.



23. (i) State the product of $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

- (ii) Find x and y if $(x, y) \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = (20, 6)$.

24.

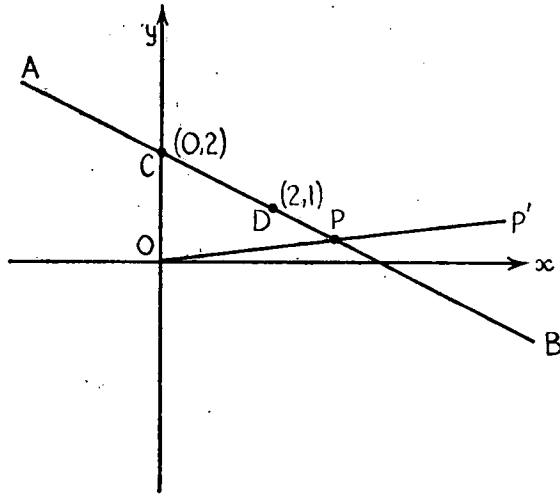


- (i) State which of A or B has the greater x coordinate. (The diagram is not drawn to scale).

- (ii) Calculate the difference between their y coordinates.

25. The point P moves on the line AB . A transformation maps P on to the point

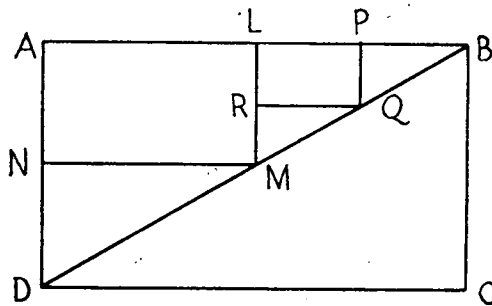
P' such that P is the mid-point of OP' . Draw on the diagram as much as you can of the locus of P' . Mark the transforms C' , D' of C and D and state their coordinates.



26. A tray is carefully measured with a ruler and the dimensions recorded to the nearest tenth of an inch as: length 24.3 in., width 12.3 in.

- (i) State the possible limits of the true length.
- (ii) State whether it is true or false that the perimeter could be as little as 72.9 in.
- (iii) If 1 in. = 2.54 cm. calculate (without using a slide rule) the width in cm. State how you decide how many decimal places to retain in your answer.

27.

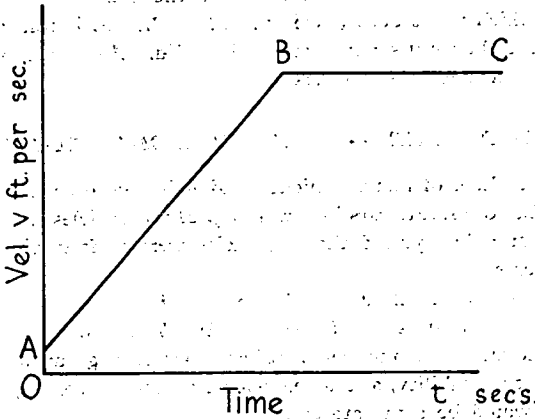


$ABCD$, $ALMN$ and $LPQR$ are rectangles. M is the mid-point of BD ; and Q is the mid-point of BM , the rectangles being consequently similar.

(i) State the centre of the enlargement under which $ABCD$ is the image of $ALMN$.

(ii) Give a reason why DR and CQ when produced meet on AB .

28.



For the first 6 sec. of its motion the velocity of a body is given by the formula

$$v = 2 + 3t$$

Subsequently the velocity remains constant, the velocity-time graph being the line ABC.

Find

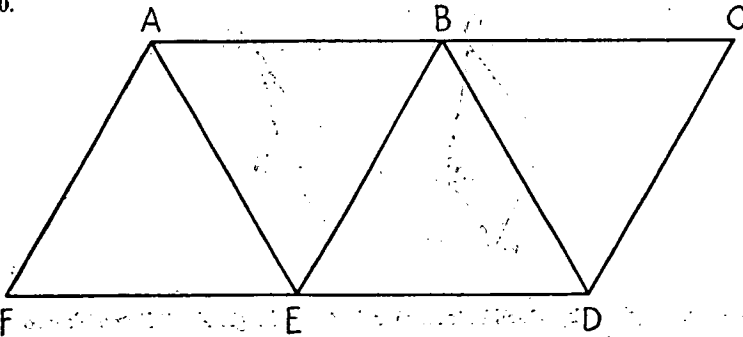
- (i) the velocity corresponding to the point B;
- (ii) the average velocity for the first 2 sec.;
- (iii) the acceleration during the first 2 sec.

29. Each of the following arguments is at some stage incorrect. In each case cross out the first incorrect step, and write a correct form of that step.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad x^2 &= a^2 - a^2 w^2, \\ a^2 w^2 &= a^2 - x^2, \\ aw &= a - x, \\ w &= \frac{a - x}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad c &= ax + b, \\ \frac{c}{a} &= x + b, \\ x &= \frac{c}{a} - b. \end{aligned}$$

30.



The triangles in the figure are all equilateral, and $AB = 2$ in.

Let X denote the set of points which lie inside the triangle ABC , and let $Y = \{P: PB < PC\}$, $Z = \{P: PAC < PAB\}$. Indicate by horizontal shading the set $X \cap Y$ and by vertical shading the set $X \cap Z$.

Explain clearly why $X \cap Y \cap Z = \emptyset$.

4. A seedsman has stocks of two chemicals A and B . He can mix these in the ratio 3 parts of A to 1 part of B to produce a general fertiliser; or in the ratio 1 part of A to 3 parts of B to produce a tomato fertiliser. He sells these fertilisers in 1 lb. bags, making 3d. per lb. profit on the former, and 6d. per lb. profit on the latter.

Given that he makes x lb. of general fertiliser and y lb. of tomato fertiliser, and that he has only 60 lb. of A in stock, write down an inequality satisfied by x and y .

Write down a second inequality, given that the stock of B is 30 lb. and use a graphical method to find the values of x and y to maximise his profit. Hence find his maximum profit.

5. (i) The following figures are taken from the dial of a radio set:

Wave length (w metres) 200 300 400 500 600

Frequency (f kilocycles) 1500 1000 750 600 500

State how f varies with w and write down a formula connecting them.

(ii) if $x \propto y^3$ and the value of y is increased from 3 to 4, express this as a percentage increase and calculate the percentage change in x . Name two quantities one of which varies as the cube of the other.

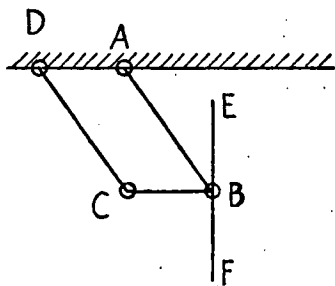
(iii) if x belong to the set of *integers* sketch $\{x, y: y = 1 + 2x^2\}$ and $\{x, y: y = 3x^2\}$ for $-1 \leq x \leq 2$. If x now belongs to the set of *real numbers* state, with a reason, whether the curves given by the same relations will be congruent in the range $0 \leq x \leq 2$.

6. The figure represents the windscreen wiper of a diesel locomotive. The equal metal rods AB , DC rotate about pivots at A , D which are fixed to the horizontal upper edge of the windscreen. The rubber wiper EF is fixed rigidly at right angles to the rod BC , which is hinged to BA , CD at B , C respectively. $BC = AD$ and $EB = BF$. A motor at A drives the rod AB so that the whole assembly swings backwards and forwards in the vertical plane $ABCD$.

(a) Explain why the wiper EF remains vertical as AB rotates about A .

(b) If AB makes 35° with the vertical at each end of its swing and $AD = 6$ in., $AB = 20$ in., calculate the horizontal distance between the extreme positions of B .

(c) State the locus of B and make a sketch of the swept part of the windscreen. Show that it is equal in area to a certain rectangle and if $EF = 22$ in., calculate this area. State also which part of the numerical data is superfluous.



7. The position vector of a point whose coordinates are (x, y) is written as the column matrix $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) If $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

show on a diagram the points (x, y) and (x', y') and describe the geometrical transformation of which A is the matrix.

(b) In a new diagram show the position of a point (x, y) in the first quadrant and the end-point (X, Y) of the vector obtained by rotating the position vector of (x, y) anticlockwise through a quarter turn. Write down the equations connecting (x, y) and (X, Y) and hence find the matrix, B , of this transformation.

(c) Calculate the matrix products AB and BA .

(d) Plot the points P and Q into which $(5, 3)$ goes under the transformations given by AB and BA respectively, and find the equation of the line in which P is the reflection of Q .

8. The sets A, B, C are defined as follows:

$$A = \{2, 3, 5\}; B = \{3, 5, 7\}; C = \{4, 5, 7, 11\}.$$

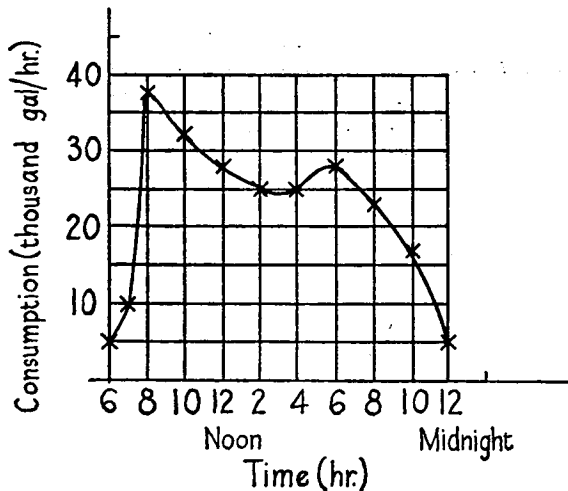
(a) Write down the set $A \cap B$.

(b) If $\pi(A)$ means the product of the elements of the set A , write down $\pi(A)$, $\pi(B)$ and $\pi(A \cap B)$, and state whether it is true or false that $\pi(A \cap B)$ is the highest factor common to $\pi(A)$ and $\pi(B)$.

(c) Find out whether it is true that $\pi(A \cap C)$ is the highest factor common to $\pi(A)$ and $\pi(C)$, showing your working.

(d) State conditions on the elements of two sets P and Q which ensure that $\pi(P \cap Q)$ is the highest factor common to $\pi(P)$ and $\pi(Q)$.

9. The graph shows the rate of consumption of water measured at a reservoir during an 18 hour period from 6 a.m. to midnight.



(a) Estimate the average rate of consumption of water between 8 a.m. and 2 p.m.

(b) Estimate the total amount of water used during these 6 hours.

(c) The reservoir is being replenished at a steady rate of 25,000 gal. per hour. State between what times the level is rising.

(d) Suggest reasons for the general shape of this graph. Do not write more than five lines.

(e) By using the trapezoidal rule, or otherwise, calculate the total consumption during the 18 hours.

10. A small mechanical tortoise is so made that it travels in a straight line until it meets a barrier, when it turns clockwise through 135° . It is started from a point A and a form of barrier has been devised so that, if the direction of the initial path lies within a certain sector, it will arrive at a fixed point B after exactly one turn. Sketch two or three possible paths from A to B .

(a) State the shape of the barrier.

(b) If $AB = d$, calculate the maximum distance that the tortoise can travel from A before turning towards B .

(c) Find limits to the angle θ that the initial path can make with AB , and hence shade in the sector mentioned.

(d) Write down the probability that the tortoise will arrive at B if sent off at random from A with the barrier in place.

ADVANCED LEVEL

S.M.P. MATHEMATICS—SPECIMEN PAPER

SECTION A

A1. Find $S = \{x: x^2 - 13x - 7.2 < 0\}$ and illustrate your answer by a sketch.

A2. Express $\frac{x^2 + 5x - 2}{x^2 + 4x - 5}$ in partial fractions.

State briefly two circumstances in which this process might be useful.

A3. State with reasons, which of the following sets form a group:

(i) $\{1, -1, -j, j\}$ under multiplication, where $j^2 = -1$,

(ii) reflections of an equilateral triangle in its axes of symmetry under the operation of combination of transformations.

A4. Premultiply $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ by $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

Solve the simultaneous equations

$$2x + y + z = 1,$$

$$x - 2y - 2z = -1,$$

$$x + 3y + 2z = 1.$$

A5. Find the equation of the reflection of the line $7x + y - 4 = 0$ in the line $x + y = 0$.

A6. Sketch the graph of $y = \sin x$ in $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Using the same axes, sketch the graphs of $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ and $y = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$.

A7. If f and g are the functions $f: x \rightarrow x^2$, $g: x \rightarrow x - 3$, what is the image of the number 5 under the composite mappings fg , gf , ff ?

A8. Find the mean value of x^3 in $0 \leq x \leq 2$.

A9. Describe the behaviour of each of the following expressions as $n \rightarrow \infty$:

(i) $\frac{n}{n+3}$; (ii) $\frac{(-1)^n}{n+3}$; (iii) $3n - n^3$.

A10. Differentiate:

(i) e^{-x^2} with respect to x ;

(ii) $a \frac{da}{db}$ with respect to b ;

(iii) $\log(1 + u^2)$ with respect to z , where u is a differentiable function of z .

A11. Evaluate

(i) $\int_{-1}^1 (1 + x^2)x^3 dx$;

(ii) $\int_1^e x \log x dx$.

A12. The position vector of a point in space whose cartesian co-ordinates are

(x, y, z) is the matrix $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(i) Describe geometrically the effect of premultiplying by the transformation

matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) What transformation matrix maps any point of a solid onto the corresponding point of the solid's projection on the plane $z = 0$?

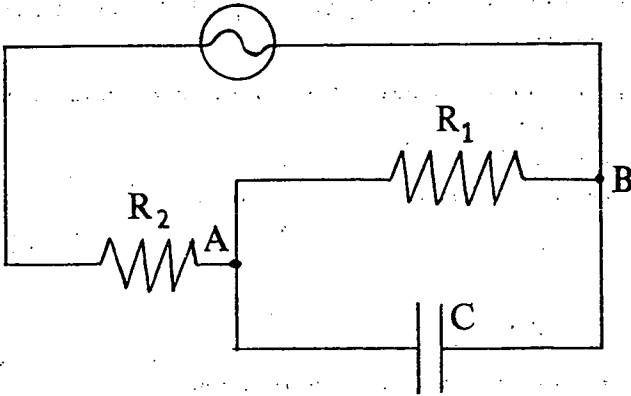
A13. On an Argand diagram, sketch the set of points given by $|z - 4| = 3$.

A14. Solve the differential equation $x^2 \frac{dy}{dx} = (y + 3)^2$ given that $y = 0$ when $x = 1$.

A15. £ 5,000 is invested at 4% p.a. compound interest. Construct a flow diagram for computing the amount after 30 years.

A16. A certain make of car tyre has a mean life of 30,000 miles with a standard deviation of 5,000 miles. Estimate the probability of a tyre failing after going more than 26,000 miles but less than 34,000 miles.

A17.



In this circuit, the charge Q on the capacitor is a function of time t . Find in terms of Q :

- (i) the potential difference between the points A and B ;
- (ii) the current in each part of the circuit.

A18. A cubic crystal is suspended in a saturated solution of sodium chloride, and its volume is growing at a rate proportional to its surface area. Find the differential equation which gives the rate-of-change of the length of the side of the cube.

A19. The position of an electron is given by the position vector

$$\mathbf{r} = (t^2 - 7)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

referred to rectangular axes. At what time is the electron moving parallel to the vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$?

A20. A gun weighing 3 tons fires a 25-lb. shell with a muzzle velocity of 2,000 ft. per sec. What other information would you require to calculate the recoil velocity of the gun?

SECTION B.

B1. Which of the three defining properties of an equivalence relation are satisfied by the following relations between members A and B of the set S ?

- (i) $S = \{\text{boys in a school}\}$; A is in the same form as B ;
- (ii) $S = \{\text{integers}\}$; $A + B$ is even;
- (iii) $S = \{\text{lines in a plane}\}$; A is perpendicular to B .

Where the relation is an equivalence relation, describe the equivalence classes which are defined.

B2. It is desired to find a root of the cubic equation $x^3 + 3x - 7 = 0$. A sequence x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, is defined by

$$x_1 = 1, \text{ and}$$

$$x_{n+1} = (7 + 7x_n - x_n^3)/10.$$

Assuming the sequence has a limit, prove that the limit is a root of the cubic equation, and calculate it to three significant figures.

If N is the least value of n for which $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$, construct a flow diagram for computing x_N .

B3. An approach to the solution of the second-order differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

is to introduce a subsidiary function $z(x)$ such that

$$\frac{dy}{dx} = ay - bz,$$

$$\frac{dz}{dx} = by + az,$$

where a and b are positive constants to be chosen.

Determine a and b by elimination of z .

Show that, with these values of a and b , $z(x)$ also satisfies the second-order equation.

B4. The linear function λx is used to approximate to a function $f(x)$ over the interval (a, b) . Explain why the value of

$$\int_a^b [f(x) - \lambda x]^2 dx$$

gives an indication of the closeness of the approximation. Find the value of λ which, according to this integral criterion, gives the closest approximation to the function $f(x) = 2x - x^2$ over $(0, 1)$.

B5. Find two points A and B common to the two planes

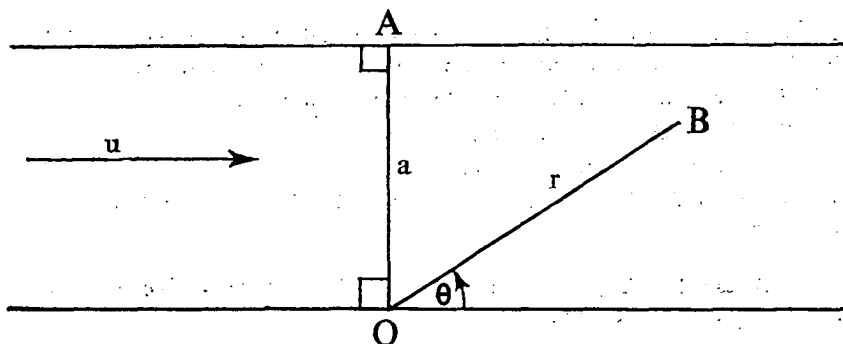
$$3x + 2y + z = 4,$$

$$x - y - 2z = 1.$$

Prove that the plane $3x - 7y + 5z = k$ is normal to the line AB .

Find the plane which passes through the point $(1, 1, 1)$ and is perpendicular to the two given planes, and find the distance of this plane from the origin.

B6.



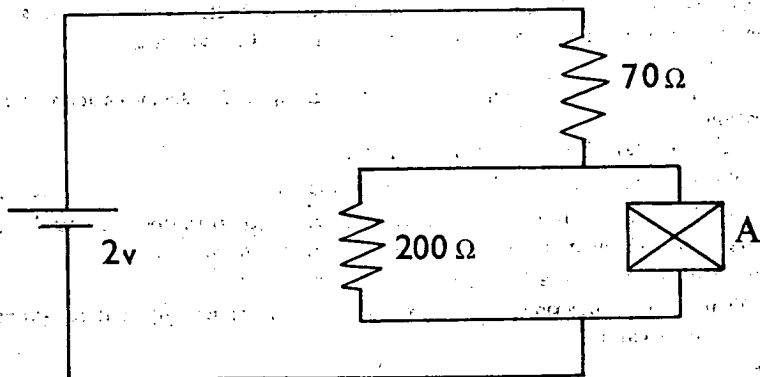
The figure represents a river of width a flowing with speed u , and a ferryboat B , whose speed in still water is ku , which leaves A and steers constantly towards the point O immediately opposite A .

Write down the velocity components of the ferryboat B parallel and perpendicular to OB , and hence show that

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = k \operatorname{cosec} \theta - \cot \theta.$$

Verify that $r \sin \theta = C (\tan \frac{1}{2} \theta)^k$ satisfies this differential equation and determine the constant C for the path of the ferryboat.

B7.



In this circuit, the appliance A is a pure resistance; find the value which this resistance should have if the appliance is to absorb the maximum power. [The internal resistance of the battery may be neglected].

B8. (i) If the chance of a success in a single trial is p , and n independent trials occur, find the probability that there will be r successes.

(ii) A plant has two genes, each of which can be either a gene X or a gene Y . An offspring plant receives one gene from each of its two parents. A sample of 25 offspring plants having random parentage from a given population of parent plants contains 4 plants with two genes Y .

Estimate the ratio of the frequency of gene X to that of gene Y in the parent population.

Estimate also the number of offspring plants in the sample with two genes X .

ADVANCED LEVEL

S.M.P. MATHEMATICS—SPECIMEN SPECIAL PAPER

1. Sketch, for $|x| \leq 4$, the graph of the function $f(x)$, defined by

(a) $f(x+2) = f(x)$, all x ;

(b) $f(-x) = -f(x)$, $|x| < 1$;

(c) $f(x) = 1+x$, $0 < x < 1$;

(d) $f(0) = f(1) = 0$.

At which points is this function

(i) not continuous;

(ii) not differentiable?

Define analytically, and sketch, a function which satisfies conditions (a) and (b), which is continuous at all points but which is not differentiable at $x = \frac{1}{2}$.

2. The sequence $y_1, y_2, y_3, \dots$ is defined by

$$\begin{aligned} y_1 &= x, \\ y_n &= x^{y_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

where $x > 0$.

For what values of x is $y_n > y_{n-1}$ for all n ?

If $y_n \rightarrow y$ as $n \rightarrow \infty$, what equation is satisfied by y ?

Verify that if $x = \sqrt{2}$, the equation is satisfied by both $y = 2$ and $y = 4$, and suggest which of these two values is the limit of the sequence.

3. $G = \{1, -1, j, -j\}$, where $j^2 = -1$, is a group under the operation of multiplication.

$S = \{1, -1\}$ and $T = \{j, -j\}$ are subsets.

(a) Which of the sets S and T is a sub-group of G ?

(b) Given two sets of numbers A and B , we define $A @ B$ as the set containing the products of each member of A with each member of B .

Show that $\{S, T\}$ is a group under the operation $@$.

(c) What is the connection between the group $\{S, T\}$ under $@$, and the group S under multiplication?

4. A racing car of total mass 2600 lb. develops a constant 247 h.p. in top gear above 97 m.p.h. It accelerates from 110 m.p.h. to 130 m.p.h. in 4.1 sec. It is thought that the resistance is directly proportional to some power of the speed. Estimate this power.

5. A solid S is given by $y^2 + z^2 \leq x^n$, $0 \leq x \leq 1$, $n \geq 0$. A circular cylinder C in $0 \leq x \leq 1$, whose axis is $y = z = 0$, has the same volume as S . The surfaces of C and S intersect in the plane $x = h$. Make a sketch of C and S . Express h in terms of n , and plot a graph of h against n .

6. A curve is given parametrically by the cartesian co-ordinates

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3 \cos t + \cos 2t, \\ y &= -2t + 3 \sin t - \sin 2t. \end{aligned}$$

Sketch the arc $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$, and from the sketch make a rough estimate of the length of this arc.

It can be shown that this arc-length is given exactly by the expression

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Calculate this value and check it against your previous estimate.

7. The complex numbers $z = x + jy$ and $Z = X + jY$ are connected by the equation $Z = z^2$. Find the curves in the Z -plane which correspond to the two lines $x = h$ and $y = k$, and illustrate your answers by sketching Argand diagrams for the z -plane and the Z -plane.

Verify that the two curves in the Z -plane cut at right-angles and calculate their point of intersection. By considering the elemental rectangle formed by the four

lines, $x = h \pm \delta h$ and $y = k \pm \delta k$ and the corresponding area in the Z -plane, suggest a formula which would give the ratio of corresponding (small) areas in the two planes.

8. Find the probability that, in repeatedly throwing a single die, exactly r throws of less than 6 will occur before the second occurrence of a six. What is the generating function for these probabilities? What is the expected number of non-sixes before the second six? What is the variance of this number?

9. Tank A overflows into tank B , and initially they are full of yellow and red paint respectively. Red paint is then poured into the tank A at a steady rate which would fill the tank in T minutes, and after $2T$ minutes the mixed paints in the two tanks are of the same colour. Make an estimate of the ratio of the volumes of the tanks.

10. An algorithm involving only positive integers is defined by

$$a_{n-1} = p_{n-1}a_n + a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

where $a_{i+1} < a_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$,

and $a_{N+1} = 0$.

Prove that a_N is the H.C.F. of a_0 and a_1 .

Discuss briefly the relative merits of this algorithm and the method based on decomposition into prime factors.

KORREL CXXX

(wat is er contradictoer?)

Een bekende paradox is die van de gevangene, die door de directeur van de gevangenis aangezegd krijgt, dat hij opgehangen zal worden¹⁾. Het is niet mijn bedoeling deze paradox weer op te raken. Omdat ik gemerkt heb, dat de achtergrond ervan moeilijk te doorzien is, wil ik hier nog eens een analyse geven van een tweetal gelijksoortige, maar eenvoudiger gevallen.

1. A ontmoet zijn vriend B. B zegt tegen A: ik kom morgen-middag bij je. Ik kom om drie uur of om vier uur. Ik kom onverwacht.

A redeneert als volgt. Als B er om drie uur niet is, komt hij om vier uur. Ik weet dat dan en dus kan hij niet meer onverwacht komen. Dus komt hij niet om vier uur. En dus komt hij om drie uur. Maar dan komt hij niet onverwacht. En dus heeft B iets onzinnigs (een stel contradictoire uitspraken) geponeerd.

B komt de volgende dag om drie uur (b.v.). Hij zegt zich aan de afspraak gehouden te hebben. Immers hij is om drie uur gekomen en onverwacht. Want inderdaad had A er niet op gerekend.

¹⁾ Euclides 34 (1958–59), p. 103; Vijfentachtig wiskundige puzzels, nr. 81.

De moeilijkheid is hier: hoe is het mogelijk, dat een aantal contradictore beweringen in een bepaalde situatie realiseerbaar zijn?

Hoe het ook zij, het logische gevolg van een en ander is, dat A en B behoorlijk ruzie krijgen. B loopt woedend weg, keert zich bij de deur om en zegt:

2. En morgen kom ik weer om drie uur onverwacht bij je. Tot overmaat van ramp staat inderdaad de volgende dag weer om drie uur B op de stoep bij A. En weer moet A toegeven, dat B woord gehouden had, want hij had er niet op gerekend, dat B komen zou.

Iedereen voelt intuïtief aan, dat ergens een contradictie schuilt. Maar waar?

a. Niet contradictoor is:

B komt om drie uur onverwacht bij A.

b. Evenmin is contradictoor:

B zegt tegen C: morgen kom ik om drie uur onverwacht bij A, B komt om drie uur onverwacht bij A op de bedoelde dag.

c. Schuilt er misschien een contradictie in het volgende:

B zegt tegen A: morgen om drie uur kom ik onverwacht bij je,

B komt de volgende dag om drie bij A en onverwacht (d.w.z. A verwacht hem niet)?

Blijkbaar is ook dit niet contradictoor, want deze situatie heeft zich voorgedaan. Eigenlijk is het evident, dat hier geen contradictie aanwezig is, want de tweede uitspraak vooronderstelt in de term „onverwacht” iets aangaande de geestesgesteldheid van A en juist over deze geestesgesteldheid is in de twee uitspraken niets gegeven. Wil er een contradictie ontstaan, dan zal iets omtrent deze geestesgesteldheid gegeven moeten worden. Bezien we nu de situatie, die zich voorgedaan heeft, dan vinden we:

d. B zegt tegen A: morgen om drie uur kom ik onverwacht bij je, A gelooft B niet,

B komt de volgende dag om drie uur onverwacht bij A.

En hierin schuilt nog steeds geen strijdigheid.

e. Ga nu uit van:

B zegt tegen A: morgen om drie uur kom ik onverwacht bij je,

A gelooft B wel (d.w.z. A gaat er van uit, dat B meent, wat hij zegt).

In dat geval kan een contradictie ontstaan. Het is nu mogelijk, dat A denkt, dat B inderdaad zal trachten om drie uur onverwacht te komen. Hij rekent dan op de komst van B. En daardoor kan B niet meer onverwacht komen.

Merkwaardig is, dat hetgeen A zegt alleen gecombineerd met het feit, dat B er geloof aan hecht tot een contradictie leidt. Dit heeft

merkwaardige consequenties. In een contradictoor systeem is alles afleidbaar. En daardoor kan A uit hetgeen B gezegd heeft de meest verschillende conclusies trekken, al naar hij gaat redeneren. Van de aard van de redenering zal dan nog afhangen, hoe de uitslag van de totale situatie zal zijn. Om dit duidelijk te maken gaan we liever terug naar het eerste voorbeeld.

We gaan ervan uit, dat B door A gelóofd wordt. Als nu A concludeert, dat B niet om uur vier kan komen en dus om drie uur komt en B komt inderdaad om drie uur, dan heeft hij pech gehad. Maar als A concludeert, dat B niet om vier uur en ook niet om drie uur kan komen, dan heeft B geluk gehad als hij om drie uur komt, want dan komt hij toch nog onverwacht.

Nu kunnen we een résumé van de oplossing geven. Neem aan, dat B zegt tegen A: ik kom morgen om drie uur of om vier uur onverwacht bij je,

A gelooft, dat B meent, wat hij zegt, dan hebben we te maken met een stel uitspraken, dat voor A een contradictie inhoudt. Dat wil zeggen, dat A, als hij de uitspraken van B au sérieux neemt, daaruit een contradictie kan afleiden.

Nu is A echter in deze situatie een mens en geen logicus. Was hij zuiver logicus, dan zou hij de contradictie ontdekken, begrijpen dat uit het stel uitspraken van B alles deduceerbaar is, dat dit stel uitspraken dus waardeloos is en daarmee was zijn geloof verdwenen.

A reageert echter menselijk en niet logisch. Hij gelooft, dat B meent, wat hij zegt, trekt daaruit conclusies en gelooft ook aan de waarheid daarvan. Juist doordat hij conclusies trekt uit een stel voor hem contradictore uitspraken, kunnen zijn gevolgtrekkingen van alles inhouden. Zo kan hij concluderen, dat B om drie uur komt. Gebeurt dit dan inderdaad, dan blijkt B „zijn woord te hebben gebroken”. Maar concludeert hij en gelooft hij dus, dat B niet komen zal om vier uur en ook niet om drie uur, juist dan zal B, als hij om drie uur komt „zijn woord gestand gedaan hebben”. ¹⁾

Mocht B door A niet gelóofd worden, dan is er geen enkele moeilijkheid meer. Het door B geponeerde is dan zonder meer realiseerbaar.

P. G. J. Vredenduin

¹⁾ In het geval van de gevangene en de directeur geloofde de gevangene, dat de directeur meende, wat hij zei. Daarop voortbordurend concludeerde hij, dat de directeur niet komen zou. Hij begreep niet, dat elke andere conclusie ook gewettigd zou zijn. Juist doordat hij deze en geen andere conclusie trok, maakte hij het de directeur mogelijk zijn woord gestand te doen. M.i. is deze uitleg van de paradox een verbetering van de vroeger gegevene.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

LX. Een verwantschap van de achtste graad

1. In *Euclides* 40 (1964—1965, 216—218) heeft J. T. Groenman de volgende verwantschap ten opzichte van een driehoek ABC beschouwd. Is P een willekeurig punt in het vlak van de driehoek, zijn S_1, S_2, S_3 de snijpunten van AP, BP en CP met BC, CA en AB en zijn S'_1, S'_2, S'_3 de andere snijpunten van de cirkel $(S_1S_2S_3)$ met deze zijden, dan gaan AS'_1, BS'_2 en CS'_3 door één punt P' . (Zie figuur 1).

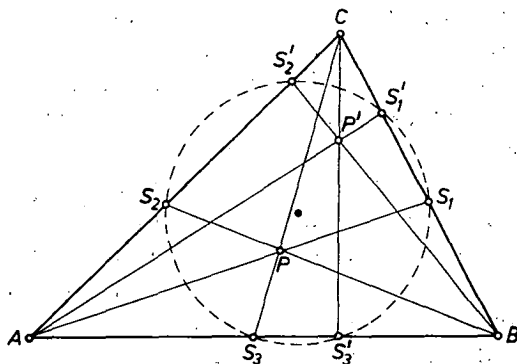


Fig. 1.

De verwantschap tussen P en P' is involutorisch. Dekpunten zijn de vier punten van Gergonne; het hoogtepunt H en het zwaartepunt Z zijn aan elkaar toegevoegd.

Groenman heeft de verwantschap analytisch beschreven. Zijn (x, y, z) en (x', y', z') de afstandskoördinaten van P en P' ten opzichte van de driehoek, dan blijkt te gelden:

$$x' : y' : z' = bcT_2T_3 : caT_3T_1 : abT_1T_2 \quad (1)$$

waarbij

$$T_1 = xyz(ax + by + cz)(a^2 - b^2 - c^2) + abc(y^2z^2 - z^2x^2 - x^2y^2), \quad (2)$$

terwijl T_2 en T_3 daaruit volgen door cyclische verwisseling. Uit (1) en (2) blijkt dat de verwantschap van niet minder dan *de achtste graad* is.

2. Wij merken op dat het inzicht in het verband tussen P en P' aanzienlijk vereenvoudigd wordt, doordat de betreffende verwantschap V het *produkt* blijkt te zijn van *drie* (involutorische) *kwadratische* verwantschappen. Zijn $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en $P'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ de aan P en P' door de *isogonale* verwantschap J toegevoegde punten, dan is

$$xx_1 = yy_1 = zz_1, \quad x'x'_1 = y'y'_1 = z'z'_1 \quad (3)$$

zodat:

$$x'_1 : y'_1 : z'_1 = aT_1 : bT_2 : cT_3 \quad (4)$$

ofwel:

$$\begin{aligned} x'_1 : y'_1 : z'_1 = & \{a(-a^2 + b^2 + c^2)K + a^2bc(-x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\} \\ & : \{b(a^2 - b^2 + c^2)K + ab^2c(x_1^2 - y_1^2 + z_1^2)\} : \\ & : \{c(a^2 + b^2 - c^2)K + abc^2(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2)\} \end{aligned} \quad (5)$$

waarbij:

$$K = ay_1z_1 + bz_1x_1 + cx_1y_1. \quad (6)$$

Wij hebben dus: *tussen de aan P en P' isogonaal toegevoegde punten P_1 en P'_1 bestaat een kwadratische verwantschap*. Wordt deze, door (5) gedefinieerd, met V' aangeduid, dan is dus $V = JV'J$.

Daar V en J involutorisch zijn, is ook V' involutorisch. Wij zullen V' nader onderzoeken. Dekpunten van V' zijn ten duidelijkste de isogonaal met de punten van Gergonne verwante punten.

Voorts zijn blijkbaar in V' met elkaar verwant het middelpunt van de omschreven cirkel M en het punt van *Lemoine* L van driehoek ABC .

3. Elke involutorische kwadratische verwantschap heeft drie *singuliere* punten, die de hoekpunten zijn van de *fundamentealdriehoek* van de verwantschap. Aan een hoekpunt is elk punt van de overstaande zijde toegevoegd. Kiest men driehoekskoördinaten (x, y, z) ten opzichte van de fundamentealdriehoek, met willekeurig eenheidspunt, dan wordt de verwantschap (als de dekpunten reël zijn) gegeven door:

$$x'x = p_1^2, \quad y'y = p_2^2, \quad z'z = p_3^2 \quad (7)$$

en de vier dekpunten zijn $(p_1, \pm p_2, \pm p_3)$. Aan het eenheidspunt is het punt (p_1^2, p_2^2, p_3^2) toegevoegd. Daaruit blijkt tevens dat de kwadratische toevoeging bepaald is door de fundamentealdriehoek en één paar toegevoegde punten.

Is het eenheidspunt een dekpunt, dan is $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2$. De isogonale en de isotome verwantschap zijn voorbeelden van involutorische kwadratische verwantschappen.

Om de singuliere punten van V' te vinden, moet men de drie gemeenschappelijke punten bepalen van de drie kegelsneden, verkregen door in (5) te stellen $x'_1 = y'_1 = z'_1 = 0$.

Voor $cy'_1 + bz'_1 = 0$ krijgt men $aK + bcx_1^2 = 0$ en analoog $bK + cay_1^2 = 0$ en $cK + abz_1^2 = 0$, waaruit dan gemakkelijk volgt dat de singuliere punten van V' zijn $A' = (-a, b, c)$, $B' = (a, -b, c)$ en $C' = (a, b, -c)$.

De fundamentealdriehoek van V' is dus de zogenaamde *tangentendriehoek* van ABC : de zijden $B'C'$, $C'A'$ en $A'B'$ raken de omschreven cirkel ABC in A , B en C . (Zie figuur 2.)

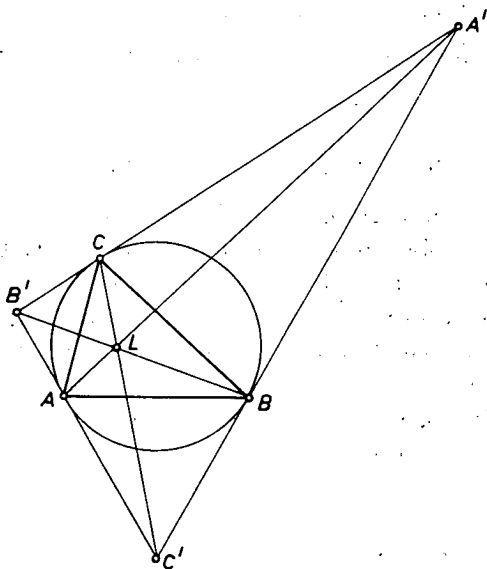


Fig. 2.

Daarmee is de verwantschap V' volkomen beschreven: van V' is $A'B'C'$ de fundamentealdriehoek, terwijl L en M twee toegevoegde punten zijn. Wij merken op dat L het snijpunt is van de rechten AA' , BB' en CC' . Men kan dus V' ook beschrijven met elementen van de tangentendriehoek alleen: *het is die kwadratische*

involutorisches verwantschap met $A'B'C'$ als fundamentealdriehoek, waarbij het middelpunt van de ingeschreven cirkel en het punt van Gergonne, beide van deze driehoek, een paar toegevoegde punten zijn.

Men kan de vergelijkingen (5) van V' in eenvoudige vorm brengen door een coördinatentransformatie $x_1, y_1, z_1 \rightarrow X, Y, Z$.

Neemt men L als eenheidspunt, dan is

$$\begin{aligned} x_1 &= a(-X + Y + Z), & X &= a(cy_1 + bz_1) \\ y_1 &= b(X - Y + Z), & Y &= b(az_1 + cx_1) \\ z_1 &= c(X + Y - Z), & Z &= c(bx_1 + ay_1) \end{aligned} \quad (8)$$

en dus $K = abc(-X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ + 2ZX + 2XY)$,

$x'_1 : y'_1 : z'_1 = a(-a^2YZ + b^2ZX + c^2XY) :$

$$b(a^2YZ - b^2ZX + c^2XY) : c(a^2YZ + b^2ZX - c^2XY)$$

en tenslotte:

$$X' : Y' : Z' = a^2YZ : b^2ZX : c^2XY. \quad (9)$$

4. De ontbinding van V in drie kwadratische factoren maakt het gemakkelijker de toevoeging P' aan P , n.l. via de tussenstappen P_1 en P'_1 , te volgen. Wij gebruiken haar om na te gaan welke punten voor V singulier zijn en trekken onmiddellijk de conclusie dat singulier zijn de punten P die in A, B of C vallen, die waarvoor P_1 in A', B' of C' valt en tenslotte die waarvoor P'_1 in A, B , of C valt. Als echter P'_1 en A identiek zijn, dan valt P_1 met A' samen enz. Als P_1 met A' samenvalt, dan is P het met A' isogonale punt A'' , een der hoekpunten van de om ABC beschreven en met deze homotetische driehoek $A''B''C''$. Het resultaat is: *de verwantschap V heeft zes singuliere punten: A, B, C, A'', B'', C'' .* Aan A wordt door J elk punt van BC toegevoegd, met deze rechte correspondeert in V' een door A'', B'', C'' gaande kegelsnede, J voegt daaraan toe kromme van de vierde graad, met dubbelpunten in A, B en C en gaande door A', B' en C' , welke kromme dus in V het beeld van A is. Aan A'' voegt J het punt A' toe; het volgende beeld is de rechte $B'C'$, en dan volgt de rechte $B''C''$ als uiteindelijk beeld van A'' . Aan H zijn achtereenvolgens M, L en Z toegevoegd en Z doorloopt dit viertal in omgekeerde volgorde.

5. Groenman merkt terecht op dat door V aan een rechte een kromme van de achtste graad wordt toegevoegd, die in A, B en C viervoudige punten heeft. Deze eigenschap is echter onvoldoende om de genoemde krommen te karakteriseren. Wij zullen een rechte

l volgen bij zijn toevoegingen door J , V' en nogmaals J . J voegt aan l een door A , B en C gaande kegelsnede K_2 toe. Door V' gaat deze over in een kromme van de vierde graad K_4 , met dubbelpunten in A' , B' en C' . Het dubbelpunt A' ontstaat doordat in V' aan elk punt van $B'C'$ het punt A' is toegevoegd en K_2 twee punten met $B'C'$ gemeen heeft. De verschillende punten van $B'C'$ corresponderen daarbij met de verschillende richtingen in A' .

Daar K_2 door A gaat volgt hieruit dat één der dubbelpuntsraaklijnen van K_4 in A' een vaste rechte is.

Van K_4 moet nu nog de isogonaal toegevoegde figuur worden bepaald. Het resultaat is dus: *aan een rechte l voegt V een kromme K_8 van de achtste graad toe, die in A , B , en C viervoudige punten heeft en voorts dubbelpunten in A'' , B'' , C'' , met in elk dezer punten één vaste dubbelpuntsraaklijn.* (De drie dubbelpuntsraaklijnen blijken nog door één punt, n.l. $x : y : z = b^2c^2 \cos \alpha : c^2a^2 \cos \beta : a^2b^2 \cos \gamma$ te gaan).

De K_8 zijn hierdoor volledig gekarakteriseerd; immers een K_8 is door 44 condities bepaald, een punt tot viervoudig punt te hebben eist 10 voorwaarden; een dubbelpunt vraagt 3, met een voorgescreven raaklijn 4 condities en $44 - 3 \times 10 - 3 \times 4 = 2$ komt overeen met het feit dat het vlak ∞^2 rechten l telt.

Na deze analyse wordt het ook eerst duidelijk hoe het mogelijk is dat de verwantschap van de achtste graad een (1, 1) toevoeging teweegbrengt. Met twee rechten l en l' corresponderen krommen K_8 en K'_8 van de beschreven verzameling. Deze krommen hebben 64 punten gemeen; hiervan vallen er $4 \times 4 = 16$ in elk der punten A , B en C en $2 \times 2 + 1 = 5$ in elk der punten A'' , B'' , C'' ; het aantal bewegelijke snijpunten is dus $64 - 3 \times 16 - 3 \times 5 = 1$. Er is dus inderdaad een enkel punt aan het snijpunt van l en l' toegevoegd.

6. De bovenbesproken figuur is het onderwerp van een artikel van E. Weber, *Sur quelques cercles du plan d'un triangle* (Nouvelles Annales de Mathématiques, quatrième série, Tome VI, 1906, p. 343—348). Daar wordt de stelling, die het bestaan van het aan P toegevoegde punt P' uitspreekt, op naam gesteld van Terquem (1842). Het blijkt dat Lemoine in 1888 op het Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences te Oran de analytische uitdrukkingen voor de coördinaten van P' , als functie van die van P , heeft medegedeeld; zij blijken met die van Groenman overeen te komen. Weber is terecht van oordeel dat zij „paraissent extrêmement compliquées et peu maniables” en hij tracht, zij het op andere wijze dan boven, de verwantschap te ontbinden. Zelfs

niet van haar graad, laat staan van de singuliere punten, is echter sprake. De auteur is meer geïnteresseerd in de in de figuur optredende cirkel en wijdt aandacht aan enige bijzondere gevallen. Zijn voornaamste resultaat is de volgende stelling: de snijpunten van de genoemde cirkel met de negenpuntcirkel zijn de middelpunten van de door A , B , C en P , resp. A , B , C , en P' gaande gelijkzijdige hyperbolen.

WIMECOS

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

op dinsdag 28 december 1965 in „Esplanade”, Lucas Bolwerk, Utrecht.

Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering van 29 december 1964 *).
3. Jaarverslagen:
 - a. van de secretaris *).
 - b. van de penningmeester,
 - c. van de kascommissie *),
 - d. van de redactie van „Euclides” *),
 - e. van de commissie voor de leesportefeuille *).
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van de heren C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin. Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Bespreking van het bestuursvoorstel om de contributie voor het verenigingsjaar 1966—1967 vast te stellen op f 9,—.
7. Voordracht van de heer prof. dr. F. van der Blij, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht: „*Algebra en Analyse in de hoogste klassen van het toekomstige V.W.O.*”.

PAUZE

8. Voordracht van de heer dr. P. Bronkhorst (Eindhoven): „*Spitsvondigheden in de klassieke getallentheorie.*”
9. Rondvraag.
10. Sluiting.

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE W.V.O.

NAJAARSCONFERENTIE 1965.
20—21 november

Plaats: Internationale school voor wijsbegeerte, Dodeweg 8, Amersfoort.
Telefoon 03490—15020.
Men slaapt in verwarmde één- (en indien nodig twee-) persoonskamers.

Thema: Aanpassing van het huidige wiskundeleerplan en eindexamenreglement voor v.h.m.o.

*) Publikatie hiervan zal geschieden in het decembernummer van „Euclides”.

Toelichting: De afgelopen cursus zijn vier regionale commissies van de Wiskunde Werkgroep aan het werk geweest in opdracht van 't bestuur, om na te gaan, hoe nieuwe begrippen ingevoerd en ontwikkeld moeten worden, zonder dat het huidige leerplan wettelijk wordt aangetast. Deze commissies zullen op de conferentie verslag uitbrengen. De deelnemers aan de conferentie gaan over deze verslagen discussiëren in vier groepen, waarna een samenvatting volgt. Er zal getracht worden de deelnemers van te voren een kort verslag van de conclusies van de commissies te doen toekomen.

Programma: Zaterdag 20 november:

- 15.— Ontvangst van de deelnemers
- 15.15 Opening van de conferentie door Prof. dr. H. Freudenthal, voorzitter van de Wiskunde Werkgroep.
Mededelingen van de secretaris-penningmeester
- 15.30 Verslag van de Commissie Logica door Dr. P. M. van Hiele
- 16.— Verslag van de Commissie Functiebegrip Onderbouw
- 16.30 Verslag van de Commissie Functiebegrip Bovenbouw
- 17.— Verslag van de Commissie Analytische Meetkunde door Dr. W. P. Thijssen
- 18.— Warme maaltijd
- 20.— Groepsdiscussies
- 22.— Sluiting, uitbrengen van voorlopig kort verslag door groepsrapporteurs aan de secretaris, Drs H. C. Vernout

Zondag 21 november:

- 8.— Ontbijt
- 11.— Vervolg groepsdiscussies
- 13.— Sluiting, uitbrengen van eindverslag aan de secretaris
- 13.30 Broodmaaltijd
- 14.30 Gelegenheid tot vrije discussie
- 15.— Samenvatting van de resultaten van de conferentie door Prof. dr F. van der Blij
- 16.30 Sluiting van de conferentie door de voorzitter
- Vertrek van de deelnemers

Uitwerking: Zo spoedig mogelijk na de conferentie ontvangen alle deelnemers een verslag van de besprekingen. Met dit verslag als basis zullen de regionale werkgroepen weer enige maanden aan het werk gaan. Er zal dan een eindverslag samengesteld worden, waarover in maart 1966 in een slotbijeenkomst te Utrecht door de deelnemers aan de conferentie gediscussieerd kan worden. Daarna zal het definitieve verslag aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde worden toegezonden.

Kosten: De deelnemingskosten aan de conferentie bedragen f 25.—, inclusief nachtverblijf in een- of tweepersoons verwarmde kamers. Deelnemers, die niet blijven slapen, betalen f 20.—. Voor niet-leden zijn deze bedragen resp. f 27,50 en f 22,50.

Storting van het bedrag op giro 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde Werkgroep te Haarlem geldt tevens als inschrijvingsbewijs, indien voor 10 november ontvangen.

Reiskosten trein 2e klas boven de f 2.50 worden, zoals gewoonlijk door het departement vergoed.

Een gedeelte van de deelnemingskosten komt eveneens voor vergoeding in aanmerking.

Inlichtingen: Alle verdere inlichtingen over deze conferentie en over het lidmaatschap van de Wiskunde Werkgroep bij de Secretaris-penningmeester, drs H. C. Vernout, van Nouthuysstraat 11, Haarlem, tel. 02500—57288.

Zij, die zich nu opgeven als lid van de Wiskunde Werkgroep per 1 januari 1966, kunnen ook aan de conferentie deelnemen en zijn tot 1 januari gratis lid van de Werkgroep.

BOEKBESPREKING

Prof. Dr. D. J. Struik, *Geschiedenis van de Wiskunde*, Aula 195, Utrecht-Antwerpen, 256 blz., f 3.50.

In kort bestek, de eigenlijke tekst beslaat slechts 210 blz., geeft de schrijver een overzicht van de ontwikkeling van het wiskundig denken van de oudste tijden tot 1900. Ondanks de geringe omvang is dit boek geen dorre opsomming van feiten en is het geenszins slechts een oppervlakkige beschouwing. In de grond van de zaak is het een stuk cultuurhistorie. Men ziet het wiskundig denken voortschrijden tegen de achtergrond van de ontplooiing van de cultuur in de verschillende perioden. Natuurlijk moet men niet verwachten, dat men in concreto leest, hoe de inhoud van de verschillende wiskundige technieken in de loop der tijden geweest is. Op evenwichtige wijze is het ingaan op details vermeden. Als men enige wiskundige kennis bezit, krijgt men een duidelijk overzicht over de wijze, waarop de wiskunde gegroeid is. Ik kan ieder aanraden dit fraaie werkje aan te schaffen.

Een belangrijke vraag voor leraren is, of het boek geschikt is voor de schoolbibliotheek. Deze vraag zou ik ontkennend willen beantwoorden. Ik geloof niet, dat onze leerlingen al rijp zijn om dit boek met vrucht te lezen.

P. G. J. Vredenduin

David M. Borton, *An Introduction to Abstract Mathematical Systems*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965, 120 blz., \$ 3.25.

Van het nut enig inzicht te hebben in mathematische structuren zal thans wel elke wiskundeleraar overtuigd zijn. De heroriënteringscursussen hebben ons steeds weer met deze noodzakelijkheid geconfronteerd. Velen van ons zullen er behoefte aan hebben de verkregen kennis van structuren nog eens samengevat te zien om hun inzicht te consolideren. Het boek van Borton kan voor hen van zeer grote waarde zijn.

Na een korte logische inleiding behandelt de schrijver de groepen. De in de heroriënteringscursus van dit jaar besproken begrippen wordt kort en duidelijk uiteengezet: groep, ondergroep, normale ondergroep, factorgroep, homomorfisme, isomorfisme.

Daarna volgen systemen met twee operaties, t.w. ring en lichaam. Bij de ringen worden de idealen besproken en ziet men goed de analogie tussen een normale ondergroep van een groep en een ideaal van een ring.

In een slot hoofdstuk behandelt de schrijver de matrices en geeft hij een definitie van een vectorruimte.

De hoofdstukken zijn zo behandeld, dat het verband tussen de verschillende begrippen naar voren komt. Een groot aantal goed gekozen voorbeelden in de tekst demonstreert telkens de betekenis van een nieuw ingevoerd begrip. De lezer, die zich verder wil bekwaamen, wordt dit mogelijk gemaakt, doordat series vraagstukken zijn toegevoegd.

Al met al een voortreffelijk boek.

P. G. J. Vredenduin

Stephen F. Barker, *The Elements of Logic*, McGraw-Hill Book Co., New York etc. 1965, XII + 336 blz., 43 sh.

Bij het lezen van dit boek krijgt men een indruk van de betekenis, die de logica heeft. Men wordt niet ingewijd in de betekenis van een formeel systeem, maar uitsluitend in de betekenis van de elementaire logische termen. Dat desondanks wel eens met symbolen gewerkt wordt, heeft geen andere strekking dan dat gemakshalve bepaalde woorden door symbolen vervangen worden.

Het is een gelukkige gedachte van de schrijver de lezer in te leiden in de betekenis van de logica door eerst uitvoerig de syllogistiek van Aristoteles te bespreken. Al mag dit systeem dan verouderd zijn, het geeft ons nog steeds een helder inzicht in de doelstelling van de logica. Daarna komt de propositielogica aan de orde. Ook hier leert men begrijpen, wat de betekenis van de operatoren niet, en, of, volgt uit is. Pas na voldoende ermee geopereerd te hebben, komen de waarheidstabellen aan de orde. Op soortgelijke wijze worden de kwantoren alle en er zijn behandeld. De rekenwijze, die een beslissing geeft of logische uitspraken, waarin kwantoren voorkomen, afleidbaar zijn, vind ik niet erg overzichtelijk. De door Beth gevolgde methode is duidelijker.

Ten slotte komt ook het inductieve redeneren ter sprake. Evenals in de vorige hoofdstukken, wordt dit verduidelijkt aan de hand van een groot aantal, meest aan de omgangstaal ontleende voorbeelden. Men krijgt de indruk, dat voor de schrijver de essentie van het inductieve denken is het trekken van conclusies met een zekere graad van waarschijnlijkheid. Ongemerkt glijdt hij zelfs van het inductieve denken over naar het statistische denken, dat naar het mij voorkomt juist geen inductief denken meer is. Ik vind dit hoofdstuk dan ook niet het meest gelukkige.

Het boek is duidelijk geschreven. Het is zeer gemakkelijk leesbaar. Het geeft een inleiding in de logica en beslist niet meer.

P. G. J. Vredenduin.

M. Golomb and M. Shanks, *Elements of ordinary differential equations*, 2nd edition, Mc. Graw-Hill Book Company, Maidenhead, 1965, 405 blz. 69/6.

In deze geleidelijke opbouw van de theorie en de techniek van de gewone differentiaalvergelijkingen wordt veel oefenmateriaal al of niet volledig uitgewerkt, niet vergeten.

Antwoorden op en aanwijzingen voor het oplossen van de opgaven beslaan alleen al 25 bladzijden.

Na een bespreking van de gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde volgen in hoofdstuk 4 toepassingen op natuurwetenschappelijk gebied. Hoofdstuk 5 behandelt vergelijkingen van de 2e orde en hoofdstuk 6 lineaire vergelijkingen van hogere orde met constante coëfficiënten. Ook aan numerieke oplossingsmethoden is veel aandacht besteed.

Na een behandeling van Laplace transformaties worden systemen van vergelijkingen besproken, vergelijkingen met variabele coëfficiënten en oplossingen in machtreksen.

Het boek is uitstekend geschikt voor zelfstudie.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

142. In een bioscoop vertoont men een continu programma van vijf films, die in vaste cyclische volgorde gedraaid worden: Men mag de zaal ingaan aan het begin van elke film en deze eveneens aan het begin van elke film verlaten. Men mag niet langer blijven dan de duur van het volledige programma.

Onderstel, dat de duur van de films is 2, 7, 4, 1, 3 min. en dat ze in deze cyclische volgorde vertoond worden. Dan kan een bezoeker een zodanig programma kiezen, dat hij 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 min. aanwezig is, echter geen programma van 10 min.

Gevraagd wordt de duur van de films zo te kiezen, dat een bezoeker een programma kan kiezen van 1, 2, 3, ..., n min., waarin n maximaal is. Hoe lang duren de films en in welke volgorde worden ze vertoond?

Dezelfde vraag voor een programma, dat bestaat uit zes films.

143. Teken n rechthoeken zo, dat daardoor een maximaal aantal buiten elkaar gelegen rechthoeken gevormd wordt. (Twee rechthoeken liggen buiten elkaar, als ze geen inwendig punt gemeen hebben.)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

140. We beschouwen weer het homeomorfe beeld van een torus, dat bestaat uit een vierkant $ABB'A'$, waarvan AB geïdentificeerd is met $A'B'$ en AA' met BB' op de manier, zoals in de oplossing van opgave 138 uiteengezet is. Hoe groot het gat is, dat in de torus gemaakt wordt, is topologisch van geen belang. We maken het behoorlijk groot. In fig. 1 stelt $PQRS$ het gat voor. In onze ruimtelijke torus komt dat hierop neer, dat we slechts twee smalle repen overhouden, zoals in fig. 2 is getekend. Voordat het gat gemaakt werd, werd één reep begrensd door delen van twee breedte-cirkels en de andere door delen van twee meridianen. Nu het gat er eenmaal is, is er tussen beide repen geen verschil meer aanwijsbaar. De ene reep kan mogelijk platter zijn dan de andere, maar dat zijn geen verschillen, die men in de topologie „merkbaar” noemt.

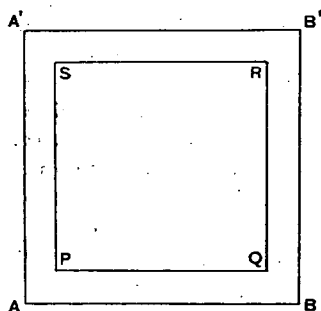


fig. 1

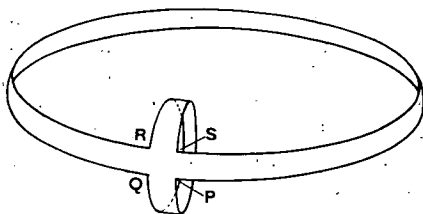


fig. 2

Nu wordt de band door het gat gehaald en binnenste buiten gekeerd. Dit is een deformatie; topologisch gesproken gebeurt er dus niets. Men heeft twee aan elkaar verbonden repen en houdt twee dergelijke repen.

Ten slotte wordt het gat dichtgeplakt. En, hoe onschuldig dit ook lijkt als we aan

een ventiel denken, zit hier nu juist de moeilijkheid. We moeten als het ware het gat weer dichtn met het „vierkant” $PQRS$. Dit kan op twee manieren. We kunnen eerst $PQRS$ oprollen totdat we een bijna gesloten cilinder krijgen met beschrijvende lijnen PQ en RS (fig. 3). Plakken we dan PQ langs boog PQ uit fig. 2 en RS langs boog RS uit fig. 2 en daarna boog PS langs boog PS en boog QR langs boog QR , dan hebben we onze oorspronkelijke torus teruggekregen.

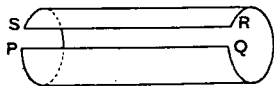


fig. 3



fig. 4

We kunnen echter ook $PQRS$ oprollen zo, dat PS en QR beschrijvende lijnen worden (fig. 4). We plakken nu PS langs boog PS van fig. 2 en QR langs boog QR van fig. 2 en daarna boog PQ langs boog PQ en boog SR langs boog SR . Ook dan ontstaat een torus, maar nu zijn vergeleken met de oorspronkelijke torus breedtecirkels en meridianen verwisseld.

Blijkbaar gebeurt dit laatste. Immers dan gaan de rode meridiaan op de buitenwand en de blauwe breedtecirkel op de binnenwand over in een rode breedtecirkel op de binnenwand en een blauwe meridiaan op de buitenwand. En deze grijpen nog steeds als de schakels van een ketting ineen.

Conclusie. Uit de oorspronkelijke band snijden we een gat, we keren hem binnenste buiten en maken het gat weer dicht. De verkregen eindtoestand is homeomorfe met de oorspronkelijke (de samenhang is ongewijzigd). Het binnenste buiten keren is niet alleen een homeomorfisme, maar ook een deformatie. De totale bewerking is echter geen deformatie meer en daardoor werd het mogelijk, dat de beide soorten cirkels verwisseld worden.

Sommigen stellen zich liever voor, wat er gebeurt. Men kan zich dan behelpen met het volgende beeld. Stel je het aardoppervlak van gummi voor. Stel je verder voor, dat er een dunne buis loopt van de noordpool naar de zuidpool. Door deze aan het aardoppervlak toe te voegen ontstaat een „fietsband”. Knip nu Australië eruit en keer de aarde binnenste buiten door hem door Australië naar buiten te halen. De dunne buis loopt dan weer van pool tot pool, maar nu buitenom. Plak daarna Australië weer dicht. We hebben dan weer een „fietsband”, maar de aardekwator is geen breedtecirkel meer, maar een meridiaan.

141. Onderstel, dat a en b twee natuurlijke getallen zijn, waarvoor geldt, dat $a^2 + b^2$ een kwadraat is en dat ze geen factor gemeen hebben, dan is

$$\begin{aligned} a &= 2uv \\ b &= u^2 - v^2. \end{aligned}$$

B.v. $a = 24$ en $b = 7$.

Nu is $a + b = 31$. Dit is geen kwadraat. Vermenigvuldig nu a en b beide met 31. We vinden dan $a' = 744$, $b' = 217$. Deze voldoen.

In het algemeen moeten we de gevonden a en b vermenigvuldigen met pq^2 , waarin p het kleinste natuurlijke getal is, waarvoor geldt, dat $(a + b)p$ een kwadraat is en q willekeurig natuurlijk is.

GRAFIEKENBLADEN VOOR DE GONIOMETRIE

Deze bladen geven een goede grafiek bij functies van de gedaante $f(x) = a \cos (bx + c)$ enz. en vergen weinig moeite en tijd. Het voorgedrukte 'geraamte' berust op meetkundige interpretatie en maakt rekenwerk en opzoeken in tafels goeddeels overbodig.

15 bladen in envelop met toelichting f 0,75 / 100 bladen los f 4.—

GRAFIEKENSCHRIFT

In dit schrift tekenen de leerlingen gemakkelijk een goede grafiek bij de algebra en een goede figuur bij de analytische meetkunde.

28 blz. duidelijk zichtbare ruitjes van $2\frac{1}{2}$ bij $2\frac{1}{2}$ mm. en 28 blz. voor aantekeningen. 15e druk, f 0,95

TEKENBLADEN VOOR GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

30 kwarto bladen met ruitjes van 2 bij 2 mm.

Voor wiskundelessen, handelsonderwijs, statistieken en voor gebruik op laboratoria en kantoren. In portefeuille f 1,25

PRIKMALLEN

Men tekent hiermee in een oogwenk een goede kegelsnede met assen, brandpunten en asymptoten. Een stel prikmallen bevat 3 parabolen, 4 ellipsen en 3 hyperbolen.

Per stel f 0,35 (levering per minimaal 10 stel).

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Neuaufgabe

MATHEMATISCHES WÖRTERBUCH

mit Einbeziehung der Theoretischen Physik

Herausgegeben unter Mitwirkung von 127 Fachgelehrten von Prof. Dr. J. Naas und Prof. Dr. H. L. Schmid

Band I. A-K. XII, 1043 Seiten mit zahlreichen Figuren. 4°. 1965

Band II. L-Z. VIII, 952 Seiten mit zahlreichen Figuren. 4°. 1965

3., berichtigte Auflage. Zwei Bände in Lederin gebunden zusammen DM 450,—

Das Werk, dessen Plan um 1930 in unserem Verlag entstand, wurde vom Institut für Reine Mathematik an der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin redaktionell bearbeitet; es erscheint in Gemeinschaft mit dem Akademie-Verlag, Berlin.

Das Werk setzt sich zum Ziel, die einzelnen Begriffe der Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete zu erklären. Neben Begriffsdefinitionen aus allen Gebieten der Mathematik wurden auch wichtige Sätze und Lemmata aufgenommen sowie mathematische Methoden und Forschungseinrichtungen erläutert. Auch auf die geschichtliche Entwicklung der Mathematik wird eingegangen. Ferner werden 400 biographische Artikel über nicht mehr lebende bedeutende Mathematiker gebracht.

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · STUTTGART

Wiskunde uitgaven voor het vhmO

ALGEBRA VOOR HET VHM O

door C. J. Alders

deel 1 - 51/55e druk - ing. f 3.25; geb. f 4.15 / deel 2 - 51/55e druk - ing. f 2.90;
geb. f 3.75 / deel 3 - 21/23e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.10 / antwoorden 1 - f 1.— /
2 - f 0.90 / 3 - f 0.90

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / antwoorden gratis

GONIOMETRIE VOOR HET VHM O

door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.15 / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHM O

door C. J. Alders

21/23e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.80

PLANIMETRIE VOOR HET VHM O

door C. J. Alders

31/35e druk - ing. f 3.75; geb. f 4.65

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET VHM O

door C. J. Alders

29e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.40

ALGEBRA VOOR M.M.S.

door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machiels en

3e druk - ing. f 4.50 / antwoorden f 1.—

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machiels en

deel 1 - 2e druk - ing. f 3.90 / deel 2 - ing. f 4.50

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR HET VHM O

door Dr. H. Streefkerk

deel 1 - 5e druk - ing. f 3.25 / deel 2 - 5e druk - ing. f 3.90

deel 3 - 3e druk - ing. f 3.75

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET VHM O

door J. C. Kok

2e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.— / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHM O

door A. A. Lucieer

13e druk - ing. f 5.—; geb. f 5.75 / antwoorden

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

oor Dr. D. J. E. Schrek - m.m.v. H. Pleysier

4e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.25 / antwoorden

P. Noordhoff nv

postbus 39 / Groningen ook via de boekhandel
