

EUCLIDES

*MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE*

*ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.*

**MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND**

41e JAARGANG 1965/1966

I—1 SEPTEMBER 1965

INHOUD

Dr. P. G. J. Vredenduin: Uitbreiding van getalsystemen	1
Drs. J. Snoep: Het wiskunde-onderwijs op de Engelse middelbare scholen	20
Dr. C. J. Vooy's: De helicograaf van Nicomedes . .	28
Staatsexamen gymnasium 1964	30
Boekbespreking	30
Recreatie	32

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;
Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Dr. J. KOKSMA, Haren;	P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos*, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de *Wiskunde-werkgroep W.V.O.* te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

UITBREIDING VAN GETALSYSTEMEN¹⁾

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Bij ons onderwijs gaan we uit van de natuurlijke getallen en breiden dit getalsysteem successievelijk uit, totdat het systeem van de reële getallen bereikt is. We zien daarbij het getalsysteem steeds rijker aan eigenschappen worden. Vroeger gingen we daarna verder en voerden de complexe getallen in, waardoor naast een verrijking aan de andere kant een verarming optrad. Verschillende vragen doen zich nu voor. Waaruit bestaat deze verrijking resp. verarming? Kan het systeem van de reële getallen verder uitgebreid worden zonder dat verarming optreedt? Kan het systeem van de complexe getallen uitgebreid worden zonder verarming en zo niet, op welke wijze is uitbreiding mogelijk en welke eigenschappen gaan daarbij verloren? Met dit soort problemen, die de problemen binnen ons onderwijs nauw raken, willen we ons hier bezig gaan houden.

1. *De eigenschappen van de reële getallen.* De verzameling R van de reële getallen heeft de eigenschap, dat er twee bewerkingen gedefinieerd zijn, optelling en vermenigvuldiging, die aan elk paar elementen van R een element van R toevoegen. De reële getallen vormen een abelse groep t.o.v. de optelling, d.w.z.

- L1 a. de optelling is commutatief,
b. de optelling is associatief,
c. de optelling heeft een neutraal element (het getal 0),
d. elk element heeft een inverse (het inverse element van a is $-a$).

Verder vormen de reële getallen, met uitzondering van het getal 0, een abelse groep t.o.v. de vermenigvuldiging, d.w.z.

- L2 a. de vermenigvuldiging is commutatief,
b. de vermenigvuldiging is associatief,
c. de vermenigvuldiging heeft een neutraal element (het getal 1),

¹⁾ Voordracht gehouden voor het wiskundig dispuut „Pi” te Arnhem op 5 april 1962.

d. elk element heeft een inverse (het inverse element van a is a^{-1}).

Ten slotte hangen deze beide bewerkingen niet als droog zand samen, doch bestaat er verband tussen. Dit verband wordt geleverd door de distributieve eigenschap:

$$L3 \quad a(b + c) = ab + ac.$$

We vatten L1—3 ook wel samen door te zeggen, dat de verzameling van de reële getallen een *lichaam* is.

Totnogtoe is de vermenigvuldiging met 0 niet expliciet vermeld. Uit L3 volgt echter

$$a(b + 0) = ab + a \cdot 0$$

en uit L1c

$$b + 0 = b \text{ en dus } a(b + 0) = ab.$$

Uit L1 volgt dan

$$a \cdot 0 = 0.$$

Om nu ook af te leiden, waaraan $0 \cdot a$ gelijk is, stellen we vast, dat de commutativiteit van de vermenigvuldiging niet alleen geldt voor getallen $\neq 0$, maar algemeen. Dit is dus een afspraak, die een uitbreiding van L2a inhoudt. Dan zien we, dat ook

$$0 \cdot a = 0.$$

Uit de geldigheid van $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ volgt, dat het niet mogelijk is een deling door 0 te definiëren. We kunnen dus een lichaam nimmer zo uitbreiden, dat deling door 0 mogelijk wordt.

Het is echter een bijzonder soort lichaam, namelijk een *geordend* lichaam. Dit wil zeggen, dat er tussen de elementen van het lichaam een orderrelatie gedefinieerd is, dus een relatie met de volgende eigenschappen:

- O1 a. voor elke a en b geldt hetzij $a > b$, hetzij $b > a$, hetzij $a = b$,
b. de relatie is transitief.

Om de richting van de ordening vast te leggen, kunnen we afspreken, dat we $a > 0$ onderstellen, als a aan dezelfde kant van 0 als 1 ligt (we kunnen ook kortweg $1 > 0$ postuleren).

Nu hangt deze ordening ook weer met de reeds ingevoerde bewerkingen samen. Er geldt namelijk:

$$O2 \quad a > b \text{ impliceert } a + c > b + c,$$

$$O3 \quad a > 0 \text{ en } b > 0 \text{ impliceert } ab > 0.$$

Bezien we de successievelijke uitbreidingen van ons getalbegrip, dan zien we, dat eerst na invoering van de gehele getallen L1 van kracht is geworden en na invoering van de rationale getallen L2. Voor laatstgenoemd systeem gelden dus alle axioma's L1—3 en O1—3. We zien nu reeds, wat met „verrijking” bedoeld werd. Hiermee werd alleen bedoeld, dat van de eigenschappen van een geordend lichaam er meer van kracht worden.

Als de behoefte eraan zich voordoet, zullen we het systeem P van de rationale getallen op zijn beurt gaan uitbreiden onder handhaving van de eigenschappen van een geordend lichaam en zodanig, dat eventuele nieuwe eigenschappen ook gaan gelden. Dat het systeem P niet al onze idealen bevredigt, is overbekend. Het systeem vertoont „gaten”, d.w.z. we kunnen het „doorbreken” op een zodanige wijze, dat geen van beide delen een eindpunt heeft; de worteltrekking uit positieve getallen is niet steeds mogelijk; een inkrimpende intervalrij kan een lege doorsnede hebben. Aan al deze bezwaren wordt tegemoet gekomen, als we het zo uitbreiden, dat de stelling van de bovenste grens geldig wordt, dus:

O4 elke naar boven begrensde verzameling heeft een bovenste grens.

Is dus een verzameling V gegeven, die naar boven begrensd is, dan is er een b zo, dat voor elke $x \in V$ geldt $b \geq x$, terwijl bij elke $\varepsilon > 0$ een element $y \in V$ bestaat, waarvoor geldt $y > b - \varepsilon$.

Bekend is, dat door O4 te eisen een getsysteem ontstaat, het systeem R van de reële getallen, dat geen van de bovengenoemde tekortkomingen van het systeem P van de rationale getallen meer heeft, terwijl de eigenschappen L1—3 en O1—3 behouden zijn.

We kunnen nu bewijzen, dat elk geordend lichaam, waarvoor de stelling van de bovenste grens geldt, *archimedis* is. D.w.z. als a en b twee positieve elementen van het lichaam zijn, dan is er een natuurlijk getal n zo, dat $na > b$. ¹⁾

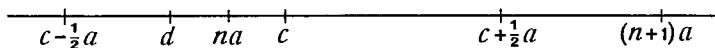


Fig. 1.

Bewijs. De verzameling elementen van het lichaam, waarvoor geldt: er is een n zo, dat $na > x$, noemen we V . Onderstel, dat V naar boven begrensd is. Dan bezit V een bovenste grens c . Tot V behoort dan een element $d > c - \frac{1}{2}a$. Volgens onderstelling is er dus een n , waarvoor $na > c - \frac{1}{2}a$. Tel bij beide leden hiervan a op, dan krijgen we volgens O2: $na + a > c - \frac{1}{2}a + a$, of, $(n+1)a > c + \frac{1}{2}a$. Dan zou $c + \frac{1}{2}a$ tot V moeten behoren, in strijd met de onderstelling, dat c de bovenste grens van V is. V is dus niet naar boven begrensd en dus is het lichaam archimedis.

¹⁾ Elk lichaam heeft een element 0 en een element 1 en dus elementen $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, ..., d.w.z. in elk lichaam is er een deelverzameling, die met „natuurlijke getallen” aangeduid kan worden. (Deze „natuurlijke getallen” kunnen een eindige verzameling vormen.)

2. *Volledigheid van het axiomastelsel* L1—3, O1—4. Totnogtoe hebben we steeds weer onvolkomenheden in het getalsysteem ontdekt en door een geschikte uitbreiding een nieuw systeem geconstrueerd, dat deze onvolkomenheden miste, terwijl van de eigenschappen L1—3 en O1—4 er nimmer ten gevolge van de uitbreiding verloren gingen. De vraag is, of we op deze wijze verder kunnen doorgaan. Een onvolkomenheid van het systeem R van de reële getallen is b.v., dat deling door 0 niet mogelijk is. We hebben al gezien, dat we niet hoeven te proberen door uitbreiding deze onvolkomenheid op te heffen, want dat in geen enkel lichaam deling door 0 mogelijk is. Een andere onvolkomenheid is de aanwezigheid van valse vierkantsvergelijkingen. En zo zal er nog wel meer te bedenken zijn. We stellen nu niet de vraag, of het mogelijk is een bepaalde onvolkomenheid op te heffen, maar stellen meer algemeen het probleem: is het mogelijk het systeem R zo uit te breiden, dat alle eigenschappen L1—3, O1—4 ervoor blijven gelden? Het antwoord zal ontkennend blijken te zijn.

We doen verstandig eerst nauwkeurig te formuleren, wat we willen bewijzen. De te bewijzen stelling luidt:

Stelling. Als voor twee verzamelingen R_1 en R_2 de axioma's L1—3 en O1—4 gelden, dan zijn deze verzamelingen isomorf.

Hiermee wordt bedoeld: er is een omkeerbaar eenduidige afbeelding van R_1 op R_2 met de volgende eigenschappen:

als a_1 en b_1 toegevoegd worden aan resp. a_2 en b_2 , dan wordt aan $a_1 + b_1$ toegevoegd $a_2 + b_2$ en aan $a_1 \cdot b_1$ wordt toegevoegd $a_2 \cdot b_2$,
als bovendien $a_1 > b_1$, dan is $a_2 > b_2$.

Bewijs. We zullen het bewijs niet in volle omvang geven, doch volstaan met een schets. R_1 heeft een nulelement 0_1 en een eenheidselement 1_1 ; in R_2 noemen we deze elementen 0_2 en 1_2 . We voegen nu aan 0_1 en 1_1 toe resp. 0_2 en 1_2 . We noteren deze toevoeging: $0_1 \rightarrow 0_2$ en $1_1 \rightarrow 1_2$.

We gaan nu als volgt verder: $1_1 + 1_1 \rightarrow 1_2 + 1_2$, $1_1 + 1_1 + 1_1 \rightarrow 1_2 + 1_2 + 1_2$, enz. Aan de natuurlijke getallen van R_1 voegen we dus de natuurlijke getallen van R_2 toe. (Bewezen dient hier te worden, dat de „natuurlijke getallen” in R_1 en in R_2 alle verschillend zijn. Dit is minder triviaal, dan op het eerste gezicht lijkt. In het lichaam van de restklassen modulo 5 zijn de „natuurlijke getallen” niet alle verschillend, nl. achtereenvolgens 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, ... Als echter O1 en O2 gelden, dan zijn de „natuurlijke getallen” alle verschillend.)

We gaan nu verder met de toevoeging. Als $n_1 \rightarrow n_2$, dan voegen we toe $-n_1 \rightarrow -n_2$. En als $m_1 \rightarrow m_2$ en $n_1 \rightarrow n_2$, dan voegen we toe $m_1/n_1 \rightarrow m_2/n_2$. We hebben nu rationale deelsystemen P_1 en P_2 van

R_1 en R_2 geconstrueerd, die isomorf zijn. Om deze isomorfie nauwkeurig aan te tonen, is nog wel enig geduld nodig, maar ik heb beloofd slechts een schets te geven.

Kies nu een irrationaal element van R_1 . Dit moet er zijn, want anders gold O4 niet. Noem dit element ϕ_1 . Omdat bewezen is, dat elk lichaam, waarvoor O1—4 geldt, archimedisches is, is er als ϕ_1 positief is een natuurlijk getal groter dan ϕ_1 . En als ϕ_1 negatief is, is er een natuurlijk getal groter dan $-\phi_1$ en dus een geheel getal kleiner dan ϕ_1 . En dus verdeelt het getal ϕ_1 de rationale getallen in twee niet lege deelverzamelingen P_1' en P_1'' , waarvan de elementen kleiner resp. groter dan ϕ_1 zijn. Met deze verdeling van P_1 correspondeert een verdeling van P_2 in twee delen P_2' en P_2'' , waarvan alle elementen van P_2' kleiner zijn dan alle elementen van P_2'' . Volgens O4 heeft P_2' dan een bovenste grens. Deze bovenste grens noemen we ϕ_2 en we stellen vast $\phi_1 \rightarrow \phi_2$. Met enig geduld laat zich dan aantonen, dat de gevraagde isomorfie werkelijk tot stand gebracht is. Men heeft daarbij O3 nodig.

Laten we nu eens aannemen, dat we het systeem R_1 van de reële getallen zo willen uitbreiden, dat de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ in het nieuwe systeem R_2 een wortel heeft. Als voor R_2 weer L1—3 en O1—4 gelden, dan is R_2 isomorf met R_1 . Zou nu ϕ_2 een element van R_2 zijn, waarvoor $\phi_2^2 + 1 = 0$ was, dan was ϕ_2 toegevoegd aan een element ϕ_1 van R_1 en zou wegens de isomorfie ook $\phi_1^2 + 1 = 0$ gelden, hetgeen niet het geval kan zijn. Een dergelijke uitbreiding is dus niet mogelijk.

We hebben met het systeem R van de reële getallen dus in zekere zin een ideaal eindpunt bereikt. Willen we het systeem zodanig uitbreiden, dat een tekortkoming ervan opgeheven wordt, dan is dit alleen mogelijk door toe te staan, dat er van de eigenschappen L1—3 en O1—4 een of meer verloren gaan.

Een axiomastelsel, waarvan alle modellen isomorf zijn, wordt wel *volledig* genoemd. In deze betekenis is het axiomastelsel van de reële getallen een volledig stelsel.

3. *De complexe getallen.* Het spreekt haast vanzelf, dat we toch de behoefte blijven gevoelen het stelsel R zo uit te breiden, dat bepaalde onvolkomenheden opgeheven worden. We weten nu, dat we ons daarbij opofferingen zullen moeten getroosten. Welnu, laten we eens proberen of we met het brengen van enige offers gedaan kunnen krijgen, dat de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ wel een wortel krijgt. We kunnen dan op verschillende manieren tewerk gaan. In het verband van dit artikel zijn twee manieren van belang.

a. Onderstel eens, dat het reële getalsysteem zo uitgebreid werd dat aan de gestelde eis voldaan is. Dan zou het nieuwe stelsel een getal i bevatten, waarvoor $i^2 + 1 = 0$. We willen zoveel mogelijk van de eigenschappen van R behouden. Laten we dus maar beginnen te onderstellen, dat we op de normale manier mogen blijven rekenen (d.w.z. dat we weer een lichaam krijgen). Dan merken we allereerst op, dat we behalve de reële getallen en het getal i ook getallen $a + bi$ in ons nieuwe stelsel krijgen.¹⁾ Het rekenen verloopt normaal, met dien verstande, dat we conform onze aanname, dat i een wortel is van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ moeten schrijven $i^2 = -1$. De regels voor de optelling en de vermenigvuldiging worden dus:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Men moet nu natuurlijk aantonen, dat men in zijn opzet geslaagd is, d.w.z. dat men inderdaad weer een lichaam gekregen heeft, dat dit lichaam een deellichaam heeft dat isomorf is met R en dat de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ een wortel in het nieuwe systeem heeft. We zullen dit niet doen. Ik wil trachten de grote lijnen aan te geven en het lezen niet door detailwerk te bemoeilijken. Wie lust heeft, kan het zelf uitwerken; het is niet moeilijk.

De gevolgde methode heet de methode door *adjunctie* en wel adjunctie van een wortel van $x^2 + 1 = 0$.

De vraag is nu, welk offer we gebracht hebben. Omdat we nog steeds een lichaam hebben, kan het verlies alleen daarin gelegen zijn, dat dit lichaam niet meer conform O1—4 geordend kan worden. De onmogelijkheid hiervan is een direct gevolg van de volledigheid van het stelsel R .

Men kan natuurlijk wel ordeningen teweeg brengen, die aan een deel van de axioma's O1—4 voldoen. Dit is een aardige sport, maar het brengt ons niet veel verder.

b. Een andere manier om het stelsel R uit te breiden berust op het beschouwen van transformaties. De reële getallen zijn isomorf met de vermenigvuldigingen van het platte vlak t.o.v. een vast punt O . Tot deze vermenigvuldiging behoort de spiegeling t.o.v. O , dat is dus de vermenigvuldiging t.o.v. O met -1 . Hierboven hebben we de vraag gesteld naar de existentie van een getal, waarvan het kwadraat gelijk aan -1 is. We vragen nu analoog, of er een transformatie te vinden is, waarvan het kwadraat (dus het resultaat als deze transformatie tweemaal achtereen uitgevoerd wordt) de spiegeling t.o.v.

¹⁾ In het vervolg stelt een cursieve kleine latijnse letter altijd een reëel getal voor (behalve x in vergelijkingen).

O is. Een dergelijke transformatie is gemakkelijk te vinden. Als we eraan denken, dat een spiegeling t.o.v. O een rotatie om O over 180° is, is het duidelijk, dat een rotatie om O over 90° aan ons doel beantwoordt. We krijgen zo een stelsel transformaties, die bestaan uit de vermenigvuldigingen met a t.o.v. O , die we kortweg met a zullen aanduiden, en de rotatie over 90° om O , die we met de letter i zullen aanduiden. Er zal blijken, dat we, als we van plan zijn met deze transformaties te gaan rekenen, niet kunnen volstaan met alleen rotaties over 90° te beschouwen. Ons nieuwe „getalsysteem” zal daarom bestaan uit de groep van de transformaties, die samengesteld zijn uit een vermenigvuldiging t.o.v. O en een draaiing om O .

Neem nu in het platte vlak een rechthoekig coördinatenstelsel met oorsprong O en leg langs de assen eenheidsvectoren $\mathbf{e}_1(1,0)$ en $\mathbf{e}_2(0,1)$. ¹⁾ We kunnen dan elke transformatie van onze groep karakteriseren door een vector, namelijk de vector, die het beeld is van $\mathbf{e}_1$. In fig. 2 is getekend de vector, die correspondeert met de transformatie, die bestaat uit een vermenigvuldiging met 2 en een draaiing over 30° .

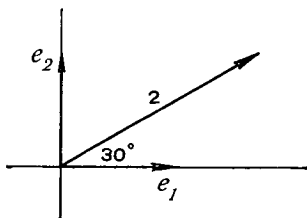


Fig. 2.

Nu moeten rekenoperaties gedefinieerd worden. De optelling van twee transformaties definiëren we door middel van de optelling van de corresponderende vectoren. D.w.z. als met de transformaties α en β de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ corresponderen, dan verstaan we onder $\alpha + \beta$ de transformatie, waarmee de vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ correspondeert.

Verder verstaan we onder het produkt $\alpha \cdot \beta$ de transformatie, die resulteert, als eerst β en daarna α uitgevoerd wordt.

Gemakkelijk is nu aan te tonen, dat we ons doel weer bereikt hebben. Om te beginnen heeft de optelling de vereiste eigenschappen, omdat de vectoroptelling deze heeft. Verder kunnen we elke vector schrijven $r(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi)$. We zien dan dat vermenigvuldiging geschiedt door de beide r 's te vermenigvuldigen en de beide φ 's op te tellen. Commutatieve en associatieve eigenschap

¹⁾ Vet gedrukte letters stellen steeds vectoren voor.

benevens het bestaan van een eenheidselement en een inverse zijn hiervan een direct gevolg. De distributieve eigenschap levert nu weinig moeilijkheden meer. De deelverzameling van de vectoren ae_1 is isomorf met de reële getallen en $e_2 \cdot e_2 = -1 \cdot e_1$. En hiermee is dus duidelijk, dat we ons doel bereikt hebben.

Het zo verkregen stelsel heet het stelsel van de complexe getallen. We duiden het aan met de letter C.

Onder de absolute waarde van een complex getal verstaan we de grootte van de sub b ermee corresponderende vector. De absolute waarde van $a+bi$ is dus $\sqrt{(a^2+b^2)}$. De getallen $a+bi$ en $a-bi$ heten toegevoegd complex. Ze zijn gekenmerkt door de eigenschap, dat zowel hun som als hun produkt reëel zijn. Is α een complex getal, dan stellen we het toegevoegd complexe getal door $\bar{\alpha}$ voor.¹⁾ De absolute waarde van α is dan gelijk aan $\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$.

In het voorgaande hebben we de complexe getallen ingevoerd door ze te identificeren met een groep transformaties. Elke transformatie kan door een matrix beschreven worden. Het ligt voor de hand, dat de invoering van complexe getallen met behulp van transformaties vervangen kan worden door een invoering door middel van matrices.

Een rotatie om O in het platte vlak kunnen we beschrijven door de transformatieformules:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}$$

De transformatiematrix is dus

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Voeren we een transformatie uit, die samengesteld is uit een rotatie om O en een vermenigvuldiging t.o.v. O , dan zijn de transformatieformules:

$$\begin{aligned}x' &= ax - by \\ y' &= bx + ay.\end{aligned}$$

De transformatiematrix is dus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Verder hebben we met behulp van vectoren een optelling van transformaties gedefinieerd. Onderstel, dat twee matrices de vector

¹⁾ Voortaan stelt een kleine griekse letter een complex getal voor.

$\mathbf{e}_1(1,0)$ overvoeren resp. in $a_1\mathbf{e}_1+b_1\mathbf{e}_2$ en $a_2\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2$. Dan zal de som van deze transformaties $\mathbf{e}_1(1,0)$ overvoeren in $(a_1+a_2)\mathbf{e}_1+(b_1+b_2)\mathbf{e}_2$. De transformatiematrix van de eerste transformatie is van de vorm (1); bovendien volgt uit $x=1$ en $y=0$, dat $x'=a_1$ en $y'=b_1$. Dan moet de transformatiematrix zijn

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Analoog zijn de matrices van de tweede transformatie en van de somtransformatie

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Tellen we dus twee transformaties op, dan worden ook hun matrices opgeteld.

We gaan nu twee transformaties vermenigvuldigen, d.w.z. na elkaar uitvoeren. Is de eerste transformatie (β)

$$\begin{aligned} x' &= a_1x - b_1y \\ y' &= b_1x + a_1y \end{aligned}$$

en de tweede (α)

$$\begin{aligned} x'' &= a_2x' - b_2y' \\ y'' &= b_2x' + a_2y', \end{aligned}$$

dan is het produkt van de beide transformaties $(\alpha \cdot \beta)$

$$\begin{aligned} x'' &= (a_1a_2 + b_1b_2)x - (b_1a_2 + a_1b_2)y \\ y'' &= (a_1b_2 + b_1a_2)x + (a_1a_2 + b_1b_2)y. \end{aligned}$$

De matrix, die bij de transformatie $\alpha \cdot \beta$ hoort, is dus het produkt van de matrices, die bij α en β horen.

In plaats van de complexe getallen met transformaties te identificeren, kunnen we dus ook de complexe getallen identificeren met de bijbehorende transformatiematrices, omdat beide systemen isomorf zijn t.o.v. de optelling en de vermenigvuldiging.

Opmerking verdient, dat de optelling van matrices volgens de normale regels verloopt. De vermenigvuldiging gehoorzaamt aan de associatieve wet en is distributief t.o.v. de optelling. Dat het bijbehorende systeem van complexe getallen deze eigenschappen heeft, is daarvan een automatisch gevolg. Minder vanzelfsprekend is, dat het zo verkregen getalsysteem de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging gehoorzaamt en dat elk getal ongelijk 0 een inverse heeft t.a.v. de vermenigvuldiging. Immers het rekenen met matrices gehoorzaamt niet aan deze wetten. We beschouwen echter maar een zeer beperkte matrixverzameling, nl. de matrices van de

vorm (1). Voor deze beperkte verzameling matrices geldt de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging wel en bovendien hebben deze matrices een inverse als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ (omdat hun discriminant dan ongelijk aan 0 is). Hiermee is nogmaals duidelijk gemaakt, dat het ontstane getsysteem een lichaam is.

Willen we nu ook duidelijk „zien”, dat we het lichaam van de complexe getallen gekregen hebben, dan merken we eerst op, dat

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eerste matrix in het rechter lid is de eenheidsmatrix. De tweede stellen we voor door i . Het rechter lid kan dan geschreven worden $a \cdot 1 + b \cdot i$ of kortweg $a + bi$. De matrixvermenigvuldiging levert direct, dat $i^2 = -1$.

4. *Kan het stelsel van de complexe getallen uitgebreid worden?* Men zou geen mathematicus zijn, als men niet de vraag voelde opkomen, of het systeem C zich laat uitbreiden. Of, preciezer geformuleerd, bestaat er een lichaam, dat niet isomorf met C is en dat een deellichaam heeft, dat wel isomorf met C is?

Het antwoord luidt bevestigend. Zoals bekend vormen de polynomen met complexe coëfficiënten een ring. Deze ring heeft geen nuldelers en kan dus uitgebreid worden tot een lichaam, het zg. quotiëntenlichaam van de ring. Dit lichaam bestaat uit alle quotiënten van twee polynomen met complexe coëfficiënten (met noemer $\neq 0$). Een deellichaam vormen de polynomen met noemer 1 en als teller een constante. Dit deellichaam is isomorf met het systeem C .

Toch kan ik mij voorstellen, dat iemand met enige teleurstelling reageert, omdat hij eigenlijk een dergelijk soort uitbreiding niet bedoeld heeft. Laat zich nu ook vastleggen, wat wel de bedoeling is? Om paal en perk te stellen aan de wijze van uitbreiden, stellen we vast, dat het systeem C een tweedimensionale vectorruimte is. D.w.z. er zijn twee operaties gedefinieerd in C , t.w. de optelling en de vermenigvuldiging met een reële factor. C vormt een groep t.a.v. de optelling, terwijl de vermenigvuldiging de volgende eigenschappen heeft:

$$a(bp) = (ab)p, \quad a(p+q) = ap + aq, \quad (a+b)p = ap + bp, \quad 1 \cdot p = p.^{1)}$$

¹⁾ Deze vermenigvuldiging met een reëel getal, de zg. scalaire vermenigvuldiging van vectoren, moet niet verward worden met de vermenigvuldiging van twee complexe getallen. Dat er een vermenigvuldiging gedefinieerd is, die uit twee vectoren (complexe getallen) een nieuwe vector (complex getal) afleidt, is niet essentieel voor een vectorruimte.

Bovendien geldt $ap=pa$, d.w.z. links- en rechtsvermenigvuldiging van een vector met een reëel getal (scalair) leveren hetzelfde resultaat op (hetgeen niet in elke vectorruimte het geval is).

Deze vectorruimte is tweedimensionaal. Want elke vector, dat wil dus zeggen elk complex getal, is te schrijven in de vorm $a \cdot 1 + b \cdot i$. Er zijn dus twee basisvectoren, 1 en i , waarvan alle vectoren een lineaire combinatie zijn.¹⁾

We stellen nu de volgende vraag: is het mogelijk het systeem C uit te breiden tot een lichaam, dat weer een vectorruimte is met eindige dimensie?

Onderstel, dat tot het nieuwe lichaam C' het niet-reële getal j behoort. Dan behoren er ook toe de getallen $j^2, j^3, j^4, \dots$. Onderstel, dat de dimensie van C' n is. Dan zijn dus de getallen $1, j, j^2, \dots, j^n$ lineair afhankelijk. D.w.z. er bestaan reële getallen $a_0, a_1, \dots, a_n$, die niet alle gelijk aan 0 zijn en waarvoor

$$a_0 + a_1 j + \dots + a_n j^n = 0. \quad (1)$$

Neem aan, dat $a_n \neq 0$ (als dit niet het geval is, verandert de aard van de redenering niet). Dan is (1) een polynomium met reële coëfficiënten en kan dus ontbonden worden in factoren, die alle van de graad 1 of 2 zijn. Dus in factoren van de vorm $b+cj$ en $b+cj+dj^2$. Het getal j maakt dan minstens één van deze factoren 0. Als deze factor een eerstegraadsfactor is, dan is j zelf reëel, in strijd met de onderstelling. Als j een tweedegraads factor 0 maakt, dan is dus

$$dj^2 + cj + b = 0$$

Of, na deling door d ,

$$\begin{aligned} j^2 + c'j + b' &= 0, \\ (j + \tfrac{1}{2}c')^2 &= -f, \end{aligned}$$

waarin $f > 0$, omdat j anders reëel was. Stel nu

$$j' = \frac{j + \frac{1}{2}c'}{\sqrt{f}}. \quad (2)$$

We zien dan, dat $j'^2 = -1$.

Hieruit volgen twee voor ons belangrijke resultaten:

1. Voor elk nieuw (niet-reëel) getal van een uitbreiding van C (of van R) tot een lichaam, dat tevens een vectorruimte van eindige

¹⁾ We kunnen nu meteen zien, dat het quotiëntenlichaam van de polynomen, dat boven een uitbreiding van het systeem C genoemd werd, inderdaad een uitbreiding is en niet isomorf met C is. De reden is, dat het geen tweedimensionale vectorruimte is, omdat er geen twee elementen aan te wijzen zijn, waarvan alle andere elementen een lineaire combinatie zijn.

dimensie is, geldt, dat het de wortel is van een tweedegraads-vergelijking $x^2+ax+b=0$ (a en b reëel).

2. Onderstel, dat we C (of R) willen uitbreiden door adjunctie van een getal j . Dan verraadt (2), dat we door adjunctie van j' een systeem krijgen, dat isomorf is met het systeem, dat verkregen is door adjunctie van j . D.w.z. uitbreiding van C (of R) door adjunctie van een nieuw element kan altijd zo geschieden, dat het kwadraat van dit nieuwe element gelijk is aan -1 .

We kunnen nu de vraag naar de mogelijkheid C uit te breiden beantwoorden. Onderstel, dat C zich liet uitbreiden tot een lichaam, dat tevens een vectorruimte was van een dimensie hoger dan 2. Dan was elk getal van dit lichaam te schrijven in de vorm $a_0+a_1i+a_2j+\dots$ (de stippeltjes duiden aan, dat er meer termen komen, eindig in aantal, die ons verder echter niet interesseren). We weten dan uit het voorgaande, dat dit lichaam isomorf is met een lichaam, waarin j vervangen is door een getal j' , waarvoor geldt $j'^2=-1$. Hieruit volgt:

$j'^2=i^2$ en dus $j'^2-i^2=0$, $(j'-i)(j'+i)=0$, $j'=i$ of $j'=-i$.

En dan zou j' geen nieuw getal zijn. Daarmee moeten we de hoop op een uitbreiding opgeven.

Tegelijk valt ons nog een ander resultaat in de schoot. We zien niet alleen, dat elke uitbreiding van R tot een vectorruimte met eindige dimensie een dimensionaal is, maar tevens dat deze uitbreidingen ook alle isomorf moeten zijn. Immers de elementen ervan zijn altijd te schrijven in de vorm a_0+a_1j , waarin $j^2=-1$.

5. *Quaternionen*. Men is alweer geen wiskundige, als men zich nu niet de vraag stelt, of het toch mogelijk is C uit te breiden tot een vectorruimte van eindige dimensie, als men maar bereid is van de eigenschappen van een lichaam iets prijs te geven, en zo ja, wat men dan prijs moet geven.

De methode met behulp van adjunctie heeft ons geleerd, dat uitbreiding zonder het brengen van offers niet mogelijk is. Laten we nu eens de andere methode, dus die met behulp van transformaties (matrices) proberen om tot een uitbreiding te komen. We hebben gezien, dat C isomorf is met de groep van de rotaties om O en vermenigvuldigingen t.o.v. O in een plat vlak.

De matrix van een rotatie is

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Voeren we een rotatie en een vermenigvuldiging uit, dan is de

transformatiematrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Bij de rotatie is de lengte van de vectoren constant. D.w.z. roteren we de vector $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, dan is $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ invariant.

We denken ons nu een soort complexe vectoren van de vorm $\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2$, waarin $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ eenheidsvectoren zijn en ξ_1 en ξ_2 complexe getallen. We kunnen dus ook zeggen, dat we een tweedimensionale vectorruimte beschouwen over het lichaam van de complexe getallen. Het ligt voor de hand de „lengte” van zo’n vector te definiëren als $\sqrt{(\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2)}$. ¹⁾

We willen nu eerst de „rotaties” gaan vinden. Dit moeten natuurlijk transformaties zijn, die de lengte niet aantasten. Laat zo’n transformatie zijn:

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= \alpha\xi_1 + \gamma\xi_2 \\ \xi'_2 &= \beta\xi_1 + \delta\xi_2.\end{aligned}$$

Dan moet, wil de transformatie lengtetrouw zijn,

$$\xi'_1\bar{\xi}'_1 + \xi'_2\bar{\xi}'_2 = \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2.$$

De voorwaarde hiervoor is, zoals men gemakkelijk narekent,

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} &= 1 \\ \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} &= 1 \\ \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} &= 0.\end{aligned}$$

Stel $\bar{\gamma} = -\bar{\rho}\beta$. Dan is $\bar{\delta} = \bar{\rho}\alpha$. We kunnen onze voorwaarden dan ook schrijven

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} &= 0 \\ \rho\bar{\rho} &= 1.\end{aligned}$$

De transformatiematrix is dan

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\rho\bar{\beta} \\ \beta & \rho\bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Laten we nu naast „rotaties” ook „vermenigvuldigingen” toe, dan kunnen we de beperking $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = -1$ laten vervallen.

¹⁾ Indien u het niet plausibel vindt, kan het als volgt plausibel gemaakt worden. In de vectorruimte over de reële getallen is de lengte van een vector $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ gelijk aan $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$, dus aan de wortel uit de som van de kwadraten van de absolute waarden van x_1 en x_2 . Verder is het kwadraat van de absolute waarde van een complex getal ξ gelijk aan $\xi\bar{\xi}$. Vandaar, dat we de lengte van $\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2$ definiëren als $\sqrt{(\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2)}$, dus weer als de wortel uit de som van de kwadraten van de absolute waarden van ξ_1 en ξ_2 .

We kunnen ρ nader bepalen door de voorwaarde te stellen, dat de transformaties een verzameling vormen, die afgesloten is t.o.v. de optelling en de vermenigvuldiging. Schetsmatig gaat dit als volgt. De som van twee transformaties (matrices) moet weer tot de verzameling behoren. Deze som is

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\rho_1\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \rho_1\bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\rho_2\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \rho_2\bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -(\rho_1\bar{\beta}_1+\rho_2\bar{\beta}_2) \\ \beta_1+\beta_2 & \rho_1\bar{\alpha}_1+\rho_2\bar{\alpha}_2 \end{pmatrix}.$$

Het rechter lid moet dus steeds de vorm

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -\rho(\bar{\beta}_1+\bar{\beta}_2) \\ \beta_1+\beta_2 & \rho(\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2) \end{pmatrix}$$

hebben. Hiervoor is nodig, dat $\rho_1=\rho_2$.

We kunnen ons dus beperken tot matrices met een vaste ρ . Nu beschouwen we het produkt van twee dergelijke matrices. Dit is

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\rho\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \rho\bar{\alpha}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\rho\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \rho\bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2-\rho\bar{\beta}_1\beta_2 & -(\rho\alpha_1\bar{\beta}_2+\rho^2\bar{\beta}_1\bar{\alpha}_2) \\ \alpha_2\beta_1+\rho\bar{\alpha}_1\beta_2 & -\rho\beta_1\bar{\beta}_2+\rho^2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \end{pmatrix}.$$

Op dezelfde manier als hierboven zien we nu, dat $\rho=1$ moet zijn. ¹⁾

Ons nieuwe getsysteem zal dus bestaan uit de matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Onderstel nu, dat $\alpha=a_1+a_2i$ en $\beta=b_1+b_2i$, dan kunnen we deze matrix schrijven

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

De eerste matrix is de eenheidsmatrix. Verder stellen we

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = k, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = j.$$

We zien nu, dat ons getsysteem een deelsysteem bevat, dat isomorf is met de reële getallen, nl. de matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

We stellen een dergelijke matrix daarom kortheidshalve door a voor. Onze getallen kunnen we dan schrijven in de vorm $a_1+a_2j+a_3k+a_4$.

¹⁾ Bij de transformatie in het reële vlak deed zich een soortgelijk verschijnsel voor. Stelden we daar de voorwaarde, dat de transformatie lengtetrouw is, dan vonden we niet alleen de rotaties maar ook de spiegelingen. De spiegelingen hebben we moeten uitsluiten. Hadden we dit niet gedaan, dan hadden we een verzameling transformaties gekregen, die niet afgesloten was t.o.v. de optelling.

Met deze getallen moeten we gaan rekenen. We moeten daarbij de regels van de matrixrekening in acht nemen. Doen we dit, dan zien we, dat de optelling „normaal” verloopt. Om de regels van de vermenigvuldiging te vinden, moeten we eerst nagaan, hoe j , k en l onderling vermenigvuldigd worden. We vinden dan

$$j^2 = -1, k^2 = -1, l^2 = -1.$$

Verder

$$jk = l, kj = -l, kl = j, lk = -j, lj = k, jl = -k.$$

Hieruit blijkt, dat de commutativiteit van de vermenigvuldiging verloren is gegaan. ¹⁾ Wel blijven de associatieve en de distributieve eigenschap gehandhaafd, omdat deze voor de matrixvermenigvuldiging gelden.

Het enige, dat we nog niet weten, is of er een deling mogelijk is, zij het dan natuurlijk, dat we twee soorten deling zullen krijgen, een linker en een rechter deling. Om te bewijzen, dat deze delingen mogelijk zijn, is het voldoende aan te tonen, dat elk getal (dat $\neq 0$ is) een inverse heeft. Dit bewijzen we als volgt.

In het systeem van de complexe getallen vonden we, dat deze te verdelen waren in paren toegevoegd complexe getallen, waarvan som en produkt reëel zijn. Hetzelfde doet zich hier ook voor. De paren zijn

$$A = a_1 + a_2j + a_3k + a_4l \quad \text{en} \quad \bar{A} = a_1 - a_2j - a_3k - a_4l.$$

Nu is

$$A\bar{A} = \bar{A}A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

De inverse van A is dan

$$A^{-1} = \frac{1}{A\bar{A}} \cdot \bar{A},$$

d.w.z. het getal, dat uit $\bar{A}$ ontstaat door de vier coëfficiënten ervan door het reële getal $A\bar{A}$ te delen. (Men kan $\sqrt{A\bar{A}}$ weer de absolute waarde van A noemen.)

Nu is de deling mogelijk. De oplossing van $Ax = B$ is namelijk $x = A^{-1}B$ en de oplossing van $xA = B$ is $x = BA^{-1}$.

Verder zien we, dat als A een nieuw getal en a een reëel getal voorstelt, wel $aA = Aa$. De commutatieve eigenschap van de ver-

¹⁾ In het systeem van de complexe getallen hebben we uit $j^2 = k^2$ geconcludeerd $j^2 - k^2 = 0$, $(j - k)(j + k) = 0$, $j = \pm k$. Deze redenering is, nu de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging vervallen is, niet langer juist. Immers $j^2 - k^2 = (j - k)(j + k)$ geldt niet meer.

menigvuldiging blijft dus geldig, als een van de beide factoren reëel is.

Voor ons nieuwe getalsysteem geldt dus:

het is een uitbreiding van het systeem van de complexe getallen, alle rekenregels van een lichaam gelden ervoor met uitzondering van de commutativiteit van de vermenigvuldiging, het is een vectorruimte van eindige dimensie, nl. van dimensie 4, in deze vectorruimte is geen onderscheid tussen links- en rechts-vermenigvuldiging met een scalair (wegens $aA = Aa$).

De zo geconstrueerde getalverzameling heet de verzameling van de *quaternionen*.

6. *Mogelijkheid van verdere uitbreiding.* Is een uitbreiding van het systeem Q van de quaternionen mogelijk, als we als eis stellen, dat de zojuist opgesomde eigenschappen van het systeem behouden blijven? Weer luidt het antwoord ontkennend. We kunnen dit als volgt bewijzen.¹⁾

Bewijs. Onderstel, dat $\mathfrak{A}$ een nieuw getal is. We brengen in herinnering, dat uit de eis van eindigheid van de dimensie van de vectorruimte afgeleid is, dat elk getal wortel is van een vergelijking

$$x^2 + ax + b = 0.$$

(a, b reëel). Er zijn dus reële getallen p en q met de eigenschap, dat

$$\mathfrak{A}^2 = p\mathfrak{A} + q,$$

en dit geldt voor elk getal van het nieuwe stelsel, waarbij p en q uiteraard van $\mathfrak{A}$ afhankelijk zijn.

We beschouwen nu het getal $j\mathfrak{A} + \mathfrak{A}j$. Omdat

$$j\mathfrak{A} + \mathfrak{A}j = (\mathfrak{A} + j)^2 - \mathfrak{A}^2 - j^2,$$

$$(\mathfrak{A} + j)^2 = p_1(\mathfrak{A} + j) + q_1,$$

$$\mathfrak{A}^2 = p_2\mathfrak{A} + q_2,$$

zijn er reële getallen a, b en c zo, dat

$$j\mathfrak{A} + \mathfrak{A}j = a + b\mathfrak{A} + c.$$

We vermenigvuldigen beide links resp. rechts met j en krijgen

$$-\mathfrak{A} + j\mathfrak{A}j = -a + b\mathfrak{A} + cj,$$

$$j\mathfrak{A}j - \mathfrak{A} = -a + b\mathfrak{A} + cj.$$

Hieruit volgt, dat $j\mathfrak{A} = \mathfrak{A}j$ of $b = 0$.

¹⁾ Het bewijs is overgenomen uit G. Pickert und H. G. Steiner, *Komplexe Zahlen und Quaternionen*, p. 494–495, welk artikel voorkomt in *Grundzüge der Mathematik I*, Göttingen 1958. Het lezen van dit artikel heeft mij de stimulans gegeven deze bijdrage voor Euclides te schrijven.

Onderstel $j\mathfrak{U}=\mathfrak{U}j$. Dan is

$$j\mathfrak{U}=\frac{1}{2}aj+\frac{1}{2}b\mathfrak{U}+\frac{1}{2}c,$$

$$\mathfrak{U}=\frac{\frac{1}{2}aj+\frac{1}{2}c}{j-\frac{1}{2}b}$$

en dus was $\mathfrak{U}$ geen nieuw getal. Hieruit volgt, dat $b=0$. Dan is

dus: $j\mathfrak{U}+\mathfrak{U}j=a_j+c$

en analoog

$$k\mathfrak{U}+\mathfrak{U}k=a'k+c',$$

$$l\mathfrak{U}+\mathfrak{U}l=a'l+c''.$$

Nu volgt een slimmigheid, waar men zelf niet gemakkelijk opkomt:

$$l(j\mathfrak{U}+\mathfrak{U}j)k-k(k\mathfrak{U}+\mathfrak{U}k)-l(l\mathfrak{U}+\mathfrak{U}l)=-a+a'+a''-cj-c'k-c''l,$$

of na uitrekenen van het linkerlid

$$2\mathfrak{U}=-a+a'+a''-cj-c'k-c''l.$$

En dus is $\mathfrak{U}$ een quaternion en geen nieuw getal.

Hiermee is de onmogelijkheid aangetoond het stelsel Q op de voorgeschreven wijze uit te breiden.

De volgende vraag is uiteraard: kan het stelsel Q uitgebreid worden op een zodanige wijze, dat we van de gestelde eisen iets laten vallen, en zo ja, wat laten we dan vallen?

Het ligt voor de hand allereerst de matrixmethode te proberen, die ons reeds van R tot C en van C tot Q geleid heeft.

Als getallen van het nieuwe stelsel kiezen we naar analogie van het voorgaande de matrices

$$\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Onderstel dat

$$A=a_1+a_2j+a_3k+a_4l,$$

$$B=b_1+b_2j+b_3k+b_4l.$$

Dan is

$$\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}=a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+a_2 \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}+b_2 \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}+a_3 \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}+b_3 \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}+a_4 \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix}+b_4 \begin{pmatrix} 0 & l \\ l & 0 \end{pmatrix}.$$

Rekenen met deze matrices leidt al snel tot een catastrofe. Zo is b.v

$$\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze laatste matrix heeft een determinant, die gelijk aan 0 is, en heeft dus geen inverse. En daarmee blijkt, dat de opoffering, die ons bij deze uitbreiding van het systeem Q getroosten moeten, wel zeer groot is: de deling is niet meer mogelijk.

Zou het ook mogelijk zijn met geringere opofferingen het systeem Q uit te breiden? Het antwoord luidt bevestigend. Ik kan echter niet meer doen dan U het resultaat meedelen, zoals ik dat gevonden heb in het bovenvermelde artikel van Pickert en Steiner uit de *Grundzüge der Mathematik*.

We laten de associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging vallen. Dan blijkt op één manier een uitbreiding tot een vectorruimte van eindige dimensie met geen verschil tussen links- en rechtsvermenigvuldiging mogelijk te zijn. We krijgen dan een vectorruimte van dimensie 8. De getallen van dit stelsel kunnen we schrijven als paren quaternionen, waarvoor de volgende rekenregels gedefinieerd worden:

$$\begin{aligned} (A_1, B_1) + (A_2, B_2) &= (A_1 + A_2, B_1 + B_2), \\ (A_1, B_1) \cdot (A_2, B_2) &= (A_1 A_2 - B_2 \bar{B}_1, A_2 B_1 + \bar{A}_1 B_2). \end{aligned}$$

Het deelsysteem $(A, 0)$ is isomorf met Q .

Het niet associatief zijn van de vermenigvuldiging blijkt b.v. door te nemen de drie getallen $(0, 1)$, $(j, 0)$ en $(k, 0)$.

De getallen heten de *octaven* van Cayley.

In genoemd artikel is nog meer te vinden. Het is de vraag, of de quaternionen de enige uitbreiding vormen van R tot een vectorruimte van eindige dimensie, waarin links- en rechtsvermenigvuldiging geen verschillend resultaat opleveren en die alle eigenschappen van een lichaam heeft met uitzondering van de commutativiteit van de vermenigvuldiging.

Om ons te oriënteren, merken we eerst op, dat uitbreiding van R tot een vectorruimte van dimensie 2 de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging noodzakelijk in tact laat, vanwege de eis, dat links- en rechtsvermenigvuldiging gelijke resultaten opleveren.

We zullen dus in elk geval twee nieuwe getallen, j en k , moeten adjungeren zo, dat 1 , j en k basis zijn van een driedimensionale vectorruimte. Zonder de algemeenheid te schaden, kunnen we aannemen, dat $j^2 = -1$ en $k^2 = -1$ zoals we in § 4 zagen. Het is nu de vraag, of we kunnen volstaan met een vectorruimte van dimensie 3.

In dat geval zouden jk en kj te schrijven zijn in de vorm $a + bj + ck$.
Onderstel

$$jk = a + bj + ck. \quad (1)$$

Linksvermenigvuldiging met j levert

$$\begin{aligned} -k &= aj - b + cjk, \\ jk &= bc^{-1} - ac^{-1}j - c^{-1}k. \end{aligned} \quad (2)$$

(We mogen door c delen, omdat $c \neq 0$ zou impliceren $-k = aj - b$ en dat kan niet, omdat $1, j$ en k lineair onafhankelijk zijn) Uit (1) en (2) volgt $c = -c^{-1}$ en dat kan niet, omdat c reëel is.

We vinden dus, dat de gevraagde uitbreiding minstens vierdimensionaal moet zijn. Dat alle vierdimensionale uitbreidingen isomorf zijn, vereist een nogal langdradig bewijs, dat U in het bovengenoemde artikel desgewenst kunt nalezen op pag. 493—494.

7. *Samenvatting.*

a. Het systeem R van de reële getallen is een geordend lichaam, waarin de stelling van de bovenste grens geldt.

b. Al dergelijke lichamen zijn isomorf.

c. Uitbreiding is op eenduidige wijze mogelijk, als we de eis van ordening laten vallen. Daardoor ontstaat het lichaam C van de complexe getallen.

d. Uitbreiding van C (of van R) tot een stelsel, dat alle eigenschappen van een lichaam heeft, echter niet de commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging, is op eenduidige wijze mogelijk. Hierdoor ontstaat het systeem Q van het quaternionen.

e. Uitbreiding van Q tot een stelsel, dat alle eigenschappen van Q heeft behalve de associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging, is op eenduidige wijze mogelijk. Hierdoor ontstaat het stelsel van de octaven van Cayley.

Bij deze uitbreidingen is eraan vastgehouden, dat het stelsel een lineaire vectorruimte vormt met eindige dimensie, waarin links- en rechtsvermenigvuldiging gelijke resultaten opleveren.

De dimensies van R, C en Q en van het systeem van de octaven van Cayley zijn resp. 1, 2, 4 en 8.

HET WISKUNDE-ONDERWIJS OP DE ENGELSE MIDDELBARE SCHOLEN ¹⁾

door

Drs. J. SNOEP

Breda

Onder de auspiciën van de Nederlandse Stichting voor Schoolreizen had ik de gelegenheid van 25 september tot 10 oktober 1964 een studiereis naar Engeland te maken. Naast de algemene organisatie van dit onderwijs had uiteraard het wiskunde-onderwijs mijn belangstelling. Tevens had ik de gelegenheid een aantal eindexamenopgaven 1963 te verzamelen, die ik als bijlagen aan dit artikel in vertaling toevoeg. Tot goed begrip van deze opgaven eerst enige opmerkingen over de plaats die het vak wiskunde in het Engelse onderwijs inneemt.

Toelatingsexamen. De lagere school-leeftijd valt in Engeland één jaar vroeger dan bij ons, namelijk van 5 tot 11 jaar. Dit zal wel één der redenen zijn dat er minder aan rekenen wordt gedaan dan in Nederland. Een andere reden is gelegen in de enorme tijd die de Engelse kinderen moeten besteden aan het herleiden van de vele van het decimale stelsel afwijkende eenheden. De beide delen van het toelatingsexamen gingen dan ook over niet veel meer dan de vier hoofdbewerkingen, toegepast op £, shillings en pence, yards, feet en inches, enz. Gevolg is dat de wiskundelessen op de middelbare school zich intens met het gewone rekenen (bv. ontbinding in factoren) moeten bezighouden.

Programma middelbare school. Hoewel in principe de school een veel grotere vrijheid in het samenstellen van het leerplan heeft dan dit bij ons het geval is, neemt de wiskunde op de meeste grammar schools (het best te vertalen als: gymnasium en H.B.S. tezamen) een voorname plaats in: op de scholen welke ik bezocht, gewoonlijk 5 lesuren (van 40 minuten) per week gedurende 5 jaar, en dat verplicht voor alle „streams”. Met deze streams worden parallelklassen bedoeld, maar met dit fundamentele onderscheid dat de a-klas een zwaarder programma te verwerken krijgt dan de

¹⁾ Zie ook het artikel van Dr. H. H. Buzeman „Enige Engelse „Eindexamen”-opgaven voor wiskunde, mechanica en natuurkunde” in *Euclides* 25, p. 107—123.

b-klas, deze het weer zwaarder heeft dan de c-klas, enz. Dit „zwaarder” komt op twee manieren tot uiting: óf een vak wordt in een lagere stream in het geheel niet gegeven (bv. Latijn alleen in de a-stream) óf er wordt voor een vak een wekelijks lesuur meer op de rooster uitgetrokken waardoor de lessen in wat kalmer tempo kunnen plaatsvinden. Zo vond ik soms voor een b-stream 6 uur wiskunde per week tegen de a-stream 5 uur, terwijl het ook voorkomt dat in de examenklas de lagere stream 2 uur tekenen krijgt, desgewenst te vervangen door extra wiskunde!

Eerlijk gezegd, viel mij deze hoge waardering, die aan de wiskunde te beurt valt, een beetje tegen. Ik hoopte in Engeland, het land van de onderwijsvrijheid, de mogelijkheid te vinden dat a-mathematische leerlingen het vak mogen laten schieten of besnoeien. De wiskundeleraar blijft echter de volle 5 jaar met de volledige klas zitten, inclusief de zwakke broeders. En dit weegt des te zwaarder daar „zitten blijven” in Engeland vrijwel niet voorkomt. Degenen voor wie het werk te zwaar is, zakt eenvoudig naar een lagere „stream” af en het programma van de laagste stream wordt — binnen zekere grenzen — aan de zwakste leerling aangepast! Het behoeft geen betoog dat de examenresultaten op vele scholen aanmerkelijk slechter zijn dan gemiddeld bij ons. Dit vervulde dan ook verschillende schoolleiders met grote zorg. Een der oplossingen was, dat men de indeling der streams niet voor alle vakken gelijk maakte, maar per vak verschillend! In zijn volle consequentie trof ik dit systeem aan bij de Yew Tree Comprehensive school te Manchester-Zuid. Deze school had voor elk vak een afzonderlijke verdeling van de leerlingen over de parallelklassen. Daar wel geen twee van de 30 leerlingen van een klas voor elk vak in dezelfde „stream” terecht zullen zijn gekomen, ging deze school er prat op dat elke van de 1300 leerlingen een individuele rooster thuisgestuurd kreeg! Om deze te maken, offerden zowel de rector als de conrector zes vakantieweken op! — Natuurlijk is een dergelijke specificatie slechts mogelijk als al die parallelklassen gelijktijdig wiskunde, gelijktijdig Engels, enz. hebben. En voor dit laatste is weer noodzakelijk dat alle erbij betrokken leraren steeds beschikbaar zijn!

Eindexamen-opgaven. Na vijf jaar (de leerlingen zijn dan 16 jaar oud) vindt dan het examen plaats ter verkrijging van het General Certificate of Education (G.C.E.). De schriftelijke opgaven hiervoor zijn niet landelijk dezelfde, doch worden verstrekt door de combinatie van universiteiten, waarbij de school zich heeft aangesloten. In de bijlagen treft u een voorbeeld van dergelijke opgaven aan. Zij

dragen duidelijk de sporen van het vele reken-onderwijs dat nog heeft plaatsgehad. De stereometrie ontbreekt geheel, terwijl voor de wél opgenomen vakken de eisen wat minder zwaar worden gesteld dan bij ons. Maar het moet óók door de zwakkere „streams” worden afgelegd. Natuurlijk komen er heel wat mislukkingen voor. Beperken deze zich echter tot één of enkele vakken, dan kunnen deze onderdelen het volgend jaar worden overgedaan, met behoud van de cijfers voor de voldoende vakken! De school zelf bepaalt waar de grens ligt waar beneden het gehele examen moet worden herhaald. Dat overdoen van enkele vakken kan vrij gemakkelijk, omdat dit examen nog geen toegang tot de universiteit geeft. Na het GCE examen blijft de leerling gewoon op school!

De „*sixth form*”. Hij komt dan voor nog eens twee jaar in een soort kopklas die voor het toelatingsexamen universiteit opleidt. Deze studie omvat slechts drie vakken, maar die dan ook grondig! In de bijlagen vindt u een voorbeeld, dit is het examen op z.g. „Advanced level”. Elk der vakken wordt 8 à 10 uur per week onderwezen. De leerling heeft wat meer tijd voor zelfstudie dan in voorafgaande schooljaren en krijgt bovendien nog enkele uren „general” (soms met onze „maatschappijleer” te vergelijken). Of hij in alle drie de onderdelen een geslaagd examen moet presteren hangt af van de universiteit waartoe hij de toegang ambieert! De kwaliteit van de Engelse universiteiten loopt namelijk sterk uiteen. Het peil van de opgenomen opgaven voor „Advanced level” zal de lezer de indruk geven, dat men met acht uur per week gedurende twee opeenvolgende jaren toch wel een heel eind komen kan!

EINDEXAMENOPGAVEN

G.C.E., zomer 1963, Universities of Manchester, Liverpool, Leeds, Sheffield, Birmingham.

Ordinary-level

Paper I, 2½ uur. Maak alle A- en drie B-vragen.

Beoordeling: elke A-vraag 9 pt (alleen A5: 10 pt),
elke B-vraag 15 pt (totaal 100 punten).

Sectie A.

A1a. De aanleg van een autoweg kost per mijl £ 500 000. Bereken de kosten per yard, tot in £ nauwkeurig.

Naschrift van de redactie: in een volgend nummer geven we een serie opgaven van meer moderne stijl, o.a. modellen van vraagstukken, zoals men die in de toekomst meent te kunnen geven (naar het werk van het School Mathematics Project).

b. Los op
$$\frac{8}{x} - \frac{6}{x+2} = 1.$$

c. In driehoek ABC is $AB = AC = 20$ cm, $BC = 32$ cm. Bereken hoek C .

A2a. Bereken x als $\sin x = \frac{1}{2} \sin 62^\circ 12'$.

b. Bereken de zijde van een regelmatige veertighoek, ingeschreven in een cirkel met straal van 8 cm.

c. Los op: $8 = 2 \sqrt{9 + x}$.

A3a. Bereken de stompe hoek x als $\sin x = \frac{35}{37}$, zonder gebruik van tafels.

b. Vereenvoudig
$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

c. Uit P trekt men een raaklijn aan een cirkel met middelpunt O , raakpunt T . De lijn OP snijdt de cirkel in S , hoek $TPS = 20^\circ$. Bereken de stompe hoek in driehoek TPS .

A4a. Hoeveel graden doorloopt de kleine wijzer van een klok in x minuten?

b. Van een vijfhoek zijn vier hoeken: 30° , 88° , 112° en 145° . Hoe groot is de vijfde hoek?

c. Bereken y als functie van x , als $y' = 6x^2$ en $y = 0$ voor $x = -1$.

A5a. Een gelijkbenig-rechthoekige driehoek heeft dezelfde oppervlakte als een cirkel met straal 10,5 inch. Bereken de zijde van de driehoek $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

b. Van een som geldt is $\frac{2}{9}$ belastingvrij, over de rest wordt 7s.9d. per £ betaald.

Bereken die som als totaal £ 217.— aan belasting wordt betaald.

A6a. Bereken de grootste hoek van een driehoek met zijden 4, 5, 6.

b. $h = \frac{ab}{c}$. Gevraagd de procentuele toeneming van h , als a met 25%, b met 8% en c met 20% toeneemt.

Sectie B.

B7. In driehoek ABC is $AB = 8$ cm, hoek $A = 130^\circ$ en hoek $B = 40^\circ$.

a. Bereken BC en de straal van de omschreven cirkel.

b. De ingeschreven cirkel raakt AB in D . Druk AD en DB uit in de straal van deze cirkel en bereken daarna deze straal.

B8. Gegeven is parallellogram $ABCD$. X is midden van AD , Y van BC . AC snijdt BX in P en XY in Q .

a. Bewijs dat P op $\frac{1}{3}$ van AC ligt.

b. Druk de oppervlakte van QYC , ABP en $PBYQ$ in die van driehoek ABC uit.

B9. Teken de grafiek van $y = x^2 - 5x + \frac{6}{x}$ voor $1 \leq x \leq 5$. Schat uit deze grafiek twee wortels van de vergelijking

$$x^3 + 6 = 5x^2.$$

Bereken de hellingshoek van de raaklijn in het punt $x = 2$ en teken daarna deze raaklijn.

B10. Een fabriek maakt cilindervormige potloden, lang 9 inch en met straal 0,15 inch. De eveneens cilindervormige stift heeft een straal van 0,05 inch en is omgeven door hout. Tijdens de fabricage gaat 12% grafiet en 20% hout verloren. Bereken hoeveel potloden uit 50 kubieke voet grafiet kunnen worden gemaakt en bereken hoeveel hout er nodig is $\left(\pi = 3\frac{1}{7}\right)$.

B11. Een racewagen van 100 pk neemt met eenparige snelheid van 40 m/sec deel aan een race over 300 mijl.

- a. Hoeveel uren en minuten heeft hij hiervoor nodig (stel 5 mijl = 8 km)?
- b. Zelfde vraag voor een wagen van 200 pk, als de snelheid evenredig mag worden aangenomen met de vierkantswortel uit het aantal pk.

Paper II. ¹⁾. 2½ uur, waarin te maken alle onderstaande (A)vragen en nog naar keuze drie mechanica-vragen (hier niet opgenomen).

Sectie A.

- 1a. Een warmwater-installatie, die 200 dagen per jaar gebruikt wordt, verbruikt 70 lb. cokes per dag. Bereken het jaarlijkse cokes-verbruik tegen £ 8.8.0 per ton.
- b. Ontbind volledig in factoren:

$$12x^2 + 6x - 6.$$

- c. In een gelijkbenige driehoek verhouden de hoeken zich als 1 : 2 : 2. Bereken één van de gelijke hoeken.
- 2a. Hoeveel heeft iemand aan belasting betaald (tarief: 3s.3d. per £) als hij ná de betaling £ 1005.— over heeft?

b. Vereenvoudig:
$$\frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 + 2p}.$$

- c. Voor welke x -waarden is de raaklijn aan de kromme $y = x - x^2$ evenwijdig aan de X -as?

3a. Los op:
$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x - 8y = 9. \end{cases}$$

- b. Deel 3 voet 4½ inch door 9 voet 9 inch.
- c. De bisectrix van de buitenhoek bij A van driehoek ABC snijdt het verlengde van BC in D .
Bereken AC , als $AB = 6$, $BC = 5$ en $CD = 4$ inch.
- 4a. De koorde DC van een cirkel wordt verlengd tot een punt X . $DC = CX = 6$ cm. Uit X wordt een tweede snijlijn XAB getrokken (A en B op de cirkel). $AB = 1$ cm. Bereken AX .
- b. In driehoek ABC is hoek $ABC = 60^\circ$, hoek $ACB = 72^\circ$ en $AC = 15,21$ inch. Bereken AB .
- 5a. Hoeveel is $(2x - 5)(2x + 3)$ groter dan $(2x - 7)^2$?
- b. Van vierkant $ABCD$ ligt A op de Y -as, D op de X -as. $OA = 12$, $OD = 5$ inch. Bereken hoek OAD en de afstand van het snijpunt van de diagonalen tot OY .
- 6a. Benader de wortels van de vergelijking $x + \frac{2}{x} = 11$ tot één decimaal nauwkeurig.

- b. Twee plaatsen A en B op het Noordelijk halfrond liggen op dezelfde breedtegraad. De lengte van A is 5° West en die van B is 95° Oost. De afstand AB , gemeten langs de breedtecirkel, bedraagt 3300 mijl.

Bereken: 1°. de straal van deze breedtecirkel,

2°. het aantal graden Noorderbreedte van de beide plaatsen.

(Neem voor de aardstraal 3960 mijl en $\pi = 3\frac{1}{7}$).

¹⁾ Desgewenst paper II te vervangen door IIP (zuivere wiskunde) of door II^s (wiskunde met statistiek). Dit tweede stel is hier niet opgenomen.

Paper IIP 2 uur. Beantwoord 6 van de 7 vragen.

1a. Bereken de positieve waarde van x uit

$$\begin{aligned}\log x + \log y &= 2 && (\text{grondtal } 10, \text{ géén.} \\ \log x + 2 \log 2 &= \log y + 2 \log 5 && \text{tafels gebruiken!}).\end{aligned}$$

- b. Bewijs dat de som van n termen van de rij
 $1.4 + 2.5 + 3.6 + 4.7 \dots$ wordt voorgesteld door $\frac{1}{3} n(n+1)(n+5)$.
- 2a. Bereken op hoeveel verschillende manieren de letters van het woord LATENT op een rij kunnen worden gezet en wel
 1e als alle combinaties moeten beginnen met en eindigen op T;
 2e als de twee letters T op elkaar moeten volgen.
- b. Bewijs:

$$\sin 2A + 2 \sin 4A + \sin 6A = 16 \sin A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A$$

- 3a. Schrijf de formule $15 \cos x - 8 \sin x$
 in de vorm $R \cos(x + a)$,
 waarin R een positief getal en a een scherpe hoek is.
 Bepaal voorts de waarden van x tussen 0° en 360° , welke voldoen aan de vergelijking $15 \cos x - 8 \sin x = 8.5$.
- b. Bereken de waarden van x tussen 0° en 180° , waarvoor

$$\sin(3x + 24^\circ) = \sin 72^\circ.$$

- 4a. Bepaal de vergelijking van de cirkel, waarvan de verbindingslijn der punten $A(1,3)$ en $B(9,9)$ een middellijn is en bewijs dat die cirkel de Y -as raakt.
- b. Bereken de richtingscoëfficiënt van de andere raaklijn vanuit de oorsprong aan deze cirkel.
- 5a. Van een rechthoekig-gelijkbenige driehoek valt de schuine zijde langs de lijn $y = 2x + 3$. Bereken de richtingscoëfficiënt van de gelijke zijden.
- b. Gegeven de punten $P(6t^2, 2t)$ en $Q(4t, 6t^2)$. Bepaal de verzameling van middens van de verbindingslijn PQ als t varieert.
6. De hoogte h voet van het getij, t uur ná de middag, wordt voorgesteld door

$$\text{de formule} \quad h = 14 + 10 \sin \frac{4\pi t}{25}.$$

- Bereken: a. de snelheid waarmee het getij opkomt te 2.05 (antwoord in 2 dec.);
 b. het tijdstip van de vloed en de hoogte daarvan;
 c. het tijdsverschil tussen de eerste twee keren ná de middag, dat de hoogte 20 voet bedraagt (op gehele minuten afronden).

7a. Het punt $P(4,2)$ ligt op de kromme met vergelijking $y = \frac{x}{x-2}$.

De raaklijn in P aan deze kromme snijdt de lijn $x = 2$ in Q en de lijn $y = 1$ in R . Bewijs: $PQ = PR$.

- b. Schrijf de formule op voor $\cos 2x$, uitgedrukt in $\sin x$. Maak met behulp hiervan een schatting tot in 2 dec. van $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \, dx$.

Advanced level. Tijd 3 uur. Maak 7 van de 9 vragen.

- 1a. Bereken de som van n termen van de rekenkundige rij $4 + 9 + 14 + \dots$.
 Wat is de kleinste waarde van n , waarvoor deze som boven 2000 komt?
- b. Schrijf de somformule op voor

$$\text{a. } (1 + r + r^2 + \dots + r^7)$$

Bereken hieruit of op andere wijze de coëfficiënt van x^5 in:

$$x^7 + x^6(1+x) + x^5(1+x)^2 + \dots + (1+x)^7$$

2a. Elimineer x uit de vergelijkingen:

$$\begin{cases} k + \sin x = p \cos x \\ k - \sin x = q \cos x. \end{cases} \quad (p + q \neq 0)$$

b. Schrijf $(5 + 4i)(3 + 2i)$ in de vorm $a + ib$ (a en b reëel).

Ontbind $7 - 22i$ in factoren en maak hier gebruik van om $7^2 + 22^2$ als produkt van twee gehele getallen te schrijven.

c. Schrijf $(1 + 2i)^2$ en $(1 + 2i)^3$ in de vorm $a + ib$ (a en b reëel).

Bereken daarna de reële getallen r en s , waarvoor $1 + 2i$ wortel is van de vergelijking

$$z^3 + rz^2 - 7z + s = 0.$$

3a. Teken op eenzelfde assenstelsel de grafieken van de functies

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^2 \\ y &= (x - 2)^2 + 4 \\ y &= (x - 2)^2 - 4 \end{aligned}$$

Geef op elke kromme de coördinaten van de top en de snijpunten met de assen aan.

b. Bereken de waarden van k , waarvoor de vergelijking

$$x^2 - 4x + k = 0$$

ongelijke, positieve wortels heeft.

c. Schrijf de wortels van de vergelijking op en benader ze met behulp van een binomiaal-ontwikkeling tot en met k^2 , aannemende dat k zó klein is dat k^3 en hogere machten mogen worden verwaarloosd.

4a. Los op voor $0 \leq x < 360^\circ$:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \sin x &= \sin 28^\circ \\ 2^\circ. \sin 2x + \sin^2 x &= 0. \end{aligned}$$

b. Bewijs, dat uit

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c$$

volgt:

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 = \sin^2 b \sin^2 c.$$

c. Bereken $a + b + c$, als bovendien gegeven is, dat alle drie hoeken scherp zijn.

5a. Ontwikkel $e \ln \cos^2 x$ in een reeks naar opklimmende machten van $\sin^2 x$.

Breek af ná de term met $\sin^6 x$. Geef ook de algemene term op.

Voor welke waarden van x in het interval $0 \leq x \leq \pi$ geldt deze reeksontwikkeling?

b. Ontwikkel $y = (2 + x)^2 e^{-x}$

in een reeks naar opklimmende machten van x . Breek af ná de derde term. Dezelfde vraag voor $e \ln y$. Wat is de coëfficiënt van x^n ?

6a. Verifieer, dat driehoek ABC rechthoekig is, als de coördinaten van de hoekpunten zijn

$$A(2, 14), B(-6, 2), C(12, -10).$$

Bereken de coördinaten van:

1°. het punt D , zódanig gelegen op het verlengde van AB , dat $AC = CD$.

2°. het hoogtepunt van driehoek ACD .

- b. A beweegt zich langs de X -as, B langs de Y -as, zó dat $AB = c$ (constant).
Op AB bevindt zich een punt P , zó dat $AP : PB = 1 : 2$. Bewijs, dat P zich op een ellips om O beweegt en bereken de excentriciteit van deze ellips.

7a. $\left. \begin{array}{l} v = u^3 \\ u = \cos t \end{array} \right\}$ Bereken $\frac{dv}{dt}$ uitgedrukt in t .

De parametervergelijking van een kromme is:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{array} \right\}$$

Bereken $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ en bewijs met behulp hiervan dat $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$.

Leid de vergelijking van de raaklijn aan de kromme in het punt t af en vereenvoudig de vergelijking.

- b. Bewijs dat de lengte van de loodlijn uit het punt $(a, 0)$ op deze raaklijn is $q = a (\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t)$.

Bereken $\frac{dq}{dt}$ en daaruit de grootste lengte van deze loodlijn.

- 8a. Bewijs dat uit $(x^2 + 1) \cdot y = x^2$ voor alle waarden van x volgt

$$1^\circ. y \geq 0 \quad 2^\circ. y \leq x^2 \quad 3^\circ. y < 1$$

en dat voor kleine x bij benadering geldt: $y = x^2$.

- b. Bereken de oppervlakte, begrensd door de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ en het gedeelte van de grafiek van $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ tussen $x = 0$ en $x = 1$.
- c. Toon aan dat de inhoud van het omwentelingslichaam bij wenteling van deze kromme om de lijn $y = 1$ wordt voorgesteld door

$$\pi \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

- d. Schat deze integraal met behulp van de substitutie $x = \operatorname{tg} \varphi$.

- 9a. Als gegeven is $y = e^{ax} \sin bx$ (a en b constant), bewijs dan dat

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx}$ een constant veelvoud van y is. Leid daaruit af dat alle positieve extreme waarden van y maxima zijn.

- b. Bereken $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 + x^3)^2}$

- c. Bereken $\int_5^6 \frac{dx}{(x-2)(x-4)}$ tot in drie decimalen nauwkeurig.

DE HELICOGRAAF VAN NICOMEDES

door

Dr. C. J. Vooy's

's-Gravenhage

Van Nicomedes zelf is geen verhandeling over. Hij was een wiskundige uit de helleense oudheid, wiens werkzaamheid omstreeks 200 v. C. plaats vond. Wel vinden wij mededelingen over hem bij latere schrijvers, die zich bezighouden met vraagstukken en onderwerpen op het gebied van de wiskunde. Zo vertelt Pappus van Alexandrië ¹⁾, dat Nicomedes een kromme heeft gevonden, die bekend staat als conchoïde (schelplijn); Proclus ²⁾ Diadochus bevestigt dit en voegt er bij, dat de uitvinder zijn vinding gebruikte bij het drieëndelen van een hoek; Eutocius ³⁾ gaat nog verder en beschrijft zelfs het hulpmiddel dat Nicomedes bedacht om deze kromme te kunnen trekken. Van dit instrument volgt hier de Griekse beschrijving van Eutocius met de Nederlandse vertaling:

„... men moet zich voorstellen twee rechte latten, rechthoekig met elkaar verbonden zo, dat ze in één vlak blijven, bijv. AB en CD ; bovendien in AB een zwaluwstaartvormige groef, waarin een ashouder kan lopen; en op CD in het gedeelte bij D en wel op de lijn die de breedte van CD halveert een rolvormige knop, vastzittend aan de lat en maar weinig boven het oppervlak van deze uitstekend; dan nog een derde lat EF met een spleet GH , die 't eindpunt F dicht nadert; een spleet die draaien kan om de rolvormige knop bij D ; ook nog bij E een ronde opening, die een spil zal omsluiten welke bevestigd is aan een ashouder, welke zich bevindt in de sleuf van de lat AB . Wanneer nu de lat EF met de spleet GH vastgemaakt is aan de rolvormige knop bij D ; en met de ronde opening E aan de spil, die bevestigd is aan een ashouder; wanneer men dan het eindpunt van de lat, K , in de hand neemt en in de richting van A beweegt, daarna in de richting van B ; dan zal punt E zich steeds bewegen op de lat AB ; dan zal de spleet GH

¹⁾ Eind 4e eeuw. ed. Hultsch vol. I lib. III, blz. 58 en lib. IV, blz. 242.

²⁾ 410—485. ed. Friedlein, blz. 272.

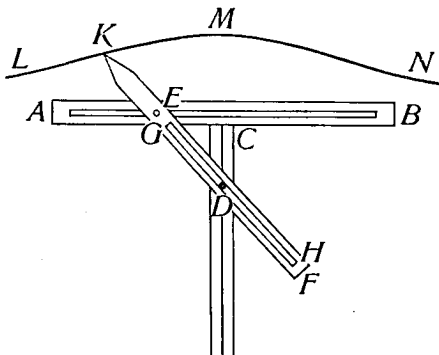
³⁾ ± 500. ed. Heiberg Archimedes III, blz. 114 (commentaar van Eutocius op lib. II).

zich om de rolvormige knop bij D bewegen zo, dat men de middel-lijn van lat EF bij de beweging steeds door de as van de knop ziet gaan en zo, dat ook EK , het uitstekende stuk van EF , gelijk blijft.

Wanneer we ons hierbij nog voorstellen dat bij K een tekenstift is bevestigd, die de grond raakt, zal een lijn getrokken worden als LMN ; Nicomedes noemt dit de eerste schelplijn (conchoïde); het stuk EK van de lat EF noemt hij de straal en D het draaipunt."

Ὡς Νικομήδης ἐν τῷ περὶ κογχοειδῶν γραμμῶν.

... νοεῖν χρή κανόνας δύο πρὸς ὁρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν, καθάπερ εἰσὶν οἱ AB , $\Gamma\Delta$, ἐν δὲ τῷ AB σωλῆνα πελεκαιοειδῇ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τῷ Δ καὶ τὴν μέσον διαιροῦσαν εὐθείαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλινδρῖον συμφυῆς τῷ κανόνι καὶ βραχὺ ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος, ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν EZ μετὰ βραχὺ τι διάστημα τοῦ πρὸς τῷ Z πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα ὡς τὴν $H\Theta$ δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρῖῳ, πρὸς δὲ τῷ E ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκρίσεται εἰς τι ἀξόνιον συμφυῆς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκαιοειδεῖ σωλῆνι τῷ ὄντι ἐν τῷ AB κανόνι. ἐναρμολοσθέντος τοίνυν τοῦ EZ κανόνος κατὰ μὲν τὴν $H\Theta$ ἀνατομὴν ἐν τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρῖῳ, κατὰ δὲ τὴν E ὀπὴν ἐν τῷ ἀξωνίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ K ἄκρου τοῦ κανόνος κινήσῃ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ A μέρη, ἔπειτα ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ B , τὸ μὲν E σημείον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ AB κανόνος ἐνεχθήσεται, ἡ δὲ $H\Theta$ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρῖῳ κινήθήσεται ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ EZ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἀξόνος τοῦ πρὸς τῷ Δ κυλινδρῖου νοουμένης, τῆς δὲ EK ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τῷ K ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεται τις γραμμὴ, ὅλᾳ ἐστὶν ἡ AMN , ἣντινα καλεῖ Νικομήδης κογχοειδῇ πρώτῃν γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ EK μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ Δ .



UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN GYMNASIUM A en B in 1964

WISKUNDE

Door de A-kandidaten werd voor de algebra (eventueel aangevuld met differentiaalrekening of geschiedenis van de wiskunde) gemiddeld 5,2 (vorig jaar 5,1) behaald en voor de meetkunde 5,1 (v.j. 5,1).

Van de 233 A-kandidaten, die in wiskunde geëxamineerd moesten worden, kozen voor het onderdeel algebra

190 de leerstof voor de klassen I-IV met uitzondering van logaritmen en rijen,

34 logaritmen en rijen,

5 differentiaalrekening,

4 geschiedenis van de wiskunde,

0 statistiek.

Het aantal, dat een ander onderwerp koos dan algebra voor de klassen I-IV bedroeg slechts 43 (v.j. 77). Het is begrijpelijk, dat velen er de voorkeur aan geven hier de gemakkelijkste weg te kiezen. Gelukkig gaat dit ermee gepaard, dat men in het algemeen zich wel de moeite getroost deze eenvoudige stof serieus te bestuderen. Het aantal extreem lage cijfers, dat voor de examens gegeven moet worden, neemt dan ook af.

Wat de meetkunde betreft: slechts 29 (v.j. 30) kandidaten kozen de stereometrie, hoewel dit onderwerp niet moeilijker is dan de planimetrie. Tijdnood zal hiervan de oorzaak zijn. Het bleek, dat sommige kandidaten bij het bestuderen van de planimetrie de goniometrie overgeslagen hadden. De subcommissie beschouwt dit als een ernstige tekortkoming.

De resultaten behaald door de B-kandidaten zijn voor de algebra gemiddeld 5,8 (v.j. 4,9), voor de stereometrie (4,8 v.j. 5,1) en voor de goniometrie en de analytische meetkunde 5,7 (v.j. 5,4). Het examen gaf geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

BOEKBESPREKING

F. L. Bauer, J. Heinhold, K. Samelson, R. Sauer, *Moderne Rechenanlagen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1965, 357 pag. met 193 fig., DM 46,80.

Dit boek bevat de belangrijkste onderwerpen, welke iedereen, die met rekenmachines te maken heeft, feitelijk zou moeten weten. Aangezien de kring van deze personen steeds groter wordt en het onderhavige boek als zeer geslaagd kan worden betiteld, valt te verwachten dat het boek zijn weg wel zal vinden. Ook voor de leraar bij H.B.S., Gymnasium of H.T.S. lijkt het uitermate nuttig van dit boek kennis te nemen, opdat hij de leerlingen enerzijds over deze nieuwe ontwikkeling in de wiskunde iets kan vertellen en anderzijds hen gefundeerd kan voorlichten bij vragen over beroepskeuze.

Na de inleiding volgt hoofdstuk 2, waarin nader op de volgende gang van zaken wordt ingegaan. Indien men een probleem wiskundig wil oplossen, dan is de eerste fase aan het probleem een wiskundige formulering te geven. Vervolgens moet een oplossingsmethode worden gekozen. De voor een numerieke oplossing meest geschikte methode kan verschillen van de methode, die gevolgd zou moeten worden om een analytische oplossing te verkrijgen. De keuze van de juiste numerieke methode is het werk van de numericus. Vervolgens moet deze methode worden geprogrammeerd en de laatste fase is de interpretatie van de resultaten.

Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan de problematiek van het numeriek rekenen. Hier wordt in het bijzonder ingegaan op de nauwkeurigheid van berekeningen. Van formules, die analytisch equivalent zijn, kan de ene uit numeriek oogpunt verre boven de andere te prefereren zijn.

Een ander hoofdstuk behandelt Algol, de programmertaal die sterk aan wiskundige problemen is aangepast. Hier tegenover staan de eveneens in het boek besproken machinetalen, waarbij de rekenmachine sneller werkt, maar waarbij het vervaardigen van het programma door de programmeur meer tijd heeft gevraagd.

Andere eveneens belangrijke hoofdstukken, zijn gewijd aan de verschillende vormen van geheugens en in- en uitvoerapparatuur, aan de principiële elektrische schakelingen in digitale rekenmachines en aan analogon rekenmachines.

Alles tezamen genomen, een zeer aanbevelenswaardig boek.

A. I. van de Vooren

Ir. H. M. Mulder, *Stereovisie*, werkschrift — 75 stereo-opgaven in beeld. P. Noordhoff N.V., Groningen, 1964. Prijs f 2,50.

De schrijver gaat er van uit, dat er voldoende werkschriften bestaan, waarin speciaal het constructieve element op de voorgrond staat. Om het tijdrovende tekenen te voorkomen en alleen aandacht te besteden aan het berekenen, werd deze verzameling gecomponeerd.

Burgers

W. E. Hartnett, *An introduction to the fundamental concepts of Analysis*. John Wiley & Sons, London, 1964, 150 blz., 53/-.

Dit boekje behandelt op moderne manier de eenvoudigste begrippen die nodig zijn in de analyse. Reeds in het begin, worden algebra en topologie gescheiden. Centraal staan de rijen, speciaal Cauchy-rijen, die in het reële getallensysteem convergeren. Hiermede worden dan de functies bestudeerd. Uitgaande van een zestal „nonnice” functies, wordt getracht met globale eisen tot „nice” functies te komen. Deze methode blijkt geen succes te hebben. Dan worden lokale eisen opgesteld en komt men tot continue functies die echter nog niet „nice” genoeg zijn. Differentieerbare functies blijken tenslotte aan de vraag te voldoen. Het boek besluit met integreerbare functies.

Techniek in het differentiëren en integreren is bewust achterwege gelaten. Het gaat om het scherp stellen van de begrippen. De behandelde functies passen in ons eindexamenprogramma.

Wenst men kennis te maken met een moderne wijze van behandeling dan kan dit boekje uitstekende diensten bewijzen.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

138. Een torus kunnen we ons ontstaan denken door een cirkel te wentelen om een lijn, die in het vlak van de cirkel ligt en hem niet snijdt. Elk punt van de gegeven cirkel beschrijft dan een cirkel; we zullen een dergelijke cirkel een breedtecirkel van de torus noemen. Elk vlak door de as snijdt de torus volgens een cirkel; een dergelijke cirkel noemen we een meridiaan. Is het nu mogelijk een homeomorf beeld van een torus te ontwerpen, waarbij de beelden van de breedtecirkels meridianen en de beelden van de meridianen breedtecirkels zijn?

139. Voor enige getallen, geschreven in het x -tallig stelsel, geldt

$$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{pqr},$$

$$\overline{pqr} + \overline{rqp} = 111555(x + 1),$$

waarin 111555 tientallig geschreven is. Bereken het grondtal x . Geen getal begint met het cijfer 0.

(L. A. Rang)

OPLOSSINGEN

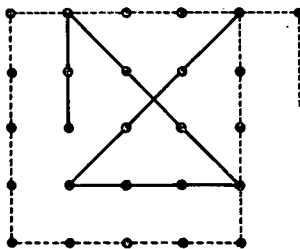
(zie voor de opgaven het vorige nummer)

136. De drie verenigingen, waarvan a en b, a en c, a en d lid zijn, kunnen volgens 2e niet alle drie verschillend zijn. Dus zijn b.v. a, b en c lid van eenzelfde vereniging.

De verenigingen, waarvan a, b en c, a en d, b en d lid zijn, kunnen, weer volgens 2e, niet alle drie verschillend zijn. Het kan dus zijn, dat a, b, c en d lid van eenzelfde vereniging zijn. Het kan ook zijn, dat a, b en d lid van eenzelfde vereniging zijn. In het laatste geval zouden de verenigingen, waarvan a, b en c en waarvan a, b en d lid zijn, twee leden gemeen hebben. Wegens 1e zijn ze dan niet verschillend, zodat ook nu a, b, c en d lid van eenzelfde vereniging zijn.

Het antwoord op de gestelde vraag luidt dus bevestigend.

137. De getrokken lijn heeft betrekking op een stelsel van 9 punten, het gestippelde deel op een stelsel van 16, 25, . . . punten.



Uitgaven voor aktestudie wiskunde m.o.-A en -B

HET EXAMEN WISKUNDE M.O.-A door Prof. Dr. G. R. Veldkamp

Voor hen die zich voorbereiden op het examen wiskunde m.o.-A / ing. f 6.90

PROJECTIEVE MEETKUNDE door Prof. Dr. A. Heyting

O.a. voor hen die zich voorbereiden op de akte m.o.-A / ing. f 12.—; geb. f 13.90

INLEIDING TOT DE ALGEBRA door Prof. Dr. F. Loonstra

Voor gebruik bij de studie wiskunde m.o.-A / 2e druk; geb. f 22.50

VRAAGSTUKKEN OVER ANALYSE EN ALGEBRA door W. J. H. Salet e.a.

Deel 1, voor m.o.-A, 7e druk; ing. f 7.25 / deel II, voor m.o.-B, 3e druk; ing. f 7.75

LEERBOEK DER ANALYSE door Prof. Dr. L. Kuipers

Deel 1, voor m.o.-A, 2e druk; ing. f 16.50; geb. f 18.50 / deel II, voor m.o.-B,
geb. f 22.50

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAALMEETKUNDE door Dr. J. Haantjes

voor studerenden akte m.o.-A / geb. f 11.50

CENTRALE PROJECTIE door Dr. J. G. Rutgers

Voor studerenden akte m.o.-A / ing. f 2.70

P. Noordhoff nv

CONTINU EXPERIMENT

Natuurkunde-methode in werkschriften voor het vhm door Ir. H. M. Mulder e.i.

werkschrift 1 - vaste stoffen, vloeistoffen

werkschrift 5 - stromen, spanningen

werkschrift 2 - kracht, temperatuur

werkschrift 6 - licht

werkschrift 3 - warmte, fasen

werkschrift 7 - trillingen, geluid

werkschrift 4 - magnetisme, stromen

werkschrift 1 t/m 6 - f1.35 / 7 - f1.50

STEREOVISIE

Een nieuw werkschrift stereo voor vhm met 75 opgaven in beeld door Ir. H. M. Mulder e.i.

In de op schaal getekende hulpfiguren kan het rekenproces worden vastgelegd. De rechterbladzijden bieden ruimte voor het bewijs en voor de berekening. Achterin het werkschrift symbolen, kwadratentafel, uitkomsten en opmerkingen!

ing. f 2.50

250 OPGAVEN

samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie door C. J. Alders, Dr. L. N. H. Bunt, A. Holwerda, Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. Joh. Wansink.

Algemeen gedeelte, bespreking van de afzonderlijke vakken, algebra, infinitesimaal-rekening, goniometrie, stereometrie (A.- theorie van de scheve projectie; B.-vraagstukken), analytische meetkunde, antwoorden. / 7e druk, ing. f 1.90

P. Noordhoff nv

Wiskunde uitgaven voor het vhmO

ALGEBRA VOOR HET VHMO

door C. J. Alders

deel 1 - 51/55e druk - ing. f 3.25; geb. f 4.15 / deel 2 - 51/55e druk - ing. f 2.90;
geb. f 3.75 / deel 3 - 21/23e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.10 / antwoorden

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door C. J. Alders

21e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.75 / antwoorden gratis

GONIOMETRIE VOOR HET VHMO

door C. J. Alders

21/25e druk - ing. f 2.25; geb. f 3.15 / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO

door C. J. Alders

21/23e druk - ing. f 2.90; geb. f 3.80

PLANIMETRIE VOOR HET VHMO

door C. J. Alders

31/35e druk - ing. f 3.75; geb. f 4.65

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET VHMO

door C. J. Alders

29e druk - ing. f 3.50; geb. f 4.40

ALGEBRA VOOR M.M.S.

door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

3e druk - ing. f 4.50 / antwoorden f 1.—

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

door M. G. H. Birkenhäger en J. H. D. Machielsen

deel 1 - 2e druk - ing. f 3.90 / deel 2 - ing. f 4.50

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR HET VHMO

door Dr. H. Streefkerk

deel 1 - 5e druk - ing. f 3.25 / deel 2 - 4e druk - ing. f 3.50 / deel 3 - 3e druk -
ing. f 3.75

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET VHMO

door J. C. Kok

2e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.— / antwoorden f 0.75

STEREOMETRIE VOOR HET VHMO

door A. A. Lucieer

13e druk - ing. f 5.—; geb. f 5.75 / antwoorden

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Dr. D. J. E. Schrek - m.m.v. H. Pleysier

4e druk - ing. f 4.50; geb. f 5.25 / antwoorden

P. Noordhoff nv

postbus 39 / Groningen

alle uitgaven verkrijgbaar via de boekhandel of bij de uitgever