EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

VII — 1 APRIL 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET VIERKLEURENPROBLEEM*

door

J. M. AARTS

(Amsterdam)

1. *Inleiding*

Voor we het vierkleurenprobleem kunnen formuleren, moeten we eerst nauwkeurig omschrijven, wat we onder een *kaart* dienen te verstaan.

Laat in het platte vlak een eindig aantal jordan-krommen gegeven zijn. (Een jordankromme is het beeld van een cirkel onder een topologische – d.i. eenduidige in beide richtingen continue – afbeelding.) Het complement van deze jordankrommen valt uiteen in een aantal samenhangende gebieden. Is dit een *eindig* aantal, dan spreken we van een *kaart*. Ieder stuk tezamen met zijn rand noemen we *land*. Landen zullen we aangeven met hoofdletters.

Een kaart in bovengenoemde zin kunnen we ons het beste voorstellen als een „gewone landkaart", waarbij o.a. de zee ook als een land wordt opgevat, ieder eiland als een apart land opgevat wordt, terwijl ook enclaves als aparte landen worden beschouwd.

Twee landen *grenzen aan elkaar* (zijn *buren*) als ze een jordanboog (d.i. een topologisch beeld van een segment) gemeenschappelijk hebben. Zo, b.v., grenzen in fig. 1a de landen A en B wel, in fig. 1b niet aan elkaar.

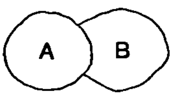


Fig. 1a

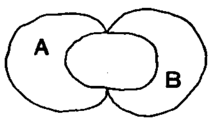


Fig. 1b

De gemeenschappelijke boog heet de *grens* van A en B.

Een *kaart kleuren* met een gegeven aantal kleuren wil zeggen: ieder land een kleur geven zó, dat buren verschillende kleuren krijgen. Kleuren geven we aan met kleine letters.

We vragen ons nu af: Hoeveel kleuren zijn nodig en voldoende om iedere kaart te kleuren?

* Voordracht Vakantiecursus Mathematisch Centrum, 1963.

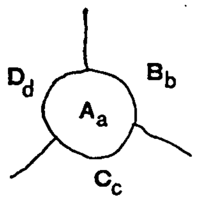


Fig. 2.

De kaart uit fig. 2 laat zien dat vier kleuren nodig zijn.

Zijn vier kleuren ook voldoende? Dit is nu juist het *vierkleurenprobleem.*

Het werd in 1878 door Cayley[3] als mathematisch probleem geformuleerd. (Het schijnt rond 1850 door De Morgan als „stelling" genoemd te zijn.) Kempe „bewees" in 1879 [9] dat vier kleuren voldoende waren om iedere kaart te kleuren. Heawood (1890)[8] gaf de fout in het „bewijs" van Kempe aan en met een modificatie van dit bewijs toonde hij aan, dat vijf kleuren voldoende zijn om iedere kaart te kleuren. Sindsdien bestaat het vierkleuren*probleem.*

2. *Ketens*

Sinds 1890 is door vele wiskundigen en niet-wiskundigen geprobeerd de vierkleurenhypothese – d.i. de hypothese, dat vier kleuren voldoende zijn om een willekeurige kaart te kleuren – te bewijzen. In deze paragraaf zullen we aan de hand van een stelling een schets geven van de belangrijkste methode, die hierbij gebruikt is. Deze methode maakt gebruik van de Stelling van Jordan: een jordankromme J in het platte vlak verdeelt het vlak in (precies) twee samenhangende gebieden A en B. Twee punten P en Q uit verschillende gebieden zijn niet te verbinden door een jordanboog, welke J niet snijdt (fig. 3.).

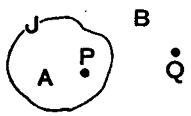


Fig. 3.

Stelling 1: Een kaart waarin ieder land ten hoogste vier buren heeft, is kleurbaar met vier kleuren.

Bewijs: Begin de kaart te kleuren met vier kleuren. We kunnen slechts vastlopen in een situatie zoals geschetst in fig. 4: hier hebben we een land E, omgeven door vier landen A, B, C en D, welke reeds gekleurd zijn met vier kleuren. We mogen aannemen dat dit resp. a, b, c en d zijn. We voeren nu het begrip *keten* in: Als een kaart gedeeltelijk gekleurd is, heten twee landen X en Y verbonden door een (x,y)-keten, indien er een rij landen is, opeenvolgend gekleurd met x en y, zó dat het eerste land uit de rij X is, het laatste Y, terwijl ieder land uit de rij grenst aan zijn opvolger in de rij. Beschouw nu de kaart uit fig. 4.

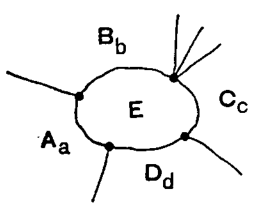


Fig. 4.

We onderscheiden twee gevallen:

(i) Stel A en C zijn *niet* verbonden door een (a,c)-keten,
(ij) Stel A en C zijn *wel* verbonden door een (a,c)-keten.
ad (i): Beschouw alle landen welke met A verbonden zijn door een (a,c)-keten. Volgens de veronderstelling behoort C hier niet toe.

We gaan nu bij deze landen de kleuren a en c verwisselen. Hierdoor krijgen we een eveneens geschikte kleuring voor het gedeelte van de kaart dat reeds gekleurd was, waarbij i.h.b. A met c gekleurd is. We kunnen nu E met a kleuren.
ad (ij): Beschouw een (a,c)-keten welke A en C verbindt, tezamen met E. We krijgen dan een ring. Met behulp van de stelling van Jordan vinden we dat de landen B en D niet verbonden kunnen zijn door een (b,d)-keten. We kunnen nu het bewijs bij (i) reproduceren, waarbij we A door B, C door D, a door b en c door d vervangen. I.h.b. wordt B met d gekleurd en E met b. Nu kunnen we het kleuren van de kaart voortzetten. Hiermede is de stelling bewezen.

Bovenstaand bewijs is in feite een bewijs met behulp van volledige inductie naar het aantal gekleurde landen in de kaart. Het in het bewijs gebruikte begrip keten is ingevoerd door Kempe in het hiervoor vermelde artikel. Toch is dit resultaat pas te vinden in een artikel van Dirac uit 1957 [4], waarin een iets algemenere uitspraak bewezen wordt. Verfijning van het bewijs en toevoeging van een truc leidt tot een recent resultaat van Aarts en Groot[1]:
Stelling 2: Een kaart waarin ieder land ten hoogste vijf buren heeft is kleurbaar met vier kleuren.

3. *Reducibele kaarten*

Terwille van een eenvoudige beschrijving van de belangrijkste vondsten bij het vierkleurenprobleem, maken we gebruik van het begrip *reducibel*:

Men noemt een kaart K, bestaande uit n landen, reducibel, indien men een bewijs heeft voor de volgende bewering: als iedere kaart met minder dan n landen gekleurd kan worden met vier kleuren, dan kan K gekleurd worden met vier kleuren.

Met behulp van dit begrip kunnen we gedeelten van een eventueel bewijs van de vierkleurenhypothese eenvoudig formuleren. Men heeft een bewijs m.b.v. volledige inductie voor de vierkleurenhypothese, als men aantoont, dat iedere kaart reducibel is.
Stelling 3. Een kaart welke een meervoudig samenhangend land bevat is reducibel. (Een land heet meervoudig samenhangend als het complement uit meerdere samenhangende stukken bestaat.)
Bewijs: We bewijzen deze stelling voor de kaart K welke geschetst is in fig. 5. (Een bewijs voor het algemene geval is dan gemakkelijk

te geven). A is een meervoudig samenhangend land. Het complement van A bestaat uit twee componenten C_1 en C_2. Stel K heeft n landen en stel dat iedere kaart met minder dan n landen gekleurd kan worden.

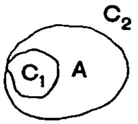


Fig. 5: K

Fig. 5a: K_1

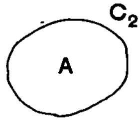


Fig. 5b: K_2

We maken twee nieuwe kaarten K_1 resp. K_2, zoals aangegeven in fig. 5a resp. 5b: K_1 ontstaat uit K door de grenzen van C_2 uit te vegen, K_2 ontstaat uit K door C_1 uit te vegen. De kaarten K_1 en K_2 bezitten ieder minder dan n landen en kunnen dus volgens de bovengemaakte veronderstelling gekleurd worden met vier kleuren. Door een permutatie van de kleuren is te bereiken dat zowel in K_1 als in K_2 het land A gekleurd is met a. Door deze kleuring over te brengen naar K verkrijgen we de gezochte kleuring.

Geheel analoog bewijst men:

Stelling 4: Een kaart waarin twee landen tezamen een meervoudig samenhangend deel van het vlak vormen, is reducibel.

Een *hoekpunt* in de kaart is een punt dat tot drie of meer landen behoort. Het aantal landen waartoe een hoekpunt behoort heet de *orde* van dat hoekpunt.

Stelling 5: Een kaart waarin een hoekpunt van orde groter dan drie voorkomt, is reducibel.

Bewijs: (fig. 6)

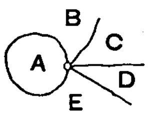


Fig. 6: K

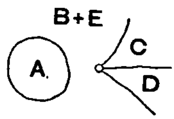


Fig. 6a: K^*

Zij K een kaart met n landen, welke een hoekpunt van orde 5 bevat. (Ook hier is het bewijs eenvoudig te generaliseren.) We mogen aannemen dat iedere kaart met minder dan n landen gekleurd kan worden met vier kleuren. Indien K een meervoudig samenhangend land bevat, of indien twee landen in K tezamen een meervoudig samenhangend deel van het vlak vormen, passen we stelling 3 resp. 4 toe. Is dit niet het geval, dan weten we dat de landen B en E verschillend zijn en niet aan elkaar grenzend. We maken nu een nieuwe kaart K^* door „het hoekpunt open te breken" (zie fig. 6a).

K^* bevat n–1 landen en kan dus gekleurd worden. Breng de kleuren van K^* over naar K. In K krijgen B en E dezelfde kleur. Dit kan echter geen kwaad, daar B en E in K niet aan elkaar grenzen.

Uit bovenstaande blijkt dat men zich bij het zoeken naar een bewijs voor de vierkleurenhypothese mag beperken tot een speciale klasse van kaarten, de *reguliere* kaarten: dit zijn kaarten waarin ieder hoekpunt orde drie heeft en waarin geen *één-* resp. *tweering* voorkomt. (Een éénring is een meervoudig samenhangend land, een tweering is een systeem van twee landen die samen een meervoudig stuk van de kaart vormen. Analoog definieert men *driering*, enz.)

Met weinig moeite kan men nu aantonen, dat een kaart welke een driering bevat reducibel is.

Birkhoff[2] bewees dat een kaart welke een vierring bevat reducibel is. Verder toonde hij aan, dat een kaart welke een vijfring bevat, reducibel is, *mits* voldaan is aan de voorwaarde, dat iedere component van het complement van de vijfring tenminste twee landen bevat.

In de volgende paragraaf zullen we zien, dat, indien deze laatste voorwaarde gemist kon worden, het vierkleurenprobleem opgelost zou zijn. Een vijfring welke wel aan deze voorwaarde voldoet, zullen we *niet-triviaal* noemen.

4. *Resultaten*

Om enig overzicht te krijgen over de mogelijke kaarten, maken we gebruik van de identiteit van Euler:

Is M een reguliere kaart zonder 1- en 2-ringen en is α_0 het aantal hoekpunten van M, α_1 het aantal grenzen, en α_2 het aantal landen, dan is $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = -2$. (1)

Stel eens dat a_i het aantal landen is met i buren, dan is

$$\alpha_0 = \sum_{i \geq 3} \frac{ia_i}{3} \text{ (in ieder hoekpunt komen 3 landen samen)}$$

$$\alpha_1 = \sum_{i \geq 3} \frac{ia_i}{2} \text{ (bij iedere grens komen 2 landen samen)}$$

$$\alpha_2 = \sum_{i \geq 3} a_i.$$

Gesubstitueerd in (1) levert dit

$$\tfrac{1}{6} \sum_{i \geq 3} ia_i - \sum_{i \geq 3} a_i = -2. \tag{2}$$

Hieruit volgt:

$$3a_3 + 2a_4 + a_5 = 12 + \sum_{i \geq 6} (i - 6)a_i \tag{3}$$

Stel nu eens dat we een willekeurige kaart K hebben met n landen.

We willen nu proberen te bewijzen dat K gekleurd kan worden met 4 kleuren. We doen dit met volledige inductie naar n. Een kaart bestaande uit 1, 2, 3 of 4 landen kan gekleurd worden met vier kleuren. Stel dat iedere kaart met $n - 1$ landen gekleurd kan worden. In het geval K een hoekpunt van orde groter dan drie bevat, of een 1-, 2-, 3- of 4-ring, óf een niet triviale 5-ring, is K reducibel volgens §3, en kan dus, door gebruik te maken van de inductieveronderstelling, gekleurd worden met vier kleuren. Is dit niet het geval, dan is K dus regulier en bevat geen 1-, 2-, 3- of 4- ring of niet-triviale 5-ring. K bevat dan i.h.b. geen land met 3 of 4 buren. Uit formule (3) volgt dan ($a_3 = 0$, $a_4 = 0$):

$$a_5 = 12 + \sum_{i \geqq 6} (i - 6)a_i. \tag{4}$$

Hieruit blijkt dat K ten minste twaalf landen van *orde* 5 bevat. (De orde van een land is het aantal buren van dat land.) Voor ieder land van orde 7, komt er een land van orde 5 bij, voor ieder land van orde 8, komen er twee landen van orde 5 bij enz. enz. Een land van orde 5 wordt omringd door een vijfring. Dit wil echter nog niet zeggen dat K reducibel is! Zo'n vijfring is triviaal en voldoet niet aan de voorwaarde dat iedere component van het complement tenminste twee landen bevat!

Toch kunnen we enig resultaat bereiken door aan K een royale beperking op te leggen. Laten we eens aannemen, dat K ten hoogste veertien landen bevat, dus $n \leqq 14$.

Dus
$$\sum_{i \geqq 5} a_i \leqq 14$$
of
$$a_5 + \sum_{i \geqq 6} a_i \leqq 14. \tag{5}$$

Door (4) in (5) te substitueren, vinden we:

$$\sum_{i \geqq 6} (i - 5)a_i \leqq 2.$$

Hieraan kan alleen voldaan zijn in de volgende gevallen ($a_8 = 0$, $a_9 = 0$, enz.):

I $a_7 = 1$, $a_6 = 0$, dan is $a_5 = 13$, dus K bevat 14 landen
II $a_7 = 0$, $a_6 = 2$, dan is $a_5 = 12$, dus K bevat 14 landen
III $a_7 = 0$, $a_6 = 1$, dan is $a_5 = 12$, dus K bevat 13 landen
IV $a_7 = 0$, $a_6 = 0$, dan is $a_5 = 12$, dus K bevat 12 landen.

Door uit te tekenen vindt men dat I niet realiseerbaar is (K mag geen vierring of niet-triviale vijfring bevatten!). Evenzo blijkt III niet realiseerbaar.
II is mogelijk in één geval: K bestaat uit een land van orde 6, omringd door een 6-ring met landen van orde 5, wéér omringd door een

zesring met landen van orde 5 en tenslotte afgesloten door een land van orde 6.

Kleuring voor K: eerste land van orde 6 met a, eerste ring met b en c, tweede ring met a en d, tweede land van orde 6 met b.

IV „K is een dodokaëder". Kleuring zie figuur 7:

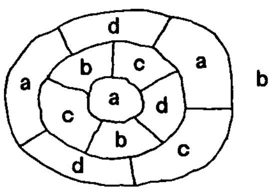


Fig. 7:

Zo blijkt dat K in alle mogelijke gevallen kleurbaar is met vier kleuren. We hebben dus de volgende *Stelling*:

Een kaart met ten hoogste veertien landen is kleurbaar met vier kleuren. Het is duidelijk, dat het aantal veertien verhoogd kan worden én door meer reducibele kaarten te vinden, én door beter gebruik te maken van de Euler identiteit.

Zo verhoogde Franklin het in 1922 tot 25 [6], Reynolds in 1927 tot 27 [10], Franklin in 1938 tot 31 [7] en tenslotte Winn in 1940 tot 35 [12]. Reeds eerder had Winn [11], gebruikmakend van het werk van o.a. Errera [5], het volgende nog iets mooiere resultaat bereikt:

Een *reguliere* kaart waarin ieder land, op ten hoogste één uitzondering na, een orde kleiner dan of gelijk aan 6 heeft, is kleurbaar met vier kleuren.

Literatuur:

[1] J. M. Aarts en J. de Groot, A case of colouration in the four colour problem, Nieuw Archief voor Wisk. (3), **XI** (1963), p. 10—18.

[2] G. D. Birkhoff, The Reducibility of Maps, Amer. J. Math. **35** (1913), p. 115—128.

[3] A. Cayley, On the colouring of maps, Proc. London Math. Soc. **9** (1878), p. 148.

[4] G. A. Dirac, A theorem of R.L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger, Proc. London Math. Soc. 3, **7** (1957), p. 161—195.

[5] A. Errera, Une contribution au problème des quatre couleurs, Bull. Soc. Math. France **53** (1925), p. 42.

[6] Ph. Franklin, The four color problem. Amer. J. Math. **44** (1922), p. 225—236.

[7] Ph. Franklin, Note on the four color problem, J. Math. and Phys. **16** (1938), p. 172—182.

[8] P. J. Heawood, Map colour theorem. Quarterly Journal of Pure and Applied Math. **24** (1890), p. 332—338.

[9] A. B. Kempe, On the geographical problem of the four colours, Amer. J. Math. **2** (1879), p. 193—200.

[10] C. N. Reynolds, On the problem of colouring maps in four colours I and II. Ann. of Math. (2) **28** (1927), p. 1—15, p. 477—492.

[11] C. E. Winn, A case of coloration in the four color problem, Amer. J. Math. **59** (1937), p. 515—528.

[12] C. E. Winn, On the minimum number of polygons in an irreducible map, Amer. J. Math. **62** (1940), p. 406—416.

IS INVOERING VAN DE REKENLINIAAL BIJ HET VHMO GEWENST? [1]

door

Bruno Ernst

(Oudenbosch)

Geachte aanwezigen, hierover kan ik zeer kort zijn: JA!

Als u de vraag gesteld wordt of het gewenst is voor uw reis naar Driebergen gebruik te maken van de trein of van een auto, dan kunt u (wonende in Delft, Rotterdam of Amsterdam), hier alleen JA op antwoorden, of u kunt de vraagsteller medelijdend aankijken en beleefdheidshalve vragen: Wou u soms dat ik kwam lopen?

Maar stel nu eens het geval, dat het grootste deel van de hier aanwezigen inderdaad uit alle delen van het land naar Driebergen was gelópen. Dan zou de situatie de vraag zinvol maken, en het antwoord zou uitgebreider moeten zijn, en de nodige argumenten moeten bevatten.

Ir. Jäger, die zich bij de Aristo-fabrieken in Hamburg bezighoudt met het ontwikkelen van nieuwe typen rekenlinialen, was hoogst verbaasd van mij te horen dat de rekenliniaal in ons middelbaar onderwijs zo goed als niet gebruikt wordt, ja dat het geen ongewoon verschijnsel is, dat wiskundeleraren op het VHMO over het algemeen geen rekenliniaal bezitten en er ook niet mee kunnen werken. Zijn commentaar was: wat een tijdverlies, en wat een prachtige toekomstige markt voor onze produkten.

Laten we ons eens op zijn standpunt stellen en de situatie ook vreemd vinden, dan ligt het voor de hand, dat wij naar de oorzaak van dit vreemde verschijnsel zoeken. In 1621 is de rekenliniaal uitgevonden en reeds in 1850 heeft ze de zeer praktische uiteindelijke vorm gekregen die wij nu kennen; bovendien zijn dan alle nu gebruikte normale schalen reeds bekend en in gebruik. Dit is dus meer dan een eeuw geleden. Dat nu de zaak duidelijk is, omdat als algemeen bekend verondersteld mag worden, dat onze school altijd meer dan een eeuw achter is, is een dooddoener, of een grapje, al schuilt er meer waarheid in, dan men onder serieuze schoolmensen wel zou

[1] Voordracht gehouden op de vergadering van Liwenagel te Driebergen op 30 augustus 1963.

willen toegeven. Maar in ieder geval kan het niet verklaren waarom de rekenliniaal nog geen algemeen gebruikt hulpmiddel op onze scholen is.

Dat onze school een vrij conservatieve instelling is, speelt natuurlijk wel een rol; maar waarom zou ze het meer dan honderd jaar volgehouden hebben om zo'n nuttig en tijdbesparend hulpmiddel te weren? Nu, in feite wàs er niets te weren, de rekenliniaal kwam niet van buiten af op de school toe. De rekenliniaal bestond gewoon en de school keek er niet naar.

De vulpen eerst (ten onrechte) uit de school geweerd kwam er vrij gauw in, en de balpen werd ook korte tijd door de school tegengehouden (overigens niet ten onrechte!) maar was toch vrij spoedig een algemeen gebruikt instrument.

Alle dingen die zich met grote kracht aan de school opdringen komen er ondanks het conservatisme spoedig in. Maar de rekenliniaal dringt zich niet op: er is in ons land geen rekenliniaalindustrie en geen commerciële propaganda ervoor, en verder praktisch geen appèl van buiten af. De invoering van de rekenliniaal wacht op het initiatief van de school zèlf. We moeten dus vragen: waarom neemt de school dit initiatief niet? Daar heb ik lang over nagedacht, en ik meen dit feit, althans voor mezelf, bevredigend te kunnen verklaren.

Er is een barrière tussen de rekenliniaal en de wiskundeleraar en leerling. Deze houdt enerzijds verband met het feit dat het principe van de rekenliniaal uit wiskundig oogpunt simpel is, en anderzijds met het feit, dat het werkelijk efficiënt leren gebruiken van de rekenliniaal een weliswaar korte, maar toch intense dressuur vraagt.

Ik hoop dat dit vaag genoeg uitgedrukt is om dadelijk nog uw interesse te kunnen wekken bij een nadere verklaring. Maar eerst zullen we nu het gezichtspunt van Ir. Jäger verlaten en het schijnprobleem bekijken vanuit de gezichtshoek van de Nederlandse wiskundeleraar, die geen rekenliniaal gebruikt, die zegt hem ook niet nodig te hebben en van hieruit – onbewust misschien – zijn negatieve houding bepaalt t.o.v. het gebruik van de rekenliniaal op school.

Wij moeten zo iemand natuurlijk eerst enige vooroordelen uit het hoofd praten om te voorkomen dat deze bij een volgend betoog over de voordelen van het gebruik van de rekenliniaal, steeds als bedenkingen op de achtergrond blijven hangen.

Voorlopig neem ik daarbij het standpunt in van degene die het absoluut vanzelfsprekend vindt, dat de rekenliniaal tot de normale hulpmiddelen behoort van ieder die na de lagere school verder studeert, en gemakshalve bedeel ik u de rol van de leraar die dat hogelijk overdreven vindt, en die zelfs het nut van de rekenliniaal in het middelbaar onderwijs sterk in twijfel trekt, toe.

Ik hoop dat er na mijn korte betoog nog ruim rijd is voor een discussie, zodat tussen beide partijen nog een eerlijk gevecht mogelijk is.

Hier komen dan kris kras door elkaar enige bezwaren, die u in de discussie nog kunt uitbreiden:

1 De rekenliniaal is een *duur* hulpmiddel.

Dit bezwaar is werkelijk uit de tijd; een prima rekenliniaal, waar men een heel leven plezier van heeft kost ongeveer 12 gulden. Er zijn ook duurdere, maar het is eigenlijk niet nodig er meer geld voor uit te geven.

2 De rekenliniaal is niet *nauwkeurig*, ze geeft altijd afgeronde uitkomsten.

Inderdaad: zelfs 3×8 is op de rekenliniaal af te lezen als *ongeveer* 24. Maar een geroutineerd gebruiker van de rekenliniaal kan gemakkelijk drie cijfers van de uitkomst aflezen en, als het eerste cijfer een 1 is, zelfs 4. Dit komt in veel gevallen neer op een nauwkeurigheid van 1 $^0/_0$ tot 1 $^0/_{00}$, en dat is voor de meeste praktisch voorkomende berekeningen ruim voldoende. Het is ook wel prettig dat de rekenliniaal voor ons afrondt: bij het uitcijferen zitten we dikwijls met een aantal volkomen overbodige cijfers te kijken, die, als men geen speciale techniek van ingekorte berekeningen gebruikt steeds blijven aangroeien.

Pas na een deelberekening kan men gaan schrappen wat men denkt niet meer nodig te hebben: de rekenliniaal doet dit voor ons automatisch.

Als het echter over geld gaat wil iedereen, zelfs bij bedragen van honderdduizenden guldens, het bedrag nauwkeurig in centen hebben. Welnu, zelfs dat presteert een rekenliniaal, zij het niet met het vlotte gemak waarmee hij gewoonlijk zijn uitkomsten ter beschikking stelt.

En verder moet natuurlijk de grootste voorstander van het gebruik van de rekenliniaal vlot toegeven dat er nu eenmaal berekeningen zijn, waarvoor men beter geen rekenliniaal kan gebruiken.

3 Als serieus bezwaar heb ik eens gehoord: *Ze verleren het gewone rekenen ermee.*

Afgezien nog van het feit, dat dit een imaginair bezwaar is dat de bezwaarmaker zeker niet uit ervaring kende, geloof ik niet dat daarop een serieus antwoord mogelijk is.

4 *Ze weten niet meer wat ze doen.*

Nu, dan zijn ze in het stadium waarin de rekenliniaal werkelijk vruchtbaar begint te worden. Bij het al cijferend uitvoeren van een deling realiseert zich ook niemand meer dat hij probeert hoeveel keer hij het ene getal van het andere af kan trekken.

5 Je kunt het op school pas *aanleren als ze goed weten wat een logaritme is.*

Hier komt de schoolse zucht naar vanuit-de-volwassene-geconstrueerde zekerheden om de hoek. Waarom zou ik geen hulpmiddel kunnen gebruiken, als ik niet weet hoe het precies werkt? Als dit buiten de school wordt toegepast, zouden er weinig horloges meer gedragen worden, zou er niet veel meer in een auto gereden worden en zou al-of-geen-commerciële-televisie in ons land ineens geen probleem meer zijn.
Overigens kan men reeds met het begrip exponent de meeste bewerkingen op de rekenliniaal plausibel maken.

6 Ze verleren het gebruik van de logaritmentafel.

Antwoord: zodra je die nodig hebt weet je in 5 minuten weer hoe het moet.

Eigenlijk heb ik u al te lang beziggehouden met bezwaren die ik zo hier en daar eens opgevangen heb en die toch wel wat gezocht zijn. Een laatste bezwaar echter is wat serieuzer:

7 Wat moeten wij in ons onderwijs met die rekenliniaal eigenlijk doen?

Er is zo weinig te rekenen, en in die sporadische gevallen dat er een meer bewerkelijke berekening nodig is, kan men gerust laten cijferen.

Het is misschien goed dit argument nader te analyseren. Of wij veel of weinig rekenwerk nodig hebben om onze leerlingen een wiskundige vorming te geven, is zomaar niet uit te maken.

Een jaar of twintig terug werd er op school weelderig gerekend voor bijna alle wiskundevakken. Het langst is dat gebleven in de goniometrie. Nú bestaat de tendens zulke opgaven te geven waarbij het rekenwerk tot een minimum beperkt is en kan men dus stellen dat een rekenliniaal daarvoor overbodig is. Zodra men echter wiskunde gaat toepassen op praktische problemen, komt men onvermijdelijk weer op tijdrovend cijferen uit.

Ook bij andere vakken, bv. fysica, heeft men de laatste tijd een grote opruiming gehouden wat betreft het vereiste cijferwerk. Als men echter uitgaat van waargenomen grootheden en niet van opgaven uit een boek dat, uit het oogpunt van cijferen extra vereenvoudigde opgaven bevat, dan komt men niet af van wijdlopende berekeningen, die, als ze op de normale manier uitgecijferd worden, veel tijd vragen.

Dat er zo weinig gerekend hoeft te worden (en ik zou eigenlijk wel eens precies willen weten of dat wel zo is) ligt dus aan het bewust vermijden van veel rekenwerk in schoolopgaven.

We kunnen de school hier niet als maatstaf nemen, maar moeten vragen of de leerlingen later in de praktijk veel zullen moeten rekenen. En ik geloof dat dit toch niet zonder meer ontkend kan worden.

Tot nog toe hebben we eigenlijk maar één idee omtrent de rekenliniaal op de achtergrond van het besprokene gehad nl. dat de rekenliniaal een rekenhulpmiddel is; en dat het ten opzichte van het cijferen het voordeel heeft van tijd te besparen.

a. Hoeveel tijd? Dat zal u allen wel bekend zijn. Een eenvoudige vermenigvuldiging van twee factoren die elk uit twee cijfers bestaan, gaat met de rekenliniaal ongeveer drie maal zo vlug. Als men geen rekenliniaal op zak heeft, zal men voor zo iets geen rekenliniaal uit een bureaula halen, ofschoon ook dit een kwestie van gewoonte is: zelf ben ik te „lui" geworden om dat zonder rekenliniaal te doen.

Maar hoe samengestelder de berekening wordt, hoe meer de rekenliniaal in het voordeel komt. Een berekening bestaande uit een aantal vermenigvuldigingen, delingen en waarin ook nog tot een macht verheven moet worden of waarin worteltrekkingen voorkomen en die een half uur stug cijferen vraagt, wordt met de rekenliniaal in enige minuten gedaan.

Het accent komt dan eigenlijk nog minder op de tijdwinst, dan op het vermijden van, in letterlijke zin, geestdodend werk. Cijferen is vrij vermoeiend en wij moeten er heel wat meer geestelijke routinearbeid aan spenderen dan aan het zuiver aflezen van en instellen op de rekenliniaal. Wie een controle op zijn berekeningen wil, doet hem nog even over in een andere volgorde: met de rekenliniaal is dat zo gebeurd, maar tegen nog eens zo'n tijd cijferen zien de meeste mensen geweldig op.

Het rekenen met de rekenliniaal verloopt als het ware op een heel ander vlak dan het cijferen. Het legt niet zo'n beslag op ons.

b. In het onderwijs (en zeker ook in de praktijk) is het van belang, dat wij de grootte van de uitkomst moeten schatten, alvorens we een nauwkeuriger uitkomst vinden. Bij 't gebruik van de rekenliniaal kan men dit nooit vermijden. De rekenliniaal geeft ons uiteindelijk slechts drie of vier cijfers en zegt niets omtrent de werkelijke grootte van de uitkomst. Uit ervaring zult u wel weten hoe weldadig deze gewoonte van schatten werkt op het voorkómen van uitkomsten die nergens op lijken. Als we met de rekenliniaal leren werken kunnen we er gewoon niet onderuit deze gewoonte aan te kweken. Er is echter meer:

c. Zoals een geroutineerde cijferaar op de duur trucjes en combinaties vindt die in het oog van een minder bedrevene een beetje op magie gaan lijken (ik heb een leraar gehad, die op deze wijze wondersnel kon cijferen zonder een rekenwonder te zijn), zo krijgt ook de geroutineerde gebruiker van de rekenliniaal ditzelfde, maar dan op een hoger niveau: hij goochelt niet met cijfers, maar met schalen, die hij op de wonderlijkste wijze en met gemak combineert om nog sneller het resultaat te krijgen. Zoals er een domweg doorcijferen bestaat, is er ook een domweg doorrekenen op de rekenliniaal, waar weinig-begaafden niet bovenuit zullen komen.

De beste rekenaar op de rekenliniaal is zeker niet hij die nerveus met de loper of met de tong zit te schuiven, maar hij die een berekening doorziet en op de mogelijkheden om met zo weinig mogelijk instellingen tot de uitkomst te komen. En de mogelijkheden die de rekenliniaal door handige combinatie van schalen biedt, zijn ongelofelijk groot. Vele daarvan worden in elk oefenboekje voor het gebruik van de rekenliniaal behandeld, maar er is een groot gebied van speciale berekeningen die op een bepaald gebied veel voorkomen en waar de rekenaar op de duur de meest economische wijze van behandeling voor vindt.

d. En dan zijn er nog bewerkingen waartegenover onze gewone manier van cijferen machteloos staat, en die met behulp van de rekenliniaal met even weinig moeite uit te voeren zijn als een normale vermenigvuldiging.

Ik geloof werkelijk, dat het invoeren van de rekenliniaal bij het VHMO niet alleen geen luxe is vanwege de tijdbesparing bij berekeningen (op school en later in de praktijk).

Vorig jaar hebben wij een extra nummer van het jeugdtijdschrift voor wiskunde (Pythagoras) gewijd aan de rekenliniaal, en dit jaar is het plan om ook zo'n nummer te wijden aan nomografie. Op het eerste gezicht is een nomogram ook alleen een middel om sneller een uitkomst te vinden, een rekenhulpmiddel dus. Maar evenals bij de rekenliniaal spelen hier nog andere factoren een rol: een nomogram is ook een uitstekend hulpmiddel om de invloed van de variabelen op de uitkomst direct te *zien*. Dit terzijde om tot slot nog enige woorden te wijden aan de barrière die het invoeren van de rekenliniaal bij het VHMO tegenhoudt.

Het principe van het vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, worteltrekken en zelfs van de op goocheltoeren lijkende bewerkingen die men met behulp van de dubbel-logaritmische schalen kan uitvoeren, is zo simpel, dat hieraan nauwelijks één wiskundeles besteed hoeft te worden. Als onderwerp van bespreking in het wiskundeonderwijs is de rekenliniaal dus vrij arm, en het zou werkelijk financieel niet verantwoord zijn hiervoor een rekenliniaal aan te laten schaffen.

Men kan zich dan bv. ook terecht afvragen: wie zal de leerlingen met de rekenliniaal leren werken? De wiskundeleraar? . . .

De andere kant van de kwestie is, dat iemand die het principe van de verschillende bewerkingen kent, even ver van het efficiënte gebruik van de rekenliniaal afstaat als het lagere-school-kind van het vlot cijferen, als het geleerd heeft 3×9 uit te rekenen door op te tellen $9 + 9 + 9$. Het heeft nog een lange oefenperiode nodig, waarin het leert zonder nadenken de uitkomst van een aantal standaardvermenigvuldigingen re reproduceren, zodra het sein daartoe gegeven wordt.

Iedereen weet dat; en niemand verwondert zich erover. Maar als men hoort, dat voor het rekenen met de rekenliniaal eenzelfde soort training absoluut noodzakelijk is, dan wordt dit veel moeilijker ingezien. Als men die (vrij vervelende) training overslaat, komt men nooit tot een vlot en efficiënt gebruik van de rekenliniaal, ook al is men nog zo'n goed wiskundige, want dat heeft daar niets mee te maken.

Het meest frappante voorbeeld dat ik ken is van een van mijn medebroeders die in Delft afgestudeerd is als elektrotechnisch ingenieur. Voor zijn toelatingsexamen voor de TH was hij helemaal op zelfstudie aangewezen, en in die tijd begon hij ook met een rekenliniaal te werken. Hij heeft me onlangs eens gezegd: „ik kan echt niet vlot overweg met een rekenliniaal!'' Hier is doodgewoon een schakel gemist.

En toch is het zo simpel: 90 % van de routine die men nodig heeft, bestaat uit het aflezen van de schalen. Als de haarlijn van de loper ergens op de schaal staat moet men ogenblikkelijk zonder aarzelen drie of vier cijfers kunnen opspuiten, net zo vlot als we op het sein 6×8 zonder aarzelen reageren met 48. Elke aarzeling daarbij verlangzaamt het tempo en ontneemt ons de zekerheid. In klasseverband heb ik geen ervaring ermee hoe lang zo'n training in het aflezen van de schaal moet duren voor dit resultaat bereikt is; maar ik kan mij niet voorstellen dat dit lang behoeft te zijn. En toch, omdat men zich deze moeilijkheid niet realiseert, lijkt mij dit het grootste struikelblok dat het invoeren van de rekenliniaal in de weg staat. Een leraar zal pas wat gaan voelen voor de invoering van de rekenliniaal, als hijzelf er dagelijks het gemak van ondervindt. En dat kan alleen maar als hijzelf zich de discipline oplegt om een tijdlang te oefenen in het aflezen van de schalen. En daar komt hij in de meeste gevallen niet toe omdat hij niet ziet dat het werkelijk iets is dat niet alleen geleerd maar intensief getraind *moet* worden.

Misschien had u iets beters en degelijkers van mijn voordracht verwacht; het zou mij spijten als ik u teleurgesteld had.

DE REKENLINIAAL OP DE MIDDELBARE SCHOOL

door

Prof. Dr. B. MEULENBELD

(Delft)

Het cursusjaar **1962—1963** heb ik het voorrecht gehad te mogen doceren als gasthoogleraar aan de Washington State University in Amerika. Gedurende dat jaar heb ik mij op de hoogte kunnen stellen niet alleen van het onderwijssysteem op universitair niveau, maar ook van dat op junior colleges, high schools en vocational schools. Het is niet mijn bedoeling in dit artikel mijn indrukken weer te geven van alle facetten van deze systemen, of uitvoerig deze te vergelijken met de overeenkomstige in Nederland, hoe groot de verleiding hiertoe ook is. Dergelijke vergelijkende beschouwingen, welke reeds in vele kranten en tijdschriften zijn gegeven, zouden me te ver voeren van het doel dat ik mij hier gesteld heb. In het algemeen kan ik wel als mijn mening geven dat ik meer waardering heb voor het hoger (het universitair) onderwijs dan voor dat op de high school. Toch, over één facet van dit laatste onderwijs wil ik hier spreken.

De Amerikaan stelt als beginsel van zijn middelbaar onderwijs niet het bijbrengen van een nodig geachte hoeveelheid kennis, maar dat van opvoeding tot zelfontplooiing. Niet de omvang en de inhoud van de leerstof acht men in de eerste plaats belangrijk, maar de vraag wat voor dit kind van belang is, staat op de voorgrond.

Jongelui van zeer uiteenlopende begaafdheid bezoeken dezelfde school. Het is logisch dat men, hiervan uitgaande, voor de schoolvakken waarbij in hoofdzaak een beroep op de intelligentie wordt gedaan, leerplannen heeft opgesteld van verschillende niveaus. De bedoeling is dat ieder hierbij die ontwikkeling zal krijgen, welke past bij zijn aanleg en intelligentie. Ik betwijfel evenwel of in het bijzonder de begaafde leerling wel de opleiding ontvangt, die past bij zijn intelligentie. Bij de aanvang van de leertijd aan de senior high school kan de leerling binnen zekere grenzen zijn eigen leerplan opstellen, in overleg met ouders en schoolcounselors. Dit kan veel voordelen bieden, maar ook aanleiding geven tot het kiezen van de weg van de minste weerstand. Speciaal de laatste jaren rijst tegen dit systeem veel verzet, omdat te weinig leerlingen de moeilijke wis- en natuurkundige vakken kiezen. Onder invloed van de competitie in technische prestaties met Rusland zijn er reeds vele maatregelen getroffen om het peil van het onderwijs aan de high school in deze vakken op te voeren. Dit geldt niet alleen voor de leerplannen welke naar college en university moeten leiden, maar zelfs voor het onderwijs aan de high school in het algemeen. Immers deze school tracht een algemene vorming te geven, die een praktische inslag heeft. Voor ons die met een Europees systeem vertrouwd zijn geeft het een indruk van oppervlakkigheid, en het peil ligt dan ook veel lager dan bijv. dat van ons middelbaar onderwijs. In de U.S. is men van mening dat in deze „space age" met zijn grote roep om technisch geschoold personeel elke leerling een zekere technische vorming bijgebracht moet worden. Als een voortvloeisel van deze gedachte zie ik dan ook het verschijnsel dat me bijzonder heeft getroffen: het invoeren en veelvoudig gebruik van rekenlinialen bij het onderwijs. In praktisch elke high school vindt men prachtige demonstratie-rekenlinialen aan de muur hangen. Bij sommige scholen is het leren gebruiken van een rekenliniaal in het leerplan opgenomen, bij andere wordt het gebruik ervan in de vrije tijd in de vorm van clubjes onder leiding van een leraar beoefend. In de leerplannen van de junior high school, en in andere welke niet zover gaan met wiskunde dat de logaritmen behandeld worden, beperkt het gebruik zich tot vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken en tot het nauwkeurig aflezen, zonder op het principe waarop deze handelingen berusten verder in te gaan dan in het duidelijk maken van uniforme en niet-uniforme schalen. In de wiskundige programma's welke de behandeling van de logaritmen wel insluiten wordt de rekenliniaal ook gedemonstreerd als toepassing van de eigenschappen van de logaritmen. Wat ik hiervan gezien heb vond ik erg instructief. De gebruikte lichte metalen rekenlinialen waren van een uitstekende kwaliteit met duidelijke, op zeer efficiënte wijze op ogensparend geel aangebrachte schalen (de bekende Pickett and

Eckel sliderules). De leerlingen werkten met veel enthousiasme met deze rekenlinialen.

Zonder nu te suggereren de bovenstaande methoden bij de invoering en het gebruik van rekenlinialen over te nemen, wil ik toch de vraag stellen of het niet aanbevelenswaard is bij ons middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs meer aandacht te besteden aan het gebruik van rekenlinialen dan thans het geval is. Voor technisch onderwijs is een dergelijke aanbeveling niet nodig daar hier een rekenliniaal een dagelijks gebruikt instrument is. Voor de vakken wis-, natuur-, scheikunde en mechanica levert het gebruik ervan duidelijk voordelen, en weegt m.i. het weinige tijdverlies dat ontstaat door het leren gebruiken en oefenen ermede hier ruimschoots tegen op. Afgezien van het evidente voordeel dat men met een rekenliniaal berekeningen sneller en eenvoudiger en tot een vrij grote nauwkeurigheid kan uitvoeren, kan men er zeer belangrijke principes van technische toepassingen mee demonstreren. Ik noem hier de bespreking van de theorie van de benaderingen en nauwkeurigheid bij het nemen van natuur- en scheikundeproeven.

Hoe verfijnd men de instrumenten ook maakt, steeds heeft men kleine fouten te accepteren. Met de rekenliniaal als voorbeeld van instrument kan men demonstreren tot welke nauwkeurigheid men hiermede kan werken, en welke decimaal nog nauwkeurig is. Bij de invoering van de logaritmen kan men de rekenliniaal als toepassing van de hoofdeigenschap laten zien. Belangrijk is het aantonen van het bestaan van verschillende schalen: logaritmische, kwadratische en goniometrische, zo essentieel in de nomografie. Dat de sinus en tangens van een hoek kleiner dan ongeveer 5° praktisch gelijk zijn, ziet men ook hier op een der schalen van de rekenliniaal toegepast. Deze voorbeelden van toepassing zijn met vele te vermeerderen. Is het gebruik van de rekenliniaal eenmaal ingevoerd, dat zijn al deze toepassingen met een gering tijdverlies te demonstreren.

Uit gesprekken met de inspectie van ons middelbaar onderwijs is mij gebleken dat ook op onze middelbare scholen het belang van het gebruik der rekenliniaal steeds meer wordt ingezien. Met voldoening heb ik gelezen dat bij het eindexamen het gebruik van een rekenliniaal is toegestaan. Als dit artikel ertoe mag bijdragen dat de rekenliniaal als praktisch instrument der techniek steeds meer ingang mag vinden ook bij onze middelbare schooljeugd, heeft het aan zijn bedoeling voldaan.

Delft, oktober 1963

ALS A WAAR IS DAN IS B WAAR

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

(Oosterbeek)

In een vorig artikel [1]) hebben we de logische operaties $\neg$ (niet), $\wedge$ (en), $\vee$ (of), $\rightarrow$ (als . . . dan) gedefinieerd door middel van de volgende tabellen van waarheidswaarden:

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
		0	1	0	1	1
		0	0	0	0	1

1 betekent ,waar' en 0 ,onwaar'.

We willen nu het belangrijke probleem bespreken, hoe men in de wiskunde tot ware uitspraken komt. Het is de taak van de logica de regels op te sporen, volgens welke deze tot stand komen. Anders gezegd: de logica heeft als opdracht na te gaan volgens welke regels het deduceren (bewijzen) geschiedt. Een prealabele kwestie is hierbij de betekenis van gebruikte termen nauwkeurig te omlijnen ten einde vaagheden te vermijden. Er blijkt dus nu, dat we ons in het voorgaande artikel alleen met deze prealabele kwestie beziggehouden hebben en nog in het geheel niet ingegaan zijn op het centrale probleem van de regels der deductie. We vragen dus nu: hoe komen we in de wiskunde (en meer algemeen bij het deduceren) tot ware oordelen?

Een deductie bestaat uit een opeenvolging van uitspraken, zoals in het volgende schema is weergegeven:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad B}{C} \quad A \quad D}{E} \qquad \dfrac{A \quad D}{F}}{G}$$

Hier wordt, uitgaande van A, B en D geconcludeerd tot resp. C, E, F en ten slotte G. We moeten een dergelijke conclusie zo lezen:

---

[1]) Dr. P. G. J. Vredenduin, Als . . . dan, Euclides, **39**, p. 175—181.

indien A en B waar zijn, dan is ook C waar. Als C, A en D waar zijn, dan ook E. Zijn A en D waar, dan is F waar. En ten slotte dan ook G. Het resultaat van het deductieproces is dus het inzicht, dat aan een arsenaal van ware uitspraken, waartoe A, B en D behoren, G zonder nader onderzoek als ware uitspraak toegevoegd mag worden. De vraag is nu: volgens welke regels gaat dit deduceren in zijn werk? Om dit duidelijk te maken, volgen hier een paar voorbeelden.

We schrijven naast elkaar de waardetabellen van A, B en $A \rightarrow B$.

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Onderstel nu, dat A waar is en dat ook $A \rightarrow B$ waar is. Als we de tabellen raadplegen, zien we, dat dit alleen op de bovenste regel het geval is. Op de bovenste regel heeft B de waarde 1. En dus kunnen we uit het waar zijn van A en van $A \rightarrow B$ concluderen, dat ook B waar is. We geven dit weer door het schema:

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$$

Tweede voorbeeld:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

Onderstel nu, dat $\neg A$ waar is en ook $A \vee B$ waar is. We bevinden ons dan noodzakelijk op de derde regel en op deze regel heeft B de waarde 1. Dus

$$\frac{\neg A \qquad A \vee B}{B}$$

Uit deze tabellen kunnen we ook aflezen, dat

$$\frac{A}{A \vee B}$$

Immers als A waar is, bevinden we ons op de eerste of op de tweede regel en op beide regels neemt $A \vee B$ de waarde 1 aan.

We zien dus nu, op welke wijze de waardetabellen ons in staat stellen regels voor het deduceren op te stellen. Tevens zien we het essentiële verschil tussen $A \rightarrow B$ en $\frac{A}{B}$. Mogelijk ten overvloede vatten we het verschil nog eens samen.

$A \rightarrow B$ is niets anders dan een uitspraak, die door toepassing van de operatie ‚$\rightarrow$' uit de beide uitspraken A en B verkregen is. Daarentegen wordt met $\frac{A}{B}$ bedoeld, dat er tussen de uitspraken A en B een bepaalde relatie geldt, namelijk de relatie die zegt, dat als A een ware uitspraak is ook B een ware uitspraak is.

Nadat we nu dus het essentiële verschil tussen $A \rightarrow B$ en $\frac{A}{B}$ vastgesteld hebben, willen we trachten het verband tussen beide op te sporen. Maar voordat we dit kunnen, moeten we de gedachtengang even onderbreken.

Onder de uitspraken zijn er, die de bijzonderheid vertonen, dat hun waardetabel uit uitsluitend 1'en bestaat. Voorbeelden hiervan zijn:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	A	B	$A \vee B$	$A \rightarrow (A \vee B)$
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
			0	1	1	1
			0	0	0	1

Dat wil zeggen: welke uitspraak we ook voor A kiezen, altijd is $A \vee \neg A$ een ware uitspraak. En welke uitspraken we voor A en B ook kiezen, altijd is $A \rightarrow (A \vee B)$ een ware uitspraak. Dergelijke uitspraken heten tautologieën. De praktische betekenis van de tautologieën is, dat ze in elk deductieproces in willekeurig aantal aan de premissen mogen worden toegevoegd.

We keren nu terug naar het verband tussen $A \rightarrow B$ en $\frac{A}{B}$. Onderstel dat $\frac{A}{B}$. Dat wil zeggen: als A de waarheidswaarde 1 heeft, dan heeft ook B de waarheidswaarde 1. Er zijn voor de waarheidswaarden van A en B dan nog slechts drie mogelijkheden open, nl.

A	B
1	1
0	1
0	0

En in al deze drie gevallen heeft $A \rightarrow B$ de waarde 1. Dat wil zeggen, dat $A \rightarrow B$ een tautologie is.

Ter toelichting eerst een voorbeeld.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Om te beginnen zien we hieruit, dat

$$\frac{A \wedge B}{A \vee B}.$$

Want in elke regel, waar $A \wedge B$ de waarde 1 heeft (en dat is alleen in de bovenste regel), heeft ook $A \vee B$ de waarde 1. Het is dus uitgesloten, dat $A \wedge B$ de waarde 1 heeft en $A \vee B$ de waarde 0. Blijven dus alleen over de mogelijkheden, dat $A \wedge B$ en $A \vee B$ als waarden hebben resp. 1 en 1, 0 en 1, 0 en 0. Deze drie mogelijkheden doen zich hier zelfs alle drie voor. In al deze gevallen krijgt $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ de waarde 1. Deze uitspraak is dus een tautologie.

Een tweede voorbeeld kunt U zelf in het voorgaande terugvinden. We hebben namelijk reeds gezien, dat $\frac{A}{A \vee B}$ en dat $A \rightarrow (A \vee B)$ een tautologie is.

Onderstel nu omgekeerd, dat $A \rightarrow B$ een tautologie is. Omdat $A \rightarrow B$ alleen maar de waarheidswaarde 1 aan kan nemen, zijn er voor A en B slechts de volgende mogelijkheden:

A	B
1	1
0	1
0	0

Hieruit zien we: als A de waarheidswaarde 1 heeft, dan heeft B eveneens de waarheidswaarde 1. Maar dan geldt $\frac{A}{B}$.

Hiermee is bewezen:

Stelling. Als $\frac{A}{B}$, dan is $A \rightarrow B$ een tautologie, en omgekeerd.

De neiging om ‚$A \rightarrow B$' te lezen: ‚als A waar is, dan is B waar' moeten we dus onderdrukken. Mocht echter $A \rightarrow B$ een tautologie zijn, dan kunnen we concluderen, dat nu inderdaad geldt: als A waar is, dan is B waar.

Meer algemeen kunnen we op dezelfde manier aantonen:

Stelling. Als $\dfrac{A_1 A_2 \ldots A_k}{B}$, dan is $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow B$ een tautologie, en omgekeerd.

Deze stelling staat bekend onder de naam deductietheorema. Uiteraard hebben we het hier slechts voor een zeer eenvoudig geval bewezen. We hebben namelijk alleen beschouwd uitspraken als geheel (zoals A, B) en uitspraken, die daaruit door toepassing van bepaalde logische operaties verkregen worden (zoals $A \wedge B$). Van een onderzoek naar de verdere interne structuur van de uitspraken hebben we afgezien. Het deel van de logica, waarmee we ons hebben beziggehouden, noemt men de propositielogica.

Hiermee ben ik aan het eind gekomen van datgene, wat ik over de propositielogica wilde vertellen. Blijft tot slot nog de ietwat pijnlijke vraag naar de mate van wetenschappelijkheid van deze drie artikeltjes.

Het is ieder zonder twijfel bekend, dat op de lagere school en later op de middelbare school braaf gerekend wordt. Aanvankelijk wordt in concreto met getallen omgesprongen; later bezinnen we ons op de regels van dit rekenen. Maar noch op de lagere school, noch op de middelbare school bedrijven we echte wetenschappelijke rekenkunde. Eerst als we ons in de geaxiomatiseerde rekenkunde van Peano of in de intuïtionistische fundering van het getalbegrip verdiepen, kunnen we beweren ons met echte wetenschappelijke rekenkunde bezig te houden. Hetgeen echter geenszins wil zeggen, dat alle moeite op de lagere en middelbare school tevergeefs is geweest. Integendeel, zonder de daar verkregen kennis zou het ondoenlijk geweest zijn beschouwingen als die van Peano of van Brouwer te volgen. Men moet zich eerst ter dege met het te axiomatiseren terrein van onderzoek vertrouwd maken, wil men tot axiomatisering kunnen overgaan of de axiomatisering kunnen begrijpen.

Zo is de situatie ook hier. Wil de propositielogica tot een volgroeide wetenschap worden, dan is het noodzakelijk, dat zij op de een of andere wijze, b.v. axiomatisch, gefundeerd wordt. Men kan echter geen wetenschap nauwkeurig funderen, zolang men geen helder inzicht heeft in datgene waaraan men een verantwoord fundament wenst te geven. Men moet het bovenstaande dan ook zo begrijpen, dat uiteengezet is op voorwetenschappelijke wijze, wat de termen en methoden uit de propositielogica behelzen. Daarmee is de weg geëffend om tot wetenschappelijke fundering en ontwikkeling van deze wetenschap te komen. De verkregen kennis wordt dan geordend en er kan aanleiding zijn hier en daar wat ‚bij te schaven'. Maar ‚wijzer' wordt men er niet door. Door het bovenstaande heeft men dus voldoende inzicht verkregen om de propositielogica te begrijpen, om deze te kunnen toepassen en ten slotte om een wetenschappelijke fundering ervan met vrucht te kunnen volgen.

G. KROOSHOF

LID VAN DE REDACTIE VAN EUCLIDES

Van de secretaris van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. is bericht ontvangen, dat de heer G. Krooshof te Groningen bereid is in de redactie van Euclides zitting te nemen namens de Wiskundewerkgroep. Door dit besluit is nu overeenkomstig de in 1962 gemaakte afspraken het aantal redactieleden voor Wimecos, Liwenagel en de Werkgroep opvolgend op 4, 2, 2 gebracht.

We heten de heer Krooshof heel hartelijk welkom in ons midden.

Ieder die kennis heeft genomen van het werk dat de heer Krooshof tot dusver op mathematisch-redactioneel gebied heeft verzet, eerst als redacteur van het „Mededelingenblad" van de Werkgroep en vervolgens als lid van de redactie van ons jongerentijdschrift „Pythagoras" dat hij in korte tijd tot zo grote bloei heeft helpen brengen, zal begrijpen dat we verheugd zijn dat de heer Krooshof ook aan ons maandblad „Euclides" zijn beste krachten wil wijden.

Namens de Redactie:
JOH. H. WANSINK

VERSCHEIDENHEDEN

door

PROF. DR. O. BOTTEMA

(Delft)

LVI. Euler, altijd weer Euler.

S. C. van Veen heeft in een fraai opstel, verschenen in het aan Wijdenes gewijde Jubileumnummer van het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (50, 1962–63, 243—254) een elementaire berekening van het getal π gegeven door middel van een scherpzinnige verbetering van de zogenaamde methode der isoperimetrische veelhoeken, die op naam staat van Chr. Schwab (1813). Daarbij wordt niet, zoals bij Archimedes een rij regelmatige n-hoeken beschouwd (voor toenemende waarde van n) die alle dezelfde om- of ingeschreven cirkel hebben, maar elke volgende veelhoek wordt zodanig bepaald dat hij dezelfde *omtrek* heeft als de vorige. Dat kan door een eenvoudige constructie gebeuren en de figuur geeft aanleiding tot een benaderingswijze van π, die in 1882 door Rouché verbeterd, thans door van Veen is geperfectioneerd.

Uit belangstelling voor het artikel maken wij hier, zonder op de berekening zelf in te gaan, een enkele opmerking van historische aard.

Als voorgangers van Schwab in de toepassing der bedoelde methode worden door van Veen vermeld Cusanus en Descartes. Wat de laatste aangaat zal gedoeld zijn op de korte notitie *Circulo quadratico*, die het eerst verschenen is in een serie wiskundige fragmenten, die onder de titel *Excerpta ex. MSS. R. Des-Cartes* het laatste gedeelte uitmaakt van de *Opuscula posthuma, physica et mathematica*, verschenen te Amsterdam in 1731, meer dan tachtig jaar na de dood van de auteur. De *Excerpta* zijn onder meer herdrukt in *Oeuvres de Descartes*, éd. Ch. Adam et P. Tannery, Tome X (Paris,1908) en de genoemde notitie vindt men op p. 304–305. Zij beslaat slechts enkele regels, bevat geen berekening, maar de figuur van een vierkant waar tegenaan voortdurend volgens een bepaald procédé rechthoeken worden geplaatst en wel zodanig dat een veranderlijk lijnstuk in de figuur gelijk is aan de diameter van de ingeschreven cirkel van opvolgend een vierkant, achthoek, zestienhoek enz., die alle dezelfde omtrek hebben; de limiet van het lijnstuk is de diameter van *de cirkel* met deze zelfde omtrek.

Het principe van de isoperimetrische methode is dus duidelijk herkenbaar, maar deze is hier gericht op een grafische, niet op een numerieke oplossing. In de *Excerpta* houdt ook een andere notitie, *Polygonorum inscriptio* (l.c. p. 285–289) zich met de kwadratuur bezig, maar voor zover ik zie, is daarbij niet van isoperimetrie sprake.

Wij komen nu tot de man, wiens naam in onze titel is vermeld en wiens veelzijdigheid vrijwel altijd het vermoeden bevestigt, dat hij er wel bij zal zijn geweest. Euler werd door de bovengenoemde korte notitie geleid tot de bijdrage *Annotationes in locum quendam* Cartesii *ad circuli quadraturam spectantem* in de mededelingen van de Academie van St. Petersburg (*Novi commentarii*, 8(1760/1), 1763, p. 157–168), die herdrukt is in het *vijftiende* deel van de *eerste* serie van zijn verzamelde werken (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Leipzig en Berlijn, 1927, p. 1–15, art. 275). Hij heeft de *Excerpta* gelezen, neemt de figuur van Descartes over, citeert de begeleidende tekst en werkt de gedachte nader uit, zegt hij, omdat het te betreuren zou zijn als deze fraaie en elegante constructie in vergetelheid zou geraken.

Euler beschouwt eerst de relatie tussen een regelmatige n-hoek en een $2n$-hoek, als zij isoperimetrisch zijn en wel aan de hand van een figuur die overeenkomt met fig. 1 van van Veen.

Daarna bewijst hij de juistheid van de constructie van Descartes. In het vervolg van het artikel worden daaruit een aantal analytisch geformuleerde stellingen afgeleid; wij voegen er dadelijk aan toe, dat Euler deze niet gebruikt om het getal π numeriek te benaderen.

Het is uiteraard niet de bedoeling om hier van het opstel een samenvatting te geven. Wij merken op dat Euler voor de rij van lijnstukken uit de figuur van Descartes, die hij opvolgend a, b, c. . . . noemt, de volgende recursieformules afleidt:

$$b(b-a) = \tfrac{1}{4}a^2,\ c(c-b) = \tfrac{1}{4}b(b-a),\ d(d-c) = \tfrac{1}{4}c(c-b), \ldots$$

De aldus gevormde rij heeft als limiet $\dfrac{4a}{\pi}$. Onmiddellijk hangen daarmee betrekkingen samen zoals

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{4}{\pi}$$

en de generalisatie

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2^n} = \frac{1}{\varphi} - 2 \cot 2\varphi$$

die een indruk geven van de beschouwingen waartoe de isoperimetrische methode Euler heeft geïnspireerd.

Het is mij niet bekend of Schwab van het werk van zijn grote voorgangers heeft geweten. Ook na hem is de methode nog wel opnieuw ontdekt, o.a. in een met initialen ondertekend artikel in de *Nouvelles Annales des Mathématiques* (Série 2, Tome 3, 1864, p. 310); te zelfder plaatse (p. 458) wordt op het vroegere werk van Schwab gewezen, terwijl dan Catalan de discussie afsluit (p. 545), toevoegend *un détail curieux et probablement peu connu*, namelijk dat de methode van Descartes afkomstig is en hij meent zich te herinneren er ook bij Euler over te hebben gelezen.

In de monografie van Rudio van 1892, door van Veen geciteerd wordt wel over Euler's bemoeiïngen met de cirkelkwadratuur gesproken (p. 46–53), maar de isoperimetrische methode wordt niet vermeld. Daarentegen wijdt Stäckel er in zijn opstel *Eulers Verdienste um die elementare Mathematik* (Math. u. naturw. Unterricht 28, 1907, 300–307) enkele regels aan, daarbij ook een goniometrische identiteit citerend als waarvan boven sprake was.

Wij eindigen met enkele biografische bijzonderheden over Schwab, ontleend aan *Exercises de Géométrie* par F.G.-M., 4ième éd. (Tours-Paris, 1907, p. 575). Hij werd in 1765 te Mannheim geboren, maar verliet in 1793 voorgoed zijn vaderland en was later *citoyen français*. Zijn boek over vlakke meetkunde verscheen in 1813 te Nancy; de auteur overleed aldaar op 23 november van het zelfde jaar.

BOEKBESPREKING

H. Sagan, *Integral and Differential calculus*, John Wiley & Sons inc., Londen, 1962, 329 blz., prijs 45/—.

Schrijver behandelt de differentiaal- en integraalrekening, uitgaande van de onderstelling, dat men slechts een elementaire algebrascholing achter de rug heeft.

In hoofdstuk I vindt men: functies, grafieken, continuïteit en ook uniforme continuïteit, versierd met vele uitgewerkte voorbeelden en vele opgaven van eenvoudige aard.

In hoofdstuk II: oppervlakten, waarbij door geschikte afspraken wordt afgeleid, dat de oppervlakte van een rechthoek (a, b) gelijk is aan ab. Aangezien het *integreren* vóór het differentiëren behandeld wordt, (dit zou ik tevens het kenmerkende van dit boek willen noemen), komen nu limieten, rijen en reeksen aan de orde, waarmede de bepaalde integraal kan worden besproken met behulp van boven- en benedensommen.

We zijn nu het boek halverwege door. Nu pas komt het bepalen van de afgeleide aan de orde (met bepalen van extreme waarden etc.) en men ontdekt tenslotte, dat integreren in verband staat met „antidifferentiëren". Het boek besluit met een groot aantal toepassingen, alle geheel uitgewerkt.

Burgers

R. A. Barnett and John N. Fujii: *Vectors*, John Wiley and Sons, Londen, 1962. 130 blz., prijs 25/—.

In vijf hoofdstukken wordt op elementaire wijze het rekenen met vrije en vaste vectoren besproken. Na elk hoofdstuk volgt een samenvatting van het behandelde, een groot aantal opgaven, verdeeld in algemene, meetkundige en natuurkundige toepassingen. De laatste 27 blz. bevatten aanwijzingen voor de oplossingen.

Behandeld worden: vectoroptelling, vermenigvuldiging van een vector met een skalair, het skalaire produkt, het vectorprodukt en de tripelprodukten: $a \cdot b \times c$, $a \times (b \times c)$ en $(a \times b) \times c$. In de opgaven komen ook meer gecompliceerde produkten voor. Het boekje eindigt met vectorvergelijkingen van krommen en oppervlakten en enkele vectorfuncties. Het geheel is m.i. geschikt voor de hogere klassen.

In een nieuwe druk mogen enkele zaken nog wel recht gezet worden. Om er enkele te noemen: op blz. 45 is in de rechtse figuur $-c$ i.p.v. c getekend, op blz. 109 komen liefst vier onjuistheden voor. Tweemaal leest men $a - b$ waar $a + b$ moet staan, eenmaal **AB** — **AC** waar **AC** — **AB** hoort te staan, bij no 6 is een kwadraat vergeten.

Voor degenen, die willen experimenteren een aardig boek.

Burgers

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, B. G. Teubner, Stuttgart 1962, 9de druk, 268 blz., DM 16.80, herzien en aangevuld door Prof. dr. Paul Bernays.

Deze 9de druk verschilt weinig van de voorgaande. Alleen de z.g. „Ergänzungen" in de supplementen zijn nieuw.

Het is een boek, dat in de boekenkast van een wiskundeleraar of wiskundestudent niet mag ontbreken.

Burgers

G. F. Simmons, *An introduction to Topology and Modern Analysis*, Mac Graw Hill—Londen, 1963, 69/6, 357 blz.

De titel doet vermoeden, dat het weinig zin heeft dit boek te bespreken in Euclides. Dit vermoeden is echter slechts ten dele juist. Voor de hoofdstukken 1, 2 en 8 zou ik n.l. toch de aandacht willen vragen.

In de eerste twee hoofdstukken worden op zeer bevattelijke wijze behandeld: verzamelingen, functies, equivalentie, het Schroeder-Bernstein-theorema, de bekende ijle, perfecte cantorse puntverzameling, de transfinite kardinaalgetallen, ordeningsrelaties en metrische ruimten. In elke paragraaf wordt eerst op bevattelijke wijze verteld, wat de bedoeling is van de te behandelen stof, zodat de steeds toenemende abstracties, geleidelijk worden ingevoerd. Zo wordt met enkele sprekende voorbeelden het begrip metrische ruimte verduidelijkt als een niet lege verzameling (als amorfe verzameling) waaraan een metriek is toegevoegd, voortgebracht door een norm-functie (wat een generalisatie is van de absolute waarde functie).

Convergentie en continuïteit worden aan de generalisaties aangepast. Wil men zich nog verder verdiepen in topologische ruimten, een amorfe verzameling A, waaraan een topologie T, (een klasse T van deelverzamelingen van A waarvan elke vereniging en elke eindige doorsnede weer tot T behoort) is toegevoegd. De sterkste topologie is die, die uit alle deelverzamelingen van A, de zwakste, die uit A zelf en $\emptyset$ bestaat.

Hoofdstuk 8 bespreekt algebraïsche systemen, groepen, ringen, quotiëntenringen en velden. Een bezwaar zou ik willen maken. Er zijn vele vraagstukken toegevoegd, een antwoordenlijst ontbreekt. In de tekst wordt herhaaldelijk voor een geheel of gedeeltelijk bewijs naar de opgaven verwezen. Deze methode maakt bestudering en zelfcontrole aanmerkelijk moeilijker.

De uitvoering is, zoals gewend, uitstekend. Het is dan ook geen goedkoop boek.

Burgers

J. M. Bocheński, *Philosophy, An Introduction*, D. Reidel, Dordrecht, 1962, 112 blz., *f* 9.75 (oorspronkelijke titel: Wege zum philosophischen Denken).

Het boek geeft de inhoud weer van een tiental radiovoordrachten, die door de auteur gehouden zijn voor de Beierse radio in 1958. De titels van de voordrachten zijn: Law, Philosophy, Knowledge, Truth, Thinking, Values, Man, Being, Society, The Absolute. Zonder twijfel zijn het voortreffelijke voordrachten geweest, zoals de naam van de schrijver al direct doet vermoeden. Vat men een dergelijk stel lezingen in een boek samen, dan krijgt men echter een geheel, dat veel meer bestemd is voor de belangstellende lezer dan voor de wetenschappelijke onderzoeker. In een kort bestek passeren zoveel onderwerpen in sneltreinvaart de revue, dat een meer dan oppervlakkige belangstelling hierdoor niet bevredigd kan worden.

P. G. J. Vredenduin

Dr. G. Bosteels, *Wiskunde vandaag*, De Sikkel N.V., Antwerpen, 1963, 116 blz., *f* 3.75.

Dit boekje is geen schoolboek, maar wel speciaal geschreven voor leerlingen van het Middelbaar onderwijs. Het is sterk toe te juichen, dat Bosteels zich de moeite gegeven heeft een boek te schrijven, dat dient om de belangstellende leerling de mogelijkheid te geven zich wat nader in de wiskunde te verdiepen. Het schrijven van een dergelijk boek is uitermate moeilijk, veel moeilijker dan het schrijven van een gewoon schoolboek. Van deze moeilijke taak heeft de schrijver zich voor een zeer groot deel op uitnemende wijze gekweten.

Zijn bedoeling is geweest iets duidelijk te maken van de structuur van de moderne wiskunde. Daartoe geeft hij een uitvoerige uiteenzetting van de logische structuur van beweringen, de structuur van een bewijs (waarbij hij zich wijselijk beperkt tot een uiteenzetting van de propositielogica), de leer van de verzamelingen, relaties en hun eigenschappen, ekwivalentierelaties, wiskundige structuren. Als voorbeeld van een wiskundige structuur kiest hij de groep en geeft een uitnemende behandeling van de betekenis van een groep, waarvan alleen de laatste drie bladzijden m.i. iets te moeilijk zijn. Daarna volgt nog een zeer korte opsomming van enkele andere structuren, zoals ring, lichaam, integriteitsgebied. Plaatsgebrek heeft de auteur genoodzaakt hier met summiere aanduidingen te volstaan.

Ik wil niet nalaten ook een enkel woord van kritiek te laten horen. De schrijver heeft getracht in kort bestek de lezer iets duidelijk te maken over de ontwikkelingsgang van het wiskundig denken (blz. 3—24 en blz. 51—57). Ik geloof, dat hij hier zijn lezers overschat heeft. Ik kan mij niet voorstellen, dat een leerling, die nog geheel leek op dit gebied is, deze pagina's kan verwerken.

Resumerend zou ik sterk willen aanbevelen dit boekje in de schoolbibliotheek een plaats te geven, maar het wel zelf even door te lezen, zodat men de lezer van advies kan dienen.

P. G. J. Vredenduin

Verzameling van mechanicavraagstukken voor het v.h.m.o., samengesteld door een Velines-commissie. J. B. Wolters, Groningen, 1963. *f* 0.75.

Onze natuurkunde-collega's pakken hun juist verworven mechanica-aanwinst voortvarend aan. Een commissie, samengesteld na een kleine hint van Wimecos, verzamelde een aantal vraagstukken op eindexamenniveau, waarbij „het fysische karakter van de mechanica meer op de voorgrond komt dan tot heden het geval was en waaronder ook vraagstukken voorkomen over mechanica-problemen in andere gebieden der natuurkunde".

De commissie had slechts weinig steun en presteerde het, voor het grootste deel zelf de vraagstukken te componeren. Het resultaat ligt voor mij en ik ben vol bewondering. Behalve de 51 afgedrukte vraagstukken noemt de commissie nog een 12-tal eindexamenvraagstukken, die hun waarde blijven behouden. Omgekeerd geef ik de commissie gaarne het complement, dat er van de 51 ook verscheidene zijn — en meer dan 12 — die in het verleden als uitstekende eindexamenvragen hadden kunnen gelden.

Bewondering van een mathematicus is in dit geval wat dubieus; ik vermeld daarom de mening van een tot oordelen zeer bevoegd fysicus, die ik ernaar vroeg. „Een uitstekende verzameling vraagstukken over moderne onderwerpen, waarvan de vraagstelling hier en daar nog wat beter gedefinieerd kan worden en waarin de antwoorden nog wat oneffenheden vertonen".

De heren drs. H. J. Stammer, drs. P. A. C. van Vianen, dr. J. Deknatel, dr. W. P. J. Lignac, drs. J. Ph. Steller en dr. Joh. H. Wansink hebben het onderwijs een goede dienst bewezen.

H. W. Lenstra

André Delachet, *La géometrie analytique*, collection „Que sais-je?" 1047. Presses universitaires de France, Paris, 1963. Prijs niet vermeld.

Dit is een inleiding in de analytische meetkunde in het kader van de modernisering van het wiskunde-onderwijs. Enige voorkennis van moderne algebra, van vectormeetkunde enz. is voor de studie ervan noodzakelijk. De auteur heeft zich veel moeite gegeven voor een goede logische opbouw en voor het leveren van correcte bewijzen van alle fundamentele resultaten. De hoofdstukken 1 t.e.m. 4 geven de beginselen van de meer klassieke analytische meetkunde in de taal van de moderne wiskunde. Het 5de en laatste hoofdstuk behandelt de affiene meetkunde. Het boekje bevat geen figuren.

H. W. Lenstra

John A. Peterson and Joseph Hashisaki, *Theory of Arithmetic*, 312 blz., ingeb. 53/—, John Wiley and Sons, New York-London.

Dit leerboek is de vrucht van een zesjarig experiment in de onderwijzersopleiding. Als we ons hiervan bij de lezing van het boek goed bewust blijven, groeit onze waardering voor het wiskundig peil waartoe een deel van het Amerikaanse onderwijzerscorps blijkt te kunnen stijgen. En we beseffen, hoezeer de wiskundige vorming van de Nederlandse onderwijzer bij de hier bedoelde Amerikaanse collega's nog achterstaat. Bij ons pleegt het ,,vakwetenschappelijk'' peil van de lagere-schoolonderwijzer beneden dat van het eindexamen h.b.s. of gymnasium te liggen. En de docent in de didactiek van het rekenen aan de kweekschool moet zijn didactische beschouwingen daardoor optrekken op een te zwak fundament. Didactische en pedagogische bespiegelingen krijgen eerst waarde als op de diverse gebieden de eigenlijke vakkennis reeds aanwezig is. Ze kunnen deze vakkennis nimmer vervangen.

In Euclides **37** (p. 198) werd geponeerd, dat de studie van de rekendidactiek volslagen onmogelijk is voor iemand die de te behandelen stof technisch niet beheerst. Ik onderschrijf dit oordeel en wil daar graag aan toevoegen, dat de rekendidactiek voor de onderwijzer dreigt te verstarren, als de wetenschappelijke vorming van zijn beoefenaars niet aan hogere eisen voldoet dan thans nog het geval is, als deze vorming niet modern georiënteerd is.

Het boek van Peterson en Hashisaki geeft ons van de rekenkunde een wetenschappelijk verantwoorde behandeling op universitair niveau, waarbij rekening gehouden wordt met de lezers voor wie het boek werd geschreven, een behandeling die toch een redelijke kritiek gunstig kan doorstaan.

Na een korte historische beschouwing worden verzamelingen en relaties behandeld en komen de systemen der natuurlijke getallen, der gehele getallen, der rationale getallen en der reële getallen aan de orde. Er wordt veel zorg besteed aan nauwkeurige definities, terwijl de grondbegrippen helder en eenvoudig uiteen worden gezet. De lezer wordt vertrouwd gemaakt met moderne wiskundige notaties. Eenvoudige klokvraagstukjes geven aanleiding tot behandeling van het twaalftallig stelsel en tot de beschouwing van nuldelers. Getallencongruenties worden summier behandeld.

Het slothoofdstuk ,,topics from geometry'' kan me het minst bekoren, omdat hier te vaak beweringen zonder bewijs een plaats vinden.

Elk hoofdstuk is voorzien van tal van voorbeelden en opgaven, terwijl aan het einde van elk hoofdstuk een lijst van verwijzingen naar andere studieboeken is opgenomen. Een uitvoerige index verhoogt de waarde van het geheel.

Ik beveel dit boek in het bijzonder aan de collega's die bij de onderwijzersopleiding zijn betrokken, gaarne aan.

Joh. H. Wansink

Ruel. V. Churchill, *Fourier Series and boundary value problems*, Mc. Graw-Hill, New York, 1963, (second edition), Prijs 52/6.

De tweede druk, die wezenlijk veranderd en uitgebreid is ten opzichte van de eerste, geeft een inleiding in de theorie van de fourierreeksen, voorzien van een aantal, niet te gecompliceerde, natuurkundige voorbeelden.

Uitgangspunt vormt de partiële differentiaalvergelijking; daarna komt een inleiding in de theorie van de ontwikkeling van functies naar orthogonale stelsels. Uitgewerkte voorbeelden vormen de fourierreeksen (trillende snaar, elastische staaf en warmtegeleiding in een staaf), vervolgens reeksen van de besselfuncties (warmte transport over cilinder, trillingen van een cirkelvormig membraan) en ten slotte legendrepolynomen (dirichletprobleem op de bol). Bij ieder onderwerp zijn vele opgaven. Naast de fourierreeksen vinden ook de fourierintegralen een plaatsje in dit boek.

F. van der Blij

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

108. We rangschikken de getallen 1, 2, . . ., n cyclisch. We beginnen te tellen bij 1 en schrappen de getallen om de andere. Als b.v. $n = 7$, schrappen we dus resp. de getallen 2, 4, 6, 1, 5, 3. Het getal 7 blijft over. Stel nu een algoritmus op om zonder de aftelling uit te voeren te vinden, welk getal overblijft.

109. Twee jongens en twee meisjes, Jan, Gerard, Jeanne en Marie, zitten samen thuis. Ze overleggen of ze al of niet naar de bioscoop zullen gaan. We nemen aan, dat voor elk van hen slechts twee mogelijkheden openstaan: thuis blijven en naar de bioscoop gaan. Dat het niet alles pais en vree tussen hen is, blijkt uit het volgende gesprek.

„Als Jan thuis blijft, ga ik," zei Gerard, „tenzij Jeanne ook gaat."

„Als (minstens) een van de twee jongens naar de bioscoop gaat, blijf ik thuis," zei Marie.

„Laten we maar samen gaan," zei Marie tegen Jeanne ten slotte. „Dan blijf ik thuis," was het antwoord.

Gaat Jeanne nu naar de bioscoop of blijft ze thuis? En Marie?

Bij voorkeur op te lossen door middel van waarheidstabellen.

OPLOSSINGEN

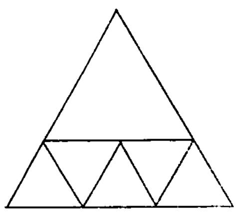
(zie voor de opgaven het vorige nummer)

105. Een gelijkzijdige driehoek kan in vier (congruente) gelijkzijdige driehoeken verdeeld worden. Als een verdeling in k gelijkzijdige driehoeken mogelijk is, dan is een verdeling in $k + 3$ gelijkzijdige driehoeken dus ook mogelijk. We kunnen dus volstaan met te onderzoeken wat het kleinste getal is in de rijen

$$n = 1,\ 4,\ 7,\ 10, \ldots,$$
$$n = 2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots,$$
$$n = 3,\ 6,\ 9,\ 12, \ldots,$$

waarvoor de verdeling in n delen mogelijk is.

Het blijkt dan, dat alleen een verdeling in 2, 3 en 5 delen onmogelijk is. In nevenstaande figuur vindt men een verdeling in 6 delen. Door een onderrand van 7 i.p.v. 5 driehoeken te kiezen, krijgt men een verdeling in 8 delen.



106. Alle paarden van rij 1 kunnen door een paardesprong naar rij 3 verplaatst worden zo, dat ze op verschillende velden terecht komen. Op rij 1 en 3 tezamen kunnen dus maximaal 8 paarden staan. Hetzelfde geldt voor de rijen 2 en 4, 5 en 7, 6 en 8. In totaal kunnen dus niet meer dan 32 paarden geplaatst worden.

107. Stel de grondtallen x en y, dan moet: (1) $x(4x + 9) = y(2y + 1)$; we laten de voorwaarde dat x of y priem is, weg. Stel: (2) $(x, y) = d$; $x = da$; $y = db$; $(a, b) = 1$. Dan gaat (1) over in: (3) $a(4ad + 9) = b(2bd + 1)$; daar $(a, b) = 1$, moet a een deler zijn van $2bd + 1$. Stel: (4) $2bd + 1 = az$; dan volgen direct: (5) $(d, z) = 1$, (6) az is oneven en (7) $b = (az - 1) : 2d$. Dit laatste vullen we in (3) in en krijgen na een kleine berekening:

(8) $a = \dfrac{z + 18d}{z^2 - 8d^2}$; nu is $z^2 - 8d^2 = (z + 18d)(z - 18d) + 316\, d^2$.

Een gemene deler c van teller en noemer van (8) is dus ook een deler van $316\, d^2$; nu kan c geen deler zijn van d, daar uit $c|d$ en $c|z + 18d$ zou volgen $c|z$, zodat $(d, z) > 1$, in tegenspraak met (5). De GGD van teller en noemer van (8) is gelijk aan de noemer, omdat a geheel is. Dus moet $z^2 - 8d^2$ een deler zijn van 316. Uit (6) volgt dat z oneven is, zodat $z^2 - 8d^2$ alleen maar gelijk kan zijn aan 1 of 79. Daar echter $z^2 \equiv 1 \pmod 4$ en $79 \equiv -1 \pmod 4$, kan $z^2 - 8d^2$ niet gelijk zijn aan 79. Er blijft dus over: $z^2 - 8d^2 = 1$; stel nog $2d = u$, dan komt er: (9) $z^2 - 2u^2 = 1$. Om deze ,,vergelijking van Pell'' op te lossen, schrijven we hem aldus: (10) $(z + u\sqrt{2})(z - u\sqrt{2}) = 1$. We stellen: $p = z + u\sqrt{2}$ en $\bar{p} = z - u\sqrt{2}$ (u en z natuurlijke getallen).

Laten V en $\bar{V}$ verzamelingen voorstellen van *die* $p \in V$ en $\bar{p} \in \bar{V}$, waarvoor geldt $p \cdot \bar{p} = 1$. Daar $p > \bar{p}$ en $p \cdot \bar{p} = 1$, volgt $p > 1$ en $\bar{p} < 1$. Direct is te zien dat het kleinste getal van V is: $e = 3 + 2\sqrt{2}$. Tot V behoren dan in ieder geval de getallen e^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, daar $e^n \cdot \bar{e}^n = 1$ en $e^n > 1$. We bewijzen nu dat er geen andere getallen tot V behoren. Stel n.l. $p = z + u\sqrt{2} \neq e^n$ voor elke n. Dan is er een n te vinden zodat $e^n < p < e^{n+1}$; dus: $1 < p \cdot \bar{e}^n < e$.

Nu is $p \cdot \bar{e}^n \cdot \bar{p} \cdot e^n = 1$ en $p \cdot \bar{e}^n > 1$; dus $p \cdot \bar{e}^n \in V$; dit getal zou kleiner dan e zijn; dit is onmogelijk omdat e het kleinste getal is.

De oplossingen van (9) volgen dus alle uit: $z + u\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$.

B.v. $n = 1$; $z = 3$; $u = 2$; $d = 1$; $a = 21$; $b = 31$; $x = 21$; $y = 31$.
$n = 2$; $z = 17$; $u = 12$; $d = 6$; $a = 125$; $b = 177$; $x = 750$; $y = 1062$.
$n = 3$; $x = 25515$; $y = 36085$. Enz.

P. Bronkhorst

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

VIJFTIENDE CONGRES VAN LERAREN IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPEN.

Op maandag 6 april 1964 te Utrecht. Programma voor de algemene bijeenkomsten en de wiskunde-sectie (Botanisch Laboratorium, Lange Nieuwstraat 106)

10.30: Prof. Dr. G. P. Baerends, *Taak en mogelijkheden van de biologie in het tijdperk der techniek.*

12.15: Prof. Dr. R. Timman, *De betekenis van de wiskunde voor de moderne industrie.*

15.00: Dr. C. P. S. van Oosten, *Enkele vaak toegepaste wiskundige methodieken.*

16.15: Prof. Dr. H. J. Groenewold, *Invloeden van natuurwetenschappen op leven en denken van de mens.*

Alle leraren ontvingen bericht. Het volledige programma is verkrijgbaar bij de congres-secretaris, J. F. Hufferman, Ch. de Bourbonlaan 64, Zeist.