EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

IX—1 JUNI 1964

INHOUD

T. Ehrenfest-Afanassjewa 1876-1964 257
Dr. H. Turkstra - Over documentatie van leermiddelen bij het wiskunde-onderwijs 260
Dr. J. T. Groenman - Een merkwaardig punt . . . 272
Korrel 275
Uit de openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos tot de algemene vergadering 277
Prof. Dr. O. Bottema - De zogenaamde stelling van Nesbitt 279
Didactische literatuur 280
Boekbespreking 284
Recreatie 287

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van d W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

T. EHRENFEST-AFANASSJEWA

geb. 19 nov. 1876 — overl. 14 apr. 1964

In november 1961 werd een extranummer uitgegeven van het Mededelingenblad van de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. ter gelegenheid van de 85e verjaardag van Mevr. Ehrenfest. Als antwoord daarop schreef ze een artikel, dat ze aan de redactie toezond met het volgende briefje:

> Hier is mijn dankzegging voor de nauwelijks-verdiende viering van mijn verjaardag. Zoals ik ben, kon ik ook bij deze gelegenheid mijn tong niet stil houden en begaf me op een — enigszins — polemisch gebied. Ik vrees, dat dit stuk geen zwanezang zal blijken. Ik heb op mijn hart nu het probleem van de universitaire opleiding van de toekomstige leraren. Maar zeg het, als u genoeg van mij hebt!!!!
>
> Tegelijk wil ik u een persoonlijk gerichte dank voor uw vriendelijkheid uitspreken. U bent immers van het bestuur van onze groep en ik vertrouw, dat die viering niet zonder uw toedoen gebeurde. Hoeveel andere leden van onze werkgroep daarmee sympatizeren, is al een vraag voor me . . .
>
> Met hartelijke groeten
>
> Uwe T. Ehrenfest-Afanassjewa

Twee karaktertrekken worden door dit briefje duidelijk gedemonstreerd: haar grote bescheidenheid en de onvermoeibare wil om over de didactiek van de wiskunde te blijven meedenken en meespreken.

Die didactiek van de wiskunde was dan in het bijzonder de didactiek van de meetkunde. Ze beschouwde de meetkunde daarbij eigenlijk als een onderdeel van de natuurkunde, zoals kan blijken uit haar geschrift: „Kan het wiskundeonderwijs bijdragen tot de vorming van het denkvermogen?" (Men vindt dit, met een aantal andere artikelen van haar hand, o.a. in de in 1960 by Thieme verschenen bundel „*Didactische Opstellen Wiskunde*". Ze werden verzameld en ingeleid door Br. Ernst). We lezen hierin onder meer:

> Als men dan ook vraagt: waarom vindt men alleen in de wiskunde een zodanige duidelijkheid, dan moet het antwoord luiden: omdat elk gebied, dat die mate van duidelijkheid bereikt, daardoor al tot de klasse der „wiskundige" vakken bevorderd wordt. Daarom en daarom alleen wordt de meetkunde haast van haar ontstaan tot de wiskundige vakken gerekend, hoewel ze een zeker aspect van de natuur beschouwt en dus mede tot de onderdelen der natuurkunde behoort. Daarom mag men ook de rationele mechanica en de Maxwellse electrodynamica tot de wiskundige vakken rekenen.

In een noot voegde ze daaraan toe:

De onderzoekingen over niet-euclidische meetkunden en over ruimten van hogere dimensies zijn een bovenbouw op het oorspronkelijk systeem; analoge onderzoekingen zijn in principe ook voor elk ander deel van de natuurkunde en ook voor elk ander gebied van studie mogelijk. Trouwens Lobatschewsky heeft (en Gauss ook, naar men vermoedt) zijn geometrisch systeem als een beschrijving der natuur beschouwd, die wellicht exacter is dan die van Euclides.

Het is geen wonder, dat Mevr. Ehrenfest de meetkunde als deel van de natuurkunde zag, want haar denken was, tijdens haar studietijd en later, gevormd zowel door de grote wiskundigen als Klein, Hilbert en Minkowsky, als door de natuurkundigen Lorentz en Einstein. Haar belangstelling ging dan ook sterk uit naar sommige gebieden van de natuurkunde, zoals de thermo-dynamica.

Door de benoeming van haar man Paul Ehrenfest tot hoogleraar te Leiden kwam Mevr. Ehrenfest naar Nederland, waar ze al spoedig contact opnam met de Nederlandse wiskunde-leraren, o.a. Dijksterhuis en Reindersma. In 1915 verscheen in het Weekblad voor Voorbereidend en Hooger Onderwijs een vertaling van een harer Russische artikelen, nl. „De rol der axioma's en bewijzen in de meetkunde". Zoewel in Rusland als hier was dit artikel een revolutionair geluid in de wereld van wiskundeleraren en ouders.

In 1936 werd de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. opgericht en de vierde vergadering daarvan was al bij Mevr. Ehrenfest thuis. Hier bleek op welke wijze Mevr. Ehrenfest haar invloed op de didactiek van de wiskunde in Nederland zou uitoefenen: Het waren de vele en vele gesprekken en discussies met wiskundedocenten, die op indirecte wijze haar baanbrekende gedachten deden doorwerken.

„Altijd", zo schrijft Mevr. Proost-Thoden van Velzen in het bovengenoemde extra-nummer van het Mededelingenblad, „waren uw opmerkingen verrassend en waardevol. In mei 1938 besloten wij u meer de ruimte te geven. Een uitgebreid weekeinde van vrijdagavond tot en met dinsdag werd eind juli georganiseerd. U had de leiding, hield de inleidingen en leidde de discussies. Ik houd een onsterfelijke herinnering aan die dagen . . ."

In deze eerste vergaderingen van de Wiskunde-Werkgroep ontvouwde Mevr. Ehrenfest haar ideaal voor een meetkundeboek: een heel dun boekje met alleen de noodzakelijke stellingen, geen aparte vraagstukken, alleen zulke, die een directe bijdrage betekenen tot de theorie. (De „stamboom" van stellingen, die zij voor deze besprekingen opstelde, als een middel om de gedachten te bepalen, werd door sommigen verkeerd begrepen en tot doel verheven en als basis van een meetkundeleergang gebruikt.)

Toen de Wiskunde-Werkgroep zich bezig hield met het opstellen van een voorstel voor een nieuw wiskundeprogramma voor het V.H.M.O. heeft Mevr. Ehrenfest druk meegestudeerd. Ook zo was haar indirecte invloed op het tenslotte tot stand gekomen nieuwe leerplan groot.

Tot haar dood toe is het huis Witterozenstraat 57 in Leiden een plek geweest, waarheen zich wis- en natuurkundeleraren begaven om nieuwe didactische inzichten te toetsen. Men keerde van zo'n gesprek nooit onverrichterzake naar huis terug. In het laatste nummer van het Mededelingenblad heeft Prof. Freudenthal zijn discussiepartner (men zie bijv. de brochure over het onderwerp: „Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?") herdacht in een artikel met het opschrift: „De discussie is gesloten". Dat klinkt nogal definitief. Men zou er aan moeten toevoegen: „Maar de gesprekken zullen worden voortgezet".

Dr. P. M. van Hiele
G. Krooshof

OVER DOCUMENTATIE VAN LEERMIDDELEN BIJ HET WISKUNDE-ONDERWIJS

door

Dr. H. Turkstra
Hilversum

Het heeft wat lang geduurd, voor er informatie kon worden gegeven over de binnengekomen antwoorden op de enquête, die onder bovengenoemde titel in Euclides, **37**, 1961/1962, blz. 202 was gepubliceerd.

Dit heeft zijn reden in 2 omstandigheden:

1. Het aantal binnengekomen antwoorden was naar mijn mening *te gering* (totaal 6 collega's zonden antwoorden) om als grondslag voor een samenvattend artikel te dienen. De waarde van een enquête immers wordt in hoge mate bepaald door het aantal informaties.

2. Door de Coördinatie-Commissie voor wiskunde van de 3 Ped. Centra is intussen een speciale studiewerkgroep ingesteld voor onderzoek naar moderne hulpmiddelen voor het wiskunde-onderwijs. Ik was van mening, dat dit groter opgezette onderzoek wellicht de publikatie van de resultaten van de in 1962 gehouden enquête zou overbodig maken. Om deze reden had ik het binnengekomen materiaal ter beschikking gesteld van de secretaris van de werkgroep. Na overleg echter met deze en met de voorzitter van de redactie van Euclides, is dan toch maar besloten de resultaten van de gehouden enquête nu reeds te publiceren, daar de eindconclusies van de studiewerkgroep nog wel enige tijd op zich zullen laten wachten. Het leek mij, vooral nu het aantal inzendingen beperkt was, het geschiktst de inzenders zelf aan het woord te laten en dus in hoofdzaak de tekst van de antwoorden der schrijvers over te nemen.

I. Ik moge dan beginnen met het vriendelijk gestelde antwoordschrijven, dat ik op 24 maart 1962 ontving van onze helaas spoedig daarna overleden vriend en zeer gewaardeerde collega Dr. D. J. E. Schrek. Hij schrijft:

Gaarne wil ik trachten aan uw verzoek in „Euclides" te voldoen en u vertellen wat ik vroeger aan leermiddelen heb aangeschaft voor de wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium te Utrecht of wat ik verder ben tegen gekomen.

Allereerst twee boektitels:

1. H. Martin Cundy & A. P. Rollet, *Mathematical Models*, Oxford, Clarendon Press 1952, (o.a. modellen van de regelmatige, stervormige en halfregelmatige lichamen).

2. C. Gattegno en negen anderen, *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*. (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques), Neuchâtel-Paris, Delachaux et Niestlé, S.A., 1958. Prijs ingen. *f* 13,90 (modellen, films, ook voor de hogere delen van de wiskunde; een van de tien samenstellers is de bekende J. L. Nicolet te Lausanne).

Dan is er de vereniging, die speciaal voor het door u bedoelde streven is opgericht:

Association for Teaching Aids in Mathematics. Hon. Secretary Mr. R. H. Collins, Doncaster Technical High School, 97 Chequer Road. Doncaster (Yorks). Deze collega is buitengewoon geestdriftig voor de zaak. Mocht dit adres niet meer goed zijn, dan kunt u het juiste vernemen òf bij de Inc. Association of Assistant Masters in Secondary Schools, 29 Gordon Square, London W.C. 1, òf bij Dr. C. Gattegno, University of London Institute of Education, Malet Street, London W.C. 1 [films, filmstroken, maar ook andere aardige leermiddelen; de vereniging heeft geen winstgevend doel en de contributie is laag].

Zelf ben ik altijd allereerst gesteld geweest op:

1. *parallelliniaal* (bij het parallellogram, reeds in de 1e klasse)
2. *pantograaf*, reductiepasser (vermenigvuldiging van figuren)
3. *perspectiefliniaal* (toepassing van het cirkelsegment).

Voor dit alles kan men het best terecht in een zaak voor landmetersartikelen, b.v. hier te Utrecht bij H. Gadella, N.V. Oudegracht 312.

1. Door de amanuensis heb ik laten maken: *modellen* van *kegel, cilinder, bol* en *delen van de bol*, destijds zeer in trek, nu minder gewaardeerd. Onze amanuensis, oud-meubelmaker, leverde voortreffelijk werk: nog herinner ik me een bolschijf, keurig gesplitst in bolschil (of -ring) en afgeknotte kegel.
2. een *scheve vierhoek*; de middens van de vier zijden zijn de hoekpunten van een parallellogram.
3. een *drievlakshoek* met pooldrievlakshoek.
4. een *kegelvlak* (omwentelingskegel, beide bladen) van blik.

Dit gebruikte ik voor twee doeleinden. Ik klemde het vast in een gewoon statief van de natuurkunde om toe te lichten *a*. het ontstaan der verschillende kegelsneden, *b*. de meetkundige plaats der lijnen, die door een punt P gaan en met een gegeven lijn l een hoek Q van gegeven grootte vormen, is . . .

Ten slotte nog twee zaken. Ik had ook nog een groot demonstratiemodel (een plank van wel $1\frac{1}{2}$ meter) van een rekenliniaal. Als ik me goed herinner was die geleverd door Gebr. Wichmann te Berlijn, maar ik weet natuurlijk niet of die firma nog bestaat.

Verder nog dit. Indien men op school tot de reeksontwikkeling van sin x e.d. komt (in Duitsland was dat het geval), dan kan men die reeks afbreken na de 1e, 2e, 3e, enz. term. Men krijgt dan een aantal „hogere parabolen". Naarmate men de reeks verderop afbreekt sluiten zich in het beschouwde punt deze krommen steeds enger bij de sinusoïde aan („Schmiegungsparabeln"), wat ik altijd zeer instructief heb gevonden. In Göttingen waren hiervan zelfs wandplaten verkrijgbaar; o.a. Schimmack heeft zich daarmee

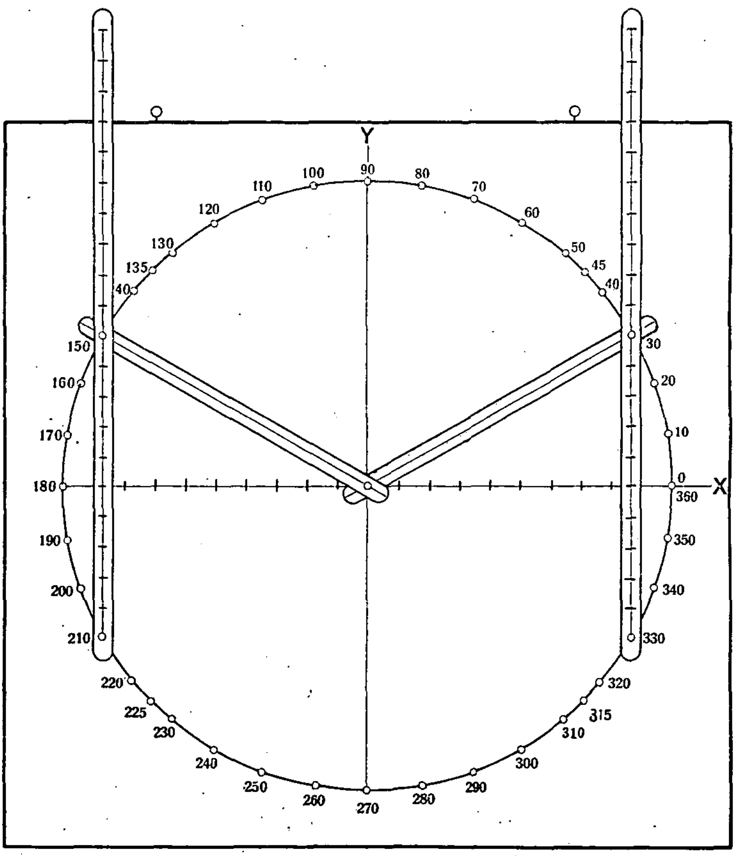


Fig. 1.

bezig gehouden. U vindt er meer van in Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I Arithmetik-Algebra-Analysis.* **3**. Aufl. 1924. bl. 241 vlgg.

Ten slotte nog dit: *alle* boeken, die ik heb genoemd (en nog zeer vele andere, die u zouden interesseren) vindt u in de bibliotheek van het Mathematisch Instituut, Achter den Dom 7, Utrecht. Een bezoek aldaar kan ik u zeer aanbevelen.

II. Van de heer J. N. Swaan, leraar aan Het Nieuwe Lyceum te Hilversum, ontving ik het volgende schrijven:

In verband met de enquête in Euclides van 1 maart 1962 geef ik u hierbij een beschrijving van de modellen, die ik geregeld bij mijn onderwijs gebruik.

1. *De „swanoscoop".*

Een naam die mijn leerlingen hebben bedacht.
(fig. 1).

Ik heb dit instrument ongeveer dertig jaar geleden door de amanuensis laten maken, het hangt in mijn lokaal naast het bord en is altijd klaar voor gebruik. De grondplaat is een vierkant van multiplex met een zijde van 52 cm, de straal van de cirkel is 22 cm. De houten wijzers kunnen draaien om een as in het middelpunt; elke wijzer heeft een stekker, die past in de gaten van de cirkelomtrek. Aan het uiteinde van elke wijzer is een lat bevestigd, die van onderen is bezwaard, zodat hij steeds verticaal hangt. Die verticale latten hebben zowel boven als onder het draaipunt een verdeling in tiende delen van de straal en aangezien de X-as ook op deze wijze is verdeeld, kan men in elke stand de sinus en de cosinus van een hoek aflezen, terwijl de tangens met enige benadering is te berekenen. Voor dit alles is slechts één draaibare wijzer nodig, de tweede kan dan ook worden afgenomen.

Het belangrijkste is, dat de leerlingen dadelijk het verband kunnen zien tussen dezelfde goniometrische verhoudingen in de verschillende kwadranten. In fig. 1 is te zien $\sin 150° = \sin 30°$ en $\cos 150° = -\cos 30°$ enz. In het algemeen $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$ enz. Door de tweede wijzer te verzetten op 210° ziet men het verband tussen de verhoudingen bij $180 + \alpha$ en α. Zet men de tweede wijzer op 330° dan ziet men het verband tussen de verhoudingen bij $360 - \alpha$ en α en ook tussen $-\alpha$ en α. Dit kan ook als α niet een scherpe hoek is.

2. *Draadmodellen.*

a. Een kubus, ribbe 16 cm met een lichaamsdiagonaal en de zijvlaksdiagonalen, die deze lichaamsdiagonaal kruisen.

b. Een regelmatige vierzijdige piramide (fig. 2) ribbe van het grondvlak 16 cm en een hoogte van 20 cm.

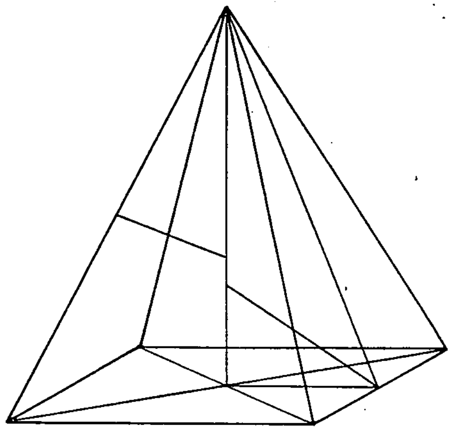


Fig. 2.

Met behulp van een middelloodlijn van een opstaande ribbe is het middelpunt van de omgeschreven bol aangegeven en met behulp van een bissectrice van een standhoek van een ribbe van het grondvlak het middelpunt van de ingeschreven bol.

c. Een regelmatige driezijdige piramide, ribbe grondvlak en hoogte 20 cm; ook met het middelpunt van de omgeschreven bol en dat van de ingeschreven bol.

d. Een regelmatig viervlak ribbe 20 cm (fig. 3) met de hoogtelijn uit de top, een hoogtelijn in het grondvlak en in een opstaand zijvlak en het lijnstuk, dat de middens van twee overstaande ribben verbindt.

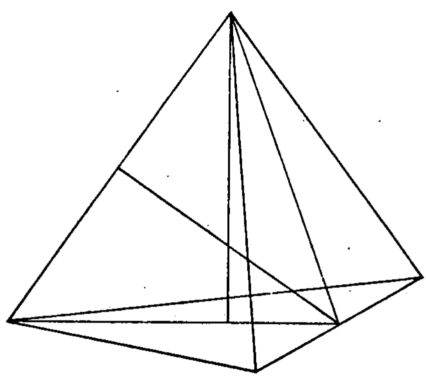


Fig. 3.

e. Eèn viervlak, waarvan drie ribben van 20 cm elkaar loodrecht snijden met de hoogtelijn op het zijvlak, dat een gelijkzijdige driehoek is.

3. *Modellen van karton.*

Ze zijn gemaakt van zwaar karton en beplakt met gekleurd papier of ze zijn geverfd.

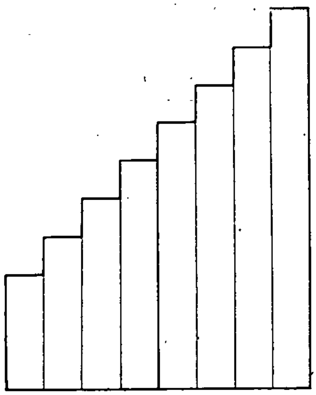
a. De vijf regelmatige veelvlakken.
b. Een regelmatige vierzijdige piramide, die op halve hoogte is afgeknot.
c. Een kegel, die op halve hoogte is afgeknot.
d. Een parallellepipedum.
e. Een driezijdig prisma.
f. Een afgeknot driezijdig prisma.
g. Een driezijdig prisma, dat is opgebouwd uit drie viervlakken met gelijke inhouden.

4. *Vlakke figuren.*

Met de figuren 4 en 6 kan men laten zien, dat een rekenkundige reeks overeenkomst vertoont met een trap.

Met de figuren 4 en 5 kan men laten zien dat

$$t_1 + t_8 = t_2 + t_7 \text{ enz. en dat } s_8 = 4 \,.\, (t_1 + t_8) \text{ is.}$$



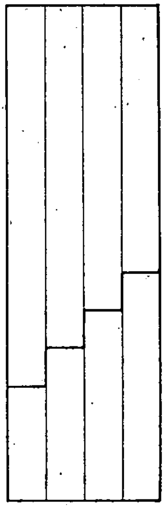


Fig. 4 en 5.

Met de figuren 6 en 7 kan men laten zien, dat

$$t_1 + t_9 = 2 \,.\, t_5 \text{ is en } s_9 = 9 \,.\, t_5.$$

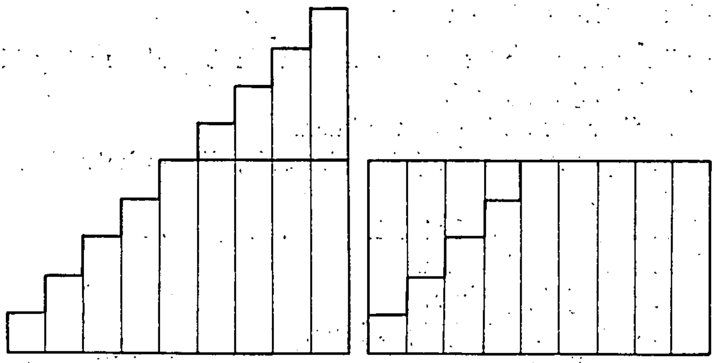


Fig. 6 en 7.

III. De heer A. Blom, leraar wiskunde aan het Corderius-Lyceum te Amersfoort, zond de volgende informatie, waarbij hij tevens een antwoord gaf op de 5e enquête vraag: „welke andere, door u nog niet gebruikte, leermiddelen op dit gebied kunt u voorts nog noemen". Hij schrijft over de hulpmiddelen, die hij bij zijn wiskundelessen gebruikt, het volgende:

Als eerste: een kant en klaar gekochte doos met 10 houten *modellen van stereometrische figuren*: kubus, regelmatig vierzijdig prisma, idem 3-zijdig en 6-zijdig, regelmatige pyramiden, 3-, 4- en 6-zijdig, bol, cilinder en kegel; afmetingen ongeveer 6 cm breed en 12 cm hoog. Deze figuren zijn wel aardig voor een eerste kennismaking, maar verder is er niet veel mee te doen: je kunt er alleen maar naar kijken.

Verder: modellen van de 5 regelmatige lichamen, door een vriendenhand gemaakt van karton, elk met een inhoud van 1 liter. Hierbij heb ik: een breinaald, verticaal bevestigd in een houten voetstuk; de lichamen kan ik erop prikken, waardoor de symmetrieassen gedemonstreerd kunnen worden. Bij de kubus is zo bijv. te demonstreren, dat het vlak van een gelijkzijdig driehoekige doorsnede loodrecht staat op een lichaamsdiagonaal.

Mijn belangrijkste hulpmiddel (eigen fabrikaat) is: *een wandbord van* een vierkante meter *triplex*, waarop ik met roestvrije stalen spijkertjes „roosterpunten" heb aangebracht met een onderlinge afstand van 5 cm. Mijn vrouw heeft hierbij een aantal eindjes wit elastiek gemaakt met aan beide uiteinden een lus, in lengte variërend van 20 tot 125 cm. De gebruiksmogelijkheden zijn vele: Bij planimetrie kan ik driehoeken en vierhoeken maken, zo nodig met de merkwaardige lijnen; het begrip oppervlakte, uit te drukken in vierkante eenheden, is prachtig te demonstreren voor alle mogelijke vlakke figuren. Bij algebra gebruik ik het voor het demonstreren van grafieken van functies; helaas worden kromme lijnen hierbij gebroken, maar dat geeft geen grote moeilijkheden. Verder zijn ook vectoren en complexe getallen er op af te beelden, als hier eens tijd voor over is. Ook sommige stereometrische tekeningen zijn goed uit te beelden, al kan ik helaas niet met stippellijnen werken (daarvoor zou een ander soort elastiek nodig zijn).

Een stuk *zachtbord* aan de wand geeft mij gelegenheid allerlei papieren aan te prikken, bijv. grafieken van minder eenvoudige functies (zoals bijv. in het blad Pythagoras behandeld worden).

Voorts noem ik nog enkele zaken, die ik niet heb, maar graag zou willen hebben:

1. Een *wissellijst* van het formaat van een tekenbord, dat bij lijntekenen wordt gebruikt. Hierbij zou een stel tekeningen moeten komen, eventueel gedrukte exemplaren, die allerlei onderdelen van de wiskunde illustreren. Ik denk aan: model uitgevoerde stereometrische figuren (bijv. doorsnede-constructies), moeilijke vlakke figuren uit de planimetrie en de analytische meetkunde, grafieken van allerlei functies, enz. Figuren die aansluiten bij de in de les behandelde onderwerpen kunnen dan in deze lijst geplaatst worden.
2. *Draadmodellen van stereometrische lichamen,* zo mogelijk demontabel. Hierin zou ik, werkend met elastiek of met gekleurd elektrisch draad, lijnen en vlakken kunnen aanbrengen. Misschien dat het dan eindelijk niet meer zou voorkomen dat leerlingen bij het tekenen van een doorsnede twee verschillende snijlijnen met een zelfde vlak tekenen!
3. Stevig gebouwde *symmetrische vlakke draadfiguren,* die met hun symmetrieas plaatsbaar zijn op een centrifugaalmachine; hiermee kunnen omwentelingslichamen zichtbaar worden gemaakt (nawerking van het oog). Indien er bovendien de beschikking is over een projectielantaarn met een spleet voor de lens, dan kunnen hiermee in een verduisterd lokaal kegelsneden worden gedemonstreerd!

IV. W. J. Deutekom, leraar wiskunde aan het Revius Lyceum te Doorn, experimenteerde met door hem zelf gemaakt materiaal, waarover hij het volgende schrijft:

Wanneer in de tweede klas de goniometrische verhoudingen van hoeken tussen 0° en 180° aan de orde komen, dan heb ik behoefte aan een instrument om het aangroeien en afnemen van de sinus (en het afnemen van de cosinus) bij groter wordende hoeken te laten *zien*. Wanneer je dit op het bord gaat tekenen, dan worden de figuren gauw rommelig en (het voornaamste bezwaar) er zit *geen beweging* in. Daarom heb ik vorig jaar voor eigen gebruik een heel simpel instrumentje gemaakt, dat hierin voorziet; in de wandeling noem ik het *cosinus-meter*. (fig. 8).

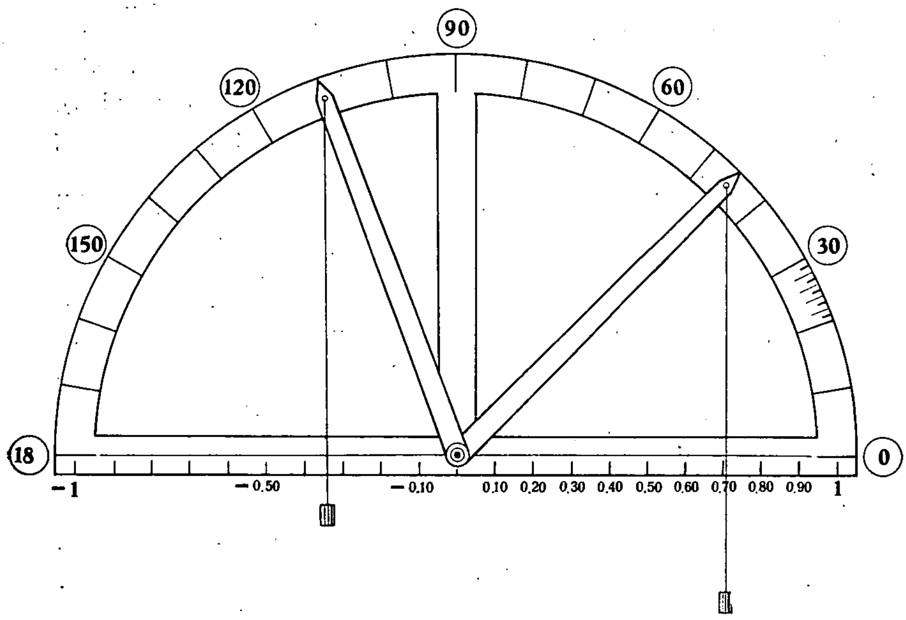


Fig. 8.

Het is eigenlijk een gewone gradenklok, voorzien van twee wijzers. Aan het einde van de wijzers zijn dunne koordjes bevestigd met kleine gewichtjes er aan. Wanneer de klok opgehangen is hangen deze koordjes dus verticaal. De halve cirkel is verdeeld in graden; op de middellijn bevindt zich een schaalverdeling die loopt van — 1 tot + 1, af te lezen tot twee cijfers achter de komma. De wijzers moeten wat zwaar draaien, zodat zij in de gewenste stand blijven staan. Desgewenst kan ik tijdelijk één wijzer er afnemen. Het exemplaar, dat ik gebruik, is gewoon van karton (donker). De schaalverdeling, aangebracht op wit tekenpapier, is er opgeplakt. De koordjes zijn ook wit. De halve cirkel heeft een straal van 20 cm. Iets groter, 25 of 30 cm, zou prettiger zijn.

Wanneer ik aan de behandeling van de desbetreffende stof toegekomen ben, dan prik ik de cosinus-meter met enige punaises aan de achterkant van één van mijn zijborden, zodat ik hem op ieder gewenst ogenblik te voorschijn kan laten komen. Aanvankelijk werk ik met één wijzer. De kinderen vinden het zeer verrassend, dat je met behulp van dit zeer simpele instrument de cosinussen tot 2 cijfers achter de komma onmiddellijk kunt bepalen. Wij controleren altijd, of het helegradentafeltje achter in hun boek correct is! Trouwens, het werken met een instrumentje in de wiskundeles is altijd aantrekkelijk en brengt wat afwisseling. Het bepalen van de sinussen is iets moeilijker (de lengte van het koordje tot aan de middellijn). Met een maatlatje op schaal gaat het ook heel goed. Mijn ervaring is echter, dat de leerlingen bevredigd zijn. wanneer één goniometrische verhouding nauwkeurig kan worden afgelezen. Later breng ik de tweede wijzer aan en wij onderzoeken dan, wanneer een scherpe en een stompe hoek dezelfde sinus hebben, hoe het zit met twee hoeken, die 90° verschillen enz. Wanneer de behandeling voltooid is, prik ik de cosinusmeter ergens aan de muur. Komen dezelfde dingen later weer aan de orde, dan geeft het de leerlingen steun, wanneer zij er naar kunnen kijken.

De bruikbaarheid van het instrumentje is beperkt. Bij hoeken van meer dan 180° laat het ons in de steek (al is daar ook wel een oplossing voor te vinden).

Voorts vervaardigde ik een instrumentje voor het (tamelijk) zuiver tekenen van ellipsen. Ik noemde het *ellipsigraaf* (fig. 9) [1]. Het gebruik zal duidelijk zijn. Het passertje wordt plat op het papier gelegd met de uiteinden van de benen op de brandpunten van de ellips. De lengte van het koordje wordt ingesteld en op de bekende „tuinmansmanier" kan de ellips getekend worden (twee helften afzonderlijk). Doordat het koordje stroef door de gaatjes loopt, verschuift het niet tijdens het tekenen van de ellips. Van dit allersimpelste instrumentje heb ik enorm veel plezier. Het is verbluffend om te constateren, hoe grote ellipsen je met dit kleine

---

[1]) Beschrijving van de Ellipsigraaf. Het instrumentje bestaat uit twee armen, die ik vervaardigd heb van 0,8 mm dik triplex (te verkrijgen in sommige „Doe het zelf-winkels"). Dit materiaal is buitengewoon gemakkelijk te bewerken (het kan zelfs geknipt worden) en het blijkt voor dit doel meer dan voldoende stijfheid te bezitten. De armen worden scharnierend verbonden door een schroefje met platte kop (de kop zit onder). De moer mag tamelijk dik zijn om enig houvast te bieden. Ik gebruikte een soort knopje van ½ cm hoog.

Voor het koordje gebruikte ik gewoon garen. Hoe dunner het is, hoe nauwkeuriger de constructie wordt. Het loopt (enigszins stroef) door vier gaatjes in de armen, bij de punten *A* en *B* naar beneden, onder de armen door en bij *C* en *D* weer naar boven.

De constructie met *vier* gaatjes heeft het voordeel, dat een ingestelde koordlengte gemakkelijker behouden blijft tijdens het tekenen. Verder bleek het praktisch om de losse uiteinden van het koordje d.m.v. een knoopje te verbinden. De totale lengte van het koordje kan bv. 20 cm zijn.

passertje kunt tekenen. Ik vind het véél en véél prettiger dan een schablone (bv. de Aristokonika), die slechts één of enkele ellipsen bevat met vaste afmeting en vaste assenverhouding.

Of de ellips in het onderwijs in de 4e en 5e klasse voldoende vaak voorkomt om het vervaardigen van zo'n instrument in bordformaat te rechtvaardigen, durf ik niet te beoordelen.

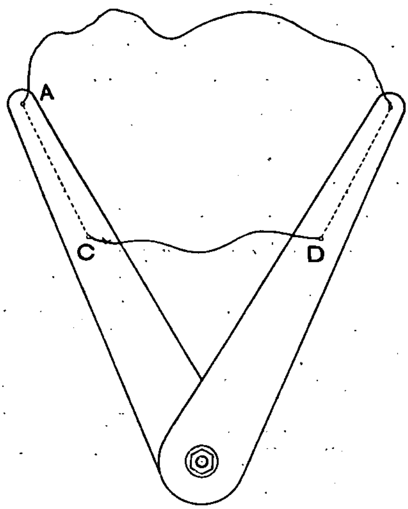


Fig. 9.

Bij een ellips is de *som* van de afstanden v.e. punt tot de brandpunten constant. Daarop berust deze passer. Bij een hyperbool geldt hetzelfde voor het *verschil* van de afstanden tot de brandpunten. Een instrument, gebaseerd op deze eigenschap, heb ik ook gemaakt (twee koordjes rollen gelijktijdig van een wieltje af). Het bleek echter in de praktijk te onnauwkeurig en was dus niet bruikbaar.

V. Dr. O. Kooi vermeldde in zijn bericht welke — door de firma Luctor uit Baarn geleverde — *modellen* van *plastic* (doorsneden gekleurd) en welke door de amanuensis der school vervaardigde ijzerdraadfiguren bij het stereometrie-onderwijs aan het Geref. Gymnasium te Amsterdam worden gebruikt.

VI. Ten slotte ontleen ik nog aan een bericht van de heer H. E. D. ten Velde, leraar wiskunde aan een U.L.O.-school te Arnhem, het volgende:

„Ik maakte voor de leerlingen der eerste klas een *constructieschrift,* benevens enkele leermiddelen (*kartonmodellen* en *houten* *latjes*) als demonstratiemateriaal, met daarbij behorende toelichting voor de leerkracht". Hij hoopt voor een en ander een uitgever te vinden.

Tot zover een samenvatting van de binnengekomen antwoorden op de enquête in Euclides, **37**. Over het gebruik van *filmstrips* kreeg ik geen informaties. Daar dit m.i. toch een zeer belangrijk hulpmiddel is bij het tegenwoordige wiskunde-onderwijs, moge ik verwijzen naar wat daarover in de laatste jaargangen van *Euclides* en in de *Mededelingenbladen* van de wiskunde-werkgroep der W.V.O. is te vinden.

In de 36e Jaargang 1960/'61 van Euclides is op blz. 91 en 92 onder besproken filmstrips opgenomen een bespreking van Vredenduin over de filmstroken, samengesteld door Bruno Ernst en A. J. Poelman (bepaling van afstanden), Drs. L. Bakema (grafieken van punt en rechte lijn) en A. C. Barrett (inleiding tot grafieken). En in de 37e Jaargang 1961/'62, blz. 334 wijdt Lenstra een korte bespreking aan de kleurenfilmstrook, samengesteld door D. Leujes (hoe getallen geschreven worden I).

In Mededelingenblad van de wiskunde-werkgroep van de W.V.O. 10e Jaargang no 4, april 1962 is een uitvoerige bespreking te vinden over de door Bruno Ernst en A. J. Poelman samengestelde filmstrook „Omtrek en oppervlakte van de cirkel". In Mededelingenblad 10e Jaargang no 5, mei 1962 geven genoemde schrijvers daar nog eens een toelichting op. Vermeld is daarbij, dat deze filmstroken zijn vervaardigd en uitgegeven door de Stichting Technisch Filmcentrum (Stadhouderslaan 152, Den Haag) in samenwerking met de filmstrookcommissie van de wiskunde-werkgroep van de W.V.O.

Een der enquêtevragen verzocht ook informatie over „bij welke firma's de gebruikte leermiddelen worden uitgegeven". In het bovenstaande bericht werden reeds enkele genoemd. Ik moge voorts nog verwijzen naar de bekende Phywe-Nachrichten, 26e Jahrgang - 1962, no 2 en 27e Jahrgang - 1963, no 1. In beide afleveringen — aan te vragen bij Phywe Nederland N.V., Wetenschappelijke Instrumenten, Bredelaan 5 Bussum — vindt u een groot aantal afbeeldingen van modellen te gebruiken bij het planimetrie- en stereometrie-onderwijs.

EEN MERKWAARDIG PUNT

door

Dr. J. T. GROENMAN

(Groningen)

In het W. T. (1e jaargang, nr. 1, 1904) lees ik, dat de Japanner Kariya in de Enseignement mathématique van 15 maart 1904 heeft voorgesteld een door hem gevonden punt zijn naam te geven. Dat dit voorstel niet werd aanvaard is wat sneu voor Kariya; het punt was nl. al eerder gevonden. Bovendien was er in die tijd een kennelijke tegenzin in verdere uitbreiding van de terminologie in de driehoeksmeetkunde. Die zou eens een afzonderlijk vak kunnen worden!

Punt van Kariya of niet, aardig is het wel. Ik laat hieronder enkele bewijzen volgen, waarbij ik in het midden laat of ze oorspronkelijk zijn.

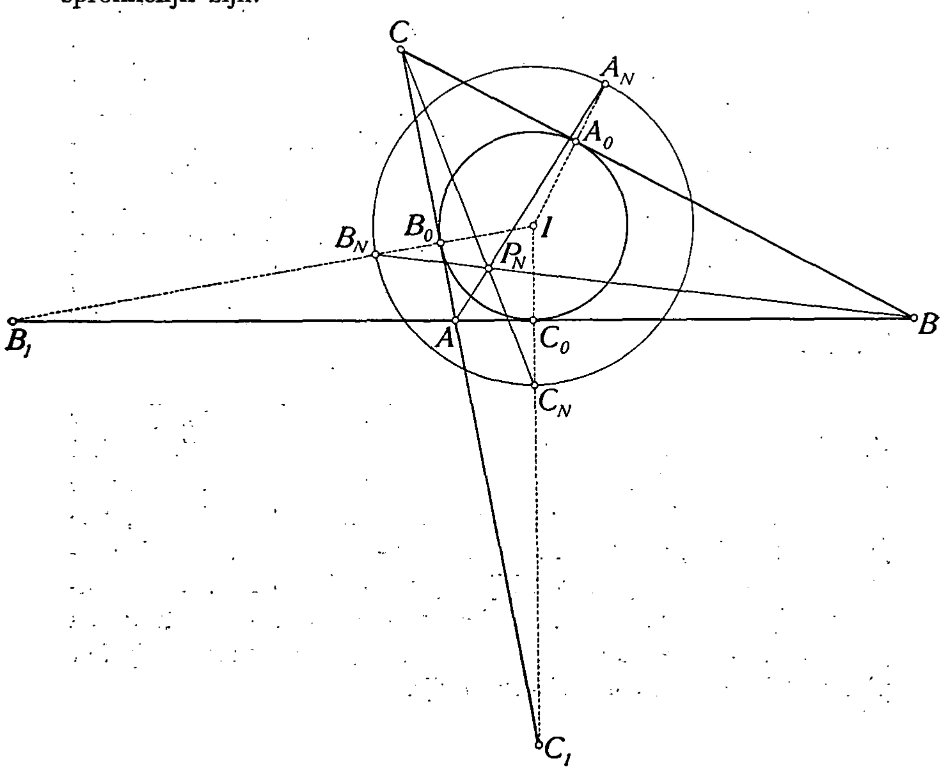


Fig. 1.

In een driehoek ABC zij gegeven de ingeschreven cirkel met middelpunt I. Op de raakstralen IA_0, IB_0 en IC_0 zet men gelijke stukken IA_N, IB_N en IC_N af. Dan gaan AA_N, BB_N en CC_N door één punt P_N. (P_N hangt dus af van de lengte ρ der gekozen stukken).

De stelling is kennelijk juist als:

$\rho = 0$ ($P_N = I$); $\rho = r$ ($P_N = N =$ punt van Nagel); $\rho = \infty$ ($P_N = H =$ hoogtepunt).

Voorts is $\triangle\, B_1B_0A \cong \triangle\, C_1C_0A$ (hzh).

$$B_0B_1 = C_0C_1;\ IB_1 = IC_1$$

Kiest men $\rho = IC_1 = IB_1$, dan is $P_N = A$.

De stelling is dus al juist in 6 gevallen, waarbij I, N, H, A, B en C als snijpunt optreden.

De puntenrijen IA_N, IB_N en IC_N zijn congruent. Wij projecteren ze uit A, B, C resp. en krijgen drie projectieve stralenwaaiers π_A, π_B en π_C. De snijpunten van de overeenkomstige stralen doorlopen een kegelsnede (hyperbool). Deze kegelsnede gaat dus door I, N, H, A, B, C. Als nevenresultaat komt er dus, dat deze 6 punten op één kegelsnede zijn gelegen. Projecteert men de gevonden snijpunten uit het punt C der kegelsnede, dan komt er een nieuwe waaier π'_C, die projectief is met π_A en π_B, dus ook met π_C. De waaiers π_C en π'_C hebben de stralen naar I, N en H gemeen en dus alle stralen. D.w.z. overeenkomstige stralen der drie waaiers π_A, π_B en π_C gaan door één punt.

b. Met de stelling van Ceva komt men er ook (figuur 2).

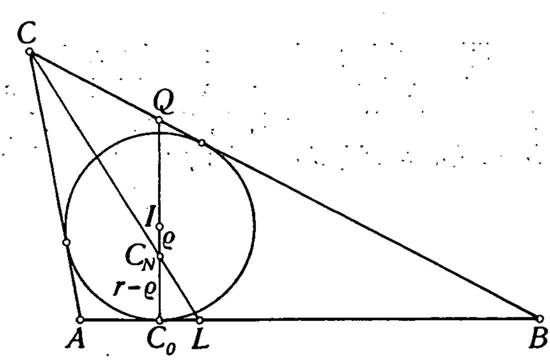


Fig. 2.

$$C_0Q = (s-b)\,\mathrm{tg}\,\beta \qquad QB = \frac{s-b}{\cos\beta}$$

$$C_NQ = (s-b)\,\mathrm{tg}\,\beta - (r-\rho) \qquad CQ = a - \frac{s-b}{\cos\beta}$$

$$C_0C_N = r - \rho$$

$$\frac{C_0C_N}{QC_N} \times \frac{QC}{BC} \times \frac{BL}{C_0L} = 1.$$

$$\frac{BL}{C_0L} = \frac{a\cos\beta[(s-b)\,\mathrm{tg}\,\beta - (r-\rho)]}{(r-\rho)[a\cos\beta - (s-b)]}$$

$$BL = \frac{a\cos\beta[(s-b)\,\mathrm{tg}\,\beta-(r-\rho)]}{a(s-b)\sin\beta-(r-\rho)(s-b)}(s-b) = a\frac{(s-b)\sin\beta-(r-\rho)\cos\beta}{a\sin\beta-(r-\rho)}$$

$$AL = b\frac{(s-a)\sin\alpha-(r-\rho)\cos\alpha}{b\sin\alpha-(r-\rho)}$$

$$\frac{BL}{AL} = \frac{a}{b} \times \frac{(s-b)\sin\beta-(r-\rho)\cos\beta}{(s-a)\sin\alpha-(r-\rho)\cos\alpha} = \frac{\dfrac{(s-b)\sin\beta-(r-\rho)\cos\beta}{b}}{\dfrac{(s-a)\sin\alpha-(r-\rho)\cos\alpha}{a}}$$

$$\frac{BL}{AL} = \frac{F(b,\beta,\rho)}{F(a,\alpha,\rho)}$$

Op de andere zijden komen de verhoudingen

$$\frac{F(c,\gamma,\rho)}{F(b,\beta,\rho)} \text{ en } \frac{F(a,\alpha,\rho)}{F(c,\gamma,\rho)}$$

zodat het produkt $= 1$.

c. Een soortgelijke stelling geldt als men i.p.v. de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ een der aangeschreven cirkels neemt. Ook nu komt er een kegelsnede, die door A, B, C en H gaat. I.p.v. I en N komen bijv. I_C en G_C, waarbij G_C een der punten van Gerconne is.

KORREL
(functies)

In de huidige schoolwiskunde verstaan we onder $\dfrac{1}{(x-2)^2\,(x-4)^2}$ een functie, omdat bij elke waarde van x hoogstens één waarde van $(x-2)^{-2}\,(x-4)^{-2}$ hoort. Dat x daarbij een reëel getal voorstelt, wordt in de regel niet vermeld, omdat x, als niet anders vermeld wordt, vanzelf een reëel getal voorstelt. Verder zegt men, dat de functie niet gedefinieerd is voor $x = 2$ en voor $x = 4$.

Modern is dit niet. De moderne opvatting is, dat een functie een afbeelding is. Daarbij vragen we ons drie dingen af:

a. wat wordt afgebeeld, d.w.z. wat is de verzameling van originelen,
b. tot welke verzameling behoren de beelden,
c. wat is het afbeeldingsvoorschrift?

De antwoorden op deze vragen luiden:

a. afgebeeld wordt de verzameling $R\backslash\{2, 4\}$, d.w.z. de verzameling van de reële getallen met uitzondering van de getallen 2 en 4,
b. elk beeld is een reëel getal,
c. het afbeeldingsvoorschrift is $x \rightarrow (x-2)^{-2}\,(x-4)^{-2}$.

Als we de functie f noemen, kunnen we het bovenstaande samenvatten in de notatie:

$$f : R\backslash\{2, 4\} \rightarrow R : x \rightarrow (x-2)^{-2}\,(x-4)^{-2}.$$

Dit is een afbeelding in en niet op R, omdat niet elk reëel getal beeld is. De beeldverzameling is de verzameling $\{x \in R \mid x > 0\}$.

Ik vraag me met enige angst af, of we deze weg in de toekomst zullen moeten bewandelen. D.w.z. moet in elke opgave van elke functie de verzameling van originelen expliciet vermeld worden? Wat is er tegen om te zeggen, dat de functie $x \rightarrow (x-2)^{-2}\,(x-4)^{-2}$ een voorschrift is om reële getallen af te beelden? Dit voorschrift werkt als volgt. Substitueer in de gegeven vorm voor x een reëel getal. Soms komt er dan iets, dat geen betekenis heeft. Het proces breekt dan af, d.w.z. aan deze waarde voor x voegt het voorschrift geen reëel getal toe. Soms komt er een reëel getal; dit is dan de aan de gesubstitueerde waarde van x toegevoegde functiewaarde. Men kan dan a posteriori vragen naar de verzameling van originelen en is niet verplicht deze in elke opgave expliciet te noemen.

Men kan zich voorstellen, dat, toen het nieuwe boek van Papy, Mathématique moderne 1 [1]), verscheen, ik mij direct afvroeg, hoe Papy de functies invoert. Hij definieert eerst de relaties op de gebruikelijke manier als deelverzamelingen van een cartesisch produkt. Een relatie tussen elementen van twee verzamelingen V en W is dus een verzameling paren, waarvan het eerste element tot V en het tweede tot W behoort. Daarna definieert hij in hoofdstuk 12 de functies als bijzonder soort relaties. Het zijn relaties met de eigenschap, dat geen enkel element van V in meer dan één paar voorkomt. Zijn zowel V als W de verzameling R, dan kunnen we een relatie dus schematisch voorstellen door een stelsel pijlen, die vertrekken uit elementen van R en ook aankomen bij elementen van R. Van elk element van R vertrekt ten hoogste één pijl; het is dus geoorloofd, dat uit een deel van de elementen van R geen pijl vertrekt. Dit is in overeenstemming met onze huidige schooldefinitie van een functie.

Daarna definieert Papy afbeeldingen op de hierboven reeds genoemde manier. Een afbeelding van R in R kan dus schematisch voorgesteld worden door een stelsel pijlen, waarbij uit elk element van R precies één pijl vertrekt.

Uit het voorgaande volgt, dat uit elke functie een afbeelding geconstrueerd kan worden. Zodra we in de verzameling, waaruit de pijlen vertrekken, alle elementen weglaten, waaruit geen pijl vertrekt, is uit de functie een afbeelding ontstaan.

Op deze wijze heeft Papy de kool en de geit gespaard. Natuurlijk heb ik mij afgevraagd of dit uit overtuiging was of niet. Op mijn vraag in deze gaf Papy echter als antwoord, dat hij dit compromis had gekozen, omdat in de schoolwiskunde nu eenmaal het gebruik was over functies te spreken op ouderwetse manier en dat, gezien het feit dat de leerlingen daar in latere leerjaren mee in aanraking komen, hij wel gedwongen was geweest dit soort functiebegrip in zijn beschouwingen op te nemen.

Wat ik mij nu afvraag is, of werkelijk dit soort door Papy en door andere hoogleraren gewraakte functiebegrip uit onze schoolwiskunde dient te verdwijnen en wat de consequenties daarvan zijn. Ik heb dit in Euclides speciaal ter sprake gebracht om reacties uit te lokken, zo mogelijk ook van universitaire zijde.

P. G. J. Vredenduin

---

[1]) Zie voor een bespreking van dit boek Euclides **39**, p. 237—247.

UIT DE OPENINGSTOESPRAAK VAN DE VOORZITTER VAN WIMECOS TOT DE ALGEMENE VERGADERING VAN 27 DECEMBER 1963

„Over het afgelopen jaar trekken de volgende feiten speciaal de aandacht:

1e de reorganisatie van ons onderwijs i.v.m. de Mammoetwet,

2e de veranderde eindexamenregeling,

3e de heroriënteringscursussen voor de wiskunde.

De Raad van Leraren heeft in het afgelopen jaar enkele leden van ons bestuur uitgenodigd besprekingen bij te wonen over de voorstellen betreffende urentabellen voor het onderwijs aan het gymnasium en het atheneum, genoemd in de Mammoetwet. Deze uitnodiging is door ons bijzonder op prijs gesteld. We hebben alle gelegenheid gehad onze wensen betreffende de urenverdelingen kenbaar te maken. We hopen, dat we ook in de toekomst geraadpleegd zullen worden. Het medewerken aan deze plannen is een boeiende bezigheid. Ieder enthousiast docent is uiteraard belangstellend naar de plaats, die zijn vak in het nieuwe bestel krijgt. Omdat alle voorgestelde plannen nog maar een zeer voorlopig karakter dragen is ons uitdrukkelijk verzocht hierover geen directe mededelingen te doen. Wel kan worden opgemerkt, dat de plannen veel moois bevatten en voor het onderwijs een grote winst kunnen betekenen.

Aangaande de verleden jaar voor het eerst toegepaste noodmaatregelen bij de eindexamens het volgende: opvallend is dat het lootsysteem bij de natuur- en scheikunde en bij de moderne talen zo weinig tegenstand van leraren en leerlingen heeft ondervonden. De uitslagen van de examens zijn er waarschijnlijk niet door beïnvloed. Menigeen zag zelfs voordelen in deze noodmaatregelen. Voor die vakken, waarbij alleen het rapportcijfer examencijfer wordt, zijn de bezwaren algemeen. Wat de wiskunde betreft is de examenregeling hoegenaamd gelijk aan de oude regeling met uitzondering van de totale examineertijd voor de mondelinge examens. De leerlingen van het gymnasium en de H.B.S.-leerlingen, die geen enkele wiskunde-vrijstelling hebben, krijgen voor hun mondeling examen 40 minuten. Het blijkt bezwaarlijk te zijn in deze korte tijd tot drie verantwoorde eindcijfers te komen. Verlenging van de examentijd is hoogstwaarschijnlijk uitgesloten. Het bestuur beraadt zich over een mogelijke oplossing en zal deze aan de verantwoordelijke instanties ter overweging geven.

Het organiseren van de heroriënteringscursussen voor de volledig bevoegde leraren is een zeer lofwaardig initiatief geweest. De grote deelname zal de organisatoren tot grote voldoening hebben gestemd. Geconstateerd kan worden, dat naar aanleiding van deze cursussen velen met veel toewijding en animo aan de studie zijn getogen. Voortzetting van deze cursussen zal bijzonder op prijs worden gesteld, waarbij zowel een herhaling als een vervolg van de stof kan worden gegeven. Hierbij zal dankbaar kunnen worden geprofiteerd van de opgedane ervaringen van de reeds gegeven lessen.

De vakantiecursus, georganiseerd door het Mathematisch Centrum te Amsterdam, is ook dit jaar weer goed bezocht. Het wordt op prijs gesteld, dat ook hierbij ons bestuur is vertegenwoordigd om zijn adviserende stem te laten horen.

Verder noemen we nog het colloquium, ook georganiseerd door het Mathematisch Centrum, over verzamelingsleer en Boolse algebra Het deelnemen hieraan wordt door ons van harte aanbevolen.

Omdat onze vereniging ook de belangen van de kosmografie dient, maken we de leden attent op de cursus voor sterrenkunde, die wordt georganiseerd door de Utrechtse Sterrenwacht. Zie hiertoe de publikatie in het laatste nummer van Euclides. Het vak kosmografie zal op den duur wel overgaan in het facultatieve vak sterrenkunde, maar de betekenis van het vak wordt zeker niet onderschat.

In de Paasvakantie zal op maandag 6 april 1964 weer het Congres van leraren worden gehouden, georganiseerd door de diverse lerarenverenigingen voor de exacte vakken. Als thema is gekozen: *Invloed van de moderne ontwikkeling van de exacte wetenschappen op mens en maatschappij*. Als de toeloop weer even groot is als bij de laatste congressen, dan is dat voor de organiserende verenigingen een stimulans tot voortzetting ervan.

Ook dit jaar richten we een woord van grote waardering tot de samenstellers van de wiskunde-olympiade. De perfecte verzorging van de gehele opzet is bewonderenswaardig. We beseffen ten volle, dat het bijzonder moeilijk en tijdrovend is, de juiste opgaven hiervoor te vinden. Dat men hierin geslaagd is blijkt wel uit de goede spreiding in de resultaten.

Veel vreugde beleven onze leerlingen nog steeds aan het tijdschrift Pythagoras. Niet alleen de leerlingen, maar ook dikwijls hun ouders zien telkens de nieuwe afleveringen met spanning tegemoet. Om de animo in het oplossen van diverse problemen te vergroten heeft ons bestuur een bedrag van *f* 100,— beschikbaar gesteld aan de redactie voor het uitloven van prijzen".

DE (ZOGENAAMDE) STELLING VAN NESBITT

door

Prof. Dr. O. Bottema

Delft

Deze stelling, beschouwd door Dr. J. T. Groenman (Euclides **39**, 182—185) is een bijzonder geval van een uitspraak, die met de in- en aangeschreven cirkels niet van doen heeft.

P_1Q_1 en P_2Q_2 zijn twee rechten (fig. 1), die van de zijden AB en AC van driehoek ABC gelijke stukken afsnijden. $AP_1 = AQ_1 = x$, $AP_2 = AQ_2 = y$. De zwaartelijn AD snijdt P_1Q_1 en P_2Q_2 in S_1 en S_2.

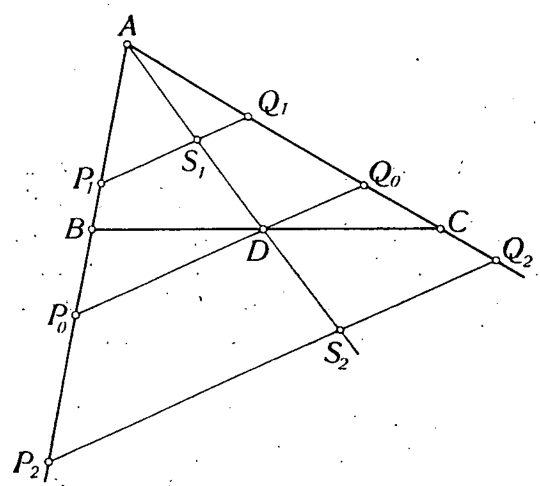


Fig. 1.

Wanneer is $S_1B\,S_2C$ een parallellogram? Daarvoor is nodig en voldoende dat $S_1D = DS_2$. Trekt men door D de rechte P_0Q_0, die eveneens gelijke stukken afsnijdt, dan is gemakkelijk te bewijzen dat $AP_0 = AQ_0 = \frac{1}{2}(b + c)$. *De voorwaarde luidt dus* $x + y = b + c$. Zijn P_1 en Q_1 de raakpunten met de ingeschreven, P_2 en Q_2 die met de aan BC beschreven cirkel, dan is $x = s - a$, $y = s$, zodat de voorwaarde vervuld is.

Een variant ontstaat, als men rechten beschouwt die van AC en van het verlengde van BA gelijke stukken afsnijden (fig. 2). Is

$AP_1 = AQ_1 = x$, $AP_2 = AQ_2 = y$ (waarbij x en y positief worden gerekend in de richtingen BA en AC) en zijn voorts S_1 en S_2 de snijpunten van P_1Q_1 en P_2Q_2 met de zwaartelijn AD, dan is S_1BS_2C

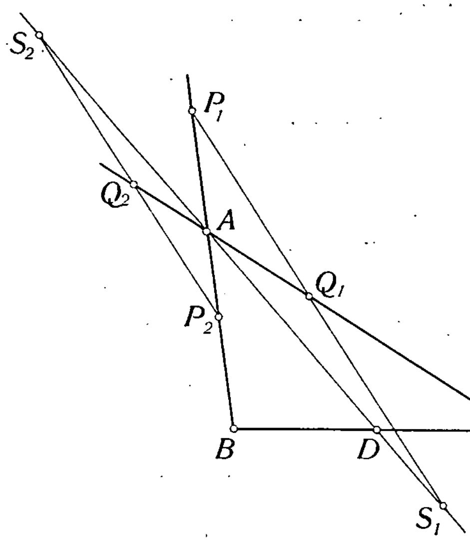


Fig. 2.

een parallellogram als $x + y = b - c$. Als P_1 en Q_1 de raakpunten zijn van de aan AC beschreven cirkel en P_2 en Q_2 die van de aan AB beschreven cirkel, dan is $x = s - c$, $y = -(s - b)$, zodat aan de voorwaarde voldaan is. De stelling van Nesbitt geldt dus niet alleen voor de ingeschreven en de aan BC beschreven cirkel, maar ook voor de beide andere aangeschreven cirkels.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität* (X, 1, 1963).

R. Schoeneberg, Emil Artin zum Gedächtnis;
H. Hermes, Wilhelm Ackermann zum Gedächtnis;
K. H. Hofmann, Über die Zeit aus mathematischer Sicht, II;
F. Ostermann und J. Schmidt, Begründung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften;
G. Pickert, Axiomatische Begründung der ebenen euklidischen Geometrie in vektorieller Darstellung;
P. Beisswanger, Cliffordalgebra und Geometrie;
H. Holmann, Merkwürdige Eigenschaften der Kugelfläche;

H. Zeitler, Zur hyperbolischen Trigonometrie;
H. Freudenthal, Zur Herrn Bottemas Kritik.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLIII, 232; octobre 1963).

L. Lesieur, La vie d'Evariste Galois (1811—1832);
A. Huisman, Les mathématiques „modernes" dans l'enseignement du second degré IV. Nombres rationels, nombres réels;
Z. Krygowska, Sur la nécessité d'une conception pédagogique dans la réforme de l'enseignement des mathématiques;
H. Gilbert, Propos hélicoïdaux.

3. *Praxis der Mathematik* (V, 10; Oktober 1963).

A. Engel, Programmierter Unterricht und Lehrmaschinen;
G. Müller, Hyperbelgleichung vektoriell;
R. Wolff, Kurvendiskussionen zum Chemieunterricht (II);
H. Siemon, Zum Funktionsbegriff;
Fr. Denk, Tagung in Digne.

Praxis der Mathematik (V, 11; November 1963).

H. Töpfer, Die Unabhängigkeit der Gruppenaxiome;
O. Klein, Beispiele zur Bogenlängenbestimmung;
F. Steiger, Das zweite Differential;
Jos. E. Hofmann, Mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach;
H. Henze, Ein mathematischer Wettbewerb.

Praxis der Mathematik (V, 12; Dezember 1963).

N. Stuloff, Methodenreinheit in der Geometrie: Jakob Steiner; Der Steinerpunkt; Über die Verallgemeinerung;
P. Knabe, Ungleichungen;
K. Apfelbacher, ln x auf der Oberstufe;
H. Rössler, Zum Ankreisviereck;
Wolf-Dietrich Meisel, Bausteine des Programmierens, II;
U. Kühnel, Mathematischer Fortbildungslehrgang in Brüssel.

4. *Elemente der Mathematik* (XVIII, 5; September 1963).

H. Hadwiger, Seitenrisse konvexer Körper und Homothetie;
M. Goldberg, Packing of 33 circles on a sphere;
K. Zuser, Über eine gewisse Klasse von ganzen rationalen Funktionen 3. Grades;
G. J. Rieger, Über eine Summe beliebiger und die Differenzen aufeinanderfolgenden Primzahlen;
S. Tauber, Propriétés algébriques des polynômes en D;
H. Lenz, Kleine Bemerkung zum Wilsonschen Satz.

Elemente der Mathematik (XVIII, 6, November 1963).

O. Giering, Über ein Kennzeichen der gleichseitigen Hyperbeln;
J. Steinig, Inequalities concerning the inradius and circumradius of a triangle;
A. Schinzel et W. Sierpinski, Sur une équation diophantienne;
S. Valentiner, Notiz über Primzahlen;
H. J. Vollrath, Eine Bemerkung zur Definition der Intervallschachtelung;
W. K. B. Holz, Über einige Berührungs- und Orthogonalkreise am Dreikreis;
F. Steiger, Punkte mit ganzzahligen Abständen.

5. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVI, 4; September 1963).

H. Jehle, Das Einschließen einer Nullstelle mit dem Newtonschen Näherungsverfahren;
F. Bader, Elementare Berechnung und Anwendungen der Streuung σ;
J. Mall, Zusammenhänge und Grenzübergänge zwischen elliptische, hyperbolische und euklidische Geometrie;
J. Groeneveld, Dynamik im schwerfreien Raum.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 5; Oktober 1963).

K. H. Weise, Rechenautomat und wissenschaftliche Forschung;
J. Wlodarski, Zahlentheoretische Ableitung der magischen Nukleonenzahlen;
W. Götz, Notwendigkeit und Grenzen einer Umgestaltung des Algebraunterrichts.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 6; November 1963).

H. Wäsche, Vorschläge zu einer neuen Darstellung der Gleichungslehre auf der Mittelstufe der Gymnasien;
H. Ernst, Eine Anwendung der Darstellung von Quadratzahlen.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 7; Dezember 1963).

H. Freudenthal, Tendenzen in der modernen Mathematik;
J. Mall, Herleitung der hyperbolischen, nichteuklidischen Trigonometrie aus dem Poincaréschen Modell;
O. Klein, Graphisches Differenzieren;
F. Thayssen, Zur Behandlung der harmonischen Schwingung;
F. Denk, Commission internationale pour l'étude et l'améloration de l'enseignement des mathématiques, Digne, août 1963.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XVI, 8; Januar 1964).

O. Höfling, Programmiertes Unterricht und Lehrmaschinen;
K. Haas, Zur Abbildungsgeometrie in der Mittelstufe der Gymnasien;
R. Göhring, Die Mengenschreibweise im Mathematikunterricht der Unterstufe der Gymnasien;
H. Kemper, Spiel mit Brüchen;
A. Engel, Elementare Herleitung der Eulerschen Formel.

6. *School Science and Mathematics* (LXIII, 7; 558; October 1963).

C. W. Schminke, A critical view of some professional literature in mathematics education;
D. R. Byrkit, If not calculus, what?
J. A. Tcerney, Generalized Pythagorean triples.

School Science and Mathematics (LXIII, 8; 559; Nov. 1963).

J. W. Wick, Physical Mathematics;
Ch. Hudson, Some remarks on teaching different bases;
R. J. Diamond, A commentary inspired by the new mathematics programs;
R. W. Hanson, Significant figures and the interpretation of scientific measurements;
D. Mazkewitch, Some criteria for divisibility.

School Science and Mathematics (LXIII, 9; 510; Dec. 1963).

Cecil B. Read, Varying use of the concept of function;
Lloyd Scott, A study of teaching division through the use of two algorithms;
Cecil B. Read, The extension of a definition;
R. Cain and E. C. Lee, An analysis of the relationship between science and mathematics at the secondary school level.

7. *The Mathematics Teacher* (LVI, 6; October 1963).

F. B. Allen, The Council's drive to improve mathematics;
Howard Fehr, The role of physics in the teaching of mathematics;
W. C. Stretton, The velocity to escape;
D. J. Struik, On ancient Chinese mathematics.

The Mathematics Teacher (LVI, 7; November 1963).

C. B. Allendorfer, The case against calculus;
F. T. Kocher and R. T. Heimer, Techniques of solving rational equations;
L. H. Lange, Some inequality problems;
E. D. Williams and R. V. Shuff, Comparative study of SMSG and traditional mathematics text material;
J. M. Kingston, A variation on binary notation;
Irving Adler, Some thoughts about curriculum revision;
Claire M. Newman, Challenging the talented mathematics student;
W. M. Fitzgerald, On the learning of mathematics by children;
E. Robinson, Strategies of proof;
Cecil B. Read, Can present-day students work problems of seven or eight generations ago?
J. Osborn, The closing years of Greek mathematics.

8. *The Mathematical Gazette* (XLVII, 360; May 1963).

E. B. C. Thornton, The new "math" in American high schools;
K. Metzer, A mathematician's experiences as a member of an industrial research group;
P. T. Landsberg, An interpretation of undergraduate applied mathematics;
P. T. Landsberg, Conference on closed-circuit television in university-teaching;
G. R. Langdale, A simple course on astronautics;
J. B. Lott, Reflections on a gramophone record;
A. M. Binnie, A gasometer problem;
W. T. Blackburn, Convex polygons and intersection of half-planes;
R. H. Cobb, Queens of arithmetic;
A. Sutcliffe, Complete solution of the ladder problem in integers.

The Mathematical Gazette (XLVII, 361, October 1963).

W. C. A. Ferraro, The scientific explanation of outer space since the time of Galileo;
A. W. Fuller, Rotation groups and permutation groups;
S. N. Collings, The axioms of non-metrical geometry;
P. Erdös, On a problem of graph theory;
H. R. Pitt, Priorities in the reform of mathematics teaching;
S. S. Dalal, A new permanent cross calendar.
Mathematical notes.

BOEKBESPREKING

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof. *Van figuren naar begrippen I, II,* (Muusses, 1963), deel I, *f* 5.90; deel II, *f* 5.40.

Het onlangs verschenen boek van deze bekende auteurs is een omwerking van het Werkboek der Meetkunde; er is een attractief geheel ontstaan dat de leerlingen al vroeg vertrouwd maakt met de eigenschappen van bekende figuren, ook van figuren in de ruimte. In den beginne wordt er niet „bewezen" maar wel veel geredeneerd o.a. uitgaande van symmetrie.

De gebruikelijke volgorde is uiteraard verstoord; de ruit en de vlieger komen vroeg, het parallellogram later. Dat ziet men wel vaker tegenwoordig en men kan er vrede mee hebben. De merkwaardige veelhoeken komen langs verschillende wegen binnenwandelen en worden pas later geordend. Het zij zo. Wanneer men echter zoals in deel II (pag. 5) wordt uitgenodigd te bewijzen dat een gelijkbenig trapezium een trapezium is en bovendien twee congruente zijden heeft, wordt het mij te gortig. Ik weet wel, dat dit mathematisch geen onzin behoeft te betekenen; het hangt er maar van af, van welke definities men uitgaat; maar ik kan mij voorstellen, dat een leerling het zot vindt, als hij moet bewijzen, dat een rode lap een lap is en dat de kleur van die lap nog rood is ook.

Voor de leraar is dit boek niet gemakkelijk; ik heb mij voortdurend moeten af vragen: „ Wat mag ik nu gebruiken en wat niet?" Zonder twijfel als aansporing gezond. Dat zit in die onorthodoxe volgorde. Het kan echter wel zijn, dat de leerling, die geacht wordt nooit met het vak te hebben gewerkt, dit niet zo moeilijk vindt, als de leraar, die zijn kennis nu eenmaal niet kan wegdenken. En als dat inderdaad zo is, dan is hier sprake van een pluspunt.

De verwisselende binnenhoeken (zaaghoeken) en de niet verwisselende binnenhoeken (harkhoeken) komen niet snel aan de orde; wij horen ook niet spoedig, dat de som der hoeken van een driehoek 180° is. Dat betekent oppassen voor de docent! Het „bewijs" van laatstgenoemde stelling verloopt met het opvullen van een vlak met congruente driehoeken. Aardig! Doeltreffend?

De congruentie gaat een belangrijker rol spelen dan men aanvankelijk verwacht: de „vijf gevallen" verschijnen als axioma.

De gebruikelijke series vraagstukken ontbreken, maar de leerling krijgt al bouwende aan de theorie, toch wel het een en ander op te knappen. En dat met goede opdrachten! Wel zien we voortdurend overzichten aan het eind van elk hoofdstuk en opsommingen van „regels der meetkunde". Men kan zich afvragen of die het boek niet dikker en duurder maken dan nodig is; in zekere zin geldt dat ook voor de fraaie reprodukties, waarvan de bedoeling mij niet steeds aanspreekt.

Verrassend is dat na het betrekkelijk langzame tempo in het begin, de gebruikelijke tweede-klas-stof snel wordt gegeven. Een apart hoofdstuk evenredigheden is er niet. Gelijkvormigheid, oppervlakken, berekeningen in driehoeken en goniometrie worden er in twintig pagina's uitgewerkt. Dit gebeurt charmant en verantwoord. Later volgt dan weer herhaling en uitbreiding.

De lezer kan de indruk hebben, dat ik aanzienlijke bezwaren heb tegen dit boek; die heb ik niet, maar wel veel vraagtekens. Eigenlijk moet men een leerboek pas bespreken, nadat men er grondig enige jaren mee heeft gewerkt. Ik neem onvoorwaardelijk aan, dat de auteur met dit boek uitstekende resultaten boekt; het is consequent vanuit één visie neergeschreven; die visie is uitermate belangrijk voor de ontwikkeling van ons meetkundeonderwijs.

Zonder twijfel wordt de leerling geconfronteerd met de opbouw van een wiskundige methode op voor hem begrijpelijke wijze. Of men hem liefde voor het vak bijbrengt, een openstaan voor het element der verrassing, een nieuwsgierigheid naar datgene wat achter de wiskundige horizon schuilgaat en of men doeltreffend een beroep op zijn zin voor het sportieve, het romantische in de wiskunde doet, wil ik niet beoordelen. Ik hoop van wel; het is een van de vraagtekens, die ik voorlopig bij deze belangrijke uitgave wil plaatsen.

Groenman

Robert Broeckx, *Moderne schooltafels*, De Nederlandse boekhandel, Antwerpen, 1963, 199 blz., Bfrs 92.

De tafels zijn 5-decimalig, maar daar b.v. bij de gewone logaritmen slechts die van 1-1000 gegeven zijn, moet met lineaire interpolatie gewerkt worden. Er staan geen hulptafels aan de zijkant, dus moet als volgt gewerkt worden. Gevraagd log 67,818. Berekening:

$$\begin{array}{rrl} \log 67{,}800 = & 1{,}83123 & \quad (64) \\ 10 = & 6.4 & \\ 8 = & 5{,}12 & \\ \hline \log 67{,}818 = & 1{,}83135 & \end{array}$$

,,Terug zoeken'' gaat met de inverse logaritme.

De sinus-tafel klimt op met hoeken van 10 minuten, maar gewerkt wordt met secunden. Dus ook hier nogal wat geïnterpoleer, voor men de sinus van een hoek heeft. Bij de inverse sinus-tafel wordt zelfs gewerkt met kwadratische interpolatie. In het boek wordt een voorbeeld gegeven, waaruit blijkt, dat er 15 regels nodig zijn om y te vinden uit sin $y = 0{,}96251$.

Behalve de gangbare tafels bevat het boek ook de natuurlijke logaritmen met inversen, radialen enz.

Liefhebbers van veel rekenen kunnen met deze methode hun hart ophalen; persoonlijk prefereer ik *onze* ,,tafel-manieren''.

P. Bronkhorst

Robert Broeckx, *Beschrijvende meetkunde*; De Nederlandse boekhandel, Antwerpen, 1963, 193 blz., Bfrs 125.

Daar dit vak op onze scholen niet meer gegeven wordt, volsta ik met de opmerking, dat het boek er zeer verzorgd uitziet, terwijl de behandelde stof vrijwel geheel overeenkomt met wat wij vroeger behandelden.

P. Bronkhorst

A. Leonhardy, *Introductory College Mathematics*. John Wiley & Sons, London; 2e druk, 450 blz., prijs 57/—.

Zowel de uitgever als de prijs waarborgen, dat de uitvoering van dit boek, dat de gebruikelijke schoolwiskunde op moderne wijze serveert, degelijk en fraai zal zijn.

De wiskunde wordt geïntroduceerd als een deductief logisch systeem. Uitgegaan wordt van de grondbegrippen punt, rechte lijn, verzameling en natuurlijk getal.

Daarna volgen fundamentele relaties tussen verzamelingen (equivalenten, deelverzameling, vereniging, doorsnede). Tevens wordt een efficiënte symboliek gebruikt voor logische conclusies, wordt gewezen op isomorfe logische structuren. Ook aan niet-euclidische structuren wordt aandacht besteed.

De bewerkingen optellen en vermenigvuldigen worden formeel ingevoerd m. b.v. postulaten (commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen, het element 1). Aftrekking en deling komen dan als inverse bewerkingen (negatieve getallen, het element 0, breuken). Irrationale en complexe getallen komen na invoering van de inverse bewerkingen van machtsverheffen.

De breuken worden ingevoerd, door de deling van hele getallen te definiëren en niet als geordende getallenparen. De irrationale getallen komen meer vriendelijk dan exact aan de orde.

Een tiental axioma's maken het mogelijk aandacht te besteden aan de structuur: verzamelingsalgebra.

Hoofdstuk 6 behandelt: functies, relaties en grafieken. Een functie wordt gedefinieerd als een systeem van twee verzamelingen X en Y met een afbeelding, zo dat elke x van X een éénduidig beeld y in Y heeft. Deze definitie kan gemakkelijk uitgebreid worden voor een functie van meer variabelen. Een relatie is een verzameling van geordende paren. Niet elke relatie definieert dus een functie.

Na de behandeling van de afgeleide functies en het integreren van eenvoudige rationale functies worden de exponentiële, logaritmische en goniometrische functies ingevoerd.

De laatste hoofdstukken besteden enige aandacht aan eenvoudige statistische problemen en kansberekeningen.

Mogelijk zal deze opsomming aanleiding kunnen zijn belangstellenden aan te sporen met dit boek kennis te maken.

Burgers

Drs. A. Kunst, Drs. R. H. Rooda en Dr. H. J. van de Vliet, *Elementaire Wiskunde voor Economische Wetenschappen*, deel I: 128 blz., ingen. *f* 8,90; deel II: 118 blz., ingen. *f* 7,90; met antwoorden, P. Noordhoff n.v., Groningen.

„Dit boek is bestemd voor alle studerenden voor M.B.A., S.P.D en de akten M.O. Boekhouden en M.O. Handelswetenschappen alsmede voor hen, die zich voorbereiden voor de diverse accountantsexamens in financiële rekenkunde en statistiek. Het geeft een volledige opleiding voor het examen „Elementaire Wiskunde voor Economische Wetenschappen" van de Nederlandse Associatie voor Praktijkexamens".

Aldus het voorbericht; ter verduidelijking kan vermeld worden dat M.B.A. Moderne Bedrijfs Administratie betekent en S.P.D. Staats Praktijk Diploma.

Het boek behandelt in hoofdzaak algebra, ongeveer in een omvang als bij de B-afdeling van een middelbare school, hier iets meer, daar iets minder en zonder differentiaal- en integraalrekening. De schrijvers zijn er op uit, hun lezers de algoritmen van de algebra goed in te prenten. Ze zijn van mening, dat algebra alleen is te leren door veel te oefenen; ze hebben daarom ruim 1700 vraagstukken opgenomen.

De indeling van het boek is overzichtelijk, de behandeling van de theorie in 't algemeen zeer helder. Slechts een enkele maal komt men een formulering tegen, die men anders zou wensen en dan gaat het nog maar om details. Daarom spijt het mij, dat ik op één punt met de schrijvers van mening moet verschillen. Het gaat over het begrip „functie" en met name de „eenwaardigheid" als karakteristieke eigenschap van een functie. Naar het schijnt noemen de schrijvers elke relatie een functie. Op pag. 72 van deel I schrijven ze:

„$y = ax^2 + bx + c$ kan ook geschreven worden als $y - ax^2 - bx - c = 0$.

Indien beide variabelen in het eerste lid voorkomen, stelt men dit eerste lid voor door $f(x, y)$. De algemene gedaante van $f(x, y) = 0$ voor een functie van de tweede graad is $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$" en daarna ,,De functie $xy = 6$ is dus van de tweede graad; de functie $x^2y = 7$ van de derde graad."

En wat is het antwoord op vraagstuk 29: Van welke graad is de volgende functie:

$$y^2 = \frac{5}{x} + 7y - 2?$$

,,Van de derde graad", zoals uit de toelichting volgt en zoals het antwoordenboekje aangeeft? Bij de wortelvormen wordt elke dubbelzinnigheid vermeden door terecht af te spreken, dat $\sqrt{9}$ alleen maar $+3$ is. Maar in deel II op pag. 68 is het met de eenwaardigheid van de functies weer helemaal mis: bij één argument kunnen meer functiewaarden behoren. Hoe men deze zaken op het genoemde examen ,,Elementaire Wiskunde" vraagt, is mij niet bekend. Wel valt het mij op, dat ook in de examenopgaven uitdrukkingen voorkomen als: ,,de functie $xy = 4$".

In hoofdstuk 18 wordt van de vlakke meetkunde datgene behandeld dat bij de studie van grafieken e.d. nodig kan zijn. Het is interessant te zien, hoe weinig dat maar is: 14 bladzijden, eindigend met de stelling van Pythagoras.

Het boek besluit met een groot aantal gemengde opgaven en examenopgaven. De studerenden voor de in het voorwoord genoemde diploma's, die de wiskunde als hulpwetenschap moeten gebruiken zullen in dit degelijke leerboek precies vinden wat ze nodig hebben. Dat rechtvaardigt voor hen ook de prijs, die, mogelijk door een geringere oplaag, iets hoger ligt dan die van een schoolboek van dezelfde omvang.

R. Troelstra

Vijftig jaren beoefening van de geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen in Nederland 1913—1963, uitgegeven door het Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen onder redactie van Dr. B. P. M. Schulte, 1963, 118 blz., *f* 4.—.

Dit boek is een gedenkboek uitgegeven door bovengenoemd genootschap ter gelegenheid van zijn vijftigjarig bestaan. Het bevat onder meer een artikel van Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis, waarin een bibliografisch overzicht gegeven wordt over de beoefening van de geschiedenis der natuurkunde, scheikunde en sterrenkunde, en een kort emotioneel geschreven artikel over de beoefening van de geschiedenis der wiskunde door Prof. Dr. E. M. Bruins.

P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

112. Hoe groot is het aantal snijpunten van de diagonalen van een convexe n-hoek (de hoekpunten niet meegerekend? Door geen enkel snijpunt gaan meer dan twee diagonalen. (Er is een zeer simpele oplossing mogelijk.) (H. W. Lenstra).

113. Iemand zei mij: ik ken een functie van x, fx, die de eigenschap heeft, dat men niet de functiewaarde krijgt voor $x = 3$ door voor x het getal 3 te substitueren. Het formele substitutieresultaat $f3$ is dus niet de functiewaarde van fx voor $x = 3$.

Hij bleek te bedoelen de functie $\frac{dx^2}{dx}$ of, anders geschreven $\frac{d}{dx}x^2$. Voor $x = 3$ komt hier 6 uit en niet b.v. $\frac{d}{dx}3^2$.

Er wordt gevraagd deze situatie te analyseren. Eventueel kan men, als men reden daartoe aanwezig acht, een verbeterde schrijfwijze voorstellen.

Men kan dit nauwelijks recreatie noemen. Ik heb de vraag echter in deze rubriek geplaatst, omdat het me de moeite waard lijkt, dat men er zijn gedachten over laat gaan. In het volgende nummer zal ik in een korrel mijn eigen zienswijze weergeven. Voor verbeteringen of aanvullingen houd ik mij dan gaarne aanbevolen.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

110. We gaan heuristisch te werk. Bij $n = 2$ en bij $n = 3$ blijft het 2e getal over, bij $n = 4$ het 1e. Dan blijft weer het 1e getal over, als we stellen $n = \frac{3}{2} . 4 = 6$, $n = \frac{3}{2} . 6 = 9$. Dan blijft over bij $n = 10$ het getal 4, bij $n = 11$ het getal 7, bij $n = 12$ het getal 10, bij $n = 13$ het getal 13, bij $n = 14$ het getal 16, d.w.z. het getal 2. Ook bij $n = 21$ blijft dan het getal 2 over. Op soortgelijke wijzen zien we nu, dat bij $n = 31$ weer het getal 1 overblijft, enz. We vinden zo, dat overblijft het getal

	1	2	1	2
bij $n =$		2	31	
		3		47
	4		70	
	6		105	
	9			158
		14		237
		21	355	

Bij verspringing van kolom is het getal in de 1e kolom gelijk aan dat uit de 2e vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ en afgerond naar beneden; het getal uit de 1e gelijk aan dat uit de 2e vermenigvuldigd met $\frac{3}{2}$ en afgerond naar boven. Hoe men hieruit algemeen afleidt welk getal overblijft, is na de oplossing van de vorige opgave evident.

Het probleem welk getal overblijft, als geschrapt worden de getallen k, $2k$, $3k, \ldots$ kan analoog behandeld worden.

111. Het tweede voorwerp, dat naast de schijf komt te staan, is 1 plaats opgeschoven vergeleken bij zijn oorspronkelijke stand, het derde voorwerp 2 plaatsen, enz. Alle voorwerpen zijn dus samen vooruitgeschoven

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \tfrac{1}{2}n\,(n - 1) \text{ plaatsen.}$$

Omdat ten slotte de voorwerpen vergeleken bij hun oorspronkelijke stand alleen van plaats verwisseld zijn, moet het aantal plaatsen, dat ze tezamen opgeschoven zijn, een veelvoud van n zijn. Daaruit volgt, dat voor n even geen oplossing mogelijk is.

Onderstel nu, dat n oneven is. We vinden dan in elk geval als volgt een oplossing. Nummer de voorwerpen rondgaande in de draairichting $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. In de beginstand zetten we voorwerp 0 naast de schijf, de volgende keer voorwerp 1, dan voorwerp 2, enz. (Men kan meer algemeen resp. de voorwerpen $0, p, 2p, \ldots$, alles modulo n genomen, naast de schijf zetten, waarin p en $p + 1$ aan de eis voldoen onderling ondeelbaar met n te zijn.)