

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

VI—1 MAART 1965

INHOUD

Dr. A. H. Nicolai: Enkele oriënterende berekeningen over de sonic boom	161
Dr. A. van Haselen: Waarom vectoren?	170
Dr. L. Crijns: Over een bundel kubische krommen	173
Drs. M. D. Bos: De derde Nederlandse Wiskunde- Olympiade (1964)	175
Boekbespreking	188
Examens	189
Cursussen Moderne Wiskunde voor Leraren	190
Kalender	191
Recreatie	192

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 7,50.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter; Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;

Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;

Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;

G. KROOSHOF, Noorderbinnensingel 140, Groningen, tel. 05900/32494;

Drs. H. W. LENSTRA, Frans van Mierisstraat 24, huis, Amsterdam-Z, tel. 020/715778

Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;

Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;

Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;

Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;

Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.

Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;

Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

Dr. J. KOKSMA, Haren;

Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;

Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;

Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;

Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;

Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;

Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;

P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

ENKELE ORIËTERENDE BEREKENINGEN OVER DE SONIC BOOM

door

Dr. A. H. NICOLAÏ

Groningen

Het gebeurt me de laatste tijd nogal eens, dat de leerlingen vragen hoe de knal van een vliegtuig, dat sneller dan het geluid vliegt, ontstaat. Er bestaat vaak misverstand over de ware gang van zaken, welke aanleiding geeft tot dit effect. Als men zo'n knal hoort zegt men vaak: „Daar gaat er weer een door de geluidsbarrière”, en men meent dan, dat het passeren van de geluidsgrens aanleiding is tot het ontstaan van de knal. In werkelijkheid ligt de zaak anders. Ieder vliegtuig, dat sneller gaat dan het geluid, veroorzaakt een energierijk golffront in de lucht. Zodra dit front de waarnemer passeert, hoort deze een knal, de *sonic boom*. Vlak daarop hoort men het gewone zoem-geluid.

In het volgende heb ik geprobeerd de zaak wat meer wiskundig uit te werken. Het geheel leent zich uitstekend voor behandeling in de klas. Er zijn slechts enkele begrippen, welke enige moeilijkheden zouden kunnen veroorzaken. Ten eerste zal de identificatie van vgl. (6) met een hyperbool enige moeilijkheden kunnen geven. Dat de hier optredende kromme een hyperbool is is echter van geen essentieel belang voor behandeling in de klas. Dat (6) een kromme voorstelt met een minimum is voldoende. Ik heb de zaak echter zo volledig mogelijk gehouden in het betoog. Een tweede punt, dat beslist onmisbaar is, is het begrip *bgtg*.

Verder moet dan volgen:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

zodat omgekeerd

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{bgtg} x + C.$$

Of u nog terugschrikt voor l'Hôpital weet ik niet. Ik haal hem steeds de klas binnen. Een introductie van 5 minuten en de leerlingen kennen hem. Ik vind deze kennismaking steeds de moeite waard.

Ik acht het van groot belang, dat de leerlingen zo nu en dan

eens zien, welk een machtig hulpmiddel onze wiskunde is in de praktijk. Ongetwijfeld zal voor heel wat leerlingen de toegepaste wiskunde stimulerend werken op hun belangstelling voor de meer zuivere wiskunde. Het is in de geschiedenis der wiskunde vaak ook al niet anders gegaan. Ik herinner daarbij aan hetgeen de grote Russische wiskundige Tsjebysjef hierover eens schreef: „De toenadering van de theorie tot de praktijk geeft de meest heilzame resultaten, en niet alleen de praktijk wint hierbij, de gehele wetenschap komt onder haar invloed tot ontwikkeling; de praktijk ontdekt voor haar nieuwe onderwerpen voor onderzoek of nieuwe aspecten van reeds lang bekende onderwerpen”. Dit geldt zeker niet in mindere mate voor de leerlingen. Hoe doet zich de behoefte gevoelen aan het rekenapparaat der differentiaalrekening? Uit de praktijk bij het begrip snelheid en versnelling. Hoe doet zich de behoefte gevoelen aan de integraalrekening? Niet in de eerste plaats als inverse operatierekening van de differentiaalrekening, maar wederom uit de praktijk als een Riemann-som. Het gaat vaak andersom in de klas. Eerst komt de theorie uit de lucht vallen en dan komen er toepassingen. Ik geloof, dat dit in strijd is zowel met de historie als met de didactiek. De toegepaste wiskunde heeft ontegenzeggelijk veel bijgedragen tot de grote bloei, welke de zuivere wiskunde heeft ondergaan en nog steeds ondergaat. Ik meen, dat de tijd, welke wij besteden aan de toepassingen der wiskunde, vaak veel te kort is. Het volgende moge aantonen hoever men met betrekkelijk elementaire wiskunde-middelen kan doordringen in het gebied van de toegepaste wiskunde.

We brengen door de rechte, welke het vliegtuig beschrijft, en de waarnemer een plat vlak. De rechte noemen we de X -as, terwijl we de Y -as kiezen door de waarnemer. Als eenheid van lengte kiezen we de grootte van de snelheid van het geluid, dus ongeveer 333 m.

De waarnemer zal de coördinaten $(0, a)$ hebben, waarbij dus a de kortste afstand is tot de baan van het vliegtuig. Verder zullen we stellen, dat het vliegtuig een snelheid heeft van v Mach en dat het ten tijde $t = 0$ de oorsprong van het coördinaten-stelsel passeert. Op het tijdstip t zal het vliegtuig zich dan bevinden in het punt $(vt, 0)$. Het zendt dan een energie-golf uit, waarvan het golffront op het tijdstip $T (T > t)$ een bol is, waarvan de vlakdoorsnede met het XOY -vlak de vergelijking

$$(x-vt)^2 + y^2 = (T-t)^2 \quad (1)$$

heeft.

Als voorbeeld zijn getekend drie golffronten uitgezonden op de tijdstippen $t = -2, -1, 0$ ten tijde $T = 1$ voor $v = 2$.

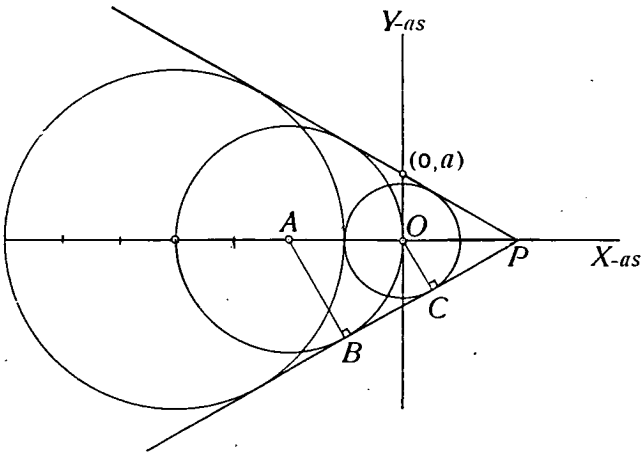


Fig. 1.

De vergelijking (1) stelt een stelsel cirkels voor met parameter t . Indien we de raaklijn uit het punt $P(vT, 0)$ aan de cirkel met O tot middelpunt trekken, dan raken deze raaklijnen ook alle andere geluidscirkels.

Bewijs: Laat uit b.v. het middelpunt $A(vt, 0)$ de loodlijn AB neer op een dezer raaklijnen. Dan is

$$AB : OC = AP : OP = v(T - t) : vT.$$

Daar $OC = T$, zal $AB = T - t$ zijn, en dit is juist de straal der bijbehorende geluidscirkel, zodat PC de cirkel $(A, T - t)$ raakt in B .

De vergelijkingen dezer raaklijnen kan men onmiddellijk vinden, door hun richtingscoëfficiënten te bepalen. Hierbij geldt

$$OP = vT, \quad OC = T, \quad \text{dus } CP = \sqrt{v^2 T^2 - T^2} = T\sqrt{v^2 - 1}.$$

De richtingscoëfficiënten zijn derhalve

$$\pm \frac{OC}{CP} = \pm \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}. \quad (2)$$

De vergelijking der raaklijnen is

$$y = m(x - vT),$$

substitutie van (2) voor m levert dan

$$y = \pm \frac{x - vT}{\sqrt{v^2 - 1}}. \quad (3)$$

De waarnemer zal het geluid van het vliegtuig ten tijde T' voor het eerst vernemen, zodra het golffront (3) hem passeert. Substitutie van $(0, a)$ in (3) levert

$$T' = \frac{a}{v} \sqrt{v^2 - 1}. \quad (4)$$

Het is dit tijdstip, waarop men de knal hoort. Men kan dit inzien door het verband tussen ΔT en Δt te bepalen. Als volgt.

De energie op het tijdstip t uitgezonden passeert $(0, a)$ ten tijde T , waarbij

$$(vt)^2 + a^2 = (T - t)^2 \quad (5)$$

volgens (1). Uitgewerkt verkrijgen we

$$T^2 - 2tT + t^2(1 - v^2) - a^2 = 0 \quad (6)$$

hetgeen in het (t, T) -vlak een *hyperbool* is, daar

$$D = 4 - 4(1 - v^2) = 4v^2 > 0.$$

Alleen de tak, waarvoor $T > t$ zullen we beschouwen.

Door differentiatie van (5) krijgen we

$$\frac{dT}{dt} = 1 + \frac{v^2 t}{T - t} = 1 + \frac{v^2 t}{\sqrt{v^2 t^2 + a^2}}. \quad (7)$$

Het minimum van T als functie van t krijgen we door vergelijking (7) gelijk te stellen aan nul. Uit (7) volgt dan, dat dit minimum bereikt wordt voor

$$t_m = -\frac{a}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

Uit (5) volgt, dat de gezochte minimale waarde van T gelijk is aan

$$T_m = \frac{a}{v} \sqrt{v^2 - 1} \quad (8)$$

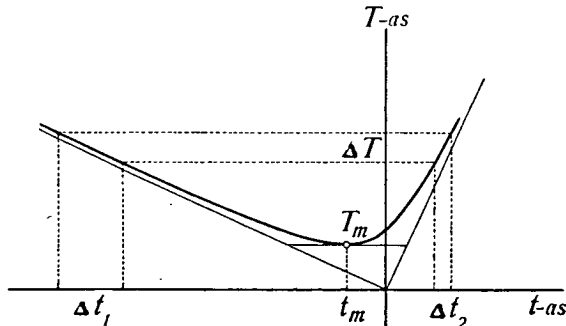


Fig. 2.

en dit is juist de waarde uit (4).

We zien dus, dat bij kleine Δt geldt

$$\frac{dT}{dt} = 0, \text{ of } \Delta T \approx 0, \Delta t \approx 0,$$

op het ogenblik T_m , dat het golffront de waarnemer passeert. Dit betekent, dat op dit tijdstip de energie, die het vliegtuig in het tijdsinterval Δt in de richting van de waarnemer heeft uitgezonden, hem in het zeer kleine praktisch tot nul gereduceerde tijdsinterval ΔT passeert. Dit geconcentreerde geluid veroorzaakt het knaleffect. Daarna arriveert in een tijdsinterval ΔT het geluid afkomstig uit de intervallen Δt_1 en Δt_2 (zie figuur), waarbij het geluid van Δt_2 predomineert, omdat het geluid van Δt_1 t.g.v. de afgelegde afstand te zeer is afgezwakt.

Vervolgens proberen we een benadering te vinden voor de intensiteit van de sonic-boom uitgaande van elementair natuurkundige premissen.

Daartoe stellen we, dat de geluidsenergie op de eenheid van afstand van het stilstaand gedachte vliegtuig E Joule per oppervlakte eenheid en per seconde is. In de tijd dt zendt het vliegtuig door dit oppervlak een energie $E dt$. Op het tijdstip T is deze energie hoeveelheid afgezwakt tot

$$\frac{E dt}{(T - t)^2} \text{ J/opp. eenh.}$$

Immers de hoeveelheid energie, die eerst op de bol met straal 1 was, is na $T - t$ seconden op een bol met straal $T - t$. Aangezien de oppervlakten dezer bollen recht evenredig zijn met de kwadraten der straal zijn de hoeveelheden energie per oppervlakte-eenheid omgekeerd evenredig met dit kwadraat.

De totale energie, welke de eenheid van oppervlakte met $(0, a)$ tot middelpunt passeert in het tijdsinterval (T_m, T_1) $= (T_m, T_m + \Delta T)$ is dan gelijk aan

$$E_{\text{tot}} = \int_{T=T_m}^{T=T_1} \frac{E dt}{(T - t)^2}.$$

De intensiteit hiervan is

$$I = \frac{E_{\text{tot}}}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T=T_m}^{T=T_1} \frac{E dt}{(T - t)^2} \quad (10)$$

Om deze integraal te berekenen substitueren we in de eerste plaats

$$(T - t)^2 = v^2 t^2 + a^2$$

volgens (5). (10) gaat dan over in

$$I = \frac{1}{\Delta T} \int_{T=T_m}^{T=T_1} \frac{E dt}{v^2 t^2 + a^2} = \frac{E}{va \Delta T} \operatorname{bgtg} \frac{v}{a} t \bigg|_{T=T_m}^{T=T_1} \quad (11)$$

Om de stokterm te kunnen berekenen moeten we eerst nagaan welk t -interval overeenkomt met het T -interval.

De afstand van de punten $(vt, 0)$ en $(0, a)$ bedraagt

$$\sqrt{v^2 t^2 + a^2}.$$

In de tijd lopend vanaf het tijdstip t , dat het vliegtuig de energie-golf uitzendt tot het tijdstip T_1 , legt de golf een afstand $T_1 - t$ af. Voor de tijden t , waarvoor de op deze tijdstippen uitgezonden energie de waarnemer vóór de tijd T_1 bereikt, geldt derhalve

$$\sqrt{v^2 t^2 + a^2} < T_1 - t,$$

of, daar de uitdrukkingen

$$v^2 t^2 + a^2 \text{ en } T_1 - t$$

beide positief zijn, eveneens

$$v^2 t^2 + a^2 < (T_1 - t)^2, \text{ of} \\ (v^2 - 1)t^2 + 2T_1 t + a^2 - T_1^2 < 0.$$

De wortels der bijbehorende vierkantsvergelijking (6) zijn na enige berekening

$$t_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{v^2 T_1^2 + a^2 - a^2 v^2}}{v^2 - 1} \\ = \frac{-T_1 \pm v \sqrt{T_1^2 - T_m^2}}{v^2 - 1}$$

waarbij het laatste gelijktteken geldt wegens betrekking (8). Het t -interval, dat overeenkomt met het T -interval (T_m, T_1) is dus:

$$\frac{-T_1 - v \sqrt{T_1^2 - T_m^2}}{v^2 - 1} < t < \frac{-T_1 + v \sqrt{T_1^2 - T_m^2}}{v^2 - 1}.$$

Vullen we deze grenzen in (11) in, dan krijgen we wegens formule

$$\operatorname{bgtg} p - \operatorname{bgtg} q = \operatorname{bgtg} \frac{p - q}{1 + pq},$$

voor I de uitdrukking

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{E}{va\Delta T} \operatorname{bgtg} \frac{\frac{2 \frac{v}{a} \cdot v \sqrt{T_1^2 - T_m^2}}{v^2 - 1}}{1 + \frac{v^2}{a^2} \cdot \frac{T_1^2 - v^2(T_1^2 - T_m^2)}{(v^2 - 1)^2}} \\ &= \frac{E}{va\Delta T} \operatorname{bgtg} \frac{\frac{2v^2 \sqrt{2T_m \Delta T}}{a(v^2 - 1)}}{1 + \frac{v^2 [T_m^2 - 2(v^2 - 1)T_m \Delta T]}{a^2(v^2 - 1)^2}} \\ T_m &= \frac{a}{v} \sqrt{v^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Kiest men v en ΔT niet te groot en a niet te klein, dan kan men de term $2(v^2 - 1)T_m \Delta T$ verwaarlozen ten opzichte van T_m^2 . De formule (12) wordt dan eenvoudiger. Na enig rekenen blijkt dan, dat

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{E}{va\Delta T} \operatorname{bgtg} \frac{2}{a} \sqrt{2T_m \Delta T} \\ T_m &= \frac{a}{v} \sqrt{v^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nemen we bijvoorbeeld $v = 2$, $a = 30$ (d.i. 10 km) en $\Delta T = \frac{1}{10}$, dan komt er ongeveer $I = \frac{E}{40}$, waarbij dus E de energieflex op de eenheid van afstand per seconde is, terwijl I betrekking heeft op het korte ogenblik $\Delta T = \frac{1}{10}$ seconde, d.w.z. dat de intensiteit der sonic-boom afkomstig van het motorgeluid gemiddeld over $\frac{1}{10}$ seconde ongeveer $\frac{900}{40} =$ ruim 20 maal zo intensief is als het vliegtuiggeluid van een stilstaand vliegtuig op de afstand $a = 30$.

Beschouwt men de knal in een korter tijdsverloop van b.v. $\frac{1}{100}$ sec. dan wordt $I = \frac{E}{12}$, dit is $\frac{900}{12} = 75$ maal zo intensief als het gewone geluid van het vliegtuig op afstand $a = 30$. Voor $\Delta T = \frac{1}{2}$ komt er $I = \frac{E}{94}$ en $\Delta T = 1$ geeft $I = \frac{E}{134}$.

Daar met bijvoorbeeld l'Hôpital blijkt, dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{bgtg} p \sqrt{x}}{x} = \infty,$$

volgt algemeen, dat

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{E_{\text{tot}}}{T} = \infty.$$

Men kan dus zeggen, dat alleen het allereerste gedeelte van de knal het meest intensief is. Knallen van zo korte duur lijken me over het algemeen weinig schade te kunnen aanrichten wegens de trage massa van ruiten, enz.

Getekend is nu nog een grafiek, waarbij I is uitgedrukt in de intensiteit van het gewone geluid op afstand $a = 30$.

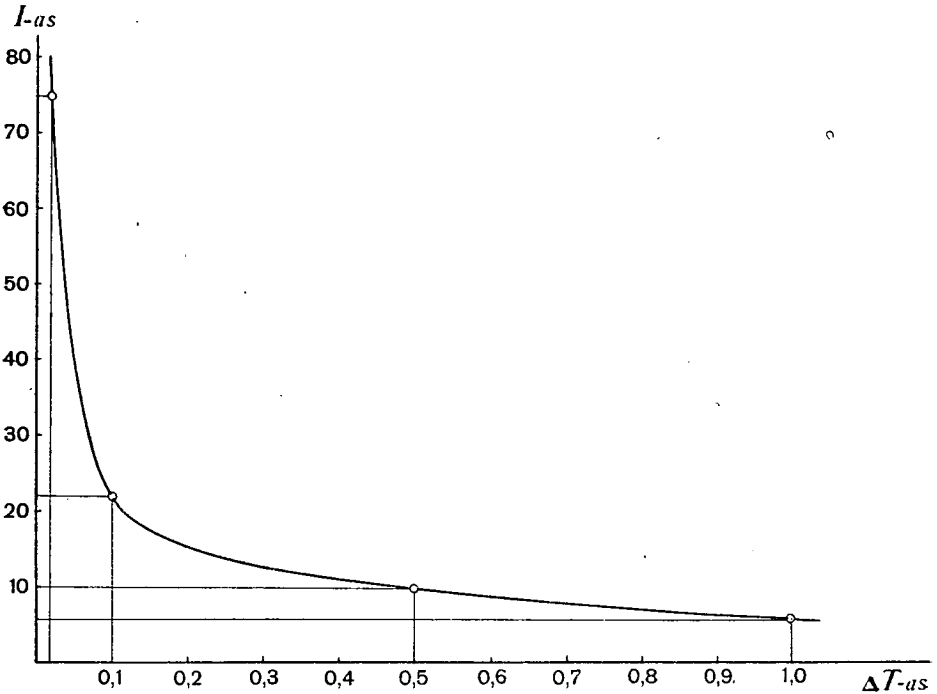


Fig. 3.

Hoe kan een vliegënier ervoor zorgen, dat een stad, welke hij op enige afstand passeert, zo weinig mogelijk last heeft van de knal? Dit kan, voorzover dit het motorgeluid betreft, alleen als het golf-front een energie-arme opening heeft, welke juist over de stad trekt.

Stellen we, dat een cirkelvormige stad een straal r heeft en een middelpunt $M(0, a)$. We nemen het geval, waarin we bij benadering het vliegtuig en de stad in één plat vlak kunnen nemen. Dat is het geval als de horizontale afstand tussen stad en vliegtuig groot is ten opzichte van de hoogte van het vliegtuig.

In de figuur stellen g_1 en g_2 de plaatsen voor van het golf-front voor en na het passeren der stad. De opening PQ moet dan energie-arm zijn. De piloot moet dus de motoren afzetten vanaf S tot T .

WAAROM VECTOREN?

door

Dr. A. VAN HASELEN

Tiel

Als aanvulling op het artikel „ $\sin(\alpha + \beta)$ ” van de heer P. Wijdenes (Euclides, 39, p. 226) wil ik voor een twaalfde manier voor de afleiding van de formules voor $\sin(\alpha + \beta)$ en $\cos(\alpha + \beta)$ de aandacht vragen.

We behandelen eerst de lineaire afbeeldingen van een vectorveld op zichzelf. De rotatie f over een hoek α is de lineaire afbeelding, waarvoor geldt:

$$f(1, 0) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \text{en} \quad f(0, 1) = (-\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Passen we deze afbeelding toe op $(\cos \beta, \sin \beta)$, dan is

$$f(\cos \beta, \sin \beta) = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)),$$

terwijl

$$\begin{aligned} f(\cos \beta, \sin \beta) &= \cos \beta f(1, 0) + \sin \beta f(0, 1) = \\ &= \cos \beta (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sin \beta (-\sin \alpha, \cos \alpha) = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Hieruit volgen de formules voor $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$. Een figuurtje hierbij is voor de leerlingen wel gewenst.

Het is heel goed mogelijk, in een goede klas de analytische meetkunde te behandelen, uitgaande van enige begrippen uit de lineaire algebra. Dat mij dat gelukt is heb ik al in een vorig artikel (Euclides, 38, p. 135) meegedeeld.

De opzet is zeker niet moeilijker dan de gebruikelijke maar kost nogal veel tijd, omdat het invoeren van vectoren en het leren rekenen ermee nogal wat uren in beslag nemen.

Toch zou ik deze methode in iedere β -klas durven behandelen, als de kandidaten op het eindexamen de gelegenheid kregen, twee vraagstukken uit drie opgaven te kiezen. Van deze drie vraagstukken zouden er dan twee normale analytische meetkundesommen kunnen zijn, en het derde een vraagstuk over een lineaire afbeelding van een vectorveld op zichzelf. Veel problemen, die bij een lineaire afbeelding voorkomen, kunnen als vraagstukken over verzamelingen

op de gebruikelijke manier behandeld worden. Toch zou hiervoor wel een bijzonder nauwkeurige indeling van de beschikbare tijd noodzakelijk zijn.

Het grote voordeel zou zijn, dat de leerlingen met andere dingen leerden rekenen dan met getallen. Dit zou hen veel moeilijkheden besparen bij de colleges lineaire algebra op de universiteiten en hogescholen. Dat dit laatste het geval is heb ik vernomen van oud-leerlingen, die bij mij de lessen over lineaire afbeeldingen gevolgd hebben.

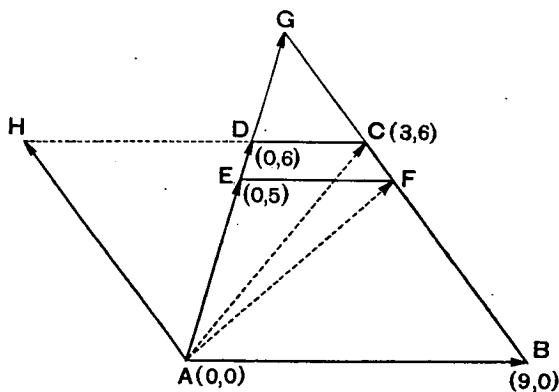
Om bovengenoemde redenen besloot ik, in deze cursus de evenredigheid van lijnstukken in de tweede klas met vectoren te behandelen.

Zoals men bij de algebra van een getallenlijn gebruik kan maken om de abstracte redeneringen toe te lichten, kan men bij vectoren van pijlen gebruik maken, dus waarom zou dat veel moeilijker zijn dan de gebruikelijke manier? Bovendien zou het, wat de verloren tijd betreft, niet zo ernstig zijn als de poging mislukte, terwijl de verdere vlakke meetkunde (goniometrische verhoudingen, Pythagoras, cosinusregel) veel eenvoudiger behandeld zou kunnen worden, wanneer het wel lukte. Een proef was m.i. dan ook wel verantwoord.

Dus voerde ik een scheef rooster in en kende aan de vectoren met O tot beginpunt (of aan de punten van het vlak) getallenparen toe. Daarna definieerde ik (met behulp van plaatjes als toelichting)

$$(a, b) + (c, d), \quad (a, b) - (c, d) \quad \text{en} \quad k(a, b).$$

De gevolgde methode zal ik aan de hand van een vraagstuk bespreken.



Gegeven is een trapezium $ABCD$, waarin $AB \parallel CD$. $AB = 9$, $CD = 3$ en $AD = 6$. Op het lijnstuk AD kiezen we een punt E , zodat $AE = 5$. We trekken $EF \parallel AB$. Stel de vectorvergelijking van BC

op in het rooster, waarin de vectoren in de figuur zijn aangegeven. Bereken hiermee de lengten van EF en DG .

Berekening. Als $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (3, 6) - (9, 0) = (-6, 6)$, dan is de vergelijking van AH :

$$(x, y) = k(-6, 6).$$

De vergelijking van BG is dan

$$(x, y) = (9, 0) + k(-6, 6) = (9 - 6k, 6k).$$

De tweede coördinaat van F is 5, dus:

$$(x_F, 5) = (9 - 6k, 6k).$$

$$6k = 5, \quad k = \frac{5}{6}, \quad x_F = 9 - 6 \times \frac{5}{6} = 4.$$

De lengte van EF is dan 4.

De eerste coördinaat van G is 0, dus:

$$\overrightarrow{OG} = (0, y_G) = (9 - 6k, 6k).$$

$$9 - 6k = 0, \quad k = \frac{3}{2}, \quad 6k = 9.$$

Dan is $AG = 9$ en $DG = 3$.

Bij het proefwerk over deze stof koos ik voor twee van de drie sommen vraagstukken, die opgesteld waren zoals in het voorbeeld. Het resultaat was zeker niet slechter dan bij de gebruikelijke methode. Het succes was groter dan ik in de middelmatige tweede klas had durven verwachten.

Mijn conclusie hieruit is, dat we niet te bang moeten zijn voor de resultaten, wanneer we onderwerpen op een andere manier behandelen dan we gewoon zijn.

Het is b.v. veel eenvoudiger, de leerlingen in een tweede klas met getallenparen te leren rekenen, dan hen het begrip „gelijkvormige driehoeken” bij te brengen.

Laat ik eindigen met mijn bewondering uit te spreken voor de heren Kijne c.s., Troelstra c.s. en hun uitgevers. Ze hebben het aangedurfd, te laten zien, dat we niet altijd langs de platgetrapte paden behoeven te lopen om onze leerlingen Wiskunde te leren. Er is nog gelegenheid te over om ook bij het tegenwoordige programma onze methoden te verbeteren en te moderniseren.

Naar mijn overtuiging kunnen we de overgang van onze leerlingen naar de universiteiten al veel eenvoudiger maken, als we hen leren rekenen met vectoren, verzamelingen of groepen, dus met andere dingen dan getallen.

OVER EEN BUNDEL KUBISCHE KROMMEN

door

Dr. L. CRIJNS

Maastricht

Naar aanleiding van het artikel van Dr. Groenman, Euclides **39**, blz. 272 wordt hier het volgend (hopelijk nog niet aan de orde gekomen) vraagstuk besproken: t.o.v. de vaste $\triangle ABC$ wordt een punt bepaald door driehoekscoördinaten s_i ($i = 1, 2, 3$) d.z. de afstanden tot de zijden; men vermenigvuldigt die s_i van P uit met eenzelfde getal λ , waardoor op elke s_i zelf op of een verlengde een punt P_i gemerkt wordt, en men vraagt naar de verzameling P , waarvoor

$$AP_1, BP_2, CP_3; \quad (1)$$

concurrent zijn.

Daartoe is voor b.v. P_1 slechts nodig, de coördinaten s_2 en s_3 te berekenen, want de verhouding $s_2 : s_3$ is langs AP_1 , dus ook in zijn snijpunt met BC , invariant. We vinden aan de hand van een trapezium voor genoemd snijpunt

$$(s_2 + \lambda s_1 \cos \gamma) : (s_3 + \lambda s_1 \cos \beta). \quad (2)$$

Voor de 2 andere snijpunten (met CA , resp. AB) moeten hierin $i(1, 2, 3)$ en α, β, γ cyclische verschuiving ondergaan. Zo blijkt, dat eis (1) uitgedrukt wordt door

$$\Pi(s_2 + \lambda s_1 \cos \gamma) = \Pi(s_3 + \lambda s_1 \cos \beta). \quad (3)$$

Eigenlijk moesten we hier — met 't oog op toepassing van de stelling van Ceva — beide leden delen door $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$, maar dat doet geen afbreuk aan de juistheid van (3).

De ontwikkeling van (3) nu geeft

$$p + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + q \lambda^3 = p + v_1 \lambda + v_2 \lambda^2 + q \lambda^3.$$

De eis wordt gesteld, dat deze betrekking in λ identiek zij, dus

$$\begin{aligned} \sum (s_2 \cos \beta - s_3 \cos \gamma) s_1^2 &= 0 \\ \text{en} \quad \sum \cos \alpha (s_2 \cos \gamma - s_3 \cos \beta) s_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Zoals bij substitutie blijkt, hebben deze kubische krommen c^3 *negen* snijpunten n.l. de 3 hoekpunten A, B, C met coördinaten $(C; 0; 0)$,

$(0; C; 0)$ en $(0; 0; C)$, waarin C de driehoeksconstante is; de 4 middelpunten van de in- en aangeschreven cirkels met coördinaten $(1; 1; 1)$, $(-1; 1; 1)$, $(1; -1; 1)$ en $(1; 1; -1)$. Voorts 't middelpunt M $(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ en 't hoogtepunt H $(\cos \beta \cdot \cos \gamma; \cos \gamma \cdot \cos \alpha; \cos \alpha \cdot \cos \beta)$.

We hebben dus te doen met een bundel c^3 met 9 geassocieerde punten. De 3 coëfficiënten van s_i^2 in de eerste vergelijking (4) worden *nul* in H , die van s_i^2 in de tweede vergelijking (4) in M . Hiermee hangt samen, dat de raaklijnen in de hoekpunten A, B, C aan de eerste c^3 door H gaan, aan de tweede c^3 door M . Voor de raaklijnen aan (4) wordt met inachtneming van de fundamenteelbetrekking

$$\sum \sin \alpha \cdot ds_1 = 0$$

de vergelijking gevonden in de vorm van de gelijkheid van drie breuken, waarvoor

$$\frac{S_1 - s_1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial(4)}{\partial s_2} & \frac{\partial(4)}{\partial s_3} \\ \sin \beta & \sin \gamma \end{vmatrix}}$$

maatgevend is. Aangezien hiermee de richting van de raaklijn in H , resp. in M bepaald wordt, kan men berekenen de invariante dubbelverhoudingen van de twee krommen (4).

Het geval van de *gelijkbenige* driehoek ($\beta = \gamma$).

Hier ontaardt de eerste c^3 in $s_2 = s_3$ d.i. h_c en in de c^2

$$s_1^2 \cos \beta + s_2 s_3 \cos \beta + s_1(s_2 + s_3) \cos 2\beta = 0 \quad (5)$$

en de tweede c^3 in $s_2 = s_3$ en in de c^2

$$s_1^2 \cos 2\beta + s_2 s_3 \cos 2\beta + s_1(s_2 + s_3) \cos \beta = 0. \quad (6)$$

Het bundel-exemplaar $(5) - 2 \cos \beta \times (6)$ blijkt nu een cirkel te bepalen; meetkundig is 't ook duidelijk dat B, C en de middelpunten van de 2 aangeschreven cirkels N_2 en N_3 op gelijke afstand van A gelegen zijn.

DE DERDE
NEDERLANDSE WISKUNDE-OLYMPIADE (1964)

door

Drs. M. D. Bos

(Amersfoort)

1. De organisatie van de Wiskunde-Olympiade werd in 1964 evenals in 1962 en 1963 mogelijk gemaakt door een extra-subsidie van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen aan de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

2. Voor de achtergronden en voor de doelstelling van de wedstrijden wordt verwezen naar het verslag over de eerste Nederlandse Wiskunde-Olympiade, opgenomen in Euclides, 38e jaargang, p. 161—178, en naar het verslag over de tweede Olympiade, Euclides, 39e jaargang, p. 161—174.

3. De adviescommissie voor de Wiskunde-Olympiade 1964, was als volgt samengesteld:

Prof. Dr. H. J. A. Duparc, Delft, voorzitter,

Prof. Dr. F. van der Blij, Utrecht,

Drs. H. de Jong, Utrecht,

Dr. P. G. J. Vredenduin, Oosterbeek.

Drs. M. D. Bos fungeerde als secretaris.

De taak van de commissie bestond wederom uit het samenstellen van de opgaven voor de beide ronden en de beoordeling van het ingezonden werk.

Aan de eerste ronde, die plaats had op donderdag 23 april, werd deelgenomen door 2904 leerlingen van 263 scholen, hetgeen slechts een geringe teruggang betekent ten opzichte van het aantal deelnemers in 1962. De belangstelling voor de Wiskunde-Olympiade blijft derhalve verheugend groot.

Het gemaakte werk werd door de wedstrijdleiders van de deelnemende scholen gewaardeerd en beoordeeld en voor 8 mei toegezonden aan de Adviescommissie. De Adviescommissie besloot de deelnemers die na revisie van het werk door de Commissie over minstens $23\frac{1}{2}$ punt beschikten van de 40 die er maximaal behaald konden worden, tot de tweede ronde toe te laten. Aldus werden 60 deelnemers tot de tweede ronde toegelaten.

De tweede ronde vond plaats op donderdag 15 oktober. Deze wedstrijd kon dank zij de medewerking van de directeur van de Rijkshogereburgerschool te Utrecht, Dr. W. J. Thijssen, weer in deze centraal gelegen school plaats hebben. De deelnemers werden van 11 tot 12 uur in het schoolgebouw ontvangen en namen allen deel aan de gemeenschappelijke maaltijd in het Universiteitshuis, Lepelenburg 1, Utrecht. Toezicht op het werk der deelnemers werd uitgeoefend door mej. E. J. J. van Rijckevorsel, Amersfoort, en de heren H. de Jong, Utrecht, W. J. Thijssen, Utrecht, P. Visser, Utrecht, en M. D. Bos, Amersfoort.

In november ontvingen de prijswinnaars bericht dat ze tot de topploeg van tien behoorden en werden hun namen ook aan alle deelnemers aan de tweede ronde en aan hun scholen bekend gemaakt. De rangorde van de tien winnaars bleef hierbij echter nog geheim.

De prijsuitreiking had plaats op woensdag 9 december in het gebouw van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, Nieuwe Uitleg 1, Den Haag door de secretaris-generaal van het Ministerie, Mr. H. J. Schölvinck. Deze reikte de prijzen uit die bestonden uit een of meer wiskunde-boeken benevens een boekenbon. De secretaris-generaal voegde hieraan nog een fraai uitgegeven boekje toe getiteld: „Waar men vroeger kanonnen goot . . .”, een boekje over de geschiedenis van de gebouwen van het ministerie aan de Nieuwe Uitleg. Ook ontvingen de prijswinnaars nog een gedrukte kaart, waarop hun naam en rangnummer stonden aangegeven.

Bij de plechtigheid ten departemente waren aanwezig: de chef van de hoofdafdeling v.h.m.o., Dr. J. A. A. Verlinden, de inspecteur van het v.h.m.o., drs. B. J. Westerhof, de voorzitter van de Adviescommissie Prof. Dr. H. J. A. Duparc, en de leden van deze commissie Prof. Dr. F. van der Blij, Drs. H. de Jong en Dr. P. G. J. Vredenduin; de voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, Prof. Dr. H. Freudenthal, de secretaris van die commissie, Dr. A. F. Monna, en de gewezen secretaris van de Wiskunde-Olympiade, Dr. Joh. H. Wansink. Verder behalve de prijswinnaars zelf, hun ouders en tal van rectoren en docenten.

De leiding van de bijeenkomst berustte bij Prof. Dr. H. Freudenthal, die allen die op enigerlei wijze aan het slagen van de wedstrijden of aan de slotbijeenkomst hadden medegewerkt hartelijk dankte.

Eind december werd het verslag van de Wiskunde-Olympiade-1964 aan Euclides ter plaatsing aangeboden. De Nederlandse On-

derwijscommissie voor Wiskunde besloot voordrukken van dit verslag aan alle deelnemende scholen te doen toekomen.

4. *Waardering van het gemaakte werk*

a. Een steekproef uit ruim 15 % van het ingezonden werk van de eerste ronde leverde de volgende puntenverdeling op.

0— 1 punten: 16 deelnemers	20—22 punten: 18 deelnemers
2— 4 punten: 23 deelnemers	23—25 punten: 11 deelnemers
5— 7 punten: 126 deelnemers	26—28 punten: 4 deelnemers
8—10 punten: 117 deelnemers	29—31 punten: 3 deelnemers
11—13 punten: 80 deelnemers	32—34 punten: 1 deelnemer
14—16 punten: 62 deelnemers	35—37 punten: 1 deelnemer
17—19 punten: 38 deelnemers	38—40 punten: 0 deelnemer

Het gemiddelde puntental voor deze steekproef van 500 deelnemers bedroeg 10,7 op een bereikbaar maximum van 40, hetgeen inhoudt, dat de deelnemers uit deze steekproef gemiddeld 26,7 % van het maximaal bereikbaar puntental behaalden. In 1962 en 1963 waren deze percentages respectievelijk 15,0 % en 18,5 %; er is dus een duidelijke stijging te constateren van het gemiddelde.

Het gemiddelde puntental behaald door de 60 deelnemers aan de tweede ronde bedroeg 26,8 op een bereikbaar maximum van 40, zodat deze 60 deelnemers gemiddeld 67,0 % van het maximum aantal punten behaalden. Ook hier een sterke stijging; de betreffende percentages bedroegen in 1962 en 1963 respectievelijk 37,0 % en 41,0 %.

b. De maxima van de deelnemende scholen voorzover de resultaten door de scholen werden doorgegeven.

0— 4 punten: 0 scholen	21—24 punten: 66 scholen
5— 8 punten: 0 scholen	25—28 punten: 32 scholen
9—12 punten: 16 scholen	29—32 punten: 14 scholen
13—16 punten: 32 scholen	33—36 punten: 2 scholen
17—20 punten: 85 scholen	37—40 punten: 3 scholen

Het gemiddelde maximum bedraagt 21, d.i. in procenten van het theoretisch maximum (40) : 53.

In 1962 en 1963 waren de betreffende percentages resp. 33 en 44, zodat ook in dit opzicht een stijging te constateren valt.

c. De volgorde in moeilijkheid van de in de eerste ronde opgegeven vraagstukken, beoordeeld naar de behaalde puntentallen, bedroeg:

(1) voor de 500 deelnemers behorende tot de onder a vermelde steekproef:

4, 2, 7, 1, 3, 6, 8, 5

(2) voor de 60 deelnemers aan de tweede ronde:

7, 1, 2, 4, 3, 6, 5, 8

Opgave 4 bleek verreweg het gemakkelijkst; van de totaal toegekende punten moesten er 46 % worden toegekend aan vraagstuk 4 alleen. Voor de vraagstukken 1—8 waren de procenten van het totale puntental dat opvolgend aan deze nummers moest worden toegekend:

12, 16, 8, 46, 1, 3, 13, 1

Opmerkelijk is, dat vraagstuk 1, dat toch het nauwst aansluit bij de gangbare meetkundevraagstukken in het v.h.m.o., gemiddeld slechts 12 % van het totaal aantal toegekende punten opleverde, en dus veel slechter werd gemaakt dan vraagstuk 4. De topploeg had met vraagstuk 1 veel minder moeite, zoals uit de verdeling van de punten over de acht vraagstukken blijkt; voor deze groep was de verdeling namelijk:

16, 16, 13, 16, 7, 8, 17, 7

d. De volgorde in moeilijkheid van de opgaven gesteld in de tweede ronde bedroeg:

(1) voor alle deelnemers aan de tweede ronde:

4, 3, 5, 2, 1

(2) voor de 10 prijswinnaars:

4, 1, 2, 5, 3

De tien prijswinnaars behaalden voor de vijf vraagstukken gemiddeld de volgende puntentallen:

7,0 6,0 5,4 7,5 5,8

Voor alle 60 deelnemers aan de tweede ronde waren deze gemiddelden:

3,7 3,7 4,4 5,3 3,8

Voor de tien deelnemers met de beste prestaties over de tweede ronde bedroegen deze gemiddelden:

7,0 7,4 4,4 7,1 5,8

Uit deze cijfers blijkt, dat de besten zich met name hebben onderscheiden met hun prestaties voor de vraagstukken 1 en 2; dus voor de vraagstukken, die voor de gehele groep van 60 het moeilijkst waren geweest. In 1962 onderscheidden de leerlingen met toppres-

taties zich juist bij die vraagstukken, waarmee de groep als geheel de minste moeite had gehad.

e. Er zijn deelnemers, voor wie het verschil in rangnummer bij de twee ronden behaald, opvallend groot is. Dit verschijnsel trad echter in de vorige jaren bij veel meer deelnemers op. De deelnemer, die na de eerste ronde bovenaan stond met $37\frac{1}{2}$ punt, behaalde tenslotte de zevende prijs. De deelnemer die daarop volgde met $36\frac{1}{2}$ punt behaalde de eerste prijs. Van de topploeg van 10 uit de eerste ronde vielen er in de tweede ronde vijf geheel af. De winnaars van de derde en de negende prijs kwamen pas bij de tweede ronde sterk naar voren. De andere prijswinnaars behoorden na de eerste ronde reeds tot de eerste twintig.

f. Voor de vaststelling van de einduitslag zijn zowel de prestaties uit de eerste ronde als die uit de tweede ronde in rekening gebracht. Bij het aantal punten behaald in de eerste ronde is het drievoud van het aantal punten van de tweede ronde opgeteld om de eindscore te bepalen. Het theoretisch maximum dat in de Wiskunde-Olympiade 1964 kon worden gehaald, werd daardoor 190.

g. De leeftijden van de 60 deelnemers aan de tweede ronde liepen uiteen van 16 jaar en 1 maand tot 19 jaar en 0 maand. Van de 10 prijswinnaars was de jongste 16 jaar en 7 maand, de oudste 18 jaar en 11 maand. Onder de tien prijswinnaars waren 8 gymnasiasten en 2 hbs-ers. Het Charloise Lyceum te Rotterdam telde voor de tweede maal in drie jaar tijds een prijswinnaar onder zijn leerlingen.

5. *Reacties op de aard der gestelde opgaven*

Ook dit jaar werd van tal van zijden waardering geuit over de aard van de opgaven van de eerste ronde. Over het algemeen achtte men de opgaven iets eenvoudiger dan in voorgaande jaren. Dit komt ook wel overéén met het aanzienlijk gestegen gemiddeld resultaat. De betekenis van de voorselectie, uitgeoefend door de eerste ronde heeft hieronder niet geleden, zoals uit het resultaat van de tweede ronde blijkt; eerder wijst de grotere correlatie tussen de resultaten voor de eerste en de tweede ronde op het tegendeel.

6. *Einduitslag van de Wiskunde-Olympiade-1964*

De prijswinnaars zijn:

1. B. de Vries, 134 punten ($97\frac{1}{2} + 36\frac{1}{2}$);
Charloise Lyceum, Rotterdam; oud 16 jaar, 5 maand; hbs.
2. W. Veldman, 129 punten ($99 + 30$);
St. Ignatius College, Amsterdam; oud 17 jaar, 0 maand; gymn.

3. P. P. Bardie, 127 punten ($102 + 25$);
St. Bonifatius Lyceum, Utrecht; oud 18 jaar, 9 maand; hbs.
4. W. Wattel, 126 punten ($93 + 33$);
Chr. Lyceum voor Zeeland, Goes; oud 17 jaar, 9 maand; gymn.
5. J. Heringa, $125\frac{1}{2}$ punten ($96 + 29\frac{1}{2}$);
Barlaeusgymnasium, Amsterdam; oud 18 jaar, 1 maand; gymn.
6. E. Sieverts, 125 punten ($99 + 26$);
Vondelgymnasium, Amsterdam; oud 17 jaar, 8 maand; gymn.
7. A. Goddijn, $124\frac{1}{2}$ punten ($87 + 37\frac{1}{2}$);
Gymnasium Paulinum, Driehuis-Velsen, oud 17 jaar, 2 maand;
gymn.
8. J. van Mastrigt, 123 punten ($96 + 27$);
Bernardinus College, Heerlen; oud 17 jaar, 5 maand; gymn.
9. D. den Boer, $120\frac{1}{2}$ punten ($96 + 24\frac{1}{2}$);
Rotterdamsch Lyceum, Rotterdam; oud 18 jaar, 1 maand;
gymn.
10. J. Steenbrink, 120 punten ($87 + 33$);
St. Jans Lyceum, 's-Hertogenbosch; oud 17 jaar, 8 maand;
gymn.

De leeftijden, die zijn opgegeven, gelden van de datum van de tweede ronde. Van de twee getallen tussen haken geeft het eerste het drievoud van het puntental van de tweede ronde aan, het laatste het puntental van de eerste ronde.

BIJLAGE I

Opgaven eerste ronde

Donderdag 23 april, 14.00—17.00 uur

1. In driehoek ABC is AD de hoogtelijn en AE de zwaartelijn uit A . Gegeven is, dat $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$.
Bereken de hoeken van de driehoek.
2. Op een cirkelvormige weg loopt een wandelaar rechtsom en rijdt een fietser linksom. Hun snelheden verhouden zich als 5 staat tot 9. Zij vertrekken tegelijk uit een punt A van de cirkel. Zodra zij elkaar weer in A ontmoeten, beëindigen zij hun tocht.
Hoe vaak hebben zij elkaar onderweg ontmoet (begin en eind van de tocht niet meegerekend)? Waar liggen de ontmoetingspunten?
3. Gegeven is een rechthoekig assenstelsel XOY .
Arceer het gebied, dat bestaat uit de punten, waarvan de coördinaten aan alle drie de volgende ongelijkheden voldoen:

$$0 < x < 4$$

$$0 < y < 4$$

$$\log x + \log y < \log (x + y).$$

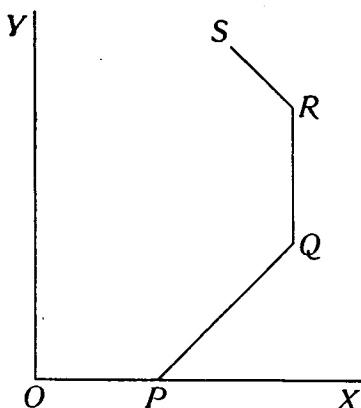
4. Een legpuzzel bestaat uit vier congruente stukken; de stukken zijn gelijkbenige trapezia met zijden 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 3. We leggen de stukken zo tegen elkaar, dat elk paar aangrenzende stukken één zijde geheel gemeen heeft. De overige zijden noemen we de rand van de verkregen figuur.
Schets hoe de stukken aan elkaar gepast kunnen worden, als de lengte van de rand van de verkregen figuur moet worden:
- $2 + 8\sqrt{2}$;
 - $8 + 4\sqrt{2}$;
 - $16 + 2\sqrt{2}$;
 - 16.
5. Als n een natuurlijk getal groter dan 1 is en $n^2 + n + 1$ ondeelbaar is, dan is de rest van $n^2 + n + 1$ bij deling door 6 gelijk aan 1.
Bewijs dit.
6. a. V is de verzameling van de getallen, die te schrijven zijn in de vorm $3p + 7q$, waarin p en q gehele niet-negatieve getallen zijn.
Welke natuurlijke getallen behoren niet tot V ?
- b. W is de verzameling van de getallen, die te schrijven zijn in de vorm $6p + 14q$, waarin p en q gehele niet-negatieve getallen zijn.
Welke natuurlijke getallen behoren niet tot W ?
7. Het grootste gehele getal, dat kleiner dan of gelijk aan a is, stellen we voor door $[a]$. Bv. $[4\frac{1}{2}] = 4$; $[-4\frac{1}{2}] = -5$.
- Los x op uit $x + [x] = 4\frac{1}{2}$.
 - Los x op uit $x + [x] = -4\frac{1}{2}$.
 - Teken de grafiek van de functie $x + [x]$ voor $-2 \leq x \leq 2$.
8. Van een rij $t_1, t_2, t_3, \dots$ is gegeven, dat
- $$t_{n+2} - t_{n+1} + t_n = 0$$
- voor elke n .
- Gegeven is $t_1 = 0$ en $t_2 = 1$.
Bewijs dat $t_n = \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin (n-1) 60^\circ$ voor elke n .
 - Gegeven is $t_1 = a$ en $t_2 = b$.
Bepaal t_n .

BIJLAGE II

Opgaven tweede ronde

Dinsdag 1 oktober, 14.00—17.00 uur

- Gegeven is een driehoek ABC , waarvan $\angle C = 60^\circ$.
Construeer een punt P op de zijde AC en een punt Q op BC zo, dat $ABQP$ een trapezium is, waarvan de diagonalen een hoek van 60° met elkaar maken.
- Gegeven is een plat vlak V met daarin een rechthoekig coördinatenstelsel XOY . We beschouwen viertallen getallen (p, q, r, s) ; $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0, s \geq 0$. Aan elk viertal voegen we een punt S van V toe op de manier, die in bijgaande figuur is weergegeven. In deze figuur is $OP = p, PQ = q, QR = r, RS = s$; $\angle OPQ = \angle PQR = \angle QRS = 135^\circ$.



- a. Wat is de verzameling van de punten van V , die aan deze viertallen toegevoegd zijn?
 - b. Welke van deze punten zijn aan slechts één viertal toegevoegd? Aan hoeveel viertallen zijn de overige punten toegevoegd?
 - c. Wat is de verzameling van de punten, die toegevoegd zijn aan de viertallen, waarvoor $p + q = 1$ en $r = s = 0$?
 - d. Wat is de verzameling van de punten, die toegevoegd zijn aan de viertallen, waarvoor $p + q = 1$ en $r + s = 1$?
3. Nicolaas ontvangt op zijn verjaardag op zaterdag 6 december 1800 een doorzichtige spaarpot, waarin een vrijgevig familielid een dubbeltje heeft gedaan. Op de volgende zaterdag krijgt Nicolaas er in zijn spaarpot 12 cent bij, op de daaropvolgende 14 cent, enz. (iedere zaterdag 2 cent meer dan de voorafgaande). Op zekere zaterdag ontdekt Nicolaas, die het systeem van de schenkingen door heeft, dat in zijn spaarpot zich een geldsbedrag bevindt, dat in centen uitgedrukt een kwadraat is, en — gevorderd als hij is in het rekenen — ontdekt hij ook, dat het de laatste keer is dat dit voorkomt. Wanneer deed Nicolaas de bewuste ontdekking?

4. Een functie is gedefinieerd voor alle getallen x , waarvoor $0 \leq x \leq 1$. Boven-dien geldt voor al deze waarden van x , dat

$$f\{f(x)\} = f(x). \quad (1)$$

- a. Als er een getal c tussen 0 en 1 bestaat met $f(c) = \frac{1}{2}$, bereken dan $f(\frac{1}{2})$.
- b. Als er voor ieder getal t tussen 0 en 1 een getal s tussen 0 en 1 bestaat met $f(s) = t$, bepaal dan $f(x)$.
- c. Bewijs dat de functie gedefinieerd door

$$\begin{cases} g(x) = x & \text{voor } 0 \leq x \leq k \\ g(x) = k & \text{voor } k \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (0 < k < 1)$$

aan de betrekking (1) voldoet.

5. Men beschouwt een rij niet-negatieve gehele getallen $g_1, g_2, \dots$, elk bestaande uit drie cijfers (ook getallen kleiner dan 100 worden met drie cijfers geschreven; het getal 27 b.v. schrijven we 027). Elk volgend getal ontstaat uit het voorafgaande door het produkt te nemen van de drie cijfers, waaruit het voorafgaande bestaat. De ontstane rij is uiteraard afhankelijk van de keuze van g_1 (Zo leidt $g_1 = 359$ tot $g_2 = 135, g_3 = 015, g_4 = 000$).

Toon aan, dat ongeacht de keuze van g_1 geldt:

a. $g_{n+1} \leq \frac{1}{2}g_n$;

b. $g_{10} = 000$.

BIJLAGE III

Eerste ronde

TOELICHTING BIJ DE BEOORDELING,
door de Adviescommissie toegezonden aan de wedstrijdleiders.

Voor elke opgave wordt een geheel aantal punten toegekend, en wel ten hoogste 5 en ten minste 0 punten.

Hieronder vindt u enige aanwijzingen voor de beoordeling en de antwoorden van die opgaven, die een berekening vereisen.

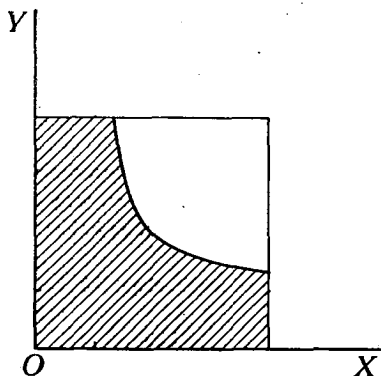
1. Antwoord: $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$.

Aantal punten afhankelijk van de kwaliteit van het antwoord.

2. Antwoord: 13 keer. De ontmoetingspunten vormen met punt A de hoekpunten van een regelmatige veertienhoek.

Voor het juiste aantal worden 3 punten toegekend en voor de juiste opgave van de ligging van de ontmoetingspunten 2 punten.

3. Antwoord:



Is alleen de hyperbool goed getekend, dan worden 2 punten toegekend.

4. a goed: 1 punt;
b goed: 1 punt;
c goed: 1 punt;
d goed: 2 punten.

Bij elk onderdeel behoeft slechts één oplossing gegeven te worden.

5. Aantal punten afhankelijk van de kwaliteit van het antwoord.

6. a. Antwoord: 1, 2, 4, 5, 8, 11.

Antwoord goed: 1 punt;

motivering goed: 2 punten.

- b. Antwoord: 2, 4, 8, 10, 16, 22, $2n - 1$ (n natuurlijk);
 Antwoord goed, ongeacht de aard van de motivering: 2 punten.
 Alleen 2, 4, 8, 10, 16, 22: 1 punt;
 alleen $2n - 1$: 1 punt.
7. Antwoorden: a. $2\frac{1}{2}$; b. vals.
 a goed: 1 punt;
 b goed: 1 punt;
 c goed: 3 punten.
 Als bij c het punt (2, 4) weggelaten is, worden slechts 2 punten toegekend.
8. Antwoord b:
 $t_{6k+1} = a$, $t_{6k+2} = b$, $t_{6k+3} = b - a$, $t_{6k+4} = -a$, $t_{6k+5} = -b$, $t_{6k} = a - b$
 of $t_n = \frac{2}{3} a \sqrt{3} \sin (n+1)60^\circ + \frac{2}{3} b \sqrt{3} \sin (n-1)60^\circ$.
 a goed: 3 punten;
 b goed, ongeacht de aard van de motivering: 2 punten.

BIJLAGE IV OPLOSSINGEN

van de opgaven van de Wiskunde-Olympiade-1964¹⁾

Eerste ronde

- Berekening:* Volgens een bekende stelling geldt: $DE:EC = AD:AC$. Maar $DE = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} EC$. Dus $AD = \frac{1}{2} AC$. Dus $\angle C = 30^\circ$ en $\angle CAE = 30^\circ$. Dan $\angle A = 90^\circ$ en $\angle B = 60^\circ$.
- We noemen het middelpunt van de weg M . We kiezen op de weg een willekeurig punt A . De plaats op de weg van een punt P bepalen we door $\angle PMA$, rechtsom negatief en linksom positief gemeten.
 Laat de voetganger per seconde een weg afleggen die met een middelpuntshoek van $5a^\circ$ correspondeert. Dan legt de fietser een weg af van $9a^\circ$. Na t seconden is de plaats van de wandelaar $-5at^\circ$ en van de fietser $9at^\circ$. Ze zijn op het zelfde punt van de weg als
 $9at^\circ = -5at^\circ + k \cdot 360^\circ$, met een geheel getal k . Dit gebeurt op de tijdstippen $t_1, t_2, t_3, \dots$ enz. met

$$t_k = k \cdot \frac{360}{14a}$$

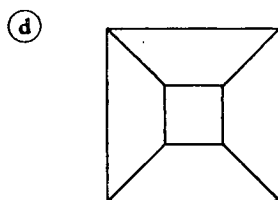
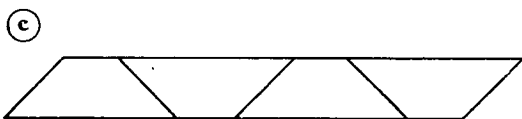
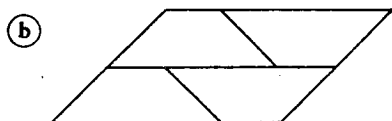
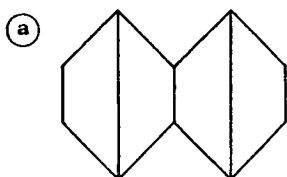
Op het tijdstip t_k is de plaats van de wandelaar $\frac{k}{14} \cdot 1800^\circ$. Dit is het punt A , als k een veelvoud van 14 is; het eerst dus als $k = 14$. Zij hebben elkaar dus 13 keer ontmoet. De ontmoetingspunten zijn de hoekpunten van een regelmatige veertienhoek.

- Voor een tekening, zie bijlage III.
 Het gebied, bestaande uit de punten waarvan de coördinaten voldoen aan de ongelijkheden $0 < x < 4$ en $0 < y < 4$, is een vierkant, begrensd door de x -as, de y -as, de lijn $x = 4$ en de lijn $y = 4$. Dit vierkant verdelen we in een rechthoek A ,

¹⁾ Voor deze bijlage is dankbaar gebruik gemaakt van de oplossingen die de leden van de Adviescommissie hebben ingezonden.

waarin geldt $x < 1$ en een rechthoek B , waarin geldt $x > 1$. Willen de coördinaten van een punt voldoen aan $\log x + \log y < \log(x + y)$, dan dient te gelden $xy < x + y$; voor positieve x en y geldt ook het omgekeerde. Deze ongelijkheid kan worden geschreven $y(x - 1) < x$. Alle punten in het gebied A voldoen aan deze eis, aangezien in dat gebied $x - 1$ negatief is. Op de lijn $x = 1$ is $x - 1 = 0$, zodat ook de punten van die lijn, voor zo ver zij binnen het vierkant liggen, tot de gezochte verzameling behoren. Binnen de rechthoek B is $x - 1$ positief, zodat we kunnen schrijven $y < \frac{x}{x - 1}$. Aan deze eis voldoen de punten, gelegen beneden de hyperbool $y = \frac{x}{x - 1}$, voor zo ver zij binnen B zijn gelegen. Aldus vinden we het gearceerde gebied.

4. Oplossingen:



5. *Bewijs:* Van twee opeenvolgende getallen is er juist één even, dus hun produkt $n(n+1)$ is ook even en het getal $n(n+1) + 1 = n^2 + n + 1$ is derhalve oneven. Voor het getal n onderscheiden wij nu drie gevallen (andere gevallen zijn niet mogelijk):

1°: n is een 3-voud; dan is $n(n+1)$ het ook, en het getal $n^2 + n + 1$ is dan een 3-voud + 1.

2°: n is een 3-voud + 1; dan is n^2 het ook, en $n^2 + n + 1$ is dus juist weer een 3-voud. Behalve in het geval $n = 1$, dat niet optreedt op grond van het gegeven, is het getal dan deelbaar door 3, een situatie die op grond van het gegeven evenmin optreedt.

3°: n is een 3-voud + 2, dus $n + 1$ is een 3-voud, en het getal $n(n+1)$ ook; $n^2 + n + 1$ is dan een 3-voud + 1.

In de enige gevallen, die kunnen optreden, blijkt $n^2 + n + 1$ zowel een 3-voud + 1 als oneven te zijn; en is dus een 6-voud + 1.

6. a. Alle getallen ≥ 14 behoren tot V . Immers:

$$14 = 2 \cdot 7,$$

$$15 = 14 - 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3,$$

$$16 = 15 - 2 \cdot 3 + 7,$$

$$17 = 16 - 2 \cdot 3 + 7,$$

$$18 = 17 - 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3, \text{ enz.}$$

- We behoeven dus alleen de getallen < 14 nader te onderzoeken. Doen we dit, dan vinden we, dat niet tot V behoren de getallen 1, 2, 4, 5, 8 en 11.
- b. De getallen, die wel tot W behoren, zijn de even getallen $2n$, waarin n tot V behoort. Hieruit volgt, dat niet tot W behoren: de oneven getallen, en de getallen 2, 4, 8, 10, 16 en 22.
7. a. Aangezien x minder dan 1 van $[x]$ verschilt, verschilt $x + [x]$ minder dan 1 van $2[x]$. Dus $2[x]$ verschilt minder dan 1 van $4\frac{1}{2}$, zodat $[x]$ minder dan $\frac{1}{2}$ van $2\frac{1}{2}$ verschilt. Dit levert $[x] = 2$, dus $x = 2\frac{1}{2}$.
- b. Een zelfde redenering levert, dat $x + [x] = -4\frac{1}{2}$ een valse vergelijking is.
- c. *Grafiek*: De grafiek bestaat uit het punt (2, 4), het lijnstuk met eindpunten $(-2, -4)$ en $(-1, -3)$, en drie andere, daarmee evenwijdige, en even lange lijnstukken. Van ieder lijnstuk behoort telkens het laagst gelegen eindpunt wél, en het hoogst gelegen eindpunt niet tot de grafiek.
8. a. Eenvoudig kan worden berekend:
 $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 1, t_4 = 0, t_5 = -1, t_6 = -1, t_7 = 0, t_8 = 1, \dots$ Omdat $t_7 = t_1$ en $t_8 = t_2$ volgt $t_{n+6} = t_n$.
 Bewijs van dit feit:
- $$\begin{array}{rcl} t_{n+6} & = & t_{n+5} - t_{n+4} \\ t_{n+5} & = & t_{n+4} - t_{n+3} \\ -t_{n+3} & = & -t_{n+2} + t_{n+1} \\ -t_{n+2} & = & -t_{n+1} + t_n \\ \hline t_{n+6} & = & t_n \end{array} +$$
- Voor $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ verifieert men
 $t_n = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin(n-1) 60^\circ$. Dan geldt deze relatie voor alle n .
- b. Eenvoudig kan worden berekend:
 $t_1 = a, t_2 = b, t_3 = b - a, t_4 = -a, t_5 = -b, t_6 = -b + a, t_7 = a, t_8 = b,$
 $\dots$
 Daar $t_{n+6} = t_n$ is hiermede voor alle n het getal t_n gegeven.
 Algemene formule:
 $t_n = b \cdot \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin(n-1) 60^\circ + a \cdot \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin(n+1) 60^\circ$

Tweede ronde

1. Volgens een bekende eigenschap is de verbindingslijn van het snijpunt S van de diagonalen AQ en BP van het trapezium en het hoekpunt C mediaan in $\triangle ABC$. Derhalve kan het punt S als volgt worden geconstrueerd:
 S ligt zo op die mediaan, dat $\angle ASB = 120^\circ$ (de situatie dat $\angle ASB = 60^\circ$ blijkt niet mogelijk te zijn), en wordt dus gevonden als het snijpunt van de mediaan en een cirkelboog, de meetkundige plaats der punten van waaruit men AB onder een hoek van 120° „ziet“.
2. a. Trek de halve lijn OZ , waarvoor $\angle XOZ = 135^\circ$. De verzameling van de punten, waaraan viertallen toegevoegd zijn, is het gesloten deel V' van V , dat begrensd wordt door de halve lijnen OX en OZ .
- b. De verzameling van de punten, die aan slechts één viertal zijn toegevoegd, bestaat uit de halve lijnen OX en OZ . Is $OS = a$, dan zijn deze punten toegevoegd aan de viertallen $p = a, q = r = s = 0$ resp. $p = q = r = 0, s = a$. Is S een ander punt van V' , dan zijn onbegrensd veel viertallen aan S toegevoegd. Trek, om dit in te zien een lijn door S evenwijdig aan OZ en noem het

snijpunt van deze lijn met OX het punt P_1 . Stel $OP_1 = b$. We vinden dan een viertal door willekeurig $0 \leq p \leq b$ te kiezen en daarna q eveneens willekeurig zó dat $0 \leq p + \frac{1}{2}q\sqrt{2} \leq b$. Hierna zijn r en s eenduidig bepaald.

- c. Kies op OX het punt A zo, dat $OA = 1$. Trek de halve lijn OU , waarvoor $\angle XOY = 45^\circ$.

Kies op OU het punt B , zo dat $OB = 1$. De gevraagde verzameling is dan het lijnstuk AB . Dit is direct duidelijk, als we bedenken, dat $PQ = PA$.

- d. Kies Q willekeurig op het lijnstuk AB en bepaal uitgaande van Q de verzameling van punten S , waarvoor $r + s = 1$. Dit is het lijnstuk $C_Q D_Q$, dat bepaald wordt door $QC_Q = 1$, $QC_Q // OY$, $QD_Q = 1$, $QD_Q // OZ$.

Door Q het lijnstuk AB te laten doorlopen en de vereniging te nemen van de bij deze punten behorende lijnstukken $C_Q D_Q$, zien we dat de gevraagde verzameling het gesloten vierkant $C_A^+ C_B D_B D_A$ is.

3. Op het eind van de n^e zaterdag na 6 december 1800 is in Nicolaas' spaarpot een bedrag (uitgedrukt in centen) van $10 + 12 + 14 + \dots + (10 + 2n) = \frac{1}{2}(n+1)(20 + 2n) = (n+1)(n+10)$ aanwezig. Men heeft dus $(n+1)(n+10) = q^2$, waarbij ook q een natuurlijk getal is.

Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

- 1°. $n+1$ en $n+10$ hebben geen factoren gemeen. Dan moeten $n+1$ en $n+10$ beide kwadraten zijn, dus $n+1 = a^2$ en $n+10 = b^2$, dus $9 = b^2 - a^2$, waaruit gemakkelijk volgt $a = 4$, $b = 5$ en $n = 15$ (grotere zelfs opeenvolgende kwadraten hebben een groter verschil dan 9).

- 2°. $n+1$ en $n+10$ hebben wél factoren gemeen; zo'n faktor is ook deler van het verschil 9 dezer getallen en is dus 3 of 9.

Het geval $f = 9$ zou er toe leiden, dat $(n+1)(n+10)$ deelbaar is door 81. Stelt men $n+1 = 9c$, dan is $n+10 = 9(c+1)$, zodat $81c(c+1) = q^2$; dus $c(c+1)$ is ook een kwadraat. Dit is echter voor natuurlijke c uitgesloten (immers dan zouden evenals hier boven c en $c+1$ beide kwadraten moeten zijn en dat kan niet).

Het geval $f = 3$ voert tot $n+1 = 3d$, dus $n+10 = 3(d+3)$ en men krijgt $9d(d+3) = q^2$, dus $d(d+3)$ is een kwadraat. Dit is slechts mogelijk voor $d = 1$, dus $n = 2$.

De gevraagde maximale n is dus de in het sub 1° bekeken geval, zodat $n = 15$. De ontdekking werd dus 15 weken na 6 december 1800, dus op 21 maart 1801 gedaan (nadat de spaarpot is bijgevuld) of op 28 maart 1801 (voor de schenking van die dag).

4. a. $f(\frac{1}{2}) = f(f(c))$. Volgens het gegeven is $f(f(c)) = f(c)$ en verder $f(c) = \frac{1}{2}$, dus $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

- b. Laat t voldoen aan $0 \leq t \leq 1$. Dan $f(t) = f(f(s)) = f(s) = t$. Interpreteren wij „tussen“ als: t voldoet aan $0 < t < 1$, dan moeten $f(0)$ en $f(1)$ apart onderzocht worden. Stel hiertoe $f(0) = k$ en $f(1) = p$, met $0 \leq k \leq 1$ en $0 \leq p \leq 1$, dan kunnen we onderscheiden:

1°. $k = 0$ dan $f(f(0)) = f(0)$, dus is aan de relatie voldaan;

2°. $0 < k < 1$ dan $f(f(k)) = f(k) = k = f(0)$, dus aan de relatie is voldaan.

3°. $k = 1$ dan is aan de relatie slechts voldaan als $f(1) = 1$, want $f(f(0)) = f(1)$ en $f(0) = 1$.

Voorts vinden we op overeenkomstige wijze:

1°. $p = 0$ dan is aan de relatie slechts voldaan als $f(0) = 0$.

2°. $0 < p < 1$ dan is aan de relatie voldaan.

3°. $p = 1$ dan is aan de relatie voldaan.

c. Voor $0 \leq x \leq k$ geldt: $g(g(x)) = g(x)$ en voor $k \leq x \leq 1$ geldt:

$$g(g(x)) = g(k) = k = g(x).$$

5. a. Duidt men het aantal eenheden, tientallen en honderdtallen van het n^o getal g_n uit de beschouwde rij aan resp. met p_n , q_n en r_n , dan geldt $g_n = 100 r_n + 10 q_n + p_n$ en verder $g_{n+1} = 100 r_{n+1} + 10 q_{n+1} + p_{n+1} = p_n q_n r_n$. In het geval $p_n = 9$, $q_n = 9$ heeft men $g_n = 100 r_n + 99$ en $g_{n+1} = 81 r_n$, dus $\frac{3}{4} g_n = 75 r_n + 74\frac{1}{4}$ en $g_{n+1} \leq \frac{3}{4} g_n$, want $81 r_n \leq 75 r_n + 74\frac{1}{4}$; immers $6 r_n \leq 54 < 74\frac{1}{4}$.
- b. Uit $g_1 \leq 999$ volgt $g_2 \leq 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Daar voor alle getallen die kleiner of gelijk zijn aan 729 geldt dat $r_2 q_2$ kleiner of gelijk is aan $6 \cdot 9 = 54$, geldt dat $g_3 \leq 6 \cdot 9 \cdot 9 = 486$. Evenzo blijkt $g_4 \leq 4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$ en dan evenzo $g_1 \leq 1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$, dus $g_6 = 0$. Uit $g_{n+1} \leq \frac{3}{4} g_n$ volgt vervolgens, dat $g_7 = g_8 = g_9 = g_{10} = 0$.

BOEKBESPREKING

Dr. A. J. Stam, *De rol van de waarschijnlijkheidsrekening in de wiskunde*.

Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de toegepaste wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen. J. B. Wolters, Groningen 1964. Prijs niet aangegeven.

De rede begint met een historische inleiding, waarin geschetst wordt hoe de wiskunde steeds meer een fundamentele rol in de waarschijnlijkheidsrekening is gaan spelen. Dit loopt uit op een bezinning op de grondslagen van deze waarschijnlijkheidsrekening in de negentiende eeuw.

Het werk van Kolmogorov (1933) betekent dan een keerpunt. Nu gaat omgekeerd de waarschijnlijkheidsrekening een rol spelen bij de opbouw van de wiskunde. Nadat hierover nadere opmerkingen zijn gemaakt en aangeduid is hoe ook b.v. fysische beschouwingen kunnen helpen bij de opbouw van de zuivere wiskunde, loopt de rede uit in de volgende stelling: „De toegepaste wiskunde kan een belangrijker rol spelen in de zuivere wiskunde dan tot dusverre het geval was, daar ze de zuivere wiskunde niet slechts problemen verschaft, maar ook oplossingsmethoden en bewijstechnieken”.

Een interessante rede.

J. F. Hufferman

A. N. Borghouts, *Inleiding in de mechanica*, Delftsche Uitgeversmaatschappij, 1962, 257 blz.; ingen. f 20,—

„Deze inleiding in de mechanica is voortgekomen uit de behoefte aan een handboek op enigszins brede basis bij de propaedeutische studie in de natuurkunde aan de technische hogeschool te Delft. Zij is geschreven van het standpunt van de fysicus”. Aldus begint het „Woord vooraf”.

De fundamentele betekenis die de mechanica voor de natuurkunde heeft, komt door een leerboek als dit scherp naar voren. De wiskundedocent die tot voor kort aan de h.b.s. onderwijs in mechanica had te geven, komt door de lectuur van Borghouts' werk tot de conclusie dat de opname van de mechanica in de natuurkunde tot een verruiming van de wetenschappelijke horizon van de studerende jeugd kan leiden, beter dan eertijds het geval was.

Onderwerpen als kunstmanen, statische en rollende wrijving, corioliskrachten, precessie en nutatie, conserverende en niet-conserverende velden, elasticiteit en mechanische aspecten van de relativiteitstheorie trekken onze aandacht.

Aan een verantwoorde nomenclatuur is grote zorg besteed: massamiddelpunt i.p.v. zwaartepunt, impulsie i.p.v. impuls.

Kennismaking met deze inleiding tot de mechanica kan ik ook de wiskundeleraars van harte aanbevelen.

Joh. H. Wansink

John Annett, *Programmed Learning*, Journal of the Association for Programmed Learning, eerste aflevering, May 1964; 52 bladz.; 21/— per jaar; Sweet and Maxwell, London.

In het „Editorial” wordt de vraag „What is programmed learning?” beantwoord en de toepassingen ervan uiteengezet. De geschiedenis van de totstandkoming van de „Association for Programmed Learning” wordt gegeven.

We citeren de paragraaf over „the policy of the journal”:

In programmed learning science and education meet. It is the policy of this journal to aim at the standards appropriate to scientific investigation and so we intend to publish articles of original research. But the aim is not simply to provide a dry repository of factual information but to communicate to a readership which include many practising teachers who need accessible and useful data in their day-to-day work...

The journal will publish material in the following categories:

Original theoretical articles- research reports-literature surveys and reviews- shorter articles on special devices and techniques and on special or unusual applications- book reviews-abstracts of articles published elsewhere- program evaluation data-the official proceedings of the Association.

Uit de inhoud van deze eerste aflevering noemen we:

- a. The history of a programme on papermaking;
- b. The effects of linear and branching methods of programmed instruction on learning...;
- c. The feedback Classroom;
- e. Programmed learning in emerging nations;
- f. The Auto-Tutor and Classroom instruction.

De uitgave is van belang voor allen die zich interesseren voor de ontwikkeling van de materiële hulpmiddelen voor ons onderwijs.

Joh. W. Wansink

EXAMENS AKTEN WISKUNDE M.O.-A EN M.O.-B.

Voor de dit jaar te houden examens dient men zich per briefkaart voor 1 maart 1965 aan te melden en wel voor de A-akte bij Dr. D. N. van der Neut, Homeruslaan 35, Zeist en voor de B-akte bij Dr. H. A. Gribnau, Fred. Hendriklaan 55, Haarlem.

CURSUSSEN MODERNE WISKUNDE VOOR LERAREN

Aan de directeuren en rectoren van VHMO- en kweekscholen is door de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen de volgende brief (29 januari 1965) toegezonden:

„De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft mij voorgesteld in september 1965 wederom een cursus in moderne wiskunde te organiseren voor bevoegde leraren. Daar ik overtuigd ben van de grote waarde van deze inmiddels reeds enkele malen gehouden cursussen, verenig ik mij gaarne met dit voorstel. De Commissie zal zich ook nu weer met de organisatie belasten. De cursus zal wederom colleges en praktische oefeningen omvatten en naar het zich laat aanzien, van 13—17 september 1965 worden gegeven in Eindhoven, Groningen en Utrecht. De deelneming is kosteloos; reis- en verblijfkosten komen voor Rijksrekening.

Ik verzoek U de leraren die willen deelnemen, hiertoe in de gelegenheid te stellen. Ik keur goed, dat U hiervoor buitengewoon verlof verleent. Voor verdere bijzonderheden verwijs ik U naar de hierbij gevoegde circulaire van de Commissie.

Ik verzoek U de inhoud van deze brief en de bijgaande circulaire ter kennis te brengen van de aan Uw school verbonden bevoegde leraren in de wiskunde.”

De brief was vergezeld van een schrijven van de secretaris van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Dr. A. F. Monna, met de onderstaande tekst:

„Blijkens zijn brief van heden, R. A. i. A.D., no. 952 I/U. heeft de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde wederom belast met de organisatie van een cursus in de wiskunde voor leraren wiskunde. De commissie deelt U dienaangaande het volgende mede.

Het onderwerp zal ditmaal zijn: *groepentheoretische aspecten van de elementaire meetkunde*.

In verband met de meermalen door de deelnemers geuite wens om vooraf een syllabus ter beschikking te stellen, heeft de Commissie zich beraden wat op dit punt zou kunnen worden gedaan. Het stuit ook nu op bezwaar vooraf een syllabus rond te sturen. Echter kan de Commissie het volgende boek ter bestudering aanbevelen: I. M. Yaglom — „*Geometric Transformations*”. Dit boek kan dienen als een zekere inleiding tot de onderwerpen, die in de cursus worden behandeld. De aanschaffingskosten komen voor rekening van de deelnemers. De Commissie stelt zich voor de boeken centraal te bestellen, zodat zij de leraren verzoekt niet zelfstandig tot aanschaffing over te gaan. De Commissie treft hiertoe voorbereidingen in overleg met de correspondenten van de regionale studiegroepen. Nadere mededelingen zullen de leraren hieromtrent bereiken via deze correspondenten.

Indien er bevoegde leraren aan Uw school zijn, die niet zijn aangesloten bij een studiegroep en die met het oog op deelname aan de cursus het genoemde boek willen aanschaffen, verzoek ik U hun naam en adres mede te delen aan het Secretariaat van de Commissie, Boothstraat 17 te Utrecht.

Omtrent de definitieve aanmelding voor deze cursus zal de Commissie U alsnog nader berichten.”

Wij kunnen ons slechts verheugen dat de cursussen zullen worden voortgezet. We hopen dat t.z.t. het aantal deelnemers weer groot zal zijn en willen ieder opwekken zich aan te melden.

AMK.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien ze binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht” in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 24 maart 1965: Prof. Dr. Ph. Dwinger: „*Toepassingen in de algebra en topologie van enige verzamelingtheoretische resultaten*”. Aanvang 20,00 uur.

In de serie „Actualiteiten” in Hotel Krasnapolsky, Warmoesstraat 173—179, Amsterdam op zaterdag 27 maart 1965: Drs. D. Kruyswijk: „*Over eindige harmonische sommen*”. Aanvang 14,00 uur.

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Congres.

Het Wiskundig Genootschap organiseert op 21 en 22 april e.k. het *Eerste Nederlandse Mathematische Congres*.

in de gebouwen van de Technische Hogeschool Twente. Het Congres begint op 21 april te 11.30 uur met een lezing door prof. dr. A. C. Zaanen en eindigt op 22 april te 16.00 uur met een lezing van prof. dr. J. F. Benders. De tussen liggende tijden worden gevuld met sectie-voordrachten.

De Congres Commissie denkt de voordrachten in de volgende secties onder te verdelen: grondslagen, algebra, analyse, getallentheorie, meetkunde, didactiek, wiskundig-fysische methoden, numerieke wiskunde, stochastiek en operationele analyse.

Ieder, die een voordracht (maximaal 30 minuten) op het Congres wil houden, wordt verzocht zich voor 15 maart e.k. op te geven bij de secretaris van het Wiskundig Genootschap: dr. J. G. Dijkman, Ged. Oude Gracht 121, Haarlem.

Deze aanmelding dient vergezeld te gaan van de titel en een korte samenvatting van de lezing.

Inlichtingen omtrent lunches, diner, logies, avondprogramma, etc. worden verstrekt door drs. H. G. van Kooten, p.a. T. H. Twente, Postbus 217, Enschede.

Er wordt geen congresbijdrage gevraagd.

Iedere beoefenaar van de wiskunde is welkom.

TELEAC

In de cursus „*Moderne Onderwijsmethoden en Didactiek*” op woensdag 31 maart 1965 via het televisienet van 22,40—23,10 uur met herhaling op zaterdag 3 april om 10,30 uur) Prof. Dr. L. van Gelder: „*Geprogrammeerde instructie*”.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduyn, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

127. Gegeven is, dat in opgave 125 de bovenste schijf 1 kg weegt, de volgende 2 kg, enz. Onderstel, dat er n schijven zijn en dat de a -de schijf bij het overbrengen van de schijven p keer verplaatst moet worden. Dan is de bijdrage van de a -de schijf tot.

het totale gewicht, dat verplaatst móet worden *ap* kg. Gegeven is nu verder, dat de bijdrage van de 37ste schijf 13952 kg meer is dan de bijdrage van de 39ste schijf. Bereken het totale aantal schijven.

128. Een nieuwe leraar komt voor het eerst in een klas. Hij informeert naar de namen van de leerlingen. Er ontstaat een Babylonische spraakverwarring. De leerlingen noemen niet alleen hun eigen naam, maar ook elkaars namen. Al heel gauw wordt hem duidelijk, dat ze hem voor de gek houden.

Hij neemt daarom een collega in de arm om hem uit de impasse te helpen. Deze collega heeft een zoon in de betreffende klas en is daardoor enigszins op de hoogte. „Ja”, zegt hij, „ze hebben je inderdaad bij de neus gehad. Ze hebben allemaal verschillende namen en ze hebben afgesproken deze in het wilde weg te gebruiken. Alleen hebben ze zich daarbij nog wel aan een bepaalde regel gebonden. De leerling met de naam, die *A* aan *B* gaf, noemde *C* namelijk met de naam, waarmee *A* de leerling aansprak, wiens naam door *B* aan *C* werd gegeven. Verder hoorde ik van mijn zoon, dat Jan spelbreker was. Hij wilde niet meedoen en heeft de goede namen genoemd. Of er meer spelbrekers waren, weet ik niet. Heb je zelf nog bijzonderheden opgemerkt?” „Niet veel. Ik heb wel gemerkt, dat één van de leerlingen zichzelf „Jan” noemde. Of de anderen hem ook „Jan” noemden, weet ik niet. Wel heb ik gehoord, dat ieder, zonder uitzondering, minstens één keer „Jan” genoemd werd”.

Lezer, kunt u uw collega's, de nieuwe en de sympathieke, uit de droom helpen? Was er nog een tweede spelbreker? En zoudt u weten, of er iemand was (behalve Jan zelf), die tegen Jan ook „Jan” gezegd heeft? (L. A. Rang)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

125. Als het aantal schijven op pin a 1 bedraagt, is de oplossing triviaal. Verder met volledige inductie. Als het mogelijk is *n* schijven van pin a b.v. naar pin b op de voorgeschreven manier te verplaatsen, dan brengen we daarna de *n* + 1-ste schijf van pin a naar pin c om vervolgens de *n* schijven van pin b ook naar pin c over te brengen.

126. Het zwaartepunt van de bovenste kubus kan zich uiterlijk bevinden boven de rand van de tweede kubus. De bovenste kubus steekt dan $\frac{1}{2}$ uit. Het zwaartepunt van de bovenste twee kubussen kan zich bevinden boven de rand van de derde kubus. Dit gebeurt, als de tweede kubus $\frac{1}{2}$ buiten de derde uitsteekt. Op gelijke wijze doorredenerend vinden we, dat de derde kubus $\frac{1}{2}$ buiten de vierde kan uitsteken, de vierde $\frac{1}{2}$ buiten de vijfde, enz. In totaal kan de bovenste kubus dus uitsteken

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots,$$

d.w.z. dat dit uitsteken aan geen bovenste grens gebonden is.

Ad 121. Dr. A. H. Broers (Rijswijk, Z.H.) schrijft, dat ik bij het oplossen van nr. 121 (ring met vier elementen) onvolledig geweest ben. Ook voldoen bij de tweede opteltabel de vermenigvuldigingen:

0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 3 0 3	0 1 2 3	0 1 0 1
0 0 0 0	0 0 0 0	0 2 0 2
0 3 0 3	0 1 2 3	0 3 0 3

Wiskunde-uitgaven voor het V.H.M.O.

C. J. Alders

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE

met gratis antwoorden - 16e/20e druk f 2,50, geb. f 3,25

C. J. Alders

GONIOMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

21e/25e druk f 2,25, geb. f 3,15; antwoorden f 0,75

C. J. Alders

STEREOMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

21e/23e druk f 2,90, geb. f 3,80

C. J. Alders

PLANIMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

31e/35e druk f 3,75, geb. f 4,65

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

Deel I, 2e druk f 3,90; Deel II, f 4,50

J. C. Kok

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING VOOR HET V.H.M.O.

2e druk f 4,50, geb. f 5,00

A. A. Lucieer

STEREOMETRIE VOOR M.O. EN V.H.O.

13e druk van het schoolboek van Molenbroek en Wijdenes - f 5,—, geb. f 5,75; antwoorden f 1,—

Dr. D. J. E. Schrek

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

4e druk, met afzonderlijk antwoordenboekje f 4,50, geb. f 5,25

Dr. H. Streefkerk

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M.O. EN V.H.O.

I (5e druk) f 3,25 - II (4e druk) f 3,50 - III (3e druk) f 3,75

P. Wijdenes

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

f 4,75; antwoorden f 2,50



P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Prof. dr. G. R. Veldkamp

HET EXAMEN WISKUNDE M.O.-A

Dit werk is bestemd voor hen die zich voorbereiden op het examen Wiskunde M.O.-A
Ing. f 6.90

Prof. dr. A. Heyting

PROJECTIEVE MEETKUNDE

Dit werk is onder andere bestemd voor hen die zich voorbereiden voor de akte Wiskunde M.O.-A
Ing. f 12.—; geb. f 13.90

Prof. dr. F. Loonstra

INLEIDING TOT DE ALGEBRA

Deze uitgave is bestemd voor gebruik bij de studie Wiskunde M.O.-A
2e druk - geb. f 22.50

W. J. H. Salet e.a. **VRAAGSTUKKEN OVER ANALYSE EN ALGEBRA**

Deel I - voor M.O.-A

7e druk - Ing. f 7.25

Deel II - voor M.O.-B

3e druk - Ing. f 7.75

Prof. dr. L. Kuipers

LEERBOEK DER ANALYSE

Deel I - voor M.O.-A

2e druk - Ing. f 16.50; geb. f 18.50

Deel II - voor M.O.-B

Geb. f 22.50

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Een nieuw werkschrift Stereo voor het VHMO



STEREOVISIE door Ir. H. M. Mulder e.i.

75 stereo-opgaven in beeld

Hulpfiguren zijn op schaal getekend; in deze figuren kan het reken-proces worden vastgelegd; de rechter bladzijden bieden verder nog ruimte voor het noteren van de voornaamste punten van het bewijs of de berekening.

Achterin het werkschrift vindt men symbolen, kwadratentafel, opmerkingen en de uitkomsten.
Ing. f 2,50

Christelijk Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs (16 januari 1965): 'Daar de figuur kant en klaar is, vormt zich in korte tijd een goed idee van het probleem. Vele leerlingen zullen met meer animo een vraagstuk aanpakken als ze dit werkschrift gebruiken. Het is een bandig model van 26½ bij 13½ cm., keurig uitgevoerd. Een goed oefenboek voor het eindexamen.'

P. NOORDHOFF NV POSTBUS 39 GRONINGEN

Alle in dit blad geadverteerde uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever