

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

VII—1 APRIL 1965

INHOUD

Prof. Dr. F. van der Blij: Problemen bij het onderwijs in de analyse	193
A. F. van Tooren: Een algebra-experiment	201
Korrel	213
Dr. J. T. Groenman: Verwantschap bij een driehoek	216
Uit de Openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos tot de algemene vergadering	219
Boekbespreking	200, 212, 222
Cursussen moderne wiskunde	221
Recreatie	223
Ontvangen boeken	224

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516;
secretaris;

Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;

Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;

Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778

Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;

Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;

Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;

Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;

Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.

Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

Dr. J. KOKSMA, Haren;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;

Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;

Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;

Dr. H. TURKSTRA, Hilversum

Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;

Prof. dr. H. WIELINGA, Amsterdam;

P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

PROBLEMEN BIJ HET ONDERWIJS IN DE ANALYSE ¹⁾

door

PROF. DR. F. VAN DER BLIJ

Utrecht

§ 1. De functie

We beschouwen functies (afbeeldingen) gedefinieerd op een verzameling **A** met waarden in een verzameling **B**. Een functie geven we aan met een letter b.v. f , ook wel uitgebreider door $f: x \rightsquigarrow f(x)$; d.w.z. f is de functie die aan $x \in \mathbf{A}$ toevoegt $f(x) \in \mathbf{B}$.

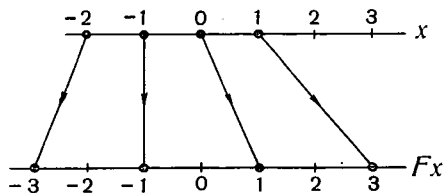
Eigenlijk is het fraaier en consequenter voor de functieaanduiding letters uit een ander alfabet, dan we voor de elementen van **A** en **B** gebruiken, te kiezen. In deze notitie ²⁾ willen we functies steeds met kapitalen uit het Latijnse alfabet aangeven. Voor de functiewaarde $F(x)$ kunnen we dan zonder bezwaar schrijven Fx , daar verwarring met een vermenigvuldiging niet mogelijk is. Wel schrijven we natuurlijk $F(x+y)$, geheel analoog aan de bekende notaties $\sin x$ en $\cos(x+y)$, $\log x$, $\ln x$ etc. etc.

Op drie manieren illustreren we een functie. We kiezen als voorbeeld $F: Fx = 2x + 1$.

1. Door een tabel:

$x =$	-2	-1	0	1	2
$Fx =$	-3	-1	1	3	5

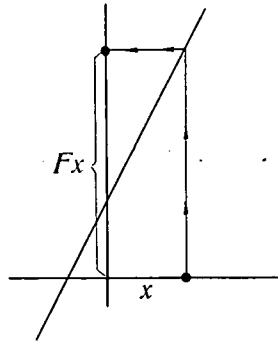
2. Door een schema:



¹⁾ Mede naar aanleiding van een voordracht op de Vakantiecursus 1962 van het Mathematisch Centrum.

²⁾ Zonder dit nu direct voor gebruik in het V.H.M.O. aan te bevelen.

3. Door een grafische voorstelling:



De eerste twee manieren lenen zich bijzonder goed voor de voorstelling van samengestelde functies. Laat F een afbeelding van A in B zijn en laat G een afbeelding van B in C zijn, dan is $G \circ F = K$ de afbeelding van A in C , die gedefinieerd wordt door $Kx = G(Fx)$.

We geven een voorbeeld:

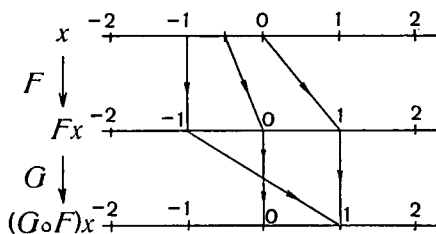
$$F : x \rightsquigarrow 2x + 1 \text{ en } G : y \rightsquigarrow y^2,$$

dan $G \circ F : x \rightsquigarrow (2x + 1)^2$.

In tabelvorm:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
Fx	-1	0	1	3
$(G \circ F)x$	1	0	1	9

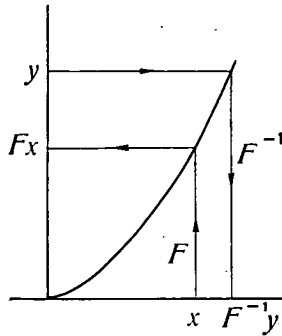
In schemavorm:



Bij niet monotone functies raken in het schema de „tramlijnen” in de war.

De inverse functie is nu zeer eenvoudig te behandelen. We kiezen als voorbeeld $F : x \rightsquigarrow x^2$. F is gedefinieerd voor $\mathbf{R}$, d.i. de verzameling van alle reële getallen, het beeld is de verzameling van de

niet negatieve reële getallen. Bij ieder positief beeldpunt zijn er twee verschillende originelen. Wanneer we F beperken tot het gebied van de niet negatieve getallen wordt door F een één-één-duidige afbeelding van deze verzameling op zichzelf gegeven. Hier heeft ieder beeld dus precies één origineel. De afbeelding, die aan de beelden de originelen toevoegt noemen we de inverse afbeelding F^{-1} . Dus $F^{-1}t$ als $Fs = t$. In de voorstelling van een functie met een tabel of een schema is de gang van zaken duidelijk. Bij de grafische voorstelling:

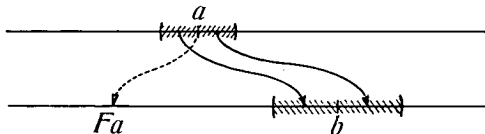


Een ander voorbeeld geeft $G : x \rightsquigarrow 10^x$. Dit is een afbeelding van de reële getallen op de positieve reële getallen. Omdat de afbeelding één-éénduidig is kunnen we de inverse definiëren, G^{-1} is gedefinieerd op de verzameling van de positieve getallen, $G^{-1}y = {}^{10}\log y$.

§ 2. Limieten

Na het functiebegrip komt als fundamenteel en moeilijk begrip de limiet. We beperken ons hier tot de limiet van functies gedefinieerd op de reële getallen met reële waarden. Eigenlijk zouden limieten in het geval van afbeeldingen van een vlak op een vlak aanschouwelijker zijn, de omgevingen op de reële rechte zijn wat „mager”.

Met een schema:



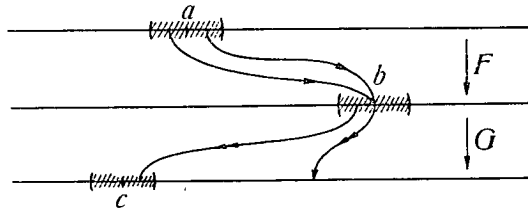
De uitdrukking $\lim_{x \rightarrow a} Fx = b$ is een afkorting voor:

Bij iedere omgeving O_b van b bestaat een omgeving O_a van a zodat voor alle $x \in O_a$ met $x \neq a$ geldt $Fx \in O_b$.

Opmerking: De tramlijn uit a behoeft dus niet te bestaan of zo hij bestaat niet in O_b uit te komen.

Voor de fijnproevers vermelden we nog even dat de mogelijke uitzonderingen bij de stelling van de samengestelde limiet met een schema zeer duidelijk te illustreren zijn. Wanneer geldt $\lim_{x \rightarrow a} Fx = b$ en $\lim_{y \rightarrow b} Gy = c$ maar niet $\lim_{x \rightarrow a} (G \circ F)x = c$?

De uitzondering vinden we in het schema:



In woorden: de uitzondering treedt op wanneer $Gb \neq c$ en in iedere omgeving O_a van a elementen $x \neq a$ met $Fx = b$ liggen.

§ 3. Differentiaalrekening

We willen nu in het bijzonder stilstaan bij de notaties in de differentiaalrekening.

De notatie Δx voor een (kleine) aangroeiing van x zou ik willen uitbannen. Het is verwarrend, Δx is geen produkt van Δ en x , maar ook niet het beeld van x onder een afbeelding Δ . Wat is het dan wel? Niets anders dan een reëel getal, dat we b.v. met de letter h kunnen aangeven. Hoe verwarrend de Δ notatie is blijkt wel uit de problemen ΔF of ΔFx of Δy . We verwerpen alle drie en schrijven voor het bedoelde de, weliswaar wat langere, uitdrukking $F(a + h)$

— Fa . Ook de notatie $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dF}{dx}$ of $\frac{dFx}{dx}$ zou ik in eerste opzet willen

vermijden. We moeten ons met deze notaties steeds excuseren dat het „differentiaalquotiënt” geen quotiënt is, maar dat we, hoewel we het niet als een quotiënt opvatten, er wel als een quotiënt mee mogen rekenen. Men moet of deze notatie niet gebruiken of over quotiënten van differentiaal durven spreken. ¹⁾

Conclusie. We bestuderen de functie F in het punt a . In een punt $a + h$ heeft F de waarde $F(a + h)$. Dit voert tot een verschil $F(a + h) - Fa$.

Nu kunnen we kiezen. We kunnen spreken over een gemiddelde

¹⁾ Ik neem mij voor hier nog eens apart op terug te komen.

aangroeiing $\frac{F(a+h) - Fa}{h}$ en bestuderen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - Fa}{h}$.

Voor deze limiet schrijven we $F'a$. Maar we kunnen ook proberen de aangroeiing zo goed mogelijk te vergelijken met een lineaire aangroeiing (evenredigheid). Dat wil zeggen we trachten in de grafische voorstelling in (a, Fa) een rechte lijn te trekken die de kromme zo goed mogelijk benadert. In formule

We zoeken een getal $F'a$ zodat:

$$F(a+h) - Fa = h \cdot F'a + Eh$$

terwijl $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Eh}{h} = 0$.

(De functie E is zodanig dat Eh „erg” klein wordt voor de kleine h). Deze laatste opzet heeft grote voordelen bij de bewijzen van de formules voor het differentiëren van produkten en van samengestelde functies. Bovendien is het de enige mogelijke definitie wanneer we willen generaliseren naar differentieerbaarheid van functies van meer dan één veranderlijke (d.w.z. functies gedefinieerd op lineaire ruimten).

Bij het differentiëren wordt dus aan een functie F een functie F' toegevoegd. We kunnen nu de verzameling **A** van de differentieerbare functies en de verzameling **B** van de willekeurige reële functies bezien. Als $F \in \mathbf{A}$ dan $F' \in \mathbf{B}$, we hebben dus een afbeelding (functie), gedefinieerd op **A** met waarden in **B**. Als overbodige illustratie schrijven we voor deze functie $\mathcal{D}$ (we moeten nu een nieuw alfabet benutten).

De klassieke regels luiden nu

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\lambda F + \mu G) &= \lambda \mathcal{D}F + \mu \mathcal{D}G, \\ \mathcal{D}(F \cdot G) &= \mathcal{D}F \cdot G + F \cdot \mathcal{D}G, \\ \mathcal{D}(F \circ G) &= (\mathcal{D}F \circ G) \cdot \mathcal{D}G.\end{aligned}$$

In de klassieke en zeker aan te bevelen notatie:

$$\begin{aligned}(\lambda F + \mu G)' &= \lambda F' + \mu G' \\ (F \cdot G)' &= F' \cdot G + F \cdot G' \\ (F \circ G)' &= F' \circ G \cdot G' .\end{aligned}$$

Het is duidelijk dat de laatste notatie, hoewel het functiebegrip er wat in verstopt is, toch te verkiezen is boven de eerste.

We bewijzen nog even de produktregel

$$\begin{aligned}F(a+h) &= Fa + h \cdot F'a + E_1 h \\ G(a+h) &= Ga + h \cdot G'a + E_2 h\end{aligned}$$

dus

$$F(a + h) \cdot G(a + h) = Fa \cdot Ga + h \cdot \{Fa \cdot G'a + F'a \cdot Ga\} + E_3h$$

$$\text{met } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_3h}{h} = 0.$$

Het bewijs van de regel voor het differentiëren van samengestelde functies verloopt analoog.

§ 4. Integraalrekening

Eigenlijk hebben we noch bij de fysische noch bij de wiskundige problemen bij het V.H.M.O. de integraalrekening nodig. In alle eenvoudige toepassingen is het wiskundige probleem bij een gegeven functie F een functie G te bepalen zodat $G' = F$.

Het gaat dus om de „inverse afbeelding” die bij $\mathcal{D}$ hoort. Een inverse afbeelding is alleen te definiëren wanneer $\mathcal{D}$ één-éénduidig is. De vraag is wat af te leiden is uit $\mathcal{D}F_1 = \mathcal{D}F_2$. We vinden dus $\mathcal{D}(F_1 - F_2) = 0$.

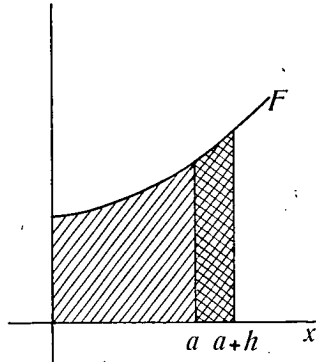
Welke functies worden door $\mathcal{D}$ op de nulfunctie afgebeeld? Wanneer we functies gedefinieerd voor alle reële getallen bezien zijn de constante functies degenen die op de nulfunctie worden afgebeeld. Hier stuiten we op een stelling waarvan het bewijs zeker niet eenvoudig te geven is. We zullen ons tevreden moeten stellen met de aanschouwing en opmerken dat een bewijs mogelijk is.

Zijn de functies b.v. gedefinieerd voor $x \neq 0$, dan is de stelling niet juist, de functie F gedefinieerd voor $x \neq 0$ door $Fx = \frac{|x|}{x}$ heeft in ieder punt de afgeleide 0. Toch is F niet constant, daar $F(1) = 1$ en $F(-1) = -1$. De stelling is juist voor functies die beschouwd worden op samenhangende verzamelingen. Een tweede belangrijke vraag is welke reële functies F komen als beeld onder $\mathcal{D}$ voor?

We noemen slechts één stelling, waarvan het bewijs weer erg moeilijk is, iedere continue functie F is beeld, d.w.z. bij iedere continue functie F is een differentieerbare functie G zodat $\mathcal{D}G = F$.

Het bewijs van deze stelling moet geleverd worden met behulp van de *integraalrekening*, dus via beschouwingen met verdelingen, boven-, onder- of tussensommen enzovoort. Het existentiebewijs dat we zo verkrijgen ligt weer ver buiten het V.H.M.O. programma. Maar de leerlingen nemen zeker genoeg met het plausibel maken van de existentie in voorkomende meetkundige en fysische voorbeelden.

We duiden kort één voorbeeld aan:



We beschouwen de grafische voorstelling van een continue functie F . De gearceerde oppervlakte geven we aan met Gx , hierdoor wordt een functie G gedefinieerd. (Hier poneren we dus zonder bewijs de existentie van de oppervlakte).

Uit figuur 7 zien we dat $G(a+h) - Ga$ de oppervlakte van de dubbel gearceerde strook voorstelt. Een eerste benadering voor deze oppervlakte wordt gegeven door $h \cdot Fa$. De fout, bij deze schatting gemaakt is kleiner dan $h \cdot$ de schommeling van F op $[a, a+h]$. Dus

$$G(a+h) = Ga + h \cdot Fa + Eh \text{ met } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Eh}{h} = 0.$$

Natuurlijk kunt u ook concluderen dat $\frac{G(a+h) - Ga}{h}$ gelijk is aan de „gemiddelde” waarde van F op $[a, a+h]$. Hieruit volgt eveneens $G'a = Fa$. De vraag naar de berekening van de oppervlakte is dus teruggebracht tot de vraag een functie G te construeren zodat $G' = F$. Voor de aardigheid willen we de situatie nog eens formuleren met rijtjes afbeeldingen. In dit eenvoudige geval is het wel wat pedant en „overdone”, maar juist deze rijtjes afbeeldingen drukken in het geval van functies van meer variabelen niet triviale stellingen uit.

Laten $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ abelse groepen zijn en F en G homorfe afbeeldingen. We noemen dan het rijtje

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B} \xrightarrow{G} \mathbf{C}$$

exact wanneer de kern van G , d.i. de verzameling van alle elementen b van $\mathbf{B}$ zodat $Gb = 0$, samenvalt met het beeld van $\mathbf{A}$ onder F in $\mathbf{B}$. Dan is $G \circ F$ de nulafbeelding.

Laat H een ondergroep van een abelse groep G zijn en laten we de groep van de restklassen modulo H aangeven met G/H . Nu geldt dat

$$0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 0$$

een samenstel van drie exacte drietallen is, we zeggen dat hier een exacte rij aanwezig is.

Nu naar onze theorie van de differentieerbare functies. We beschouwen de optelgroep D van de differentieerbare functies met continue afgeleide, C de optelgroep van de continue functies beide gedefinieerd op de verzameling R van alle reële getallen.

We krijgen nu de exacte rij:

$$0 \rightarrow R \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow 0.$$

De afbeelding van R naar D is de injectie, d.w.z. aan ieder getal uit R wordt de constante functie met dit getal als waarde toegevoegd. De afbeelding van D naar C is de differentiatie $\mathcal{D}$.

We merkten boven op dat bij een elementaire behandeling twee stellingen onbewezen moeten blijven. Deze twee stellingen spreken nu juist uit dat onze rij exact is.

BOEKBESPREKING

Z. P. Mamusić, *Introduction to General Topology*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, f 17,50.

Na de derde heroriënteringscursus is er waarschijnlijk veel belangstelling voor boeken over topologie.

Hoewel, volgens de inleiding, enige kennis van de verzamelingsleer en van de theorie van de reële getallen voldoende is om dit boek met succes te lezen, is het m.i. niet helemaal geschikt als studieboek voor de beginner.

De schrijver gaat uit van een begrip, dat hij „gegeneraliseerde topologie” noemt en dat zo algemeen is, dat men, vooral in de eerste hoofdstukken, de kans loopt door de bomen het bos niet meer te zien. Dit neemt niet weg dat veel belangrijke kwesties op zeer grondige wijze worden behandeld. O.a. de vraag naar de metriseerbaarheid van een topologische ruimte. Een ruimte S met topologie Ω heet metriseerbaar als er op S een metriek bestaat waarvan de topologie juist Ω is. Is Ω b.v. niet Hausdorff's dan is S niet metriseerbaar. Zo ontstaat de vraag: Wat zijn nodige en voldoende (topologische) voorwaarden waaraan (S, Ω) moet voldoen opdat de ruimte metriseerbaar is.

Deze voorwaarden zijn, na voorbereidend werk van o.a. P. Alexandrov en P. Urysohn in 1950 aangegeven door Y. Smirnov en J. Nagata. Deze zaak wordt uitvoerig besproken.

Andere onderwerpen die aan de orde komen zijn ruimten met een uniforme structuur en ruimten met abstracte afstand.

Het is een in veel opzichten waardevol boek, dat echter wat moeilijk leesbaar is.

Th. J. Korthagen

EEN ALGEBRA-EXPERIMENT

door

A. F. VAN TOOREN¹⁾

Voorgeschiedenis

Door allerlei omstandigheden heb ik een lange rij van jaren alleen maar in de hogere klassen les gegeven: 4 en 5 h.b.s., V en VI gymnasium. Dat was al begonnen voor de invoering van de differentiaalrekening in het programma. En met het verschijnen van dat vak begint eigenlijk de voorgeschiedenis van het experiment.

Van het begin af aan waren mijn ervaringen met de differentiaalrekening niet erg bevredigend. Diverse malen heb ik getracht deze stof op een behoorlijk niveau aan te pakken. Dat hield dan in, dat ik limiet-definities ging behandelen met de beruchte ε en δ . Maar telkens weer ondervond ik daarbij grote moeilijkheden. Al die epsilontiek kwam niet over het voetlicht heen. „Ze” begrepen er niet veel van.

Dat nam overigens niet weg, dat ik er tenslotte wel in slaagde om mijn leerlingen de techniek van het differentiëren en integreren bij te brengen. Als ze eindexamen doen, dan bieden de gebruikelijke vraagstukken hun geen moeilijkheden meer.

Uit gesprekken met collega's bleek mij, dat ze dezelfde ervaringen opdeden. En ik ben volkomen bereid om aan te nemen, dat deze situatie voor velen van u ook niet nieuw en vreemd is. Wellicht voelt u er zich even onbehaaglijk bij als ik. Een beetje vernederd, doordat je de rol van „dresseur” opgedrongen hebt gekregen.

In de loop van de tijd en na vele gesprekken begon ik te geloven, dat de kern van de moeilijkheden gelegen was in de voorgaande jaren. Daar hadden mijn leerlingen een ontoereikende hoeveelheid inzicht verworven in de eigenschappen van de verzameling der reële getallen. Als eerste stelling in dit betoog zou ik willen formuleren:

Voor een goed gefundeerde behandeling van de differentiaal- en integraalrekening in de bovenbouw is nodig een op dit doel gerichte

¹⁾ Voordracht gehouden op de jaarvergadering van Liwenagel op 28 augustus 1964 te Den Haag.

behandeling in de onderbouw van het functiebegrip en van het getalbegrip. In de praktijk van heden is aan die voorwaarde niet voldaan.

Enkele jaren later heb ik toestemming gekregen om weer eens les te geven aan een paar eerste klassen. En toen kon ik proberen om de vele gedachten eindelijk eens in daden om te gaan zetten. Mijn naaste collega's hebben die daden met veel belangstelling gevolgd en zijn later ook aan het experiment gaan meewerken. Maar daarover vertel ik u straks meer. Voor het ogenblik is het genoeg dat u weet dat mijn experiment gericht is op de vigerende examenstof. Daarbij komt eigenlijk ook nog een tweede kwestie. Het is traditioneel om de meetkunde op te bouwen in het klassieke ritme van definities, bewijzen en stellingen. Natuurlijk kan dat bij de algebra ook zo gebeuren, maar dan vergt dat een grotere hoeveelheid abstractievermogen. En nu was ik domweg nieuwsgierig, hoever ik in deze richting zou kunnen gaan. Houdt u deze kant van de zaak eens in uw gedachten, terwijl ik u vertellen ga, wat ik met mijn leerlingen nu feitelijk gedaan heb.

De natuurlijke getallen

In eerste instantie houd ik me met de prille eerste klassertjes alleen maar bezig met *natuurlijke getallen*. Ik noem de verzameling van de natuurlijke getallen N (hoofdletter) en gebruik ook het elementteken, maar dat is niet essentieel. In N hanteren we eerst slechts één enkele rekenkundige bewerking, de optelling. We bespreken de definitie van optellen in N , de commutatieve en de associatieve eigenschap van de optelling in N en de zogenaamde „voorrangsregel”. Hierin vinden we aanleiding om letters te gebruiken in de plaats van getallen, omdat we daarmee tot kortere, meer kernachtige formuleringen komen. Ter sprake komen:

De definitie: Voor alle $a; b \in N$ betekent $a + b$ het getal waar je eindigt als je bij a begint en dan b getallen verder telt in N . Let wel: $a + b$ wordt als getal beschouwd en niet als opdracht. Ik geloof dat dat essentieel is.

De commutatieve eigenschap: Voor alle $a; b \in N$ is $a + b = b + a$ waar.

De associatieve eigenschap: Voor alle $a; b; c \in N$ is $(a + b) + c = a + (b + c)$ waar.

De voorrangsregel, voor een som van drie termen opgeschreven: Voor alle $a; b; c \in N$ betekent $a + b + c$ het getal $(a + b) + c$. Dit is een definitie, populair beschreven met de woorden „links gaat voor”. Al heel gauw schrijven we ook wel $a + b + c = (a + b) + c$, maar niet voordat de leerlingen in de gaten gekregen

hebben, dat het hier om een afspraak gaat en niet om een eigenschap.

Als illustratiemateriaal gebruiken we in de klas ook wel andere rekenkundige bewerkingen om te laten zien dat niet elke bewerking commutatief is of om te tonen, dat de in de voorrangsregel bevatte afspraak zin heeft, b.v.: $12 : 6 : 2$ kan je alleen maar berekenen wanneer je je rekenschap geeft van die regel. De associatieve eigenschap drukt dus uit, dat je je bij het optellen niet aan die regel hoeft te storen, je mag ook anders associëren.

De behandeling is eigenlijk op twee doelen gericht. We laten de leerlingen zien, dat ze bij het rekenen (met getallen dus) onbewust gebruik maken van de genoemde eigenschappen ($75 + 59 + 25$ reken je uit als $(75 + 25) + 59$; waarom mag dat?). Het eerste doel is dus de bewustmaking. En in de tweede plaats leren we ze het abstracte gebruik van die regels. Daarvan ook nog een voorbeeld. We bewijzen de stelling: Voor alle $a; b; c \in \mathbb{N}$ is $a + b + c = c + b + a$ waar. Dat gaat dan zo:

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= (a + b) + c \text{ volgens voorrangsregel} \\
 &= c + (a + b) \text{ volgens commutatieve eigenschap} \\
 &= c + (b + a) \text{ volgens commutatieve eigenschap} \\
 &= (c + b) + a \text{ volgens associatieve eigenschap} \\
 &= c + b + a \text{ volgens voorrangsregel.}
 \end{aligned}$$

Wanneer het bovengenoemde allemaal verwerkt is, introduceren we de vergelijkingen in de algebra. Daarvoor wordt eerst het begrip substitutie besproken. En dan komt het onderscheiden van verschillende structuren in de formele algebrataal. Een stuk algebrataal, dat door substitutie in een getal kan overgaan, heet een algebraïsche vorm. Bijvoorbeeld is $a + 13$ een algebraïsche vorm en ook $a - 13$. Het laatste voorbeeld laat zien, waarom we zetten: in een getal *kan* overgaan. Substitueer je 5 voor a , dan staat er geen getal. Andere stukjes algebrataal gaan door substitutie over in een bewering, die al dan niet waar kan zijn. Een voorbeeld daarvan is $a \in \mathbb{N}$. Substitueer je 5 voor a , dan staat er een bewering, die waar is. Substitueer je 5,3 voor a dan staat er een leugen. Een vergelijking is een stuk algebrataal, dat door substitutie overgaat in een bewering die de gelijkheid van twee getallen betreft. Voorbeeld: $x + x = 20$. We besteden aan deze kwestie relatief veel aandacht, omdat hier een nieuwe manier van het gebruik van letters voor de dag komt. Bij vergelijkingen gaat het niet meer om het kernachtige formuleren van een algemene waarheid, maar om het zoeken van een substitutie die een ware bewering tot stand brengt. We beperken ons vanzelfsprekend voorlopig tot vergelijkingen met één onbekende.

En nu komt er iets, dat voor ons essentieel is. We spreken pas over een vergelijking, wanneer er twee dingen voor ons gereed staan. In de eerste plaats is dat het stuk algebrataal, dat een bewering kan worden die juist is. Maar in de tweede plaats is nodig een aanduiding, welke substituties toelaatbaar worden geacht. Omdat we nog in N werken, zijn dat voorlopig alleen maar substituties van natuurlijke getallen. Maar van het begin af aan leggen we hierop, ook in onze schrijfwijze, de nadruk. Dat doen we als volgt: $x + x = 20$ ($x \in N$). Juist die toevoeging maakt de leerling visueel duidelijk, dat het hier een vergelijking betreft.

U zult nu wel voelen aankomen, dat hierna meteen de oplosbaarheid van vergelijkingen in het geding wordt gebracht. De als voorbeeld opgeschreven vergelijking $x + x = 20$ ($x \in N$) is oplosbaar en $x + x = 21$ ($x \in N$) is vals.

We beginnen nu het doel van het eerste hoofdstuk te naderen. We gaan namelijk vergelijkingen van een bepaalde soort bespreken, die we noemen optelvergelijkingen in N . Voorbeelden: $x + 45 = 62$ ($x \in N$), $x + 17 = 11$ ($x \in N$). Het gaat ons nu om twee dingen. In de eerste plaats moeten onze leerlingen ervaren, welke vergelijkingen van deze soort vals zijn en welke niet, bovendien dat een niet-valse vergelijking van dit type slechts één wortel heeft. In de tweede plaats komt er een derde manier van het gebruik van letters in de beschouwingen opduiken en dat geeft ons de kans om de abstractie-schroeven weer geleidelijk aan wat straffer aan te draaien. De optelvergelijkingen in N worden als volgt beschreven: Een optelvergelijking in N is een vergelijking, waarvan het bouw-schema luidt $x + a = b$ ($x \in N$); de schemaletters a en b stellen natuurlijke getallen voor.

De eerste manier van het gebruiken van letters is dus te vinden in het kort formuleren van algemene waarheden; karakteristiek daarbij is het optreden van quantoren als „voor alle a ; $b \in N$ geldt...”. (In het tweede jaar gaan we geleidelijk op quantorsymbolen over.) De tweede manier vinden we als een letter zich aanbiedt om door een getal vervangen te worden in de vergelijkingen. De derde wijze is het gebruik van schemaletters.

Tot slot van dit deel van mijn verslag wil ik u nog een enkel voorbeeld geven van een vraagstuk over die schemaletters. Zo'n opdracht luidt bijvoorbeeld: vervang in de volgende zin de schemaletters a en b door zodanige natuurlijke getallen, dat er een ware uitspraak voor de dag komt. En hier is dan die zin: $x + a = b$ ($x \in N$) en $x + b = a$ ($x \in N$) zijn allebei vals.

U kunt zich nu wel voorstellen, dat aan het eind van dit hoofdstuk

een vrij gaaf inzicht ontstaan kan zijn in de voor het vervolg zo belangrijke eigenschappen van de optelvergelijkingen in N.

Het invoeren van S en G.

Dat vervolg wordt dan het invoeren van de negatieve getallen. Ik kan u daarbij tonen wat het kenmerkende karakter van ons experiment nu eigenlijk is. Dat ik bij het voorgaande zo lang moest stilstaan hoop ik u duidelijk te kunnen maken. We hebben dus nu een verzameling optelvergelijkingen, waarvan sommige vals zijn en andere niet. Een pessimist zou zeggen: we hebben dus te veel vergelijkingen. En een optimist zegt: we hebben te weinig getallen. Ziet u goed in, alstublieft, dat het laatste een optimistisch standpunt is. Want met een teveel aan vergelijkingen zit je ten eeuwigden dage opgescheept. Maar een tekort aan getallen kan je opheffen door zelf nieuwe getallen te creëren. Dat betekent niet alleen, dat je symbolen gaat verzinnen die je dan maar getallen noemt en dienst laat doen als wortels van voorheen valse optelvergelijkingen. Het betekent bovendien dat je rekenregels voor die nieuwe getallen moet gaan opstellen. Daarbij heb je eigenlijk een bijzonder grote mate van vrijheid. Je kunt in principe die rekenregels zo gek maken als je wilt. Maar bedenk daarbij wel: hoe gekker je het maakt, hoe moeilijker de algebra verderop zal worden. Dus zetten we onszelf een klem op de neus. Het doel is als volgt: We scheppen nieuwe getallen en komen zo tot een getallenverzameling, die N omvat (dat wordt de verzameling van de gehele getallen, aangeduid door G). We onderzoeken of het mogelijk is zodanige afspraken te maken voor het optellen in G, dat de commutativiteit en de associativiteit gehandhaafd blijft. Per slot van rekening hebben we in het voorgaande duidelijk ervaren hoeveel gemak en profijt we van die beide eigenschappen in N hadden. En blijkt dat dan mogelijk te zijn, dan maken we onze afspraken zorgvuldig klaar en bewijzen tot slot dat we het doel bereikt hebben.

Drie fasen zijn er dus in het gehele strijdplan te onderscheiden en dat kan ik u het beste geleidelijk aan voor ogen stellen.

In het eerste hoofdstuk zijn de oplosbare en valse optelvergelijkingen in N ter sprake gebracht. We schrijven nu series van deze vergelijkingen op, zoals

$$x + 1 = 2$$

$$x + 2 = 3$$

$$x + 3 = 4, \text{ enz}$$

$$x + 2 = 1$$

$$x + 3 = 2$$

$$x + 4 = 3, \text{ enz.}$$

De vergelijkingen in de linkerkolom hebben alle 1 als wortel: die

uit de rechterkolom zijn alle vals. We beschouwen de bovenste vergelijking van de rechter kolom, $x + 2 = 1$. Daarvoor moet een wortel geschapen worden. We noemen de wortel $\bar{1}$ (spreek uit: 1-streep). Dit hoort bij de creatieve eerste fase, maar nu schakelen we meteen om naar de tweede fase. Met dat getal $\bar{1}$ kunnen we al een heel klein beetje rekenen. We weten namelijk al, dat $\bar{1} + 2 = 1$. Dit op grond van de eigenschap van het getal $\bar{1}$ wortel te zijn van $x + 2 = 1$. Maar dat is dan ook alles. We hebben nog niet de geringste kennis omtrent het getal $\bar{1} + 3$, omdat we daarover nog niets afgesproken hebben. Hoe zou die afspraak moeten worden? Wel, zo dat de commutatieve en de associatieve eigenschappen (zo mogelijk) niet in het gedrang komen. Of dat gelukken zal is de vraag. Maar het kan alleen gelukken, als we afspreken, dat $\bar{1} + 3 = 2$. Immers $\bar{1} + 3 = \bar{1} + (2 + 1)$ en $(\bar{1} + 2) + 1 = 1 + 1 = 2$. Hiermee sluiten we voorlopig de tweede, onderzoekende en tastende fase af en keren terug naar de eerste. We doen er namelijk, gezien de ervaringen zoëven, verstandig aan voor de tweede vergelijking van de rechterkolom $x + 3 = 2$ geen andere wortel meer te verzinnen. Onze $\bar{1}$ zal namelijk toch al wortel van die vergelijking moeten zijn omdat we willen afspreken dat $\bar{1} + 3$ gelijk is aan 2. En per slot van rekening hebben we aan één wortel voor die vergelijking genoeg. Zo verder gaande, zien we dat het nuttig is om die $\bar{1}$ tot wortel van elke vergelijking uit die rechterkolom te bombarderen. Daarna nemen we er twee nieuwe kolommen bij:

$$\begin{array}{ll} x + 1 = 3 & x + 3 = 1 \\ x + 2 = 4 & x + 4 = 2 \\ x + 3 = 5, \text{ enz.} & x + 5 = 3, \text{ enz.} \end{array}$$

Als wortel voor de vergelijking $x + 3 = 1$ verzinnen we het getal $\bar{2}$, enzovoorts. Ten slotte voeren we nog het getal 0 in als wortel van de vergelijkingen

$$\begin{array}{l} x + 1 = 1 \\ x + 2 = 2 \\ x + 3 = 3, \text{ enz.} \end{array}$$

en dan zijn we klaar met de eerste fase en al een eind op streek met de tweede. De verzameling G is nu voltooid. Zij omvat in de eerste plaats de verzameling N , verder de verzameling S van de streepgetallen, tenslotte nog het getal 0. Voor het afsluiten van de tweede fase verdiepen we ons dan nog even in problemen, zoals $\bar{5} + \bar{3}$. Ik maak het nu maar kort: $\bar{5} + (\bar{3} + 9)$ zal wel uit moeten draaien op $\bar{5} + 6$ en dus op 1. Dus ook $(\bar{5} + \bar{3}) + 9$ zal wel op 1 uit moeten

draaien, zodat $\bar{5} + \bar{3}$ wortel moet zijn van $x + 9 = 1$. Dus onze afspraak moet leiden tot $\bar{5} + \bar{3} = \bar{8}$.

Rest nog de derde fase, die orde schept, de optelafspraken in G expliciet formuleert en bewijst, dat de optelling in G associatief en commutatief is.

Deze bewijzen zijn niet moeilijk en gaan stellig niet uit boven het bevattingsvermogen van de leerlingen. Wil men ze echter nauwkeurig en in extenso geven, dan wordt het betoog uitermate langdradig. Daardoor wordt het noodzakelijk ten dele te volstaan met aanduidingen. Hetzelfde geldt later voor de bewijzen van de eigenschappen van de vermenigvuldiging.

Het vermenigvuldigen in G

Ik sla nu maar een paar grote stukken over. Daarvan vertel ik u alleen terloops, dat we de aftrekking erbij nemen, die als omkeringsbewerking van de optelling gedefinieerd wordt met behulp van de optelvergelijkingen van de vorm $x + a = b$ ($x \in G$) en dat we de ordening van G bespreken met behulp van die aftrekking. U zult zich daarbij wel kunnen voorstellen, dat het gebruikelijke vaardigheidswerk met haakjes hierbij volledig tot zijn recht kan komen.

Daarna bestuderen we de vermenigvuldiging, uitsluitend in N . In zekere zin gaan we dus weer een stap terug. Dat doen we omdat er nu eerst een nieuwe eigenschap bewust gemaakt moet worden, namelijk de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling $a(b + c) = ab + ac$.

Is dat eenmaal gebeurd, dan wenden we ons tot de vermenigvuldiging in G . Opnieuw zetten we ons daarbij een klem op de neus. We trachten namelijk die vermenigvuldiging zodanig te definiëren dat de commutativiteit, associativiteit en distributiviteit behouden blijven. Dit gelukt heel goed en we komen daarbij tot afspraken als: Voor elke $a \in G$ is $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ en voor alle $\bar{a}, \bar{b} \in S$ geldt $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

Voor de leerlingen is het daarbij, naar ik meen, duidelijk en plezierig dat hetzelfde spel van vroeger, maar nu in een nieuwe vorm gespeeld wordt. De fase van vooronderzoek (hoe willen we onze afspraken laten werken en hoe moeten ze dus luiden) en de bewijsfase (ze werken inderdaad zo als we het wilden) hebben ze immers bij de optelling in G al eerder ontmoet. Ze hebben mij in dit stadium wel meegedeeld: toen begreep ik het niet zo best, maar door de vermenigvuldiging heb ik de optelling ineens veel beter doorgekregen. En een knaapje, dat erg geïnteresseerd was in vliegtuigbouw en daar ook zo het een en ander van afwist, heeft eenmaal het

volgende beeld verzonnen ter vergelijking met dat ondogmatische procédé dat in de klas gevolgd werd: een vliegtuigontwerper denkt zich eerst in welke prestaties een nieuw type zal moeten kunnen leveren; aan de hand daarvan probeert hij te bepalen hoe dat type eruit zal moeten zien, wat voor motor het moet hebben, enzovoorts; daarna vervaardigt hij een prototype en onderzoekt of het ding zich nu werkelijk gedraagt zoals hij dat wilde; precies hetzelfde deden wij en we hebben nog geen enkel prototype moeten afkeuren.

Hetzelfde element van herhaling en opnieuw beleven zit ook in het vervolg.

De invoering van RA

Op het toneel verschijnen namelijk weer vergelijkingen, de vermenigvuldigvergelijkingen in G . Die hebben het bouwschema $a \cdot x = b$ ($x \in G$), waarin de schemaletters a en b gehele getallen voorstellen. En sommige van die vergelijkingen zijn vals, andere niet.

Natuurlijk nemen we weer het optimistische standpunt in en gaan met frisse moed aan het werk om onze getallenverzameling G uit te breiden. Naar de mening van de leerlingen kan dat niet zo moeilijk worden als de eerste keer, want ze zien al aankomen dat nu de gebroken getallen gaan verschijnen en daar menen ze alles van af te weten. Maar . . . voor hen zijn de breuken geassocieerd met de bewerking delen. En wij willen de deling pas behandelen na het invoeren van de breuken, evenals de aftrekking na de invoering van de streepgetallen.

De creatieve fase gaat niettemin erg gemakkelijk. Voor de vergelijking $4 \cdot x = 7$ verzinnen we het getal $7/4$ als wortel. We spreken dit symbool uit als „zeven boven vier” om niet aan delen herinnerd te worden. En evenzo handelen we met alle voorheen valse vermenigvuldigvergelijkingen. Dat gaat in enkele minuten tijd en op een grondige, consequente manier. Ook de vergelijking $0 \cdot x = 7$ was in G vals. Goed, dan verzinnen we daarvoor ook een wortel, namelijk $7/0$.

De nieuwe getallen noemen we dus nu ook maar gebroken getallen, ze vormen samen de verzameling B . En de vereniging van B met G heet de verzameling van de rationale getallen, aangeduid door RA .

Dit is een voorlopige beëindiging van de eerste fase. Straks zullen we daar wel op terug moeten komen.

De tweede fase beperken we eerst tot het onderzoek naar nuttige afspraken voor het vermenigvuldigen in RA . Nuttig is dan in die

zin te verstaan, dat we die afspraken graag zo willen maken dat de commutativiteit, associativiteit en distributiviteit bewaard blijven.

In de eerste plaats laten wij dan onze leerlingen wat stoeien met problemen als het volgende: hoe zal de afspraak, die nog gemaakt moet worden, moeten werken in het geval $8 \cdot 7/4$. De oplossing is als volgt: $7/4$ is verzonnen als wortel van de vergelijking $4 \cdot x = 7$ ($x \in \text{RA}$). Dit betekent, dat we ons al verbonden hebben tot $4 \cdot 7/4 = 7$. Nu is $8 \cdot 7/4 = (2 \cdot 4) \cdot 7/4$. We wensen dat de vermenigvuldiging in RA associatief is. Dus zal $8 \cdot 7/4$ moeten leveren $2 \cdot (4 \cdot 7/4) = 2 \cdot 7 = 14$. Dit brengt ons echter een beetje in moeilijkheden. Want dit betekent, dat onze $7/4$ daardoor wortel wordt van de vergelijking $8 \cdot x = 14$ ($x \in \text{RA}$). Voor die vergelijking hadden we al $14/8$ als wortel gereserveerd. En waarom zouden we in onze scheppingsdrift meer dan één wortel per vergelijking maken?

De redding vinden we dan in het beschouwen van $7/4$ en $14/8$ als verschillende schrijfwijzen voor hetzelfde gebroken getal. Hiermee geven we dus een basis aan het vereenvoudigen van gebroken getallen. Natuurlijk wordt dit niet even in een paar zinnen afgedaan, zoals ik het nu hier doe. We behandelen deze kwestie heel voorzichtig, geven er het nodige oefenmateriaal bij, en werken zoals steeds ook weer naar abstracte formuleringen toe. Tegelijkertijd maken we van de gelegenheid gebruik om de gehele getallen in het schema van de gebroken getallen in te passen. De verzameling B bevatte niet het getal $8/1$, omdat de vergelijking $1 \cdot x = 8$ ($x \in G$) niet vals was. Nu we toch met identificeren bezig zijn, kunnen we gemakkelijk die $8/1$ erbij nemen en beschouwen als een andere schrijfwijze voor het getal 8. Dit stelt ons in staat om de voorlopige definitie van B , die ik u niet meegedeeld heb, aan te vullen en uit te breiden als volgt: RA is de verzameling van de getallen van de vorm a/b , waarin $a; b \in G$. We beschouwen daarbij x/y en p/q als verschillende schrijfwijzen voor hetzelfde rationale getal als er een factor $f \in G$ bestaat zodat $p = fx$ en $q = fy$. We beschouwen bovendien $a/1$ als een andere schrijfwijze voor het gehele getal a .

Intussen zit u zich wellicht nog steeds te ergeren aan die $7/0$. Welnu, ook daar wijden we in de tweede fase een onderzoek aan. En dit leidt tot schrikwekkende ervaringen. Hier is een voorbeeld: $8 \cdot (0 \cdot 7/0) = 8 \cdot 7 = 56$ en $(8 \cdot 0) \cdot 7/0 = 0 \cdot 7/0 = 7$. Ziedaar de ramp. Hier gaat onherroepelijk de associativiteit van de vermenigvuldiging verloren. Hier moet een prototype afgekeurd worden, in de beeldspraak van dat jongetje. Dat wil zeggen, het is onmogelijk onze afspraken zo te maken dat de vermenigvuldiging in RA de door ons gewenste eigenschappen heeft. Tenzij . . . we er vrede mee

hebben dat de vergelijking $0 \cdot x = 7$ ($x \in \text{RA}$) vals is en blijft.

Ik heb van dit punt in de klas een beetje een drama gemaakt tot nu toe. Zo in de geest van: tot nu toe hebben jullie met algemene stemmen aanvaard volgens welke principes we de algebra zouden gaan opbouwen; tot nu toe hebben jullie geen echte moeilijkheden ontmoet, want je kon alle afspraken en definities zelf opstellen in overeenstemming met die principes; nu lukt dat niet meer; nu sta je voor de keus: of je probeert de associativiteit te redden en dan neem je die paar valse vergelijkingen op de koop toe; of je wilt geen valse vergelijkingen overhouden en dan gaat onze algebra een geheel andere en meer ingewikkelde weg op. Welke algebra willen jullie hebben? De keus is aan jullie en de verantwoordelijkheid berust dus ook bij jullie. En dan kiezen ze de associatieve algebra.

De rest van het RA-verhaal sla ik maar over. U kunt het zich wel indenken, dat na de bewijsfase de optelling in RA op dezelfde manier behandeld wordt, dat daarna de deling in RA bestudeerd wordt en de ordening van RA.

De reële getallen

En nu moet ik zo langzamerhand een heel benepen toontje gaan aanslaan. Want nu komt de invoering van de reële getallen aan de beurt. En laat ik daarover maar meteen zeggen, dat ik daarin niet geslaagd ben op een manier die me bevredigt. Ik ben begonnen met de machtsverheffing te bespreken, eerst in $\mathbb{N}$, toen in $\mathbb{G}$ en in RA . De machtsverheffing in $\mathbb{N}$ geeft natuurlijk geen moeilijkheden. En die in $\mathbb{G}$ ook niet. Tenminste, wanneer je als klem op de neus weer hanteert de eis dat de „gemakkelijke” eigenschappen behouden blijven. Zo zijn we heel soepel in het begin van de tweede klas gevorderd tot machten met negatieve gehele exponenten. En het lijkt me wel aardig om daarbij te vertellen als anekdote, dat de leerlingen zelf de eigenschap $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ betitelen als een distributieve eigenschap, namelijk van de machtsverheffing ten opzichte van de vermenigvuldiging. En dat ze uit zichzelf gaan onderzoeken of er ook sprake is van distributiviteit ten opzichte van de optelling, met andere woorden of ook $(a + b)^c = a^c + b^c$. Maar de exponenten in RA hebben het ons moeilijk gemaakt.

Via machtsverheffingsvergelijkingen kwamen we al spoedig tot het inzicht, dat de getallenverzameling RA weer aan een uitbreiding toe was. Als voorbereiding daarvoor ben ik toen eerst gaan praten over decimale breuken, over repeterende decimale breuken, over oneindig voortlopende decimale breuken, maar ik heb niet veel voet aan de grond gekregen.

Niettemin durf ik wel te zeggen, dat mijn leerlingen beter tegen de moeilijkheden in de bovenbouw opgewassen zijn dan hun voorgangers, al ben ik zelf nog niet tevreden. En daarom verwijs ik dit onderwerp liever maar weer naar de studeerkamer.

De tijdskwestie

Een belangrijke vraag, die u wellicht al intrigeert, is natuurlijk: hoe ver kom je nu in de eerste klas en hoever in de tweede. Ik heb namelijk twee jaren gewerkt met mijn klassen, met de derde klas heb ik nog geen ervaringen opgedaan.

Welnu, aan het eind van de tweede klas had ik de volgende onderwerpen behandeld; de merkwaardige produkten en alles wat daar zo mee annex is, zoals ontbindingstypen en enige quotiënten; afbeeldingen en functies in het algemeen; lineaire functies in het bijzonder; grafieken, voornamelijk van lineaire functies; stelsels lineaire vergelijkingen, natuurlijk ook met afhankelijkheid en strijdigheid; vierkantswortels; vierkantsvergelijkingen.

Ik moet hier nog wel bij zeggen, dat het werken met de klas tijdens dit experiment een geheel ander karakter gekregen heeft dan ik kende. Ten dele komt dit door de rol, die het zelf ontdekken en beraadslagen bij de lessen speelt. Maar ook, en dat is wellicht inherent aan elk experiment, doordat de docent zich buiten de paden van zijn gladde, op ervaring berustende didactiek begeeft. Dat kost tijd, en veel tijd ook. Herhaaldelijk ervaar je, dat datgene, wat je thuis zo goed sluitend in elkaar gezet hebt, door de leerlingen slechts met moeite opgenomen wordt, of niet opgenomen wordt. Dan moet je gaan zoeken naar een andere aanpraatmethode en weer opnieuw beginnen. En soms is het wel nodig dat je nog een derde keer begint.

Het gevolg daarvan is, dat je onherroepelijk veel, zeer veel aandacht besteedt aan begripkwesties en wellicht de nodige praktijk en training wat verwaarloost. Doe je het voor een tweede keer, dan komt dat beter tot zijn recht. Bij de derde keer nog beter. En zo bereik je dan tenslotte toch wel weer een stabiele toestand. Pas als die er is, kan je met recht een oordeel gaan vormen over wat je bereikt hebt.

Eigenlijk zijn dit sombere woorden. Want in de grond is door deze kwestie elk experiment een beetje een misdaad. Ik meen voorlopig te mogen zeggen, dat dit experiment geen schadelijke gevolgen heeft voor de leerlingen.

Nu we toch over tijdsindeling spreken, moet ik nog met een andere zaak voor de dag komen. Toen ik met de eerste klassen bezig was,

heeft het maken van stencils en al het piekerwerk me zeer veel tijd gekost. Na dat jaar, wilden mijn collega's in de toen aankomende eerste klassen met mijn stencils werken, terwijl ik met mijn nieuwe tweede klassen verder ging. Natuurlijk hebben ze mijn stencils niet gekregen. Want ik wilde uit mijn ervaringen zoveel mogelijk profijt halen. Ik maakte dus nieuwe, andere stencils voor hun eerste klassen en pionierde tegelijk in mijn tweede klassen. Dat kostte me dubbel zo veel tijd als het jaar daarvoor. Nu schuiven we weer een stapje verder op. Ook hun ervaringen in hun eerste klassen moeten weer verwerkt worden. Maar gelukkig is het niet zo, dat ik voor drie verschillende niveaus tegelijk aan het werk moet gaan in het komende jaar. Dat zou trouwens vrijwel onmogelijk zijn. We steken de koppen bij elkaar en doen het werk samen. We vormen een kleine groep, die samen aan het schrijven en ontwerpen gaat. En eigenlijk is dat de enige manier, waarop een dergelijk experiment gedaan kan worden: in teamwork.

BOEKBESPREKING

Ralph Crouch and George Baldwin, *Mathematics for Elementary Teachers*, John Wiley & Sons, New York - London - Sydney, 1964, 352 + IX blz., 53 sh.

Het boek is geschreven door twee Mexicaanse hoogleraren. Het is bestemd voor wat wij noemen onderwijs aan de kweekschool voor onderwijzers. Vandaar dat de wiskundige achtergrond wordt behandeld van de leerstof der lagere school, t.w. de ontwikkeling van het getalbegrip en enige meetkunde betreffende het meten van lijnstukken, hoeken en de bepaling van oppervlakten.

Op moderne wijze zijn achtereenvolgens behandeld het natuurlijke getal (incl. 0), het gehele getal, het positieve rationale getal, het rationale getal en het reële getal. De behandelingswijze is aangepast aan het doel; het is daarom begrijpelijk, dat de auteurs nogal eens veel water in de wijn gedaan hebben. Voor echte wijnproevers zal kennismaken met dit boek dan ook wel op een teleurstelling uitlopen. Verreweg het best is uit mathematisch oogpunt de invoering van het positieve rationale getal. Het komt mij voor, dat het geheel beter tot zijn recht zou komen, als de invoering van het negatieve getal op even correcte wijze geschied was als die van het positieve rationale. De lezer zou dan beter begrijpen hoe de uitbreiding van de getalsystemen tot stand komt. Een gebrek aan strengheid kan m.i. even verwarrend werken als een te veel. De invoering van het negatieve rationale getal en van het reële getal is zeer summier geschied, omdat de lagere school hiermee toch niet te maken heeft. Het boek is helder geschreven.

P. G. J. Vredenduin

KORREL

(nogmaals functies)

Het functiebegrip heeft zich in de loop van de tijd op allerlei manieren ontwikkeld en het heeft er alle schijn van, dat nu aan deze ontwikkeling een einde is gekomen aangezien de abstractie zover is doorgevoerd dat alleen de verzameling zonder meer (d.w.z. zonder samenhang of ordening) als uitgangspunt wordt genomen. Wat echter een functie precies is, daarover heerst bij verschillende auteurs nog meningsverschil. Om duidelijk te maken waar dit verschil zit wil ik de situatie in haar algemeenheid schetsen, ze met figuren illustreren en daarna enige opmerkingen maken.

We gaan uit van twee verzamelingen X en Y en vormen het Cartesisch produkt $X \times Y = \uparrow (x, y) \cdot x \in X \wedge y \in Y$.¹⁾

Elke deelverzameling $R \subset X \times Y$ noemen we een *relatie*. De verzameling $D = \uparrow x \in X \cdot (x, y) \in R$ heet het domein (domain) van R en de verzameling $B = \uparrow y \in Y \cdot (x, y) \in R$ het bereik (range). In de figuur heb ik voor X en Y twee lijnstukken gekozen. $X \times Y$ is dan het vierkant, R het gearceerde deel, D een deel van X , B een deel van Y . (Hoewel niet noodzakelijk heb ik van X en Y de grenspunten uitgesloten. We kunnen dan X en Y opvatten als de reële getallen.) De verzameling van alle relaties uit $X \times Y$ noem ik E_0 . Door het toevoegen van extra eisen kan ik deelverzamelingen van E_0 verkrijgen. Bekende eisen zijn b.v. die van reflexiviteit, commutativiteit en transitiviteit, welke op zeer illustratieve manier met behulp van analoge figuren zijn te verduidelijken. Voor deze keer neem ik de volgende vier eisen:

E_1 : $\forall x \in X \cdot [(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow y = z]$ functiviteit

E_2 : $D = X$ exhaustiviteit

E_3 : $B = Y$ surjectiviteit

E_4 : $\forall y \in Y \cdot [(x, y) \in R \wedge (z, y) \in R \rightarrow x = z]$ injectiviteit.

Voor het gemak geef ik de deelverzamelingen van E_0 die door het toevoegen van de eisen E_1 ontstaan eveneens met E_1 aan. De benamingen functiviteit enz. stel ik voor naar analogie met de eisen reflexiviteit enz.

¹⁾ $\uparrow$ is de verzamelingvormende kwantor, zie Freudenthal: *Exacte Logica*.

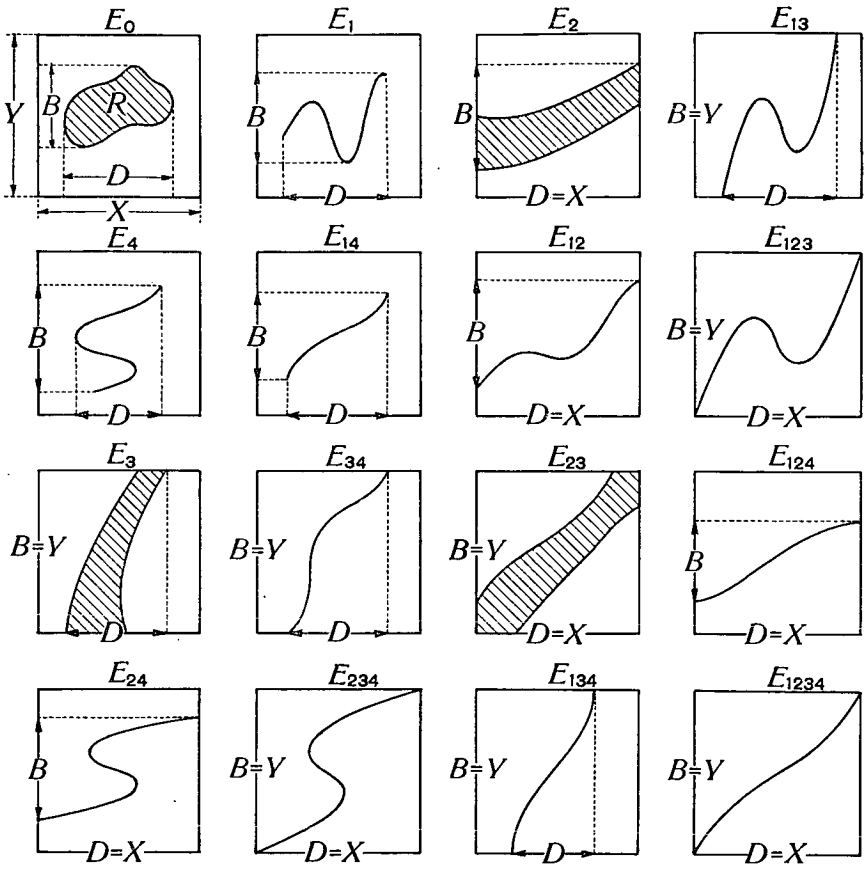


Fig. 1.

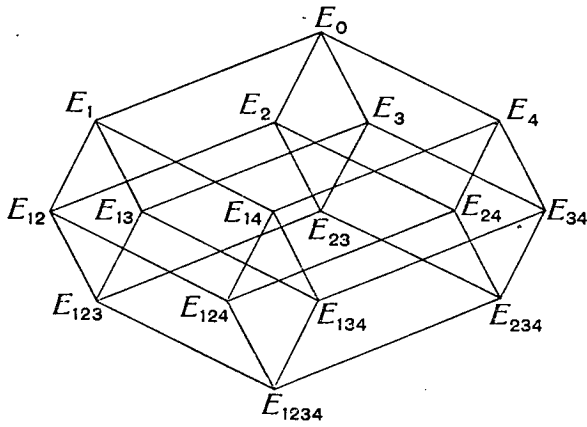


Fig. 2.

De eisen E_i zijn onderling onafhankelijk, zodat zij op alle manieren zijn te combineren (fig. 1). De bijbehorende deelverzamelingen van E_0 vormen een tralie met de volgende graph (fig 2). (Hyperkubus, zie Euclides 33, p. 143 fig. 13).

Deelverzamelingen die door verwisseling van 2 en 3 en 1 en 4 ontstaan zijn elkaars inverse in die betekenis, dat b.v.

$$R \in E_{12} \rightarrow R^{-1} \in E_{34}.$$

In de figuren komt dit tot uiting doordat deze uit elkaar ontstaan door wenteling om de diagonaal: links onder-rechtsboven.

In de literatuur komen de volgende benamingen voor:

- E_1 : functie
- E_{12} : afbeelding in of functie
- E_{123} : afbeelding op of surjectie
- E_{124} : 1 – 1-afbeelding of injectie
- E_{14} : 1 – 1-duidige functie
- E_{1234} : bijectie.

De functie komt dus voor gedefinieerd met E_1 en met E_{12} . Ik geef de voorkeur aan E_1 o.a. vanwege de moeilijkheden die ontstaan bij rijen functies, waarbij het domein mee varieert. Dergelijke rijen zouden uitgesloten zijn met de definitie door E_{12} . Willen we de mogelijkheid van dergelijke rijen openlaten, dan vervalt hierdoor de methode de functie door een afbeelding voort te brengen.

Is het nu gewenst dat we onze leerlingen het functiebegrip bijbrengen in bovengeschetste geest? Ik meen van wel. Zes jaar heb ik hiermee geëxperimenteerd en ik heb er slechts voordelen van gezien. De introductie gaat zeer eenvoudig als we van het plaatje uitgaan. De eisen E_i ($i = 0, \dots, 4$) zijn op zeer aanschouwelijke wijze in het plaatje aan te wijzen en met deze eenvoudige spelregels is al zeer veel te doen. Een groot voordeel is dat de leerlingen van meet af aan een relatie, functie, afbeelding als één geheel, als een totaal zien.

Voorts maakt het een eind aan alle moeilijkheden rondom de Y-as, de y , de $f(x)$ enz. De definitie: $f = \uparrow(x \cdot y) \cdot y = f(x)$ geeft aan wat de rol van de y en de $f(x)$ is.

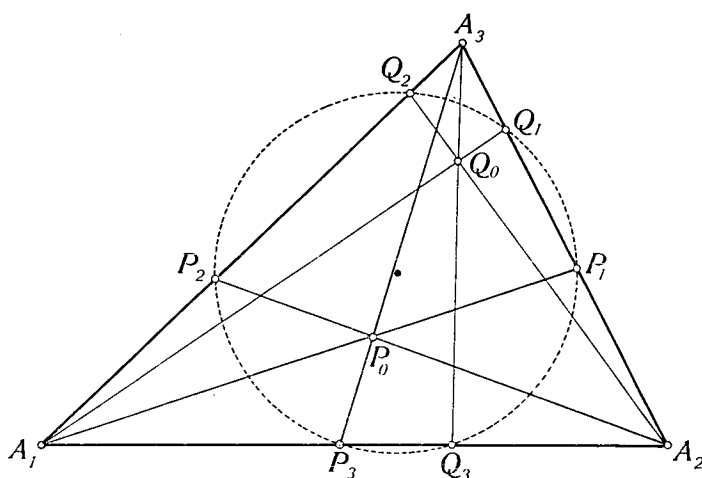
Drs. C. van Schagen
Almelo

VERWANTSCHAP BIJ EEN DRIEHOEK

door

DR. J. T. GROENMAN

Groningen



1. Stelling: De lijnen A_iP_0 zijn concurrent. De cirkel door de punten P_i snijdt de zijden van $\triangle A_1A_2A_3$ voor de tweede maal in Q_i ; $i = 1, 2, 3$. Dan zijn ook de lijnen A_iQ_i concurrent.

Bewijs:

$$\begin{aligned} \frac{A_1Q_2 \times A_3Q_1 \times A_2Q_3}{A_3Q_2 \times A_2Q_1 \times A_1Q_3} &= \frac{A_1Q_2 \times A_1P_2}{A_1Q_3 \times A_1P_3} \times \frac{A_3Q_1 \times A_3P_1}{A_3Q_2 \times A_3P_2} \\ &\quad \times \frac{A_2Q_3 \times A_2P_3}{A_2Q_1 \times A_2P_1} \times \frac{A_3P_2 \times A_2P_1 \times A_1P_3}{A_1P_2 \times A_3P_1 \times A_2P_3} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times -1 = -1 \quad (\text{zie figuren}) \end{aligned}$$

2. Hiermee is een 1—1 verwantschap gevonden ($P_0 \rightleftharpoons Q_0$). Dekpunten zijn de punten van Nagel; hoogtepunt en zwaartepunt van $\triangle A_1A_2A_3$ zijn aan elkaar toegevoegd (cirkel van Feuerbach).

3. De cirkel is voor de stelling niet essentieel. Brengt men door de punten P_i een willekeurige kegelsnede, dan blijft de stelling gelden. Wij gebruiken driehoekscoördinaten.

$$A_1(1, 0, 0); A_2(0, 1, 0); A_3(0, 0, 1); P_0(x_0, y_0, z_0) \\ P_1(0, y_0, z_0); P_2(x_0, 0, z_0); P_3(x_0, y_0, 0).$$

Wij brengen door P_i een willekeurige kegelsnede met vergelijking:

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 = 0 \quad (1)$$

Wij bepalen de snijpunten met bijv. A_2A_3 uit de vergelijking:

$$c_{22}y^2 + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 = 0$$

$$\text{zodat } \left(\frac{y}{z}\right)_{P_1} \times \left(\frac{y}{z}\right)_{Q_1} = \frac{c_{33}}{c_{22}}, \text{ dus } \left(\frac{y}{z}\right)_{Q_1} = \frac{c_{33}}{c_{22}} : \frac{y_0}{z_0} = \frac{c_{33}z_0}{c_{22}y_0}.$$

Wij vinden hieruit

$$Q_1\left(0, \frac{1}{c_{22}y_0}, \frac{1}{c_{33}z_0}\right), Q_2\left(\frac{1}{c_{11}x_0}, 0, \frac{1}{c_{33}z_0}\right), Q_3\left(\frac{1}{c_{11}x_0}, \frac{1}{c_{22}y_0}, 0\right).$$

$$A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3 \text{ gaan alle door } Q_0\left(\frac{1}{c_{11}x_0}, \frac{1}{c_{22}y_0}, \frac{1}{c_{33}z_0}\right).$$

4. Ter verdere bestudering van de in 2 genoemde afbeelding gebruiken we afstandscoördinaten. De vergelijking van een willekeurige cirkel is dan:

$$ayz + bxz + cxy + (px + qy + rz)(ax + by + cz) = 0 \quad (2)$$

(zie hiervoor Rutgers. Inleiding tot de A.M. Deel 1. Pag. 344). Nu gaat de cirkel door $P_1(0, y_0, z_0)$, $P_2(x_0, 0, z_0)$ en $P_3(x_0, y_0, 0)$. Er komt b.v.

$$ay_0z_0 + (qy_0 + rz_0)(by_0 + cz_0) = 0 \text{ of}$$

$$\left. \begin{aligned} qy_0(by_0 + cz_0) + rz_0(by_0 + cz_0) &= -ay_0z_0 \\ px_0(ax_0 + cz_0) + rz_0(ax_0 + cz_0) &= -bx_0z_0 \\ px_0(ax_0 + by_0) + qy_0(ax_0 + by_0) &= -cx_0y_0 \end{aligned} \right\}.$$

Na enig rekenwerk volgt hieruit b.v.:

$$px_0 = \frac{x_0y_0z_0(ax_0 + by_0 + cz_0)(a^2 - b^2 - c^2) + abc(y_0^2z_0^2 - x_0^2y_0^2 - x_0^2z_0^2)}{2(ax_0 + by_0)(by_0 + cz_0)(cz_0 + ax_0)}$$

Stellen we nu:

$$T_1 = x_0 y_0 z_0 (ax_0 + by_0 + cz_0) (a^2 - b^2 - c^2) + abc(y_0^2 z_0^2 - x_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2)$$

$$T_2 = x_0 y_0 z_0 (ax_0 + by_0 + cz_0) (-a^2 + b^2 - c^2) + abc(-x_0^2 y_0^2 + x_0^2 z_0^2 - y_0^2 z_0^2)$$

$$T_3 = x_0 y_0 z_0 (ax_0 + by_0 + cz_0) (-a^2 - b^2 + c^2) + abc(x_0^2 y_0^2 - x_0^2 z_0^2 - y_0^2 z_0^2)$$

$$N = 2(ax_0 + by_0)(by_0 + cz_0)(cz_0 + ax_0)$$

We kunnen dan schrijven

$$px_0 = \frac{T_1}{N}; \quad qy_0 = \frac{T_2}{N}; \quad rz_0 = \frac{T_3}{N}.$$

Uit 3 vinden we voor de coördinaten van Q_0 .

$$x_0^1 : y_0^1 : z_0^1 = \frac{1}{c_{11}x_0} : \frac{1}{c_{22}y_0} : \frac{1}{c_{33}z_0}.$$

Daarin is volgens (1) en (2)

$$c_{11} = ap \quad c_{22} = bq \quad c_{33} = cz$$

$$\begin{aligned} \text{Dus: } x_0^1 : y_0^1 : z_0^1 &= \frac{1}{apx_0} : \frac{1}{bqy_0} : \frac{1}{crz_0} = \frac{N}{aT_1} : \frac{N}{bT_2} : \frac{N}{cT_3} \\ &= bcT_2T_3 : caT_3T_1 : abT_1T_2 \end{aligned}$$

$$\therefore Q_0(bcT_2T_3, caT_3T_1, abT_1T_2).$$

Omdat T_1 enz. van de graad 4 zijn, is de afbeelding van de graad 8.

5. Aan het zwaartepunt $Z\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ blijkt bij controle inderdaad het hoogtepunt $H\left(\frac{1}{\cos \alpha}, \frac{1}{\cos \beta}, \frac{1}{\cos \gamma}\right)$ te zijn toegevoegd.

6. Aan de lijn $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ is toegevoegd de kromme van de graad 8 met vergelijking

$$u_1bcT_2T_3 + u_2caT_3T_1 + u_3abT_1T_2 = 0$$

Deze kromme heeft 4-voudige punten in $A_1A_2A_3$.

UIT DE OPENINGSTOESPRAAK VAN DE VOORZITTER VAN
WIMECOS TOT DE ALGEMENE VERGADERING VAN
29 DECEMBER 1964

In het achter ons liggende verenigingsjaar is er in ons land op onderwijsgebied schijnbaar weinig gebeurd. In feite wordt in vele groepen en commissies hard gewerkt aan de reorganisatie van het onderwijs ten gevolge van het aannemen van de *Mammoetwet*. Het wiskunde onderwijs staat voor een belangrijke verandering van de te doceren stof. Vooral op het Gymnasium en het Atheneum zal de modernisering van de wiskunde zoveel mogelijk moeten worden doorgevoerd. Echter moet er voor worden gewaakt, dat in geen enkele afdeling de elementaire routine in de wiskunde wordt verwaarloosd. Het maken van wat ingewikkelder vormsommen bij de algebra is van grote waarde. Het bevordert het aanleren van de techniek van dit vak en kweekt bovendien een zekere mate van doorzettingsvermogen aan. Al laat men een niet geringe hoeveelheid stof van de planimetrie vallen, toch is de vormende waarde ervan in de lagere klassen bijzonder groot. De resultaten behaald voor de meetkunde aan het einde van de 1e klas zijn veelzeggend omtrent het succes dat de leerlingen ten aanzien van de wiskunde zullen hebben. Het besnoeien van het programma voor de stereometrie kan tijd vrij maken voor het beoefenen van die delen der schoolwiskunde, die van meer belang zijn voor de verdere studie. Dit geldt zowel voor het V.W.O. als voor het H.A.V.O.

Opvallend is de modernisering van de wiskunde in diverse andere landen. Het is bepaald jammer, dat ten aanzien van de coördinatie op dit gebied te weinig tot stand is gebracht, al constateren we wel een zekere activiteit in dit opzicht, getuige het onlangs in Utrecht gehouden internationale colloquium over didactische problemen in de wiskunde. De titel was: *International Colloquial on Modern Curricula in Secondary Mathematical Education*.

De heroriënteringscursussen, die september j.l. zijn gegeven blijken weer van essentieel belang te zijn. Continuering hiervan lijkt ons een dringende noodzaak. Men kan ook overwegen een herhaling van de cursus te geven en wel voor diegenen, die of de eerste cursus hebben gemist of hun nog onvoldoende vaardigheid in de nieuwe materie op peil willen brengen. Aan de initiatiefnemers, de organisatoren en de medewerkende docenten en assistenten komt veel lof toe voor de door hen verrichte arbeid. Ook bij onze Zuiderburen zien we een energieke aanpak van de modernisering van het wis-

kundeonderwijs. De in augustus gehouden *vervolmakingscursus* te Bergen (Mons) was een voorbeeld van goede organisatie, gedegen wetenschap en voortreffelijke verzorging.

Het Mathematisch Centrum heeft ook dit jaar weer een *vakantie-cursus* georganiseerd. De belangstelling is deze keer iets teruggelopen. Oorzaken kunnen zijn: de vele vakantiemogelijkheden, die het huidige levenspeil bieden, de vele bijeenkomsten juist eind augustus en wellicht ook de keuze van de te behandelen onderwerpen. We hopen, dat het MC zijn activiteiten in dezen niet zal verminderen en wij bevelen deelname aan deze cursus gaarne aan. Het reeds voor het 4e jaar gegeven Colloquium in groepentheorie en lineaire algebra is van bijzonder groot belang.

Het *congres van leraren*, dat om de twee jaren in Utrecht wordt gehouden kon zich ook dit jaar verheugen in een behoorlijke belangstelling.

Het reeds overbekende tijdschrift voor leerlingen *Pythagoras* heeft ook nu weer zijn bestaansrecht ten volle bewezen. Het is verheugend, dat een betrekkelijk groot deel van de jeugd zich intensief bezig houdt met de in het tijdschrift voorkomende materie. Vooral de puzzle-rubriek, waarbij natuurlijk speciaal puzzles moeten voorkomen met een wiskundige ondergrond, is zeer in trek. Deze rubriek mag ons inziens uitgebreid worden. Ook dit jaar is door onze vereniging een bedrag van f 100,— beschikbaar gesteld voor prijzen. De concurrentie van het pas uitgekomen tijdschrift *Archimedes* zal misschien het aantal abonnementen op *Pythagoras* doen teruglopen.

De *wiskunde-olympiade* heeft het afgelopen jaar veel leerlingen beziggehouden. Evenals in mijn vorige jaarrede wil ik nog eens wijzen op de moeite en de zorg, die de samenstellers zich hebben gegeven om tot zulk een mooi werk te komen. We rekenen allen op voortzetting van deze voortreffelijk georganiseerde olympiaden en hopen dat hieruit een vaste traditie zal ontstaan.

Uit ons bestuur is in overleg met de inspectie, een commissie gevormd voor het *opstellen van een wiskundeprogramma* voor het H.A.V.O. Bij de samenstelling van de te behandelen stof heeft de commissie zich beperkt tot die afdeling van het H.A.V.O. die de zwaarste eisen stelt aan de wiskunde. Daarbij is vooral gedacht aan die leerlingen die later naar een H.T.S. gaan. De gedane voorstellen wijken daarom nogal af van het huidige V.H.M.O. programma. De verschillen komen vooral uit in de keuze van de onderwerpen, maar niet in de zwaarte van de stof.

Voor de dit jaar gehouden *eindexamens* hebben wij naast grote

waardering, ook kritiek, n.l. wat betreft de moeilijkheidsgraad van de opgaven voor de stereometrie. We hebben echter gegronde redenen aan te nemen dat er in de daarvoor verantwoordelijke kringen voldoende aandacht aan deze kwestie wordt geschonken.

In mijn openingswoord van verleden jaar heb ik gewezen op de mogelijkheid om het bezoek aan de ledenvergadering te stimuleren. We hebben hiertoe een financiële tegemoetkoming in de vorm van een gedeeltelijke reisgeldvergoeding bij het departement aangevraagd. Daar hierop afwijzend is beschikt, zoekt het bestuur naar wegen om in deze richting alsnog wat te bereiken.

Ook is de kwestie van het mondeling examineren van 3 vakken in 40 minuten op de vorige vergadering genoemd. Wij hebben voorgesteld, toe te staan, dat voornamelijk die onderdelen worden gevraagd, waarin de afwijking tussen het rapportcijfer en het cijfer behaald op het schriftelijk examen in het oog springend is. Van de Inspectie hebben we nog geen duidelijk antwoord hierover ontvangen. Het blijkt n.l. dat er deskundigen zijn, die menen dat genoemde handelwijze niet correct is.

Ons bestuurslid, Lenstra zal vandaag voor het laatst achter de bestuurstafel zitten. Door zijn benoeming bij het universitaire onderwijs in Amsterdam meent hij niet meer in deze functie te kunnen blijven. De vereniging is veel dank aan hem verschuldigd. In het bestuur heeft hij zich de laatste jaren op voorbeeldige wijze gekweten van de taak van 2e secretaris. Maar bovenal zijn wij hem dank verschuldigd voor de vele goede adviezen op onderwijsgebied die we van hem in onze bestuursvergaderingen hebben mogen ontvangen. Na deze lof voor onze scheidende collega en onze allerbeste wensen voor zijn werk in Amsterdam verklaar ik de jaarvergadering voor geopend.

CURSUSSEN MODERNE WISKUNDE VOOR LERAREN

Thans is definitief vastgesteld dat de cursussen van 13 tot en met 17 september 1965 te Utrecht, Groningen en Eindhoven zullen worden gehouden. Aanmelding dient vóór 1 mei te geschieden (ook door diegenen, die reeds eerder deelnamen) op het daartoe bestemde formulier bij het Secretariaat van de Commissie Modernisering leerplan wiskunde, Boothstraat 17, Utrecht. Formulieren zijn aan de scholen toegezonden en verder verkrijgbaar bij het genoemde secretariaat.

BOEKBESPREKING

Dr. W. J. Bos, *De discussieles als didactisch hulpmiddel*, Verslag van een experiment; nr. 19 in de serie „Verdiept Inzicht”, Stichting Onderwijsoriëntatie; 60 blz.; Besteladres: J. M. Meulenhoff, Amsterdam.

De auteur is van oordeel, dat de jonge mens die de hedendaagse maatschappij binnentreedt, in een geheel andere situatie terecht komt dan in het verleden, toen het overleg nog een ondergeschikte rol speelde in het functioneren van ons sociale bestel. Hij acht het daarom taak van de school haar leerlingen met de beginselen van dat overleg vertrouwd te maken. Tot de middelen die hiertoe kunnen leiden, rekent hij de introductie van de discussiemethode in het onderwijs. In de discussieles ontstaat er een kruisgesprek tussen de leerlingen van een klasse, waarbij de leraar zijn taak beperkt tot die van gespreksleider. De discussieles moet scherp onderscheiden worden van het klasgesprek, al zullen in de praktijk overgangen tussen beide methoden veelvuldig voorkomen. Bij het klasgesprek spreekt niet alleen de docent, ook de leerlingen spreken mee, maar het gesprek loopt steeds via de leraar als „voorzitter”. Bij de discussieles, waarin de leerlingen in een halve cirkel zijn geplaatst, zodat ieder zijn medeleerlingen kan zien, richten de leerlingen rechtstreeks het woord tot elkaar.

Dr. Bos kiest als thema voor een discussieles het massabegrip, waarbij zijn doel is dat het inzicht ontstaat dat er traagheidsverschijnselen zijn die slechts indirect met het gewicht te maken hebben. Naast een globaal overzicht van de discussieles en een analyse van de belangrijkste moeilijkheden geeft hij een aantal belangwekkende discussiefragmenten, waardoor de essentie van wat er in de klasse plaats grijpt, duidelijk naar voren komt.

De auteur heeft er mij van overtuigd, dat de discussiemethode een didactisch hulpmiddel is dat in de leraarsopleiding belangrijke diensten kan bewijzen. Door deze methode kan de aanstaande leraar duidelijk worden geconfronteerd met de wezenlijke moeilijkheden waarmee de leerlingen ten aanzien van enig probleem worstelen.

De auteur heeft me echter niet kunnen overtuigen van de betekenis van deze methode voor het v.h.m.o. Gelukkig constateert hij zelf, dat de discussiemethode zich niet leent voor geregeld gebruik „Daarvoor is het ook te vermoeiend”, aldus de auteur. M.i. is de methode echter ook te weinig productief dan dat veelvuldige toepassing gerechtvaardigd zou zijn. Als ik de opgenomen lesfragmenten lees en herlees, kom ik steeds meer tot de overtuiging dat vele leerlingen geëmotioneerd aan het gesprek deelnemen, maar dat het nuttig effect van de aldus gegeven les aanmerkelijk zou kunnen worden verhoogd als de leraar zijn teruggetrokken positie van gespreksleider zou verlaten om als leider van een klasgesprek ertoe bij te dragen dat de moeilijkheden behoorlijk uit de verf komen, c.q. worden opgelost.

Joh. H. Wansink

Dr. Georg Wolff, *Handbuch der Schulmathematik*, Band IV, *Geometrie der Oberstufe*; 288 blz., 567 fig.; 38 DM; Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Met de verschijning van dit vierde deel van het Handbuch der Schulmathematik is het groots opgezette zesdelige werk van Wolff voltooid.

We wensen Dr. G. Wolff en zijn staf van medewerkers van harte geluk met dit feit. Zij hebben met de voltooiing van dit handboek alle wiskunde-docenten in en buiten Duitsland een grote dienst bewezen. Niet slechts ten aanzien van de thans te onderwijzen leerstof, maar evenzeer ten aanzien van de leerstof die straks volgens gomoderniseerde programma's onderwezen kan worden, geeft dit encyclopedisch opgezette werk betrouwbare informatie. Vectoren, transformaties en groepsbegrip komen hier aan de orde. In dit vierde deel worden behandeld:

- I. Analytische Geometrie,
- II. Darstellende und Projektive Geometrie,
- III. Sphärik und Astronomie.

Het onder II genoemde gedeelte is bijna geheel van de hand van K. Wigand en handelt o.a. over:

- a. Parallelprojektion und Affinität,
- b. Zentralprojektion und Kollineation,
- c. Korrelation und Polaritäten,
- d. Photogrammetrie oder Bildmessung,
- e. Kartenentwürfe,
- f. Affineometrie,
- g. die projektive Gruppe,
- h. Erlanger Programm.

Voor de bespreking van de overige vijf delen verwijs ik naar Euclides 36 (p. 317), Euclides 38 (p. 282) en Euclides 39 (p. 188).

Dit werk hoort thuis in elke wiskundebibliotheek van scholen voor v.h.m.o. en in de privé-bibliotheek van de wiskundeleraren. Joh. H. Wansink

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

129. Wat is de kans, dat de eerste dag van een eeuw een zondag is?

(Drs. H. W. Lenstra)

130. In een donkere kast bevinden zich p paar sokken. Het enige verschil tussen de paren bestaat daarin, dat ze niet alle dezelfde kleur hebben. Ze hebben q verschillende kleuren. Iemand wenst, zonder dat hij de sokken in het donker kan onderscheiden, zoveel sokken uit de kast te nemen, dat hij in elk geval daaruit k paren kan vormen. Hoeveel sokken moet hij minstens uit de kast nemen? (L. A. Rang)

Waarschuwing. Men kan zich gemakkelijk verkrijken. Verifieert u eens, of het door u gevonden antwoord klopt, als b.v. $p = 40$, $k = 15$, $q = 28$.

131. Bekend is het volgende axiomastelsel.

- A1. Door elk tweetal punten gaat een lijn.
- A2. Door twee verschillende punten gaat niet meer dan één lijn.
- A3. Er zijn drie punten met de eigenschap, dat er geen lijn bestaat, die door alle drie punten gaat.
- A4. Als P niet op l ligt, dan is er een lijn door P evenwijdig aan l .
- A5. Er is niet meer dan één lijn door P evenwijdig aan l .

Gevraagd wordt:

- a. een model te ontwerpen, dat aan A1, A3—A5 voldoet en niet aan A2 en dat uit een minimaal aantal punten bestaat,
- b. een dergelijk model te ontwerpen, dat uit een minimaal aantal lijnen bestaat.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

127. Onderstel, dat bij een totaal aantal van n over te brengen schijven de a -de schijf p keer overgebracht wordt, dan zal bij een totaal aantal van $n+1$ schijven de a -de schijf $2p$ keer overgebracht worden. Als er n schijven zijn, dan wordt de 1ste schijf dus 2^{n-1} keer overgebracht, de 2de schijf 2^{n-2} keer, enz. Dus moet

$$2^{n-37} \cdot 37 - 2^{n-39} \cdot 39 = 13952$$

$$2^{n-39}(4 \cdot 37 - 39) = 2^7 \cdot 109$$

$$n = 46.$$

128. De naam, die A aan B geeft, noteren we: AB . Uit de gegevens volgt dan, dat voor elke A , B en C geldt:

$$1e. (AB)C = A(BC),$$

$$2e. JA = A,$$

$$3e. \exists x (xA) = J,$$

waarin J een afkorting is voor „Jan”.

Degenen, die op de hoogte zijn van de („zuinige”) axiomatische fundering van de groepentheorie, herkennen hier de drie axioma's in, waardoor het begrip groep bepaald wordt. En daarmee is het dan direct duidelijk, dat beide vragen ontkennend beantwoord dienen te worden.

Ook zonder deze kennis kan men tot dit resultaat geraken. Onderstel, dat K spelbreker is, dus dat (voor elke A)

$$KA = A. \quad (1)$$

Er is een K' , waarvoor geldt

$$K'K = J \text{ (volgens 3e)}. \quad (2)$$

Verder geldt

$$K'(KA) = (K'K)A \text{ (volgens 1e)} \quad (3)$$

$$K'A = A \text{ (volgens (3), (2), 2e)} \quad (4)$$

$$K'K = K \text{ (volgens (4))} \quad (5)$$

$$K = J \text{ (volgens (5), (2))}.$$

Dus is J de enige spelbreker.

Spreekt K Jan met „Jan” aan, d.w.z. is

$$KJ = J \quad (6)$$

dan is (voor elke A)

$$(KJ)A = A \text{ (volgens (6) 2e,)} \quad (7)$$

$$K(JA) = A \text{ (volgens 1e, (7))} \quad (8)$$

$$KA = A \text{ (volgens (8), 2e)} \quad (9)$$

$K = J$ (omdat J de enige spelbreker is).

En dus is de enige, die „Jan” tegen Jan zegt, Jan zelf.

ONTVANGEN BOEKEN

J. Sinnema en Y. Zwiersma, *Kompas voor meetkunde*, met medewerking van Dr. W. J. Bos en Drs. P. E. Lepoeter, dl. III, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, f 4,75.

A. J. Poelman, P. van der Brugge, *Meetkunde voor mulo*, Verken en bewijs, dl. IIIA, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, f 5,50.

Drs. P. E. Lepoeter, *Gids voor de algebra van de 6 afdelingen van het V.H.M.O.*, 2e druk, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, f 5,90. Deze 2e druk is gelijk aan de eerste.

Dr. W. J. Bos en Drs. P. E. Lepoeter, *Wegwijzer in de algebra*, dl. II, 3e dr., J. M. Meulenhoff, Amsterdam, f 5,50. Deze druk is gelijk aan de tweede.

Dr. D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof, met medewerking van Dr. P. M. van Hiele en Dr. J. de Miranda, *Wiskunde voor de M.M.S.*, III, 2e dr., J. B. Wolters, Groningen, f 3,90.

Prof. dr. G. R. Veldkamp

HET EXAMEN WISKUNDE M.O.-A

Dit werk is bestemd voor hen die zich voorbereiden op het examen Wiskunde M.O.-A
Ing. f 6.90

Prof. dr. A. Heyting

PROJECTIEVE MEETKUNDE

Dit werk is onder andere bestemd voor hen die zich voorbereiden voor de akte Wiskunde M.O.-A
Ing. f 12.—; geb. f 13.90

Prof. dr. F. Laanstra

INLEIDING TOT DE ALGEBRA

Deze uitgave is bestemd voor gebruik bij de studie Wiskunde M.O.-A
2e druk - geb. f 22.50

W. J. H. Salet e.a. **VRAAGSTUKKEN OVER ANALYSE EN ALGEBRA**

Deel I - voor M.O.-A 7e druk - ing. f 7.25

Deel II - voor M.O.-B 3e druk - ing. f 7.75

Prof. dr. L. Kuipers

LEERBOEK DER ANALYSE

Deel I - voor M.O.-A 2e druk - ing. f 16.50; geb. f 18.50

Deel II - voor M.O.-B Geb. f 22.50

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN



Natuurkunde-uitgaven voor het V.H.M.O.

REPETITIEBOEK NATUURKUNDE VOOR HET V.H.M.O.

door Drs. L. H. Kammerer en Dr. J. H. Raat

De auteurs hebben het boek zo opgezet, dat de stof leesbaar blijft.
Het werk geeft niet louter formules en definities: het wil, zoveel als in een kort bestek mogelijk is, ook verbanden leggen en afleidingen laten zien.
Achterin het boek is een register opgenomen. **Omvang 256 pag., f 7.75**

NATUURKUNDE-PRACTICUM

door Dr. J. H. Raat

Deel 1 Algemeen gedeelte, vloeistoffen, gassen en warmte

Deel 2 Licht, geluid, magnetisme en elektriciteit

Deel 3 Mechanica, trillingsleer en speciale onderwerpen

Alle drie delen hebben een omvang van 48 pag.; per deel f 1.90

Verantwoording en toelichting voor docenten bij de methode - f 1.25

WERKSCHRIFT GEOMETRISCHE OPTICA

door Dr. J. H. Raat

Dit werkschrift bevat 107 opdrachten; omvang 48 pag., f 2.25



P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Wiskunde-uitgaven voor het V.H.M.O.

C. J. Alders

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE

met gratis antwoorden - 16e/20e druk f 2,50, geb. f 3,25

C. J. Alders

GONIOMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

21e/25e druk f 2,25, geb. f 3,15; antwoorden f 0,75

C. J. Alders

STEREOMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

21e/23e druk f 2,90, geb. f 3,80

C. J. Alders

PLANIMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

31e/35e druk f 3,75, geb. f 4,65

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

Deel I, 2e druk f 3,90; Deel II, f 4,50

J. C. Kok

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET V.H.M.O.

2e druk f 4,50, geb. f 5,00

A. A. Lucieer

STEREOMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

13e druk van het schoolboek van Molenbroek en Wijdenes - f 5,—, geb. f 5,75; antwoorden f 1,—

Dr. D. J. E. Schrek

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

4e druk, met afzonderlijk antwoordenboekje f 4,50, geb. f 5,25

Dr. H. Streefkerk

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M.O. EN V.H.O.

I (5e druk) f 3,25 - II (4e druk) f 3,50 - III (3e druk) f 3,75

P. Wijdenes

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

f 4,75; antwoorden f 2,50



P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN