EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

IV—15 DECEMBER 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

STATISTICS IN SCHOOLS. BASIC NOTIONS FOR TESTING A HYPOTHESIS [1])

by

LUCAS N. H. BUNT

University of Utrecht

Applications of probability which are both important and interesting to secondary school students, are to be found in the field of hypothesis testing. Therefore it sounds reasonable that this topic should be included into the syllabus of any high school course in probability with statistical applications.

In this article we intend *a.* to show how the notion of testing a hypothesis and certain related notions can be explained by using very simple examples, and on this basis *b.* to describe a method for testing the hypothesis $p = 0.5$ for a population with two characteristics, the so-called sign test, and *c.* a method for constructing confidence regions for p in such a population.

In order to convey to the reader our conviction that this subject-matter can be fully understood by the average secondary school student, we have adopted for the greater part a level and a style which are nearly in agreement with those of an ordinary school text. The type of secondary school students we have in mind is a student who, by his previous training, has shown himself capable of doing some rigorous thinking. In Europe it will be a student of at least the fourth grade of a high school of the academic type, in an American high school a student who has taken a two-year course in algebra.

1. *Some fundamental notions*

1.1. The expression „hypothesis testing" sounds rather weighty. Its meaning, however, is simple.

Example 1. I want to find out whether a coin is fair, *i.e.* whether it falls just as easily "heads" as "tails". I flip the coin 5 times, and I decide to reject the *hypothesis*: the coin is fair, if and only if it falls 5 times heads or 5 times tails. This is a test of our hypothesis; the

[1]) Parts of this paper were read at the International Congress of Mathematicians, Stockholm 1962.

agreement "reject the hypothesis that the coin is fair if the outcome is 5 heads or 5 tails" is the *decision rule* of this test.

Example 2. There are 2 marbles in a box. I suspect that both of them are red. I determine to choose one marble at random and to accept the hypothesis: both marbles are red, if I draw a red marble. The decision rule is the following: "assume that both marbles are red if the marble drawn is red".

1.2. It turns out that the idea of testing a hypothesis is in itself very simple. However, we can show in a similar way that other notions connected with it, are simple as well.

Example 3. A box contains 5 marbles ("the *population* consists of 5 marbles"). I suspect that at least 3 of them are red (and the remaining ones white), and I decide to test the hypothesis: at least 3 marbles are red (the *null hypothesis*, H_0), by taking a *sample* of 2 marbles and rejecting H_0 if and only if not both of them are red. Hence, if we indicate the number of red marbles in the population and in the sample by A and X, respectively, the situation is as follows:

population: 5 marbles,
H_0: $A \geqq 3$,
experiment: draw a sample of 2 marbles,
decision rule: reject H_0 if $X = 0$ or $X = 1$.

We calculate the probabilities, $\pi(A)$, of rejecting H_0 for the several possible values of A.

$A = 0$. There are no red marbles. It is certain that H_0 will be rejected.

$A = 1$. There are 1 red and 4 white marbles. No sample contains 2 red marbles. It is certain that H_0 will be rejected.

$A = 2$. There are 2 red and 3 white marbles. Of the 10 pairs of marbles which may be chosen, 1 pair contains 2 red marbles, and hence the remaining 9 pairs less than 2 red marbles. Hence, the probability of rejecting H_0 is 0.9.

$A = 3$. There are 3 red and 2 white marbles. Of the 10 pairs, 3 pairs contain 2 red marbles, hence the remaining 7 pairs less than 2 red marbles. Hence, the probability of rejecting H_0 is 0.7.

$A = 4$. There are 4 red and 1 white marbles. Of the 10 pairs, 6 pairs contain 2 red marbles, hence the remaining 4 pairs less than 2 red marbles. Hence the probability of rejecting H_0 is 0.4.

$A = 5$. There are only red marbles. Each pair contains 2 red marbles. Hence H_0 will never be rejected.

The calculated probabilities are the values of the *power function* π, of the test. They are indicated in the second column of table 1.

The object of the third column will be shown presently.

TABLE 1

A		$\pi(A) = P(H_0: A \geqq 3$ is rejected)		Pr. of β-error
H_0 false	0	1		0
	1	1		0
	2	0.9		0.1
H_0 true	3	0.7	prob. of α-error	—
	4	0.4		—
	5	0		—

The number in the 4th row of column 2 indicates:

$$P(H_0 \text{ is rejected if } A = 3) = 0.7.$$

However, if $A = 3$ then H_0 is a true hypothesis. Hence, if one rejects H_0, one commits an error. Such an error, consisting in rejecting the null hypothesis if it is true, is called an α-error. Hence, if $A = 3$ the probability of an α-error is 0.7.

The numbers in the third column are obtained by subtracting from 1 those of the second column. The number 0.1 in the third row, for instance, indicates

$$P(H_0 \text{ is not rejected if } A = 2) = 0.1.$$

However, if $A = 2$ then H_0 is false. If then H_0 is not rejected one also commits an error, which now consists in not rejecting the null hypothesis if it is false. Such an error is called a β-error. Hence, if $A = 2$ the probability of a β-error is 0.1.

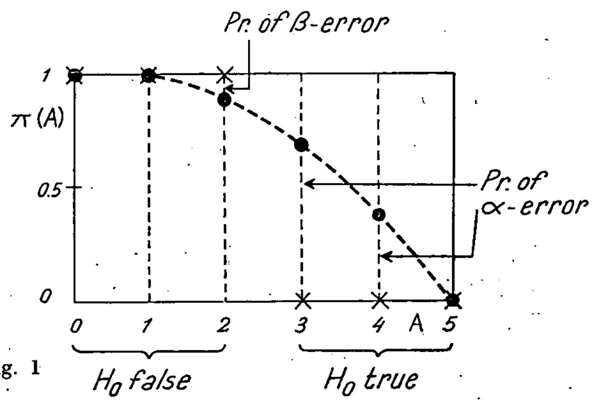


Fig. 1

Fig. 1 shows a graph of the probabilities given in the second column. They are the ordinates of the 6 points which are indicated by dots. There are also points in this figure which are indicated by crosses. The vertical distance between a dot and a corresponding cross represents the probability of an α-error or a β-error.

1.3. Since the probabilities of an α-error turn out to be large, our test does not seem to be satisfactory, and we can try the same experiment but using the following decision rule: reject H_0 if $X = 0$. The probabilities of rejecting H_0, and those of an α-error or a β-error, are shown in table 2.

TABLE 2

	A	$\pi(A) = P(H_0\colon A \geqq 3$ is rejected)	Pr. of β-error
H_0 false	0	1	0
	1	0.6	0.4
	2	0.3	0.7
H_0 true	3	0.1 prob. of α-error	—
	4	0	—
	5	0	—

Fig. 2 shows a graph of the probabilities mentioned in the second column.

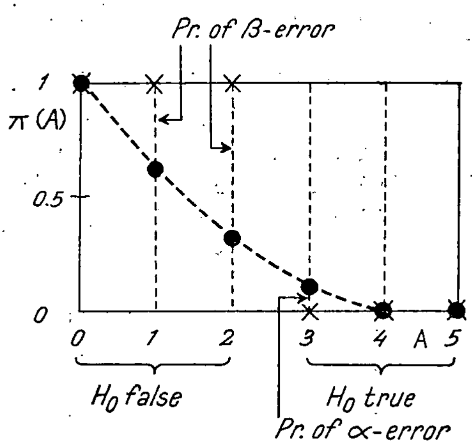


Fig. 2

The second test turns out not to be very satisfactory either. While the probabilities of an α-error are smaller in the second test than in the first, the probabilities of a β-error are larger. Hence, when choosing between these two tests, one has to decide which is worse: to reject the hypothesis $A \geqq 3$ when it is true, or to accept this hypothesis when it is false.

An (artificial) application is the following. Somebody wants to make 3 flash light shots. In a shop, he asks for a box with 5 flash bulbs of a certain brand. Since he knows that there are many defectives among the bulbs of this brand, he first tests 2 of the 5 bulbs.

On the basis of the result he will decide whether or not to buy the box. He is prepared to accept the smallest possible risk only of obtaining 3 or more defective bulbs, since then he cannot take the 3 shots. Hence, if A and X are the number of defective bulbs in the box and in the sample, respectively, he tests the hypothesis $A \geqq 3$. If he does not reject it, he similarly tests another box, and proceeds in this way until he hits upon a box that satisfies his requirements. Of the two tests,

a. buying the box if at most one of the bulbs tested is defective (*i.e.* rejecting $A \geqq 3$ if $X = 0$ or $X = 1$),

b. buying the box if none of the bulbs tested is defective (*i.e.* rejecting $A \geqq 3$ if $X = 0$),

he chooses the last one. His reason for doing so is, that he sees no harm in committing a β-error, which is the equivalent of rejecting a "good" box more often than necessary, whereas an α-error would mean that he would buy an unsuitable set of bulbs.

1.4. In a similar way we can discuss the α- and β-errors when testing whether a certain coin is fair. First we consider the test mentioned in example 1. If p is the probability of throwing heads when tossing once, and X the number of heads in 5 tosses, then the test can be described as follows:

H_0: $p = 0.5$,

experiment: toss 5 times,

decision rule: reject H_0 if $X = 0$ or $X = 5$.

Table 3 shows the probabilities of rejecting H_0 for several values of p, as well as the corresponding probabilities of an α- or a β-error.

TABLE 3

p		$\pi(p) = P(H_0: p = 0.5$ is rejected)		Pr. of β-error
H_0 false	0	1		0
	0.25	$(\frac{1}{4})^5 + (\frac{3}{4})^5 = 0.238$		0.762
H_0 true	0.5	$(\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = 0.063$	pr. of α-error	—
H_0 false	0.75	$(\frac{3}{4})^5 + (\frac{1}{4})^5 = 0.238$		0.762
	1	1		0

The ordinates of the points of the curve in fig. 3 are the probabilities of rejecting H_0 for all possible values of p. The curve is called the *power curve* of the test. The probability of the only possible α-error is small, the probabilities of a β-error, however, are large, with the exception of those for values of p in the immediate neighborhood of 0 or 1. Hence, the probability of rejecting the hypothesis "the coin is fair" is only large in case the coin is considerably false indeed. This means that, again, the test is not very satisfactory. An ideal test would have the power curve shown in fig. 4. It consists of one point on the p-axis, and the correspondingly perforated upper border of the rectangle.

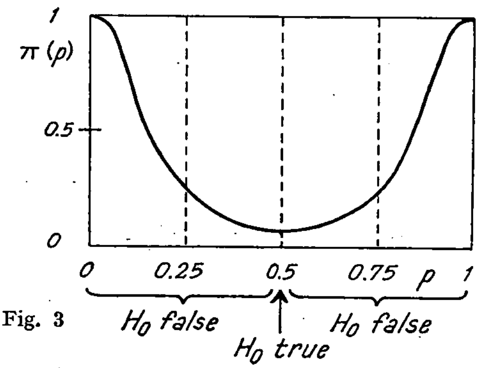


Fig. 3

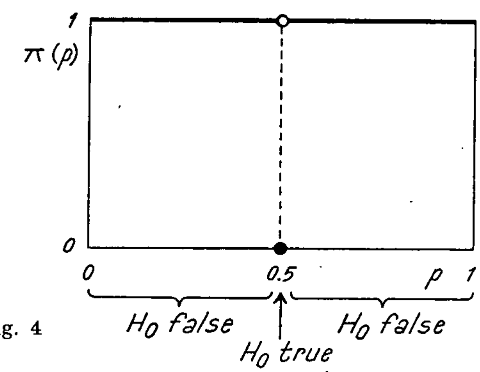


Fig. 4

1.5. Let us now consider the following variation of the preceding example.

A and B are playing "heads or tails". Heads is favorable for A, tails for B. The coin which will be used for tossing, belongs to A. B doubts whether it is a fair coin. He suspects it of falling more often heads than tails. He determines to toss the coin 5 times and to object to its use as a tossing device if it falls 5 times heads. This test can be summarized as follows:

H_0: $p = 0.5$,
experiment: toss the coin 5 times,
decision rule: reject H_0 if $X = 5$.

TABLE 4

p		$\pi(p) = P(H_0: p = 0.5$ is rejected)		Pr. of β-error
H_0 false	0	0		1
	0.25	$(\frac{1}{4})^5 = 0.001$		0.999
H_0 true	0.5	$(\frac{1}{2})^5 = 0.031$	pr. of α-error	—
H_0 false	0.75	$(\frac{3}{4})^5 = 0.237$		0.763
	1	1		0

Table 4 shows the probability of rejecting H_0 for a number of values of p, as well as the probability of an α-error or a β-error.

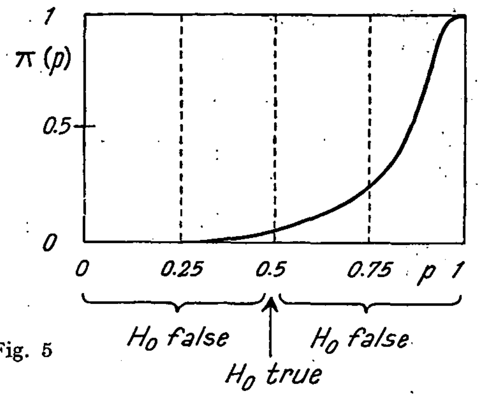


Fig. 5

Fig. 5 shows the power curve.

All probabilities of rejecting H_0 are now smaller than in the previous test, in particular also the probability of an α-error. For $p < 0.5$ the probability of a β-error is much larger than in the previous test. This does not harm B, however, since it results in B's rejecting less often a coin which is favorable to him (since it is more apt to show tails than heads).

If B obtains the result $X = 5$, and therefore rejects the value 0.5 of p, he will *a fortiori* reject all smaller values of p. Conversely, if the result of his tossing is not $X = 5$, but *e.g.* $X = 4$, he does not reject any value of p (according to his decision rule). Hence, the rejecting or not rejecting of the value 0.5 of p is accompanied by the rejecting or not rejecting of smaller values of p. This can be expressed as follows: testing the hypothesis $p = 0.5$ (using the previously stated decision rule) amounts to the same thing as testing the hypothesis $p \leqq 0.5$ (using the same decision rule). Hence, the test may also be summarized as follows:

H_0: $p \leqq 0.5$,

experiment: toss the coin 5 times,

decision rule: reject H_0 if $X = 5$.

Table 5 shows the probability of rejecting H_0 for a number of values of p, as well as the probability of an α-error or a β-error. (Compare this table with table 4.)

TABLE 5

	p	$\pi(p) = P(H_0: p \leqq 0.5$ is rejected)		Pr. of β-error
H_0 true	0	0	pr. of α-error	—
	0.25	0.001		—
	0.50	0.031		—
H_0 false	0.75	0.237		0.763
	1	1		0

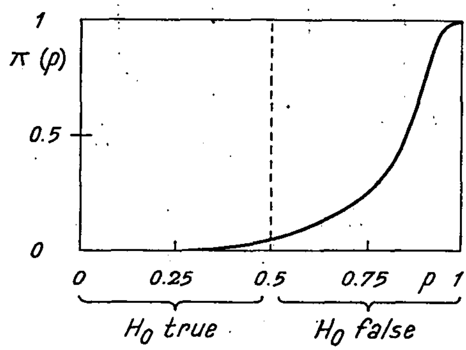


Fig. 6

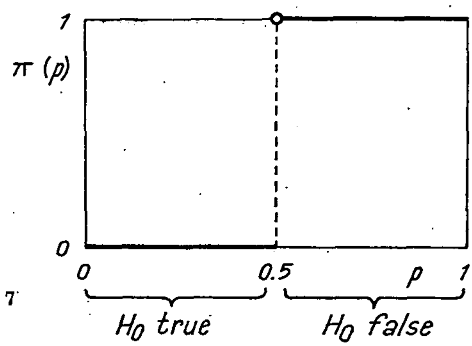


Fig. 7

Fig. 6 shows the power curve, fig. 7 the ideal power curve. Instead of saying that the hypothesis $p \leqq 0.5$ is tested, we can also say, that the hypothesis $p = 0.5$ is tested by using a right-sided test.

Opposed to this the test treated in section 1.4 is called two-sided.

2. *Sign test*

2.1. We suppose that a few simple theorems about calculations with probabilities have been taught, inclusive of the following:

Theorem of the binomial probability distribution. If an experiment consists of n independent part-experiments, and if the probability of success for each part-experiment is p, then the probability of k successes is

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

We now imagine that we take a sample of 10 marbles out of a box containing a very large number of red and white marbles. The fraction of red marbles in the box is p. By applying the above theorem the probabilities of obtaining 0, 1, 2, . . ., or 10 red marbles in the sample can be calculated for any value of p. For the values 0.1, 0.2, . . ., 0.9 of p these probabilities are given in table 6. (X denotes a number of red marbles.)

TABLE 6

Probability distribution of the value of X in a sample of 10 from populations with $p = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$

p	Probability of X equal to										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.9						002	011	057	194	387	349
0.8				001	006	026	088	201	302	268	107
0.7			001	009	037	103	200	267	233	121	028
0.6		002	011	042	111	201	251	215	121	040	006
0.5	001	010	044	117	205	246	205	117	044	010	001
0.4	006	040	121	215	251	201	111	042	011	002	
0.3	028	121	233	267	200	103	037	009	001		
0.2	107	268	302	201	088	026	006	001			
0.1	349	387	194	057	011	002					

Decimal points are omitted in the body of the table to save space. The open places indicate probabilities $\leqq 0.0005$.

2.2. We shall now assume, that in the box of marbles the fraction p of red marbles is unknown. Just as in the coin-tossing experiment, where we examined the probability of obtaining "heads" by tossing a coin 5 times, we can now examine the value of p by using a sample of, for instance, 10 marbles. For this we try the following decision rules (H_0 is again: $p \leqq 0.5$):

I. reject H_0 if $X = 10$,
II. reject H_0 if $X = 9$, or $X = 10$,
III. reject H_0 if $X = 8$, $X = 9$, or $X = 10$.

Each of these decision rules corresponds to a power function. For $p = 0$, 01, 0.2, . . ., 1, the values of these power functions are given in the tables 7, 8, and 9, respectively. They can be found easily from table 6.

TABLE 7

Decision rule I

p	$\pi(p) = P(H_0: p \leqq 0.5$ is rejected)		Pr. of β-error
0	0	probability of α-error	—
0.1	0.000		—
0.2	0.000		—
0.3	0.000		—
0.4	0.000		—
0.5	0.001		—
0.6	0.006		0.994
0.7	0.028		0.972
0.8	0.107		0.893
0.9	0.349		0.651
1	1		0

TABLE 8

Decision rule II

p	$\pi(p) = P(H_0: p \leqq 0.5$ is rejected)		Pr. of β-error
0	0	probability of α-error	—
0.1	0.000		—
0.2	0.000		—
0.3	0.000		—
0.4	0.002		—
0.5	0.011		—
0.6	0.046		0.954
0.7	0.149		0.851
0.8	0.375		0.625
0.9	0.736		0.264
1	1		0

TABLE 9

Decision rule III

p	$\pi(p) = P(H_0: p \leq 0.5$ is rejected)		Pr. of β-error
0	0	probability of α-error	—
0.1	0.000		—
0.2	0.000		—
0.3	0.001		—
0.4	0.013		—
0.5	0.055		—
0.6	0.167		0.833
0.7	0.382		0.618
0.8	0.677		0.323
0.9	0.930		0.070
1	1		0

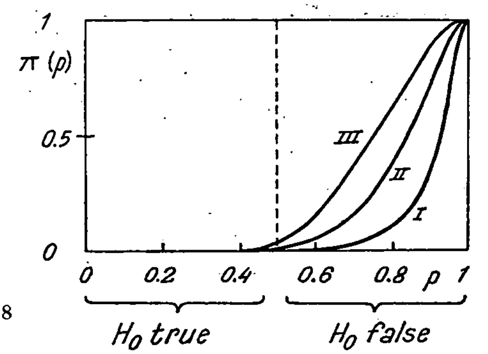


Fig. 8

Fig. 8 shows the power curves.

From the tables 7 to 9, as well as from fig. 8, it appears that in the decision rules I, II, and III, taken in this order, the probabilities of α-errors increase and those of β-errors decrease. We want to make a choice from these three decision rules. We would prefer to choose a rule, giving both small probabilities of α-errors and small probabilities of β-errors. This is not possible, however. Since, in general, an α-error will presumably be more serious than a β-error, we will therefore proceed in the following way. In the first place, we will take care that for no value of p the probability of an α-error exceeds a certain limit, which we fix in advance. One of the limits often chosen, is 0.025, which is also used for our present purpose. From among the decision rules satisfying this condition we then choose the one with the smallest probabilities of a β-error.

Tables 7 to 9 show that from the three decision rules mentioned, only rules I and II satisfy the condition that the probability of an α-error should never be greater than 0.025. Furthermore, with rule II the probability of a β-error is always smaller than with rule I. We therefore choose rule II. Hence we decide to reject $H_0: p \leqq 0.5$ if $X = 9$ or $X = 10$.

Referring to section 1.5, we can formulate this result as follows: when testing the hypothesis $H_0: p = 0.5$ by using a right-sided test, we choose the decision rule: reject H_0 if $X = 9$ or $X = 10$.

In the same way, when testing the hypothesis $H_0: p \geqq 0.5$, we will keep to the decision rule: reject H_0 if $X = 0$ or $X = 1$. Again, this may be formulated as follows: when testing the hypothesis $H_0: p = 0.5$ by using a left-sided test, we choose as a decision rule: reject H_0 if $X = 0$ or $X = 1$.

2.3. We also consider the two-sided test of the hypothesis $H_0: p = 0.5$, with the decision rule: reject H_0 if $X = 0$, $X = 1$, $X = 9$, or $X = 10$. Hence, this test is a combination of the above mentioned one-sided tests of H_0, with the decision rules: reject H_0 if $X = 0$ or $X = 1$, and if $X = 9$ or $X = 10$, respectively. Some values of the power function are given in table 10.

TABLE 10

p	$\pi(p) = P(H_0: p = 0.5$ is rejected)	Pr. of β-error
0	1	0
0.1	0.736	0.264
0.2	0.375	0.625
0.3	0.149	0.851
0.4	0.048	0.952
0.5	0.022 pr. of α-error	—
0.6	0.048	0.952
0.7	0.149	0.851
0.8	0.375	0.625
0.9	0.736	0.264
1	1	0

The only possible probability of an α-error has the value 0.022, namely, twice the maximal probability of an α-error in the corresponding one-sided tests. As care has been taken that the probability of an α-error is not greater than 0.025 in the one-sided tests, this probability is not greater than 0.05 in the two-sided test (this being the condition we want to be satisfied by the probability of an α-error in a two-sided test).

Fig. 9 shows the power curve. Its points are a little higher than the corresponding points of the power curves for the one-sided tests.

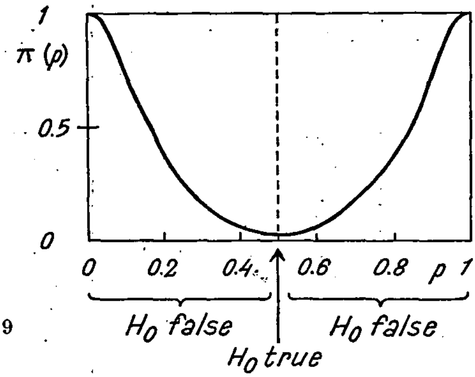


Fig. 9

2.4. We shall now try to find a two-sided test of the hypothesis H_0: $p = 0.5$, such that, in the first place, the probability of an α-error is not greater than 0.05, and that, moreover, the probabilities of a β-error are smaller than in the preceding test. We therefore consider the experiment of taking a sample of 20 marbles, and we try the three following decision rules:

I: reject H_0 if X has one of the values 0, 1, . . ., 4, 16, 17, . . ., or 20,

II: reject H_0 if X has one of the values 0, 1, . . ., 5, 15, 16, . . ., or 20,

III: reject H_0 if X has one of the values 0, 1, . . ., 6, 14, 15, . . ., or 20.

TABLE 11

Decision rule I

p	$\pi(p) = P(H_0\colon p = 0.5$ is rejected)	Pr. of β-error
0	1	0
0.1	0.957	0.043
0.2	0.630	0.370
0.3	0.238	0.762
0.4	0.051	0.949
0.5	0.012 pr. of α-error	—
0.6	0.051	0.949
0.7	0.238	0.762
0.8	0.630	0.370
0.9	0.957	0.043
1	1	0

TABLE 12

Decision rule II

p	$\pi(p) = P(H_0: p = 0.5$ is rejected)	Pr. of β-error
0	1	0
0.1	0.989	0.011
0.2	0.804	0.196
0.3	0.416	0.584
0.4	0.128	0.872
0.5	0.042 pr. of α-error	—
0.6	0.128	0.872
0.7	0.416	0.584
0.8	0.804	0.196
0.9	0.989	0.011
1	1	0

TABLE 13

Decision rule III

p	$\pi(p) = P(H_0: p = 0.5$ is rejected)	Pr. of β-error
0	1	0
0.1	0.998	0.002
0.2	0.913	0.087
0.3	0.608	0.392
0.4	0.256	0.744
0.5	0.116 pr. of α-error	—
0.6	0.256	0.744
0.7	0.608	0.392
0.8	0.913	0.087
0.9	0.998	0.002
1	1	0

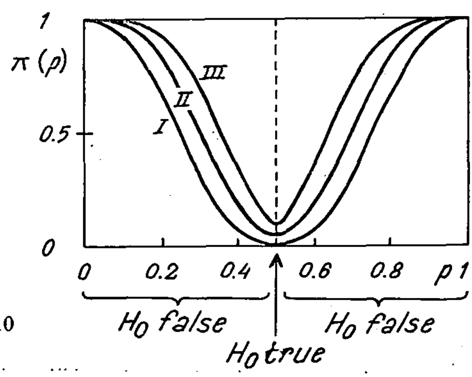


Fig. 10

The values of the corresponding power functions, for $p = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 1$, are given in tables 11, 12, and 13, respectively. These values are calculated in a way similar to the method of calculating the values given in table 10, by using a table, analogous to table 6, for samples of size 20. This last table is not given in the text. The power curves are shown in fig. 10.

As we do not want the probability of an α-error to exceed 0.05, decision rule III does not come up for consideration. Furthermore, the probabilities of a β-error are smaller in II than in I. Hence we choose II.

We now compare this two-sided test with the above mentioned two-sided test, in which a sample of 10 marbles is used. For this purpose, we compare tables 10 and 12. In both cases the probability of an α-error satisfies the condition of not exceeding 0.05. In the case or table 12, however, the probabilities of a β-error are smaller than in the case of table 10. Therefore, the corresponding test deserves preference.

Fig. 11, showing the two power curves, may serve to illustrate this. The ideal power curve, which is also shown in fig. 11, appears to be more closely approximated by the power curve for $n = 20$ than by that for $n = 10$.

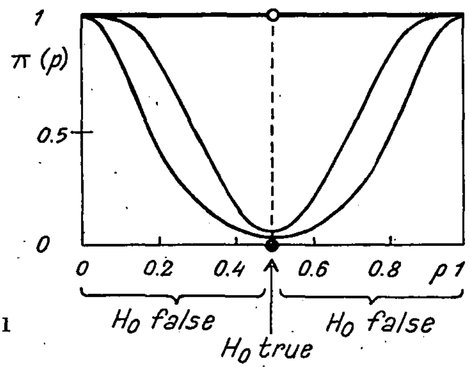


Fig. 11

In a similar way it can be shown, that by using samples of increasing size an increasingly powerful test (*i.e.* a test with smaller β-errors) can be obtained. It can be proved, that a test of any required degree of sharpness will be obtained by taking samples of sufficiently large size.

One can compose a nomogram of the power curves corresponding to two-sided tests of the hypothesis $p = 0.5$ for different values of n. With increasing values of n, the power curve will approximate the ideal power curve closer and closer. By means of such a nomogram one can then decide on the tests, having probabilities of a β-error that do not exceed certain limits, stated in advance. Naturally the same result can be obtained by directly using the binomial tables, from which the data for drawing the power curves are derived. We shall not enter into this method, however.

The test described is called the *sign test*. It owes its name to applications such as the following.

Application. A manufacturer of automobile tires compares two manufacturing processes. He takes a sample of 10 pairs of these tires, each pair consisting of a tire made according to the first process, and one made according to the second. (The assumption that he takes 10 pairs is artificial, but allows us to use table 6.) He tests them on a defice which simulates the ordinary environment of automobile tires in use. When the tread is worn off, the mileage recorded for the tire is listed. The data, expressed in thousands of miles, are given in table 14. Find which process gives the best mileage. The manufacturer is willing to allow a probability of at most 0.05 that he will draw a wrong conclusion.

TABLE 14

process I	41.7	35.3	38.9	42.1	39.5	40.5	39.9	40.8	42.4	41.1
process II	40.2	40.5	34.0	40.3	34.8	36.5	36.8	37.3	36.7	37.1
	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+

Solution: We consider two numbers which occur in the same column as an ordered pair. The 10 pairs from the table then form a sample taken from the population of all pairs which can be formed in the indicated way. We label a pair the top number of which is greater than the bottom number, by a plus-sign, and the remaining pairs by a minus-sign. (As a matter of simplicity, we assume that in no pair the numbers are equal.) We now test the hypothesis (by a two-sided test) that in the population the fraction of pairs with a plus-sign is equal to 0.5. In the sample the number of pairs with a plus-sign is 9. Hence, according to section 2.3, the hypothesis $p = 0.5$ is rejected and the manufacturer draws the conclusion that the better wearing tires are produced by process I.

3. *Confidence regions*

3.1. We once more consider the case of a box with a very large number of red and white marbles, of which the fraction of red marbles, indicated by p, is unknown. In sections 2.2 and 2.3 we discussed a method for testing the hypothesis $H_0: p = 0.5$ by means of a sample of size 10, using a one-sided or a two-sided test. It turned out that the decision rules may be chosen as follows:

a. when using a left-sided test: reject H_0 if $X = 0$ or $X = 1$,
b. when using a right-sided test: reject H_0 if $X = 9$ or $X = 10$,
c. and hence when using a two-sided test: reject H_0 if $X = 0$, $X = 1, X = 9$, or $X = 10$.

Then the probability of an α-error is not greater than 0.025 in cases *a* and *b*, and not greater than 0.05 in case *c*. Moreover, the β-errors are as small as possible.

Let $X/10$ be denoted by $\underline{p}$. Then the hypothesis $H_0: p = 0.5$ is rejected if $\underline{p} = 0$, $\underline{p} = 0.1$, $\underline{p} = 0.9$ or $\underline{p} = 10$. We indicate these values of $\underline{p}$, of which we will say that they do not agree with $p = 0.5$, on a horizontal axis by dots, the other values, which do agree with $p = 0.5$, by circles (fig. 12).

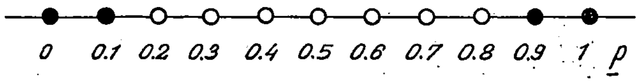


Fig. 12

In a similar way we can treat the testing of the hypothesis $H_0 : p = 0.6$. It then appears that for a sample with $n = 10$, the decision rules must be chosen as follows:

a. when using a left-sided test: reject H_0 if $X = 0$, $X = 1$, or $X = 2$,
b. when using a right-sided test: reject H_0 if $X = 10$,
c. and hence when using a two-sided test: reject H_0 if $X = 0$, $X = 1, X = 2$, or $X = 10$.

Once more we indicate the values of $\underline{p}$ which do not agree with $p = 0.6$, on a horizontal axis by dots, the values which do agree with $p = 0.6$ by circles (fig. 13).

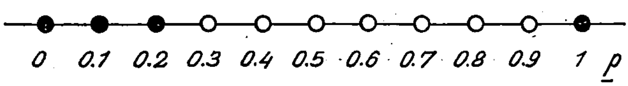


Fig. 13

3.2. Similarly, we can find the values of $\underline{p}$ which do, or do not agree with other given values of p. Next we set up the system represented in fig. 14, in which are united the graphs, analogous to those of figures 12 and 13, for $p = 0, 0.05, 0.10, \ldots, 1$.

Next we shall assume that the graphs of the decision rules for all other values of p have been added to the system of fig. 14, which has thus been supplemented by additional dots and circles. Dots and circles then always indicate whether values of $\underline{p}$ and p do or do not agree with each other. We connect the points of the system where the dots turn into circles (the limiting points), by two continuous curves. We then can better overlook the system of dots and circles.

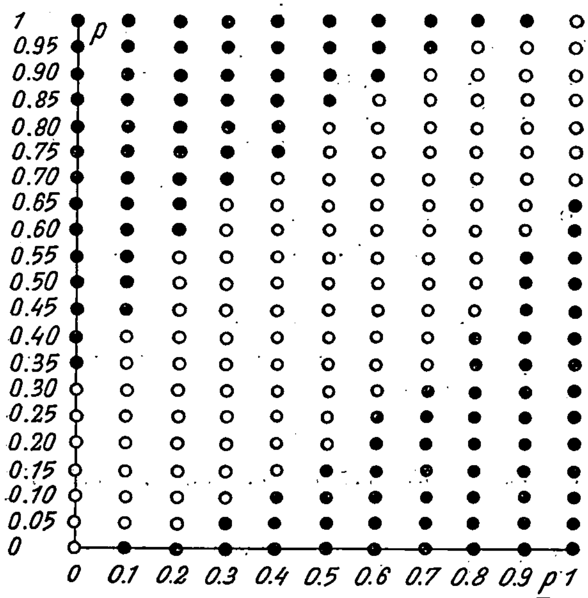


Fig. 14

The two curves enclose the region R_{10}. On the lines $\underline{p} = 0$, $\underline{p} = 0.1$, ..., $\underline{p} = 1$ this region contains only circles. From fig. 15 we can now tell which values of p and $\underline{p}$ do or do not agree with each other.

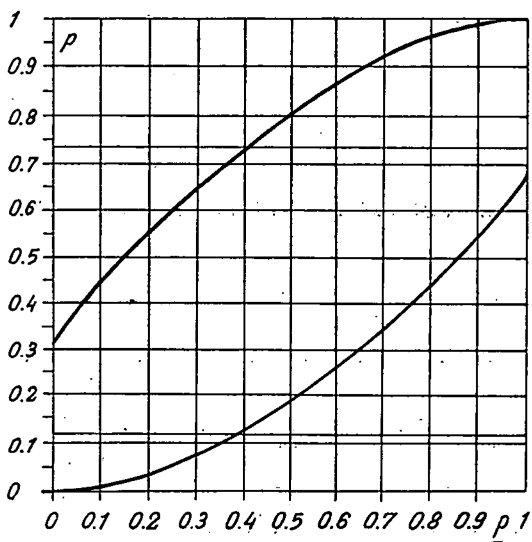


Fig. 15

Example. What values of p agree with $\underline{p} = 0.4$?

Solution. We consider in fig. 15 the line $\underline{p} = 0.4$. Each point on this line between the limiting curves indicates a value of p, which agrees with $\underline{p} = 0.4$. We read as limiting points of p the values 0.12 and 0.74. Therefore the required values of p are the values which satisfy the inequality

$$0.12 < p < 0.74.$$

We can now easily prove the following theorem:

If we judge the value of p by means of a sample of 10, *using fig.* 15, *we risk a probability which does not exceed* 2.5 %, *of rejecting the true value of p on the strength of too small (too large) a value of $\underline{p}$.*

Similar considerations can be made for larger samples. For a number of values of n the corresponding regions R_n may be represented in a nomogram. This will enable us, with various degrees of exactness, to find the values of p which are in agreement with the value of $\underline{p}$, obtained in a sample. In following this procedure we always risk a probability of rejecting the true value of p of at most 2.5 %.

3.3. In conclusion, an example may show what kind of problems can be solved by applying the above theory.

Application. A psychologist wants to investigate whether the statement is true that more than 60 % of the mathematicians possess a certain form of musicality (are "musical"). He submits 100 mathematicians to a test, and 68 of them turn out to be musical. Is this sufficient reason for the psychologist to accept that statement, if he is willing to allow a probability of at most 0.025 of doing so if it is false?

Solution. Let p represent the fraction of mathematicians who are musical.

We determine the null hypothesis as follows. The error which the psychologist wants to avoid as much as possible, is accepting the statement if it is false. We therefore take care that this error will be an α-error. Hence we have: α-error = wrongly accepting the statement = accepting $p > 0.60$ if $p > 0.60$ is false = rejecting $p \leqq 0.60$ if $p \leqq 0.60$ is true. Hence, $p \leqq 0.60$ is the hypothesis which has to be tested. We therefore test the hypothesis H_0: $p = 0.60$ by using a right-sided test.

Using the notation introduced before, we have: $X = 68$, $n = 100$ and hence $\underline{p} = 0.68$. We consider fig. 16, in which the region R_{100} is represented.

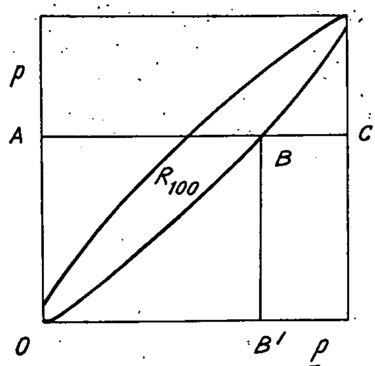


Fig. 16

The straight line through A and C has the equation $p = 0.60$. It intersects the lower boundary of the region R_{100} in B. B', the projection of B on the $\underline{p}$-axis, has the value $\underline{p} = 0.70$. H_0 is therefore only rejected for values of $\underline{p}$ which satisfy the inequality $\underline{p} \geqq 0.70$. The value of $\underline{p}$ in the sample is 0.68. Hence the hypothesis $H_0 : p = 0.60$ is not rejected. The hypothesis $p \leqq 0.60$ is not rejected either. Therefore the psychologist will not accept the statement that more than 60 % of the mathematicians are musical (in the given sense).

KORREL CXXIV
(een instructief vraagstuk)

Gegeven zijn de parabool $y^2 = 2px$ ($p > 0$) en de verzameling ellipsen $b^2(x - q)^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (q is variabel).

Gevraagd wordt welke ellipsen van deze verzameling de parabool raken.

Oplossing. Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ b^2(x-q)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \tag{A}$$

is gelijkwaardig met

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ b^2(x-q)^2 + 2a^2px = a^2b^2. \end{cases} \tag{B}$$

Het is nu verleidelijk als voorwaarde voor raking op te geven, dat de discriminant van de laatstgenoemde vergelijking 0 is. Men vindt dan

$$q = \frac{a^2p^2 + b^4}{2pb^2}.$$

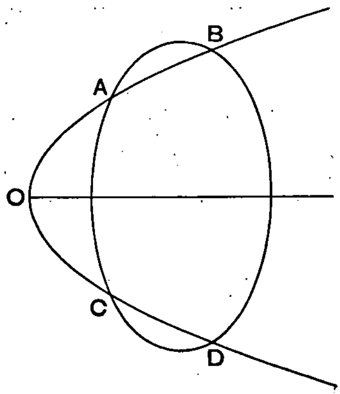
Deze oplossing is niet volledig. Kiest men namelijk $q = \pm a$, dan blijkt de ellips de parabool in de oorsprong te raken. Waardoor is een fout gemaakt?

Men heeft vergeten eraan te denken, dat voorwaarde voor raking is, dat het *stelsel* vergelijkingen (B) twee samenvallende stellen wortels heeft. Dit is inderdaad het geval als

a. de tweede vergelijking twee samenvallende positieve wortels heeft voor x,

maar ook als

b. de tweede vergelijking een wortel 0 heeft; immers bij $x = 0$ vinden we na substitutie in $y^2 = 2px$ een dubbele wortel $y = 0$.



Het eerste geval heeft als consequentie, dat de punten A en B en ook de punten C en D samenvallen. In het tweede geval vallen de punten A en C samen.

Ondertussen zult u gemerkt hebben, dat we aanvankelijk nog een tweede fout gemaakt hebben. We hebben er niet aan gedacht, dat het 0 zijn van de discriminant ook niet voldoende was voor het verkrijgen van raking. Sub a is immers vermeld, dat raking optreedt, als de tweede vergelijking van (B) twee samenvallende *positieve* wortels heeft. En daarvoor is niet alleen vereist, dat de discriminant gelijk aan 0 is, maar moet bovendien nog voldaan zijn aan de eis, dat $b^2 - ap > 0$. Voldoen de gegevens niet aan deze eis, dan vinden we alleen raking in het geval $q = \pm a$.

P. Bronkhorst
P. G. J. Vredenduin

POOL EN POOLLIJN

door

J. BANNING

Leeuwarden

In Euclides, **38** verschenen twee artikelen over het bovengenoemde onderwerp [1]). We onthouden ons van kritiek, maar menen toch een andere wijze van behandeling te moeten propageren. De navolgende didaktische schets is gebaseerd op het nauwe verband tussen de begrippen *machtlijn* en *poollijn* uit de meetkunde van de cirkel.

§ 1. *Bepaling* 1. De **macht** van het punt $P(x_0, y_0)$ ten opzichte van de cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ is het getal

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Opmerking 1. De macht van de oorsprong is gelijk aan $a^2 + b^2 - r^2$.

Bepaling 2. Onder een **machtpunt** van twee of meer cirkels verstaan we een punt, dat gelijke machten heeft ten opzichte van die cirkels.

Opmerking 2. Twee concentrische cirkels hebben geen enkel machtpunt.

Stelling 1. *De verzameling van de machtpunten van twee excentrische cirkels* $(x - a_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2 (i = 1, 2)$ *is een rechte, de zogenaamde* **machtlijn**

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y = c_1 - c_2,$$

waarbij $c_i = a_i^2 + b_i^2 - r_i^2$.

Opmerking 3. De machtlijn staat loodrecht op de *centraal*

$$(b_1 - b_2)(x - a_2) - (a_1 - a_2)(y - b_2) = 0.$$

Opmerking 4. De machtlijn van twee snijdende cirkels is de verbindingslijn van hun snijpunten. De machtlijn van twee rakende cirkels is de gemeenschappelijke raaklijn met samenvallende raakpunten.

Stelling 2. *Drie cirkels, waarvan de middelpunten niet op een rechte lijn liggen, hebben precies één machtpunt.*

---

[1]) Euclides, **38**, p. 141 en 277. De heer Banning zond ons zijn artikel, toen dat van de heer Van der Spek (Euclides, **39**, p. 48) reeds ter perse was.

§ 2. Ligt het punt $P(x_0, y_0)$ buiten de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal $r > 0$, dan gaan er door P twee raaklijnen. Hun raakpunten behoren uiteraard ook tot de cirkel, die beschreven kan worden op PM als middellijn. *De verbindingslijn van die raakpunten is eenvoudig de machtlijn t van de twee genoemde excentrische cirkels*, te weten

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \quad (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2,$$

waarbij

$$a_1=\tfrac{1}{2}(x_0+a), \quad b_1=\tfrac{1}{2}(y_0+b), \quad r_1=\tfrac{1}{2}PM.$$

De vergelijking van t luidt

$$2(a_1-a)x+2(b_1-b)y=c_1-c \text{ of } (x_0-a)x+(y_0-b)y=c_1-c,$$

als

$$c=a^2+b^2-r^2, \qquad c_1=a_1^2+b_1^2-r_1^2=x_0a+y_0b,$$

zodat

$$c_1-c=(x_0-a)a+(y_0-b)b+r^2,$$

waarna de vergelijking van t zich laat schrijven in de gedaante

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2.$$

Ligt P op cirkel (M, r), dan staat hier de vergelijking van de raaklijn door P, beschouwd als machtlijn van twee rakende cirkels.

Op grond van de betekenis, die de machtlijn t heeft, laten we nu volgen

Bepaling 3. De **poollijn** van het punt $P(x_0, y_0)$ ten opzichte van de cirkel $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ is de rechte

$$\boxed{(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2}$$

verondersteld, dat P afwijkt van het middelpunt der cirkel.

Opmerking 5. Aan het middelpunt $M(a, b)$ van de cirkel wordt geen poollijn toegewezen. De poollijn van P vermijdt M.

Opmerking 6. Een punt is incident met zijn eigen poollijn, wanneer en alleen wanneer het op de cirkel ligt.

Opmerking 7. De poollijn van P staat loodrecht op de middellijn PM met vergelijking $(y_0-b)(x-a)-(x_0-a)(y-b)=0$. Ligt P op de cirkel, dan is de poollijn dus tevens raaklijn.

Opmerking 8. De afstand van het middelpunt M tot de poollijn van P is gelijk aan $\frac{r^2}{PM}\cdot$ De poollijn van P is derhalve een snijlijn, een raaklijn, of een „buitenlijn" van cirkel (M, r), al naar gelang P buiten, op, of binnen de cirkel ligt.

Stelling 3. *Ligt een punt Q op de poollijn van een punt P, dan is P incident met de poollijn van Q.*

Opmerking 9. Gegeven $\triangle ABC$ met de cirkels λ en μ, die men opvolgend kan beschrijven op de zijden AB en AC als middellijnen, benevens een cirkel τ met A als middelpunt. Als B gelijke machten heeft t.o.v. de cirkels μ en τ, dan is C een machtpunt van de cirkels λ en τ, omdat het machtpunt van de drie cirkels λ, μ en τ dan samenvalt met het hoogtepunt van $\triangle ABC$. Hierin ligt opgesloten het meetkundig bewijs van stelling 3 voor het geval PQ geen middellijn is.

Bepaling 4. Is de rechte l de poollijn van het punt P ten opzichte van een gegeven cirkel, dan heet P de **pool** van l met betrekking tot die cirkel.

Stelling 4. *Iedere rechte, die het middelpunt van een gegeven cirkel vermijdt, heeft een pool met betrekking tot die cirkel.*

Opmerking 10. Doorloopt een punt Q een rechte l, dan draait de poollijn van Q om de pool P van l.

§ 3. Het is mogelijk de voorafgaande beschouwing te generaliseren ten behoeve van *ellips* en *hyperbool*; men diene te bedenken, dat twee cirkels steeds gelijkstandig zijn. Intussen lijkt ons die generalisatie van minder belang voor het V.H.M.O. en we volstaan daarom met een enkele aantekening bij de ellips met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

De vergelijking van een ellips, die gelijkstandig is met de gegevene heeft de gedaante

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=k^2.$$

Onder de *macht* van het punt (x_1, y_1) t.o.v. deze ellips, verstaan we het getal

$$\frac{(x_1-p)^2}{a^2}+\frac{(y_1-q)^2}{b^2}-k^2.$$

Onder een *machtpunt* van twee of meer gelijkstandige ellipsen, verstaan we een punt, dat t.o.v. die ellipsen gelijke machten heeft.

De verzameling van de machtpunten van de twee ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=k^2,$$

is een rechte, namelijk hun *machtlijn*

$$\frac{2px}{a^2}+\frac{2qy}{b^2}=\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-k^2+1.$$

De machtlijn van twee snijdende gelijkstandige ellipsen is de verbindingslijn hunner snijpunten. De machtlijn van twee rakende gelijkstandige ellipsen is de gemeenschappelijke raaklijn met samenvallende raakpunten.

Ligt het punt $P(x_0, y_0)$ buiten de ellips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, dan gaan er door P twee raaklijnen.

Hun raakpunten blijken bij nader inzien ook te behoren tot de ellips

$$\frac{(x - \frac{1}{2}x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - \frac{1}{2}y_0)^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{4a^2} + \frac{y_0^2}{4b^2},$$

welke ellips gelijkstandig is met de gegevene en waarvan OP een middellijn is.

De verbindingslijn t van genoemde raakpunten is dus de machtlijn van twee gelijkstandige ellipsen, zodat de vergelijking van t luidt

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Ligt P op de gegeven ellips, dan is t de raaklijn door P.

Onder de **poollijn** van het punt P (x_0, y_0) ten opzichte van de *ellips* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ verstaat men de rechte $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Op analoge wijze komt men voor de *hyperbool* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ terecht bij $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ als **poollijn** van het punt $P(x_0, y_0)$.

Begrijpelijk, dat de gelijkstandigheid in dit verband bij de parabolen geen rol speelt.

Ligt het punt $P(x_0, y_0)$ buiten de parabool $y^2 = 2px$, dan is de macht van P positief, zodat we kunnen schrijven $y_0^2 - 2px_0 = u^2$. Er gaan door P twee raaklijnen en de verbindingslijn van hun raakpunten is blijkbaar de machtlijn t van de parabolen

$$y^2 = 2px, \quad (y - y_0 + u)(y - y_0 - u) = 0,$$

want de vergelijking van t luidt: $y_0 y = p(x + x_0)$.

Tenslotte noteert men $y_0 y = p(x + x_0)$ als **poollijn** van $P(x_0, y_0)$ t.o.v. de *parabool* $y^2 = 2px$.

§ 4. Een geschiktere behandeling van het begrip poollijn bij ellips, parabool en hyperbool, komt tot stand via bepaling 5, die een uitvloeisel is van stelling 3.

Bepaling 5. De punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) noemen we **geassocieerd** met betrekking tot de cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, wanneer en alleen wanneer

$$(x_1 - a)(x_2 - a) + (y_1 - b)(y_2 - b) = r^2.$$

Opmerking 11. Geen enkel punt is geassocieerd met het middelpunt van de cirkel ($r \neq 0$). Een punt is dan en alleen dan geassocieerd met zichzelf, wanneer het op de cirkel ligt.

Opmerking 12. Zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2) twee van elkaar afwijkende geassocieerde punten, dan ligt minstens één hunner buiten de cirkel.

Immers, uit

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 \leqq r^2 = (x_1 - a)(x_2 - a) + (y_1 - b)(y_2 - b),$$

volgt

$$(x_1 - a)(x_1 - x_2) + (y_1 - b)(y_1 - y_2) \leqq 0,$$

en met

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 > 0,$$

blijkt

$$(x_1 - x_2)(a - x_2) + (y_1 - y_2)(b - y_2) > 0,$$

terwijl nog

$$(x_1 - a)(x_2 - a) + (y_1 - b)(y_2 - b) = r^2,$$

zodat

$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 > r^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

Opmerking 13. Twee verschillende punten van de cirkel kunnen niet geassocieerd zijn. Een op of binnen de cirkel gelegen punt is slechts geassocieerd met punten, die buiten de cirkel liggen.

Stelling 5. *De verzameling van de punten, die met betrekking tot de cirkel* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ *geassocieerd zijn met het punt P* (x_0, y_0), *is de* **poollijn** *van P*

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

Opmerking 14. Geassocieerde punten liggen op elkaars poollijn.

Opmerking 15. Zeer eenvoudig van opzet is een theorie over de begrippen pool en poollijn bij de cirkel, wanneer men uitgaat van bepaling 5.

§ 5. We sluiten hierbij aan met

Bepaling 6. De punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) heten **geassocieerd** met betrekking tot één der kegelsneden

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad y^2 = 2px,$$

al naarmate geldt,

$$b^2x_1x_2 + a^2y_1y_2 = a^2b^2, \quad b^2x_1x_2 - a^2y_1y_2 = a^2b^2, \quad y_1y_2 = px_1 + px_2$$

Opmerking 16. Geen enkel punt is geassocieerd met het middelpunt van ellips of hyperbool. Een punt is dan en alleen dan geassocieerd met zichzelf, wanneer het op de kegelsnede ligt.

Opmerking 17. Zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2) twee verschillende geassocieerde punten, dan ligt minstens één hunner buiten de kegelsnede; het buitengebied van een kegelsnede bestaat uit de punten met positieve macht.

Als bijv. het punt (x_1, y_1) niet ligt buiten de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, zodat

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 \leqq a^2b^2 = b^2x_1x_2 + a^2y_1y_2,$$

dan volgt

$$b^2x_1(x_1 - x_2) + a^2y_1(y_1 - y_2) \leqq 0,$$

en met

$$b^2(x_1 - x_2)^2 + a^2(y_1 - y_2)^2 > 0,$$

blijkt te gelden

$$b^2(x_1 - x_2)x_2 + a^2(y_1 - y_2)y_2 < 0,$$

terwijl nog

$$b^2x_1x_2 + a^2y_1y_2 - a^2b^2 = 0$$

wat meebrengt

$$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 - a^2b^2 > 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Opmerking 18. Twee verschillende punten van een kegelsnede kunnen niet geassocieerd zijn. Een op of binnen de kegelsnede gelegen punt is slechts geassocieerd met punten, die buiten de kegelsnede liggen.

Stelling 6. *De verzameling van de punten, die geassocieerd zijn met het punt $P(x_0, y_0)$, met betrekking tot één der kegelsneden*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \qquad y^2 = 2px,$$

is telkens een rechte, de zogenaamde **poollijn** *van P ten opzichte van de betreffende kegelsnede, te weten opv.*

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2,\ b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2,\ y_0y = p(x + x_0).$$

Opmerking 19. Een punt ligt op zijn eigen poollijn, dan en alleen als het op de kegelsnede ligt. De poollijn van een op de kegelsnede gelegen punt is de raaklijn door dat punt.

Stelling 7. *Ligt een punt B op de poollijn van een punt A, dan is A incident met de poollijn van B.*

Bepaling 7. Is de rechte p de poollijn van het punt A ten opzichte van een gegeven kegelsnede, dan heet A de **pool** van p met betrekking tot die kegelsnede.

Stelling 8. *Iedere rechte, die bij een ellips of een hyperbool het middelpunt vermijdt, of bij een parabool de as snijdt, heeft een pool met betrekking tot de gegeven kegelsnede.*

BOEKBESPREKING

Grundzüge der Mathematik, herausgegeben von H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, W. Süss. Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Goettingen.

Seit etwa einem Jahrhundert hat die Entwicklung der Mathematik solch ungeheuere Ausmasse angenommen, dass es der Schulmathematik unmöglich war, damit Schritt zu halten. Es ist also sehr zu begrüssen, dass auf Veranlassung des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission das Werk „Grundzüge der Mathematik" entstand, das sich zum Ziel gesetzt hat, dem Gymnasiallehrer, aber auch dem Praktiker der Mathematik es zu ermöglichen, in Verbindung mit der Forschung zu bleiben. Dieses umfangreich und inhaltlich bedeutende Werk trägt keinen enzyklopädischen Charakter. Von dem heutigen Gesamtgebäude der Mathematik wird in vorzüglicher Darstellung und mit mathematischer Strenge das gebracht, was für die Grundlegung und für den modernen Ausbau der so zahlreich gewordenen mathematischen Disziplinen wesentlich ist. Prinzipiell zeichnen für jedes Kapitel zwei Autoren verantwortlich, von denen der eine der Universität, der andere dem Gymnasialunterricht angehört. Trotz eines Stabes von mehr als hundert Mitarbeitern, unter ihnen die drei Niederländer H. Freudenthal, J. Gerretsen, P. Vredenduin, ist die Koordinierung der behandelten Themen geglückt. Wendet sich das Werk in erster Linie an den Gymnasiallehrer, so kann aber auch der Mathematiker der Praxis daraus grossen Nutzen ziehen. Bei den vielen Verzweigungen der diversen mathematischen Disziplinen bietet es auch dem Forscher interessante Hinweise. Seine Durcharbeitung stellt Anforderungen an den Leser; derjenige, der solche Mühe nicht scheut, kann dann auch zur Vertiefung der studierten Kapitel Spezialwerke der mathematischen Literatur fruchtbringend zur Hand nehmen. Das bereichernde Werk kann allen Interessenten wärmstens empfohlen werden. Es müsste in *jeder* Schulbibliothek zur Verfügung der Lehrer stehen.

Das Werk umfasst 4 Bände, von denen 3 erschienen sind. Das Erscheinen von Band IV „Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik" war für 1963 angesagt. Die erschienenen Bände werden in folgenden noch ausführlicher besprochen.

Band I. *Grundlagen der Mathematik/Arithmetik und Algebra*, 2. durchgesehene und erweiterte Auflage, 1962, 584 Seiten mit 55 Abbildungen und 1 Zeittafel, 50 DM.

Hier die Inhaltsangabe: Zeichen und Bezeichnungen

Teil A: Grundlagen der Mathematik, H. Hermes, W. Markwald.

Teil B: Arithmetik und Algebra, Einleitung, W. Gröbner; 1. Aufbau des Systems der reellen Zahlen, G. Pickert, L. Görke. Anhang zu 1. Ordinalzahlen, D. Kurepa, A. Aymanns; 2. Gruppen, W. Gaschutz, H. Noack; 3. Lineare Algebra, H. Gericke, H. Wäsche; 4. Polynome, G. Pickert, W. Rückert; 5. Ringe und Ideale, W. Gröbner, P. Lesky; 6. Zahlentheorie, H.-H. Ostmann, H. Liermann; 7. Algebraische Körpererweiterung, O. Haupt, P. Sengenhorst; 8. Komplexe Zahlen und Quaternionen, G. Pickert, H.-G. Steiner; 9. Verbände, H. Gericke, H. Martens; 10. Einige Grundbegriffe der Strukturtheorie, H. Gericke, H. Martens; 11. Das Zornsche Lemma, H. Wolff, H. Noack.

Die Literaturverzeichnisse zu Teil A und zu Teil B sowie auch speziellere Literaturhinweise und ein ausgiebiges Stichwortverzeichnis (S. 553—571) sind für den Leser sehr wertvoll.

Band II. *Geometrie* 1960, 663 Seiten mit 420 Abbildungen, 58 DM. Inhalt:

1. Geometrie-phänomenologische-Einleitung-Ordnung-Zyklische Ordnung-Grösse-

Winkel-Inhalt-Gruppen, H. Freudenthal, A. Baur; 2. Axiomatische Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie, W. Klingenberg, A. Baur; 3. Spiegelungen, F. Bachmann, H. Wolff, A. Baur; 4. Der synthetische und der analytische Standpunkt in der Geometrie, R. Lingenberg, A. Baur; 5. Geometrische Konstruktionen, W. Breidenbach, W. Süss; 6. Polygone und Polyeder, J. Gerretsen, P. Vredenduin; 7. Vektoren und Trigonometrie, H. Gericke, F. Raith; 8. Projektive, affine und metrische Geometrie, G. Pickert, R. Stender, M. Hellwich; 9. Algebraische Geometrie, W. Burau, A. Baur; 10. Kleins Erlanger Programm, W. Süss, K. Fladt; 10a. Gruppentheorie und Geometrie, H. Freudenthal, H.-G. Steiner; 11. Grundzüge der darstellenden Geometrie, F. Hohenberg, J. Tschupik; 12. Kurven und Flächen. a) Grundzuge einer allgemeinen Theorie, W. Süss, H. Gericke, K.-H. Berger; b) Konvexe Figuren, W. Süss, U. Viet, K.-H. Berger; 13. Ausgewählte Fragen der Topologie, K.-H. Weise, H. Noack.

Zu Bd II liegt eine zweiseitige Druckfehlerberichtigung vor.

Band III. *Analysis*

1962, XV + 613 Seiten, 58 DM. Inhalt:

Zeichen und Bezeichnungen

1. Konvergenz, J. Gerretsen, H. Rau; 2. Die Funktion, H. Freudenthal H. Wäsche; 3. Integral und Mass, E. Schieferdecker, K. Strehlke; 3a. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, L. Schmetterer, R. Stender; 4. Alternierende Differentialformen, F. Sommer, B. Reimann, H. Rau; 5. Das Komplexe-Grundlegung der Analysis in der Ebene der komplexen Zahlen, E. Peschl, A. Schulte; 6. Funktionentheorie, H. Tietz, W. Hestermeyer; 7. Die unendlich fernen Punkte, H. Behnke, H. Grauert; 8. Gewöhnliche Differentialgleichungen, H. Tietz, K. Wigand; 9. Partielle Differentialgleichungen, G. Hellwig, H. Liermann; 10. Differenzengleichungen und bestimmte Integrale, H. Meschkowski, K. Reinhard; 11. Funktionalanalysis, W. Schmeidler, W. Dreetz; 12. Reelle Funktionen, D. Kurepa, B. Schön; 13. Analysis und Zahlentheorie, D. Kurepa, B. Schön; 14. Strukturwandel in der heutigen Mathematik, G. Köthe, F. Ballier.

Auf die Bedeutung von Kap. 14 dieses Bandes soll hier noch ganz besonders hingewiesen werden. Es bildet den systematischen Abschluss zu den drei Banden reine Mathematik und vermittelt einen Einblick in die modernen Bemühungen zu einem einheitlichen Aufbau der Gesamtmathematik, die ihren Niederschlag in der Strukturtheorie gefunden haben.

Ein sehr ausführliches Stichwortverzeichnis (S. 577—613) wird dem Leser von grossem Nutzen sein. Dr. A. Gloden

Dr. G. R. Veldkamp, *Het examen wiskunde M.O.A*; P. Noordhoff n.v., Groningen, 1963; 105 bladz., 3 figuren; *f* 6,90.

Dit boekje is bedoeld hulpmiddel bij de voorbereiding van het M.O.-A-examen wiskunde te zijn. Het bestaat uit twee delen; in het eerste deel, dat 76 bladzijden beslaat, zijn de schriftelijke-examenopgaven uit de jaren 1957 tot en met 1962 met uitwerkingen opgenomen. Ook wanneer de student een andere oplossingsmethode zou prefereren, is het interessant om te zien, welke weg door prof. Veldkamp wordt ingeslagen, speciaal in die gevallen dat zijn oplossing origineel is Bovendien wordt een groot aantal oplossingen door vragen gevolgd, die de student ertoe willen brengen zich te bezinnen op de theoretische achtergrond van wat hij doet.

Het tweede deel bevat een honderdtal opgaven als oefenmateriaal, gelijkelijk over de vier onderdelen van het examen (Analytische Meetkunde, Analyse, Algebra en Projectieve Meetkunde en centrale projectie) verdeeld. Voor zover nodig, zijn van deze opgaven antwoorden opgenomen.

Deze verzameling is een waardevolle steun bij de voorbereiding voor het M.O.-A-examen. Aanbeveling ervan is nauwelijks nodig; iedereen die op wil gaan voor dit examen, heeft zich stellig bij zijn studie reeds met „Veldkamp" gewapend.

W. J. Claas

Dr. P. J. Gathier (met medewerking van dr. J. Rekveld), *Sterrenkunde*; J. B. Wolters, n.v., Groningen, 1963; 152 bladz., 92 figuren; ƒ 5,90.

Voor een uitvoeriger bespreking dan hier volgt wordt naar het Weekblad van het Genootschap en de R.L.V. verwezen. Het is jammer dat de behandeling van de stof aan de oppervlakkige kant is gebleven, met een aantal min of meer apodictisch gedane mededelingen, die de lezers op gezag van de auteur(s) moeten accepteren. De verstrekte informaties zijn helaas niet overal betrouwbaar.

De typografische afwerking is uitstekend; de opgenomen tekeningen zijn in het algemeen goed verzorgd. Het boekje bevat een aantal fraaie foto's.

W. J. Claas

D. Pedoe, *A Geometric Introduction to Linear Algebra*, John Wiley and Sons, Inc., London 1964, 220 blz., 45/—.

Deze helder geschreven verhandeling, die niet méér vooronderstelt dan de wiskunde die van een leerling van een 5de of 6de klasse V.H.M.O. geëist wordt, behandelt in negen hoofdstukken de eerste beginselen van de lineaire algebra.

De schrijver begint met een inleiding in de analytische meetkunde, aangepast aan het in hoofdstuk II in te voeren begrip „vector", hoewel dit hoofdstuk nog „pijltjes"-meetkunde is.

De definitie van een vector is voorlopig een grootheid waarvan grootte en richting gegeven is ("Is an elephant moving northeast a vector?" blz. 21). Men blijft in dit hoofdstuk nog in een plat vlak, zodat de vector ook al als geordend getallenpaar opgevat kan worden. Belangrijk is dat de afhankelijkheid van vectoren reeds nu aan de orde komt. De overgang naar een ruimte van drie dimensies (en dus naar n-dimensies) kost dan in de hoofdstukken III en IV weinig moeite. Determinanten van de orde 2 en 3 worden als verkorte notaties om praktische redenen, zonder theoretische beschouwingen, ingevoerd. De eigenlijke behandeling volgt pas in hoofdstuk VIII.

In hoofdstuk V komen dan lineaire systemen vergelijkingen aan bod en speciaal reguliere systemen, zodat het begrip basis ontwikkeld kan worden. In hoofdstuk VI worden lineaire vectorruimten als oplossingsruimten van het stelsel ingevoerd (o.a. het orthonormaliseringsproces). Berekeningen met matrices kunnen nu bezwaarlijk gemist worden, zodat in hoofdstuk VII de ontbinding in elementaire matrices volgt. In opgave 30.2.4 wordt gevraagd A^n te berekenen, waarin n een natuurlijk getal en A een reguliere (2,2) matrix is. Dit geschiedt heel fraai a.v. Bepaal eerst een (2.2) matrix $B\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{bmatrix}$ zo dat $B^{-1}AB$ van de vorm: $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ is, zodat $A = BCB^{-1}$, waarna zonder veel gereken A^n bepaald kan worden. In het antwoord staat abusievelijk $A = B^{-1}CB$.

In hoofdstuk VIII onderzoekt men matrices naar rang en de gevolgen hiervan voor de dimensie van de oplossingsruimte. Het boek besluit met een kort hoofdstuk over lineaire afbeeldingen. Een aantal uitgewerkte voorbeelden bij elke paragraaf en enkele opgaven (met uitkomsten) maken dit boek tot een goede gids.

Nog enkele kleinigheden: 10.2 blz. 44 moet zijn $\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+a^2}}$ en 15.2 moet zijn $(-k+1, 2k+4, -k+2)$. **Burgers**

André Delachet, *La géometrie projective*, collection „Que sais-je?" 1103.
André Delachet, *La géometrie différentielle*, collection „Que sais-je?" 1104.
Presses universitaires de France, Paris, 1964.

Met de regelmaat van een klok verschijnen er nieuwe deeltjes in de bovengenoemde serie. De laatste tijd is de prijs in de boekjes niet meer vindbaar, wat doet vermoeden dat de vroegere van NF 2.— niet meer geldt. Dat ze goedkoop zijn vermeld ik dus onder voorbehoud.

Ook deze beide nieuwe deeltjes bevatten weer op moderne leest geschoeide inleidingen; vermelding verdient nog dat nr. 1103 wordt besloten met een zeer overzichtelijk hoofdstuk „Liens entre les géometries algébrique, différientielle, euclidienne et projective dans les espaces à $n \leqq 3$ dimensions". H. W. Lenstra.

WIMECOS

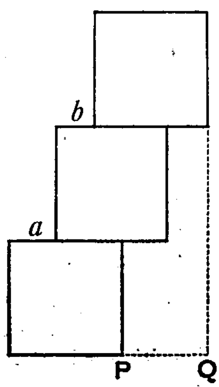
ALGEMENE VERGADERING op dinsdag 29 december 1964 in "Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht. Aanvang 10,30 uur. Voor de agenda zie men het novembernummer (blz. 92).
Zoals in de agenda is vermeld zal Prof. Dr. B. van Rootselaar een voordracht houden over *"Het getalbegrip bij Bernard Bolzano"*. De tweede voordracht zal worden gehouden door Drs. H. G. Brinkman, Groningen, over *"Heroriënteringscursussen voor leraren in U.S.A."*

CONTRIBUTIE

De penningmeester verzoekt de leden, die dit nog niet deden om de contributie voor het verenigingsjaar 1964/1965 — *f* 8,75 — over te maken naar postgirorekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek



122. Hoe moeten we drie congruente kubussen opstapelen op de manier, zoals in de figuur is weergegeven en zo, dat PQ maximaal is?

123. We kleuren de velden van een schaakbord met vier kleuren zo, dat elk viertal velden, dat in één punt samenkomt, vier verschillende kleuren krijgt. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? Manieren, die uit elkaar ontstaan door het bord een aantal kwartslagen te draaien, worden als identiek beschouwd. (B. Kootstra)

124. Vind twee getallen a en b, waarvoor geldt

$$1965^{1964} = a^2 + b^2.$$

Een gelukkig grondtal wenst u B. Kootstra.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

120. 1e oplossing. Nummer de rijen 1, 2, ..., n. We onderscheiden verticale stenen, die twee velden van verschillende rijen bedekken, en horizontale stenen, die dit niet doen. Een verticale steen, die twee velden bedekt in b.v. de rijen 2 en 3, noemen we een 23-steen. Het is duidelijk, dat er een oneven aantal 12-stenen moet zijn, omdat rij 1 een oneven aantal velden heeft. Omdat rij 2 een even aantal velden heeft, moet er dan ook een oneven aantal 23-stenen zijn. Dus ook een oneven aantal 34-stenen, enz. Zodat er in totaal een oneven aantal verticale stenen moet zijn. Het totaal aantal stenen is $\frac{1}{2}(2n)^2 - 1$ en is dus oneven. Dientengevolge moet er een even aantal horizontale stenen zijn. Op dezelfde manier bewijzen we, dat er een oneven aantal horizontale en een even aantal verticale stenen moet zijn. Uit deze contradictie volgt, dat er geen bedekking mogelijk is.

2e oplossing. Kleur de velden zwart en wit, zoals op een dambord het geval is. Elke dominosteen overdekt een zwart en een wit veld. Het aantal zwarte velden verschilt echter twee van het aantal witte velden. Dus is overdekking niet mogelijk.

121. We noemen de elementen van de ring 0, 1, 2 en 3, waarin 1 niet noodzakelijk het eenheidselement voorstelt.

Optelling				Vermenigvuldiging								
0	1	2	3	0	0	0	0	of	0	0	0	0
1	2	3	0	0	1	2	3		0	2	0	2
2	3	0	1	0	2	0	2		0	0	0	0
3	0	1	2	0	3	2	1		0	2	0	2

Optelling				Vermenigvuldiging									
0	1	2	3	0	0	0	0	of	0	0	0	0	of
1	0	3	2	0	0	0	0		0	1	2	3	
2	3	0	1	0	0	1	1		0	2	3	1	
3	2	1	0	0	0	1	1		0	3	1	2	
				0	0	0	0	of	0	0	0	0	
				0	1	2	3		0	1	2	3	
				0	2	1	3		0	2	2	0	
				0	3	3	0		0	3	0	3	

Verder zijn in beide gevallen nog mogelijk een vermenigvuldiging, waarvan de tabel uit alleen 0'en bestaat. In totaal vinden we dus 8 mogelijkheden. Ze blijken alle een commutatieve vermenigvuldiging te hebben, echter niet alle een eenheidselement.