EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

VI — 1 MAART 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
Drs. H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;
Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. H. TURKSTRA, Hilversum;
Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE TWEEDE NEDERLANDSE WISKUNDE-OLYMPIADE (1963)

door

Dr. JOH. H. WANSINK

(Arnhem)

1. De organisatie van de Wiskunde-Olympiade werd in 1963 evenals in 1962 mogelijk gemaakt door een extra-subsidie van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen aan de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

2. Voor de achtergronden en voor de doelstelling van de wedstrijden wordt verwezen naar het verslag over de eerste Nederlandse Wiskunde-Olympiade, opgenomen in Euclides, 38e jaargang, p. 161—178.

3. We laten hier een overzicht volgen van diverse activiteiten die in verband hebben gestaan met de in 1963 georganiseerde wedstrijden. De adviescommissie voor de Wiskunde-Olympiade-1963, die op 11 januari 1963 door de voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, Prof. Dr. H. Freudenthal, te Utrecht werd geïnstalleerd, was als volgt samengesteld:

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Eindhoven, voorzitter,
Prof. Dr. H. J. A. Duparc, Delft,
Drs. J. H. van Lint, Zwolle,
Dr. P. G. J. Vredenduin, Oosterbeek.

De taak van de commissie bestond uit het samenstellen van de opgaven voor de beide ronden, de beoordeling van het ingezonden werk en de vaststelling van de einduitslag.
Het ligt in de bedoeling van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde de zittingsduur voor de leden van de Adviescommissie op twee jaar te blijven stellen. Ieder jaar treden er dan twee leden af, waardoor het eventuele gevaar van verstarring in de op te geven typen van vraagstukken tot een minimum wordt gereduceerd, terwijl toch de continuïteit in het werk van de Adviescommissie kan worden bewaard. De bedoeling van de vraagstukken die in de wis-

kundewedstrijden zullen worden opgegeven, blijft bij voortduring de toetsing niet van training en techniek, maar van inzicht en inventief vermogen van de deelnemers.
Op 25 januari 1963 werd er een circulaire gezonden aan alle scholen voor v.h.m.o. in Nederland, die een B-afdeling gymnasium of h.b.s. bezitten. In deze circulaire werd aan rectoren, directeuren en wiskunde-docenten gevraagd aan de organisatie van de wedstrijden hun onontbeerlijke medewerking te willen verlenen.
Opgaven tot deelname aan de Wiskunde-Olympiade konden worden ingediend tot 1 maart 1963. Op deze datum bleek het aantal adspirant-deelnemers ruim 3400, verdeeld over 270 scholen. Op 2 maart 1963 werd er een tweede circulaire aan de deelnemende scholen verzonden. Hierin werden mededelingen gedaan over de toezending van de pakketten met opgaven door de Staatsdrukkerij en over de bij de eerste ronde in acht te nemen regels van orde. Aanbevolen werd dezelfde regels te volgen die gelden voor de eindexamens gymnasium en h.b.s..
Aan de eerste ronde, die plaats had op donderdag 2 mei, werd deelgenomen door 3198 leerlingen van 268 scholen. Deze deelname was verheugend groot, 95 % van die in 1962. De graad van moeilijkheid der in 1962 opgegeven vraagstukken bleek geenszins een domper gezet te hebben op het algemene enthousiasme.

Het gemaakte werk werd door de wedstrijdleiders van de deelnemende scholen gewaardeerd en beoordeeld en voor 20 mei toegezonden aan het lid van de Adviescommissie, Prof. Duparc te Delft. De Adviescommissie besloot de deelnemers die na revisie van het werk door de Commissie over minstens $17\frac{1}{2}$ punt beschikten van de 32 die er maximaal behaald konden worden, tot de tweede ronde toe te laten.
Op 20 juni werd de uitslag van de eerste ronde aan de scholen bekend gemaakt. Aan de 60 namen van de topploeg werd later nog een 61e toegevoegd om een deelnemer niet de dupe te laten worden van de te late inzending van zijn werk door de desbetreffende school.
Eind augustus ontvingen de 61 kandidaten voor de tweede ronde bericht over de wijze, waarop de wedstrijd op dinsdag 1 oktober zou worden georganiseerd. Deze wedstrijd kon dank zij de medewerking van de directeur van de Rijkshogereburgerschool te Utrecht, Dr. W. J. Thijssen, weer in deze centraal gelegen school plaats hebben. De deelnemers werden van 11 tot 12 uur in het schoolgebouw ontvangen en namen vrijwel allen deel aan de gemeenschappelijke maaltijd in het Universiteitshuis, Lepelenburg 1,

Utrecht. Toezicht op het werk der deelnemers werd uitgeoefend door de heren H. de Jong, Utrecht, J. H. N. de Jongh, Gouda, J. F. Hufferman, Zeist, J. W. Koning, Zeist en J. H. Wansink, Arnhem.

Eind oktober ontvingen de prijswinnaars bericht dat ze tot de topploeg van tien behoorden en begin november werden hun namen ook aan alle deelnemers aan de tweede ronde en aan hun scholen bekend gemaakt. De rangorde van de tien winnaars bleef hierbij echter nog geheim.

De prijsuitreiking had plaats op vrijdag 15 november in het gebouw van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, Nieuwe Uitleg 1, Den Haag door de directeur-generaal van het ministerie, Mr. J. G. M. Broekman. Deze reikte de prijzen uit die bestonden uit een of meer wiskunde-boeken benevens een boekenbon. De directeur-generaal voegde hieraan nog een fraai uitgegeven boekje toe getiteld: „*Waar men vroeger kanonnen goot...*", een boekje over de geschiedenis van de gebouwen van het ministerie aan de Nieuwe Uitleg. Ook ontvingen de prijswinnaars nog een gedrukte kaart, waarop hun naam en rangnummer stonden aangegeven.

Bij de plechtigheid ten departemente waren aanwezig:
de inspecteur-generaal van het onderwijs, Mr. Ir. M. Goote, de chef van de hoofdafdeling v.h.m.o., Dr. J. A. A. Verlinden, de inspecteurs van het v.h.m.o., Dr. J. M. van Buijtenen, Dr. H. A. Gribnau, Drs. J. Groen, Dr. D. N. van der Neut, de voorzitter van de Adviescommmissie Prof. Dr. N. G. de Bruijn en het lid van deze commissie Dr. P. G. J. Vredenduin. Verder behalve de prijswinnaars zelf hun ouders en tal van docenten.

De leiding van de bijeenkomst berustte bij Prof. Dr. H. Freudenthal, die allen die op enigerlei wijze aan het slagen van de wedstrijden of aan de slotbijeenkomst hadden medegewerkt hartelijk dankte. De dank der ouders werd vertolkt door Ir. H. 't Hooft uit Den Haag, die gewaagde van het vele werk dat verzet moest worden om de Wiskunde-Olympiade tot een goed einde te brengen.

Eind december werd het verslag van de Wiskunde-Olympiade-1963 aan Euclides ter plaatsing aangeboden. De Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde besloot voordrukken van dit verslag aan alle deelnemende scholen te doen toekomen.

Met ingang van 1964 werd de secretaris-penningmeester van de Wiskunde-Olympiade Dr. Joh. H. Wansink, opgevolgd door Drs. M. D. Bos, leraar aan de rijkshogereburgerschool te Amersfoort.

4. *Waardering van het gemaakte werk*

a. Een steekproef uit bijna 20 % van het ingezonden werk van de eerste ronde leverde de volgende puntenverdeling op.

max. 0 punten:	60 deelnemers	13—14 punten:	14 deelnemers
1— 2 punten:	72 deelnemers	15—16 punten:	9 deelnemers
3— 4 punten:	132 deelnemers	17—18 punten:	7 deelnemers
5— 6 punten:	108 deelnemers	19—20 punten:	2 deelnemers
7— 8 punten:	110 deelnemers	21—22 punten:	3 deelnemers
9—10 punten:	58 deelnemers	23—24 punten:	3 deelnemers
11—12 punten:	37 deelnemers	25—26 punten:	1 deelnemer

Het gemiddelde puntental voor deze steekproef van meer dan 600 deelnemers bedroeg 5,9 op een bereikbaar maximum van 32.

In 1962 was het gemiddelde 18,0 punten op een bereikbaar maximum van 120. Dit betekent voor 1963 een stijging van ongeveer 23 % van het gemiddelde vergeleken bij 1962.

Het gemiddelde puntental behaald door de 61 deelnemers aan de tweede ronde bedroeg 20,7 op een bereikbaar maximum van 50,

In 1962 was dit gemiddelde 33,3 op een bereikbaar maximum van 90. Dit betekent hier een stijging van 12 % vergeleken bij 1962.

b. De maxima van de deelnemende scholen voorzover de resultaten door de scholen werden doorgegeven.

0— 4 punten:	2 scholen	17—20 punten:	44 scholen
5— 8 punten:	36 scholen	21—24 punten:	21 scholen
9—12 punten:	97 scholen	25—28 punten:	8 scholen
13—16 punten:	49 scholen	29—32 punten:	1 school

Het gemiddelde maximum bedraagt 14, d.i. in procenten van het theoretisch maximum (32): 44.
In 1962 bedroeg het gemiddeld maximum 39, dat was in procenten van het theoretisch maximum (120) : 33.
Ook hier valt een stijging van de behaalde punten te constateren in vergelijking tot 1962 en wel een relatieve stijging van 33 %.

c. De volgorde in moeilijkheid van de in de eerste ronde opgegeven vraagstukken, beoordeeld naar de behaalde puntentallen, bedroeg:

(1) voor de ruim 600 deelnemers behorende tot de onder *a* vermelde steekproef:

1, 6, 3, 2, 5, 8, 4, 7;

(2) voor de 61 deelnemers aan de tweede ronde:

2, 1, 3, 6, 4, 5, 7, 8.

Opgave 1 bleek verreweg het gemakkelijkst; deze opgave sloot dan ook het nauwst aan bij de gangbare meetkundevraagstukken in het v.h.m.o.. Van de totaal toegekende punten moesten er 47 % worden toegekend aan vraagstuk 1 alleen. Voor de vraagstukken 2—8 waren de procenten van het totale puntental dat opvolgend aan deze nummers moest worden toegekend:

9, 13, 3, 4, 19, 2, 3

Voor de topploeg was de verdeling van de punten voor de vraagstukken van de eerste ronde als volgt:

17, 19, 15, 11, 9, 13, 9, 7.

d. De volgorde in moeilijkheid van de opgaven gesteld in de tweede ronde bedroeg:

(1) voor alle deelnemers aan de tweede ronde:

3, 5, 1, 2, 4;

(2) voor de 10 prijswinnaars:

3, 1, 5, 4, 2.

In onderstaande tabel zijn voor elk van de vijf opgaven de gemiddelde puntentallen aangegeven telkens voor groepen van 10 deelnemers; alleen de laatste groep telt er 11. De gekozen rangorde van de nummering 1—61 is die van de uitslag van de tweede ronde.

	I	II	III	IV	V
1—10	6,9	3,7	9,2	4,1	6,5
11—20	4,4	4,2	5.9	2,5	6,0
21—30	3,2	3,6	7,2	1,9	2,7
31—40	2,6	3,8	4,1	2,2	2,7
41—50	0,7	2,2	4,1	2,1	2,2
51—61	0,9	1,2	2,7	1,1	0,2

Bij de tweede ronde werd voor de opgaven 1—5 opvolgend door

18, 16, 35, 8, 30

deelnemers minstens de helft gehaald van het beschikbare puntental.

e. Uit de tabel op de volgende bladzijde kunnen we aflezen, welke de correlatie is tussen de rangorden op grond van de prestaties bij de eerste ronde en die bij de tweede ronde.

Er zijn tal van deelnemers, waarvoor het verschil in rangnummer bij de twee ronden behaald, opvallend groot is.

Voor de tien prijswinnaars waren de nummers in de beide ronden behaald als volgt:

(6, 1); (5, 2); (4, 3); (50, 4); (15, 7); (27, 5); (37, 6); (3, 11); (30, 8); (16, 9).

Van de topploeg van 10 uit de eerste ronde kwamen er slechts 4 in de groep van de prijswinnaars terecht. De beide deelnemers die in de eerste ronde met opvolgend 32 en 26 punten bovenaan stonden, vielen in de tweede ronde geheel af.

tweede ronde

eerste ronde	1—6	7—12	13—18	19—24	25—30	31—36	37—42	43—48	49—54	55—61
1— 6	3	1				1		1		
7—12			2	2			1			1
13—18		3			2		1			
19—24		1			1	1		3		
25—30	1	1	1		1		2			
31—36					1	2				3
37—42	1		1	2					2	
43—48				2			1	1	1	1
49—54	1		1		1	1			1	1
55—61			1			1	1	1	2	1

f. Voor de vaststelling van de einduitslag zijn zowel de prestaties uit de eerste ronde als die uit de tweede ronde in rekening gebracht. Bij het aantal punten behaald in de eerste ronde is het dubbele van het aantal punten van de tweede ronde opgeteld om de eindscore te bepalen. Het theoretisch maximum dat in de Wiskunde-Olympiade-1963 kon worden gehaald, werd daardoor 132.
De gewichten aan de beide ronden toegekend stemden hierdoor vrijwel overeen met die van 1962, toen voor de eindscore maximaal 30 punten uit de eerste ronde en 90 uit de tweede ronde konden worden behaald.

g. De leeftijden van de 61 deelnemers aan de tweede ronde liepen uiteen van 15 jaar en 0 maand tot 20 jaar en 0 maand. Van de 10 prijswinnaars was de jongste 15 jaar en 0 maand, de oudste 17 jaar en 7 maand.
Bij de groep van 61 was geen enkele deelnemer die ook in 1962 had medegedongen. Zo'n doublure zou theoretisch niet uitgesloten geweest zijn, namelijk in het geval waarin een leerling die tot de tweede ronde werd toegelaten het vorige jaar niet tot de hoogste klasse van zijn school zou zijn bevorderd. In 1963 waren 34 deelnemers van de groep van 61 leerling van een gymnasium of van een gymnasiale afdeling van een lyceum, 27 waren leerling

van een h.b.s. of van een h.b.s.-afdeling van een lyceum. Onder de 10 prijswinnaars waren 6 gymnasiasten en 4 h.b.s.'ers.

5. *Reacties op de aard der gestelde opgaven.*

Van tal van zijden werd waardering geuit over de aard van de opgaven voor de eerste ronde, die geprezen werden om hun originaliteit. Over de opgaven van de tweede ronde kwamen geen reacties binnen.

Zoals uit § 4, *b* blijkt, vertoont het gemiddelde maximum der deelnemende scholen een stijging t.a.v. dat van 1962. Zonder dat de betekenis van de voorselectie, uitgeoefend door de eerste ronde, in gevaar gebracht behoeft te worden, zullen m.i. in volgende jaren de opgaven zo gekozen kunnen worden dat de aangewezen stijging zich zal voortzetten.

6. *Einduitslag van de Wiskunde-Olympiade*-1963

De prijswinnaars zijn:

1. M. R. Best, 101 punten (76+25);
   Amsterdams lyceum, Amsterdam; oud 16 jaar, 2 maand; h.b.s.
2. G. 't Hooft, 98 punten (72+26);
   Dalton lyceum, Den Haag; oud 17 jaar, 2 maand; gymn.
3. W. H. Hesselink, 89 punten (63+26);
   Eerste Chr. lyceum, Zeist; oud 17 jaar, 7 maand; gymn.
4. H. G. M. Willems, 80 punten (62+18);
   Lyceum voor jongens, Venray; oud 17 jaar, 7 maand; gymn.
5. A. E. P. Veldman, 79 punten (57+22);
   Rijkshogereburgerschool, Groningen; oud 15 jaar, 0 maand; h.b.s.
6. S. van Beyeren, 77½ punt (58+19½);
   Zaanlands lyceum, Zaandam; oud 17 jaar, 5 maand; h.b.s.
7. J. L. Simons, 77 punten (58+19);
   Lodewijk Makeblijde College, Rijswijk (Z.H.);
   oud 17 jaar, 7 maand; h.b.s.
8. I. M. Kisch, 76 punten (50+26);
   Vossiusgymnasium, Amsterdam; oud 17 jaar, 4 maand; gymn.
9. G. N. J. Rolf, 75½ punt (56+19½);
   St. Nicolaaslyceum, Amsterdam; oud 17 jaar, 2 maand; gymn.
10. W. E. van der Vliet, 75 punten (53+22);
    Cartesiuslyceum, Amsterdam, oud 17 jaar, 0 maand; gymn.

De leeftijden die zijn opgegeven, gelden voor de datum van de tweede ronde.

Van de twee getallen tussen haken geeft het eerste het dubbele puntental van de tweede ronde aan, het laatste het puntental van de eerste ronde.

BIJLAGE I

Opgaven eerste ronde

Donderdag 2 mei, 14.00—17.00 uur

1. In een gelijkbenige driehoek ABC, waarvan $AC = 2\ AB$, ligt op de zijde BC tussen B en C een punt D zo, dat $AD = AB$.
   Bewijs dat de bissectrice van hoek CAD zwaartelijn van driehoek ABC is.

2. De getallen 1 tot en met 25 worden twee keer in een vierkant gerangschikt, en wel op de volgende manieren:

1	2	3	4	5		1	6	11	16	21
6	7	8	9	10		2	7	12	17	22
11	12	13	14	15		3	8	13	18	23
16	17	18	19	20		4	9	14	19	24
21	22	23	24	25		5	10	15	20	25

   Een getal staat zowel in de i-de regel van het eerste vierkant als in de j-de regel van het tweede vierkant.
   Druk dit getal in i en j uit.

3. Teken een driehoek ABC, waarvan $\angle A = 45°$ en $\angle B = 60°$.
   Construeer een punt D op de zijde AC en een punt E op de zijde BC zo, dat DE evenwijdig is met de buitenbissectrice van hoek C en dat $AD = DE + EB$.

4. Voor elk natuurlijk getal n is $2^{3^{2n}}$ een 17-voud plus 2. Bewijs dit.

5. Een vierkant $ABCD$ wordt verdeeld in negen congruente vierkanten door lijnen evenwijdig met de zijden. In elk van deze negen vierkanten plaatst men één van de getallen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zo, dat geen van deze getallen in meer dan één vierkant wordt geplaatst. Men stelt de eis, dat de som van de drie getallen in de vierkanten, waarvan een diagonaal langs AC valt, gelijk is aan 10, en dat dit eveneens het geval is met de som van de drie getallen in de vierkanten, waarvan een diagonaal langs BD valt.
   Op hoeveel manieren kunnen de getallen in de negen vierkanten worden geplaatst?

6. Gegeven is dat minstens één van de getallen $x + y$ en $|2x - y|$ gelijk is aan 3 en dat geen van beide kleiner is dan 3.
   Geef bij elk van de volgende uitspraken aan, of ze juist of onjuist is.
   a. Bij elke $x \geqslant 0$ is er een $y \geqslant 0$ zo, dat aan het gegeven voldaan is.
   b. Bij elke $a > 0$ is er een $x \geqslant 0$ en een $y \geqslant 0$ zo, dat $x + y = a$ en aan het gegeven voldaan is.
   c. Voor elke x en y, die aan het gegeven voldoen, geldt $x^2 + y^2 \geqslant 5$.
   d. Bij elke $a > 0$ is er een $x \geqslant 0$ en een $y \geqslant 0$ zo, dat $2x - y > a$ en aan het gegeven voldaan is.

7. Men noemt $\frac{t}{n}$ een echte breuk, als t en n natuurlijke getallen zijn en $\frac{t}{n} < 1$.
   Het aantal onvereenvoudigbare echte breuken met noemer n stelt men voor door $A(n)$.
   Voor welke waarden van n geldt $50 \leqslant n \leqslant 100$ en $A(n) + A(n+2) = 2n$?

8. In een plat vlak zijn twee concentrische cirkels met verschillende straal getekend. Het (gemeenschappelijke) middelpunt is niet gegeven. Men wil door meting

de oppervlakte van het tussen de cirkels gelegen gebied vinden. Men heeft daartoe alleen de beschikking over een liniaal en een meetlat.
Hoe voert men deze opgave uit?

N.B. De liniaal mag uitsluitend worden gebruikt om een rechte lijn door twee punten te trekken en de meetlat uitsluitend om de lengte van een lijnstuk te meten

BIJLAGE II

Opgaven tweede ronde

Dinsdag 1 oktober, 14.00—17.00 uur

1. In een plat vlak zijn gegeven een rechte lijn l en een niet op l gelegen punt P. Is er in dit vlak een zodanige cirkel, dat er op l meer dan drie verschillende punten S bestaan met de eigenschap, dat de middelloodlijn van PS aan de cirkel raakt? Licht Uw antwoord toe.

2. De rechte lijnen k en l kruisen elkaar loodrecht. De loodrechte snijlijn van k en l snijdt k in A en l in B. Men beschouwt alle rechte lijnen PQ (P op k en Q op l), die met AB een hoek van 45° maken.
   a. Bepaal de verzameling van de middens van de lijnstukken PQ.
   b. Als het middelloodvlak van zo'n lijnstuk PQ de lijn k snijdt in K en de lijn l in L, dan is $KL \geqslant PQ$. Bewijs dit.

3. Twintig getallen $a_1, \ldots, a_{20}$ voldoen aan

$$a_k \geqslant 7k \ (k = 1, \ldots, 20),$$
$$a_1 + \ldots + a_{20} = 1518.$$

   Bewijs dat er onder de getallen $k = 1, \ldots, 20$ niet meer dan zeventien zijn, waarvoor $a_k \geqslant 20k - 2k^2$.

4. Men beschouwt voor $n > 2$ de veelterm

$$(x^2 - x + 1)^n - (x^2 - x + 2)^n + (1 + x)^n + (2 - x)^n.$$

   a. Toon aan dat de graad van deze veelterm $2n - 2$ is.
   b. Men schrijft de veelterm in de gedaante

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{2n-2}x^{2n-2}.$$

   Bewijs dat

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n-2} = 0.$$

5. Men wil de zijvlakken van een kubus zo kleuren, dat elk vlak egaal gekleurd wordt. Er staan zes kleuren ter beschikking:

   rood, wit, blauw, geel, oranje, paars.

   Twee kubuskleuringen worden gelijk genoemd, als de een uit de ander ontstaat door een draaiing van de kubus.
   a. Hoeveel verschillende kubuskleuringen zijn er, waarbij zes kleuren worden gebruikt?
   b. Hoeveel verschillende kubuskleuringen zijn er, waarbij precies vijf kleuren worden gebruikt?

BIJLAGE III

Aanwijzingen voor deelnemers en wedstrijdleiders

Eerste ronde

Aan de aanwijzingen voor de deelnemers aan de eerste ronde ontlenen we het volgende.

Neem *vier vellen papier* en maak op het eerste vel de opgaven 1 en 2, op het tweede de opgaven 3 en 4, op het derde 5 en 6 en op het vierde 7 en 8.

Geef van opgave 2 alleen het antwoord, zonder toelichting.

Bij de opgaven 5 en 7 moet het antwoord gemotiveerd worden.

Bij opgave 6 moeten de vier vragen uitsluitend met „juist" of met „onjuist" worden beantwoord, zonder toelichting.

Voor elke opgave kan men maximaal 4 punten krijgen. Bij opgave 6 krijgt men voor elk goed antwoord 1 punt, voor elk fout antwoord —1 punt en voor elk ontbrekend antwoord 0 punten.

De hieronder volgende aanwijzingen voor de beoordeling en de antwoorden van de opgaven die een berekening vereisten, werden door de Adviescommissie aan de Wedstrijdleiders verstrekt.

1. Aantal punten afhankelijk van de kwaliteit van het antwoord.

2. Antwoord: $j + 5(i - 1)$.
   Goed: 4 punten,
   Fout: 0 punten.

3. Voor een juiste en duidelijke uitvoering van de constructie: 4 punten.
   Een bewijs van de juistheid van de constructie of van het feit, dat uit de gegevens het bestaan volgt van een lijnstuk DE, dat aan de vraag voldoet, behoeft niet gegeven te worden.

4. Aantal punten afhankelijk van de kwaliteit van het antwoord.
   Uitspraken als „$(17v + 2)^9$ is een 17-voud $+ 2^9$" behoeven niet bewezen te worden. Als een bewijs op volledige inductie berust, is het geen vereiste, dat dit expliciet wordt vermeld. Voldoende is, dat men ingezien heeft, dat het resultaat stap voor stap gevonden kan worden.

5. Het getal in het middelste vierkant kan zijn 1, 2, 3, 5. Men vindt dus $(3 + 1 + 1 + 1)\ (4 \cdot 2)\ (4 \cdot 3 \cdot 2) = 1152$ manieren, waarop de getallen in de vierkanten kunnen worden geplaatst.
   Goed: 4 punten,
   antwoord $(3 + 1 + 1 + 1)\ (4 \cdot 2)$: 2 punten,
   anders: 0 punten.

6. Antwoord: *a.* juist; *b.* onjuist; *c.* juist; *d.* onjuist.
   Voor elk goed antwoord: 1 punt,
   voor elk fout antwoord: —1 punt,
   voor elk ontbrekend antwoord: 0 punten.
   Het totaal aantal voor deze opgave behaalde punten kan dus negatief zijn.

7. Men moet constateren:
   a. $A(n) \leqslant n-1$, en $A(n) = n-1$ dan en alleen dan als n een priemgetal is;
   b. aan de betrekking is dus voldaan, als n en $n+2$ beide priemgetallen zijn, en anders niet;
   c. dus zijn 59 en 71 de gevraagde waarden voor n.

   Voor een goede motivering (a, b): 3 punten,
   voor een goed antwoord (c): 1 punt.

8. Kies een punt A op de buitenste cirkel en trek door A een lijn, die de binnenste cirkel in B en C snijdt. Dan is

$$AB \cdot AC = R^2 - r^2,$$

waarin R en r de stralen van de buitenste resp. binnenste cirkel zijn.
De gevraagde oppervlakte is $\pi(R^2 - r^2)$. Deze is nu dus bekend.
Voor de opmerking, dat de gevraagde oppervlakte $\pi(R^2 - r^2)$ is, wordt geen punt toegekend.

Tweede ronde

Voor elk der opgaven werden maximaal tien punten toegekend. De opgaven zijn dus als gelijkwaardig beschouwd.

BIJLAGE IV

OPLOSSINGEN

van de opgaven van de Wiskunde-Olympiade-1963 [1])

Eerste ronde

1. *Bewijs*: Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en BDA volgt $BD = \frac{1}{2}AB$, dus $CD = \frac{3}{4}BC$.
   Zij S het snijpunt van de bissectrice van $\angle CAD$ met BC. Dan geldt:

$$CS : SD = AC : AD = 2 : 1,$$

dus $CS = \frac{2}{3}CD = \frac{1}{2}BC$.
Bijgevolg geldt: $CS = SB$.

2. In de i-de regel van het eerste vierkant staan de getallen

$$5(i-1)+1, \quad 5(i-1)+2, \quad \ldots, \quad 5(i-1)+5.$$

Deze getallen staan opvolgend in de 1e, 2e, . . ., 5e regel van het tweede vierkant.
Van deze getallen staat dus in de j-de regel van het tweede vierkant.

$$5(i-1)+j.$$

[1]) Voor deze bijlage is dankbaar gebruik gemaakt van de oplossingen die de leden van de Adviescommissie hebben ingezonden.

3. *Eerste constructie.*

Verlengt men het gezochte lijnstuk DE aan de zijde van E met een stuk EF, dat even lang is als BE, dan moet gelden:

$$AD = DF,$$

dus $\angle FAC$ is gelijk aan de helft van de bekende hoek EDC.
Ook $\angle EBF$ is bekend, nl. $90° - \frac{1}{2} \cdot \angle DEC$.
We kunnen dus F construeren en daarna ook DE.

Tweede constructie.

De rechte door B evenwijdig met DE snijdt AC in G. Omdat DE en GB evenwijdig zijn aan de buitenbissectrice van $\angle C$, geldt $GD = EB$, $GC = CB$, dus $AG = AD - DG = DE + EB - DG = DE$.
Daar dus G en AG bekend zijn, is de lengte van DE bekend, waarna DE gemakkelijk in de figuur te „plaatsen" is.

4. $2^{3^2} = 2^9 = 512 =$ een 17-voud $+ 2$;
$2^{3^4} = (2^{3^2})^9 =$ (een 17-voud $+ 2)^9 =$ een 17-voud $+ 2^9 =$ een 17-voud $+ 2$.
Zo bewijst men door iedere keer weer de negende macht te nemen, achtereenvolgens dat

$$2^9,\ 2^{9^2},\ 2^{9^3}, \ldots$$

allemaal van de vorm

$$\text{een 17-voud} + 2$$

zijn.

5. Het getal in het middelste vakje kan zijn: 1, 2, 3 of 5.
Kiezen we het getal 1, dan hebben we voor de diagonalen de keuze uit de volgende paren: 2, 7; 3, 6; 4, 5. We kunnen hieruit op 3 manieren een keuze doen voor de beide diagonalen.
Kiezen we in het middelste vakje 2, dan beschikken we voor de diagonalen slechts over de paren 1, 7 en 2, 6. Kiezen we voor het middelste vakje een 3 dan hebben we voor de diagonalen de paren 1, 6 en 2, 5. Bij 5 voor het middelste vakje moeten er in de diagonalen de paren 1, 4 en 2, 3 worden toegevoegd. We kunnen de 4 getallen in de hoekpunten telkens nog op 8 wijzen rangschikken. Bij de keuze 5 voor het middenvakje kan nl. elke der getallen 1, 4 2, 3 bij twee verschillende schikkingen in de linkerbovenhoek geplaatst worden. Voor de vier getallen die in de 4 overschietende hoekpunten (telkens in het midden van een zijde) geplaatst moeten worden, zijn telkens $4! = 24$ verwisselingen mogelijk.
Hieruit volgt voor het totaal aantal plaatsingen:

$$(3 + 1 + 1 + 1) \times 8 \times 24 = 1152.$$

6. We beschouwen in het XY-vlak de verzameling S van alle punten, waarvan de coördinaten aan het gegeven voldoen.
S bestaat uit:
1. de halve lijn bepaald door $y = 2x + 3$ en $x \geqslant 0$;
2. de halve lijn bepaald door $y = 2x - 3$ en $x \geqslant 2$;
3. de rechte $x + y = 3$, met uitzondering van de punten tussen (0, 3) en (2, 1).
Hieruit valt direct af te lezen, dat de vragen moeten worden beantwoord met:
a: juist *b*: onjuist; *c*: juist; *d*: onjuist.

7. Als n een priemgetal is, is $A(n) = n-1$; is n geen priemgetal dan is $A(n) < n-1$. Hieruit volgt:

$$A(n) + A(n-2) \leqslant n-1+n+1 = 2n,$$

en dan alleen gelijk aan $2n$ als $A(n)$ en $A(n-1)$ beide priemgetallen zijn. De priemgetallen voor $50 \leqslant n \leqslant 100$ zijn:

$$53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 83,\ 89,\ 97.$$

We moeten hieruit paren hebben die 2 verschillen, dat zijn dus de paren 59, 61 en 71, 73. De gevraagde waarden voor n zijn dus 59 en 71.

8. Noem de stralen van de beide cirkels R en r $(R > r)$, dan is de gevraagde oppervlakte $\pi(R^2 - r^2)$.
Neem een punt A op de grote cirkel en een punt B op de kleine cirkel. De rechte AB snijdt de kleine cirkel voor de tweede keer in een punt C. Het produkt $AB \,.\, AC$ is de macht van A t.o.v. de kleine cirkel, en dus gelijk aan $R^2 - r^2$. De gevraagde oppervlakte is dus $\pi \cdot AB \cdot AC$.
AB en AC kunnen worden gemeten, en het produkt kan worden berekend.

Tweede ronde

1. Het antwoord luidt bevestigend, hetgeen kan worden aangetoond met een voorbeeld.
Laat Q het voetpunt van de loodlijn uit P op l zijn. Kies voor S_1 en S_2 twee verschillende punten op l aan eenzelfde kant van Q. Noem de middelloodlijnen van PS_1 en van PS_2 opvolgend r_1 en r_2. Laat b een van de bissectrices van de door r_1 en r_2 gevormde hoek zijn en M het snijpunt van b met PQ.
Is bijv. $\angle QPS_1 = \alpha$, $\angle QPS_2 = \beta$, $0 < \alpha < 90°$, $0 < \beta < 90°$, dan maakt b met PQ een hoek van $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ of $90° - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, zodat b inderdaad PQ snijdt. M is het middelpunt van een cirkel die aan r_1 en r_2 raakt. Wegens de symmetrie t.o.v. PQ raakt de cirkel ook aan de middelloodlijnen van PS_3 en PS_4, wanneer S_3 en S_4 uit S_1 en S_2 worden verkregen door spiegeling t.o.v. Q.

2. *a.* Trek door A de lijn $l' // l$ en door B de lijn $k' // k$.
De projectie van P op k' is P_1 en de projectie van Q op l' is Q_1. PP_1QQ_1 is een vierkant.
Het snijpunt van PQ en P_1Q_1 is het midden M van PQ.
De afstand van M tot het vlak door k' en l is gelijk aan de helft van het lijnstuk PP_1, dus gelijk aan de helft van het lijnstuk AB. M ligt dus in het middelloodvlak van AB.
Is N het midden van het lijnstuk AB, dan is $MN = \frac{1}{2}P_1Q = \frac{1}{2}AB$. De verzameling van de punten M is dus de cirkel met middelpunt N en straal $\frac{1}{2}AB$, gelegen in het middelloodvlak van het lijnstuk AB.
b. De lijnen KQ_1 en LP_1 staan beide loodrecht op het vlak PP_1QQ_1.
P_1Q_1 is de afstand van de lijnen KQ_1 en LP_1. Hieruit volgt:

$$KL \geqslant P_1Q_1 = PQ.$$

3. Noem $a_k - 7k = b_k$. Dan is $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_{20} \geqslant 0$, $b_1 + \ldots + b_{20} = 1518 - 7(1 + \ldots + 20) = 48$. We moeten bewijzen, dat er onder $k = 1, \ldots, 20$ niet meer dan zeventien zijn met $b_k \geqslant 13k - 2k^2$. Voor $k = 1, \ldots, 6$ heeft $13k - 2k^2$ opvolgend de waarden 11, 18, 21, 20, 15, 6. Als we hieruit vier getallen kiezen, dan is de som daarvan $\geqslant 6+11+15+18 = 50$. Daar $b_1 + \ldots + b_6 \leqslant b_1 + \ldots + b_{20} \leqslant 48$, kunnen er dus onder de getallen $k = 1, \ldots, 6$ geen vier voorkomen, waarvoor $b_k \geqslant 13k - 2k^2$. De getallen $k = 7, \ldots, 20$ leveren er niet meer dan veertien, dus in totaal vinden we er onder $k = 1, \ldots, 20$ ten hoogste zeventien.

4. *a*. Daar $n < 2n - 2$, leveren $(1+x)^n$ en $(2-x)^n$ geen termen op met graad $2n-2$ of hoger. We bekijken nu nog slechts $p^n - (p+1)^n$, waarbij $p = x^2 - x + 1$. Volgens de binomiumformule is $p^n - (p+1)^n = -np^{n-1} +$ termen met p^k, waarbij $k < n-1$; deze laatste termen hebben in x een graad $< 2n-2$. Tenslotte levert $-n(x^2 - x + 1)^{n-1}$ op $-nx^{2n-2} +$ termen met graad $< 2n - 2$.
b. Noem de veelterm $f(x)$. We hebben $a_0 + a_1 \ldots + a_{2n-2} = f(1) = 1^n - 2^n + 2^n + 1^n = 2$. We moeten dus laten zien, dat $a_0 + a_1 = 2$.
We zijn nog slechts geïnteresseerd in de termen van $f(x)$ met graden nul of één. Als we in $(x^2 - x + 1)^n$ en in $(x^2 - x + 2)^n$ de x^2 weglaten, heeft dat op de termen met graad nul of één geen invloed. We bekijken dus:

$$g(x) = (-x+1)^n - (-x+2)^n + (1+x)^n + (2-x)^n = (1+x)^n + (1-x)^n.$$

De bijdragen van $(1+x)^n$ en $(1-x)^n$ tot de termen van de graad één zijn tegengesteld en dus samen 0. De termen van de graad nul zijn samen 2. Dus $a_0 + a_1 = 2 + 0 = 2$.

5. *a*. Antwoord 30.
Leggen we alle gekleurde kubussen zó dat het ondervlak rood is, dan vallen ze in vijf klassen uiteen, al naar gelang de kleur van het bovenvlak *w*, *b*, *g*, *o*, *p* is. Beschouwen we alleen degenen met bovenvlak *w*, dan kunnen we die nog zo draaien, dat het vlak *b* voor komt te liggen. Voor de overige drie vlakken zijn er zes mogelijkheden, nl.

$$(g, o, p),\ (g, p, o),\ (o, p, g),\ (o, g, p),\ (p, g, o),\ (p, o, g).$$

Deze zes zijn alle verschillend, want geen dezer zes kubussen laat een draaiing toe, waarbij onder-, boven- en achtervlak opvolgend rood, wit en blauw blijven. Er zijn dus vijf klassen, elk van zes. Totaal dus $5 \times 6 = 30$.
b. Antwoord 450.
Noem de onder *a* gevraagde kleuringen „*a*-kubussen", en de onder *b* gevraagde „*b*-kubussen". Uit elke *a*-kubus kunnen we op 30 manieren een *b*-kubus maken door een zijvlak van kleur te veranderen; van elk der zes zijvlakken kan immers de kleur op vijf manieren veranderd worden. Elke *b*-kubus kan op deze wijze op twee manieren uit een *a*-kubus ontstaan zijn. Heeft de kubus bijv. de kleuren *r*, *r*, *w*, *b*, *g*, *o*, dan kunnen we een *a*-kubus maken door de eerste *r* door *p* te vervangen, en een andere *a*-kubus door de tweede *r* door *p* te vervangen. Deze twee kleuringen zijn niet gelijk want er bestaat geen kubusdraaiing, waarbij twee vlakken worden verwisseld, terwijl de andere vier op hun plaats blijven.
Daar er 30 *a*-kubussen zijn, vinden we in totaal $\frac{1}{2} \times 30 \times 30 = 450$ *b*-kubussen.

CONTRIBUTIE WIMECOS.

De penningmeester moet helaas meedelen, dat ondanks zijn verzoek in het Euclides-nummer van 15 december j.l. van de 670 leden der Vereniging nog ongeveer 280 niet hun contributie hebben voldaan.

Hij doet een dringend beroep op deze leden, aan wie toch (zie binnenzijde omslag Euclides) verzocht is hun contributie in september te betalen, nu zo spoedig mogelijk de contributie te storten, of over te maken op girorekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam.

ALS ... DAN

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN
(Oosterbeek)

In de rekenkunde kennen we manieren om uit een of meer getallen een nieuw getal af te leiden. Zo kunnen we uit het getal a door het tegengestelde te nemen het getal $-a$ verkrijgen en uit de getallen a en b door optellen $a + b$ en door vermenigvuldigen $a \cdot b$. Men noemt nemen van het tegengestelde, optellen en vermenigvuldigen operaties en $-$, $+$ en $\cdot$ operatoren.

Ook in de logica kennen we operatoren. De functie van een operator is daar uit een of meer uitspraken nieuwe uitspraken af te leiden. Zo kan men uit een uitspraak A door negatie de uitspraak niet A ($\neg A$) afleiden en uit de uitspraken A en B door conjunctie A en B ($A \wedge B$) en door disjunctie A of B ($A \vee B$). Om misverstand te voorkomen wil ik hier direct opmerken, dat onder een uitspraak niet verstaan wordt een ware bewering. Uitspraken zijn b.v. $3 + 3 = 6$, 5 is een priemgetal, maar eveneens $3 + 3 = 7$, 6 is een priemgetal. Men kan erover discussiëren of een bepaalde uitspraak waar of onwaar is. Waar en onwaar zijn predikaten, die aan een uitspraak toegekend kunnen worden. Maar als we het over een uitspraak zonder meer hebben, kennen we er een dergelijk predikaat niet aan toe.

In een vorig artikel is de operator 'of' besproken.[1]) We hebben toen gezien, dat in de logica onder 'A of B' verstaan wordt een uitspraak, die waar is, als minstens een van de beide uitspraken A en B waar is, en anders onwaar. 'A of B' is op zichzelf een uitspraak zonder meer, die door samenstelling uit de uitspraken A en B verkregen is. Zodra we echter aan de beide deeluitspraken A en B predikaten waar of onwaar gaan toekennen, wordt ook aan 'A of B' het predikaat waar of onwaar toegekend, volgens de boven gemaakte afspraken. Vergelijk hiermee: elk getal is even of oneven. Als we het over a en over b hebben, bedoelen we hiermee getallen zonder meer, dus zonder dat we een predikaat even of oneven eraan toekennen. Uit deze getallen leiden we $a + b$ af. En nu kunnen we zeggen: als aan a en b de predikaten even of oneven toegekend worden, dan is daardoor bepaald welk van deze beide predikaten aan $a + b$ toegekend moet worden. We kunnen hiervan een tabel maken:

[1]) Dr. P. G. J. Vredenduin - Of, Euclides, **39**, p. 106—113.

a	b	$a+b$
even	even	even
even	oneven	oneven
oneven	even	oneven
oneven	oneven	even

En evenzo kunnen we een tabel maken van het waar of onwaar zijn van $A \vee B$:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analoge tabellen kunnen we maken voor $A \wedge B$ en voor $\neg A$:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	$\neg A$
1	0
0	1

In deze tabellen stelt 1 'waar' en 0 'onwaar' voor. We noemen 'waar' en 'onwaar' de beide waarheidswaarden, die een uitspraak kan hebben.

Ik sta hier zo lang bij stil, omdat men '$A \wedge B$' bij eerste kennismaking vaak ten onrechte leest: A en B zijn allebei waar. En analoog '$A \vee B$': A en B zijn minstens een van beide waar. En $\neg A$: A is niet waar. Ik hoop, dat men nu zal inzien, dat dit beslist verkeerd is. Wel kan men zeggen: '$A \wedge B$ is waar' wil zeggen, dat A en B beide waar zijn, enz.

Verder zien we uit het voorgaande, dat in de logica $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ operaties zijn, die de eigenschap hebben, dat het al of niet waar zijn van de uitspraken $A \wedge B$, $A \vee B$ en $\neg A$ uitsluitend afhangt van het al of niet waar zijn van de uitspraken A en B. Dit in afwijking van het dagelijks spraakgebruik, waarin de waarheid van 'A of B' ook van andere factoren kan afhangen (zoals in het voorbeeld 'daar loopt een konijn of een haas' door de spreker niet alleen bedoeld werd, dat een van de beide uitspraken 'daar loopt een konijn' en 'daar loopt een haas' waar is, maar bovendien dat hij niet zeker weet welke van de twee).

Na deze voorbereidingen kunnen we eindelijk overgaan tot het eigenlijke onderwerp van dit artikel: de betekenis van de uitspraak 'als A dan B'.

Met de uitspraak 'als A dan B' of 'uit A volgt B' wordt in het dagelijks leven bedoeld: er is een of andere reden, waarom, mocht A waar zijn, noodzakelijk ook B waar zal zijn. Na het voorgaande rijst allereerst de vraag: is het al of niet waar zijn van 'als A dan B' uitsluitend bepaald door het al of niet waar zijn van A en van B? Hoe hangt het al of niet waar zijn van 'als deze staaf ijzer verwarmd wordt, dan zet hij uit' af van het al of niet waar zijn van 'deze staaf ijzer wordt verwarmd' en 'deze staaf zet uit'? Noem deze uitspraken kortheidshalve resp. A en B. Dan is uit het voorgaande een ding duidelijk: als 'als A dan B' waar is en ook A waar is, dan is B waar. Men zou dus verwachten een regel in de tabel van de volgende vorm:

A	B	als A dan B
1	1	1

Deze regel zou echter een andere strekking hebben. Hier staat namelijk: als A waar is en ook B waar is, dan is 'als A dan B' waar. Is dit in de omgangstaal het geval? 'Kobalt is blauw' is waar en 'sneeuw smelt bij 0°' eveneens. Maar wat zoudt U zeggen van 'als kobalt blauw is, dan smelt sneeuw bij 0°'? Of van 'als sneeuw bij 0° smelt, dan is kobalt blauw'? Deze uitspraken worden niet als ware uitspraken aanvaard, omdat tussen het waar zijn van 'kobalt is blauw' en van 'sneeuw smelt bij 0°' geen aanwijsbaar verband bestaat. We moeten dus ertoe besluiten, dat het al of niet waar zijn van 'als A dan B' in de omgangstaal niet uitsluitend afhangt van het al of niet waar zijn van A en van B.

We kunnen ons desondanks nog wel afvragen: als 'als A dan B' waar resp. onwaar is, welke waarheidswaarden kunnen A en B dan hebben? We nemen weer het voorbeeld: 'als deze staaf ijzer verwarmd wordt, dan zet hij uit'. Deze uitspraak is waar. Er zijn nu verschillende mogelijkheden. Het is mogelijk, dat we de staaf verwarmen en dat hij uitzet. Het is natuurlijk ook mogelijk, dat we de staaf niet verwarmen. Dan zal hij meestal niet uitzetten. Maar het is niet uitgesloten, dat hij toch uitzet, b.v. doordat er in lengterichting een trekkracht op uitgeoefend wordt. Alleen één ding is niet mogelijk: het is uitgesloten, dat de staaf verwarmd wordt en dat hij desondanks niet uitzet. Dit resultaat kunnen we in tabelvorm als volgt weergeven:

als A dan B		A	B
1	dan is mogelijk	1	1
		0	1
		0	0
	en onmogelijk	1	0

De laatste regel kunnen we ook anders lezen. Als A waar en B onwaar is, dan is het uitgesloten, dat 'als A dan B' waar is en is deze uitspraak dus onwaar. Alleen in dit geval kunnen we uit de kennis van de waarheidswaarden van A en B de waarheidswaarde van 'als A dan B' afleiden. Onze tabel wordt dus

A	B	als A dan B
1	1	?
1	0	0
0	1	?
0	0	?

Laten we nu eens voorbeelden gaan onderzoeken, die aan de wiskunde ontleend zijn. Om te beginnen merken we op, dat er een nauw verband bestaat tussen uitspraken van de vorm 'als A dan B' en uitspraken over verzamelingen van de vorm '$V \subset W$'. Het is immers gebruik te definiëren

$$V \subset W =_{\text{def}} \text{voor elke } x \text{ geldt: als } x \in V \text{ dan is } x \in W.$$

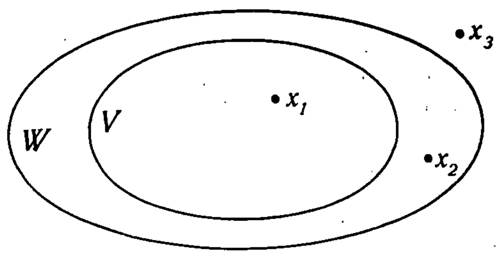

Fig. 1.

In fig. 1 is de situatie $V \subset W$ door middel van een diagram voorgesteld, waarbij gemakshalve aangenomen is, dat V een echt deel van W is. In deze figuur zijn drie elementen getekend, x_1, x_2 en x_3. Voor deze elementen geldt resp.

$x_1 \in V$ is waar en $x_1 \in W$ is waar,
$x_2 \in V$ is onwaar en $x_2 \in W$ is waar,
$x_3 \in V$ is onwaar en $x_3 \in W$ is onwaar.

Noem nu de uitspraken '$x \in V$' en '$x \in W$' resp. A en B. We zien dan weer, dat het waar zijn van 'als A dan B' met zich meebrengt, dat het mogelijk is, dat A en B beide waar, A onwaar en B waar, A en B beide onwaar zijn. Uitgesloten is echter, dat A waar en B onwaar is, want er is geen element te vinden, dat wel tot V, maar niet tot W behoort. De situatie vertoont dus grote overeenkomst met de vorige.

Ik kies nu een concreet voorbeeld van het voorgaande type en bezie dit nog op iets andere wijze:

elk natuurlijk getal dat door 4 deelbaar is, is even.

Of, anders geformuleerd,

voor elk natuurlijk getal x geldt:
als x deelbaar is door 4 dan is x even.

Dát 'als x deelbaar is door 4 dan is x even' voor elk natuurlijk getal x geldt, wil zeggen, dat er altijd een ware uitspraak ontstaat, als we voor x een of ánder natuurlijk getal substitueren, welk getal we ook nemen. We kiezen nu achtereenvolgens voor x de getallen 8, 9 en 10. We krijgen dan de volgende drie uitspraken:

als 8 deelbaar door 4 is dan is 8 even,
als 9 deelbaar door 4 is dan is 9 even,
als 10 deelbaar door 4 is dan is 10 even.

Hier begint voor het eerst een zeker gevoel van onbehagen zich van ons meester te maken. Onze mathematische instelling brengt ons ertoe deze drie uitspraken het predikaat 'waar' toe te kennen. Maar ons taalkundig instinct zegt ons, dat we ons in normale taal stellig niet zo zouden uitdrukken. We zouden zeggen:

8 is deelbaar door 4 en dus is 8 even,
als 9 deelbaar door 4 was, dan zou 9 even zijn,
hoewel 10 niet deelbaar door 4 is, is 10 toch even.[1])

We zien in dit voorbeeld, hoe de wiskundige ertoe gebracht wordt zich een eigen taalgebruik te scheppen, dat afwijkt van het taalgebruik in de omgangstaal en waarbij uitspraken van de vorm 'als A dan B' het predikaat 'waar' wordt toegekend, terwijl ze een zodanige structuur hebben dat ze in de omgangstaal als zinloos worden veroordeeld.

Er komt zo een discrepantie in betekenis tussen 'als . . . dan' in omgangstaal en in mathematische taal. Er zijn gevallen, waarin 'als A dan B' door de wiskundige als waar wordt aanvaard, terwijl men in de omgangstaal van dezelfde uitspraak de zin niet zou kunnen vatten. 'Als . . . dan' krijgt daardoor in de wiskunde een ruimere betekenis dan in de omgangstaal. Nu rijst echter de vraag, hoe we deze ruimere wiskundige betekenis van 'als . . . dan' zullen kiezen. De wiskundige heeft hier zijn lot in eigen hand en mag zich laten leiden door doelmatigheidsoverwegingen bij het vastleggen van deze betekenis.

---

[1]) Vgl. A. Tarski, Introduction à la logique, 1960, p. 21.

Merkwaardig is, dat in de omgangstaal 'als A dan B' alleen maar gebruikt wordt in gevallen, waarin A en B algemeenheden voorstellen. 'Als deze staaf ijzer verwarmd wordt, dan zet hij uit' wil zeggen: in alle gevallen waarin men de staaf verwarmt, zal hij uitzetten. Of hij wel of niet verwarmd wordt, wordt daarbij juist in het midden gelaten. Aan 'als A dan B' wordt dus de waarheidswaarde 'waar' toegekend zonder dat we de waarheidswaarden van A en van B kennen. In de wiskunde wordt het gebruik van 'als A dan B' geëxtrapoleerd tot gevallen, waarin A en B concrete uitspraken zijn, zoals '8 is deelbaar door 4' en '9 is even'. Hier liggen de waarheidswaarden van A en B wel vast. Verder kunnen we constateren, dat in al die gevallen, waarin de waarheidswaarden van A en B vastliggen, alleen de combinaties voorkomen, die men in de volgende tabel vindt:

A	B	als A dan B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Een mathematicus moet nu toch wel heel sterk in de verleiding komen, als hij een scherp omlijnde definitie van 'als A dan B' wil geven, dit te doen door de bovenstaande tabel te generaliseren en af te spreken:

> onder 'als A dan B' verstaan we de uitspraak, die onwaar is als A waar en B onwaar is en in alle andere gevallen waar is.

Door deze definitie hebben we 'als . . . dan' op een manier gedefinieerd, waardoor deze operator overeenstemming gaat vertonen met de totnogtoe gedefinieerde operatoren $\wedge$, $\vee$ en $\neg$. Immers ook voor 'als . . . dan' geldt nu, dat de waarheidswaarde van 'als A dan B' alleen bepaald wordt door de waarheidswaarden van A en van B. Voor de nu gedefinieerde logische operator, die we totnogtoe 'als . . . dan' schreven, zullen we liever een notatie bedenken. We schrijven $A \rightarrow B$. Deze notatie dient in zekere zin om ons de oorspronkelijke betekenis van 'als . . . dan' te doen vergeten.

Nu we $A \rightarrow B$ gedefinieerd hebben door middel van een tabel van waarheidswaarden, kunnen we trachten een verband op te sporen tussen $A \rightarrow B$ en de vroeger reeds op deze manier gedefinieerde operaties $A \wedge B$, $A \vee B$ en $\neg A$. De waardetabel van $A \vee B$ bevat drie 1'en en de waardetabel van $A \rightarrow B$ ook. Het ligt daarom voor de hand te proberen $A \rightarrow B$ als een disjunctie te schrijven. Daartoe stellen we de tabel op, die bij $\neg A \vee B$ behoort.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Deze tabel is dezelfde als die van $A \rightarrow B$. Uit de definities van $A \vee B$ en $\neg A$ volgt, dat $\neg A \vee B$ de uitspraak is, die bovenstaande waardetabel heeft. Maar per definitie is $A \rightarrow B$ ook de uitspraak, die deze waardetabel heeft. Dus is $A \rightarrow B$ dezelfde uitspraak als $\neg A \vee B$. Hieruit volgt, dat we ook hadden kunnen definiëren:

$$A \rightarrow B =_{\text{def}} \neg A \vee B.$$

We zien nu ten minste scherp, wat de consequenties van onze daden zijn. In de logische disjunctie $A \vee B$ was elk verband tussen A en B verdwenen. Er werd alleen in beweerd, dat de uitspraak waar is, als minstens een van de beide uitspraken A en B waar is. Nu is $A \rightarrow B$ teruggebracht tot een disjunctie. Ook hier is dus elk verband tussen A en B verdwenen. Van het aanvankelijke 'volgen uit' is niets overgebleven. Desondanks pleegt men $A \rightarrow B$ een implicatie te noemen, maar deze term is eigenlijk misleidend. Immers $A \rightarrow B$ is waar, zodra A onwaar is, en het doet er dan niets meer toe welke uitspraak B voorstelt. En het is eveneens waar, als B waar is, en dan doet het er niets meer toe welke uitspraak A voorstelt.

Men zal zich afvragen, of de logici zich neergelegd hebben bij de invoering van een dergelijke bloedloze 'implicatie'. Inderdaad zijn er verschillende pogingen met succes gedaan om in de logica een 'implicatie' te definiëren, waarbij rekening gehouden werd met het volgen van B uit A, en dus niet meer uitsluitend door middel van een waardetabel. We zullen ons daarmee verder niet bezighouden maar eindigen met de constatering, dat de klassieke wiskunde opgebouwd kan worden zonder een dergelijke inhoudsrijkere 'implicatie' in te voeren. En waarom zouden we het dan doen? Er is nog wel een meer stringente reden te noemen, maar daarover later.

Ten slotte nog één opmerking, hopelijk ten overvloede. $A \rightarrow B$ mag men niet lezen: als A waar is, dan is B waar. Dit staat er niet. Er staat niets anders dan het resultaat van een operatie uitgevoerd op de uitspraken A en B.

EEN STELLING VAN NESBITT

door

Dr. J. T. Groenman

(Groningen)

In ons schoolarchief vond ik enkele exemplaren van het Wiskundig Tijdschrift van de jaargang 1906/07. In nr. 2 van de 3e jaargang trof ik een stelling aan, die mij onbekend was en mij hervermelding waard lijkt. Er wordt verwezen naar Repr. Educ. Times. New Series IX. Questions 15782; de eigenschap staat daar op naam van Nesbitt.

1.

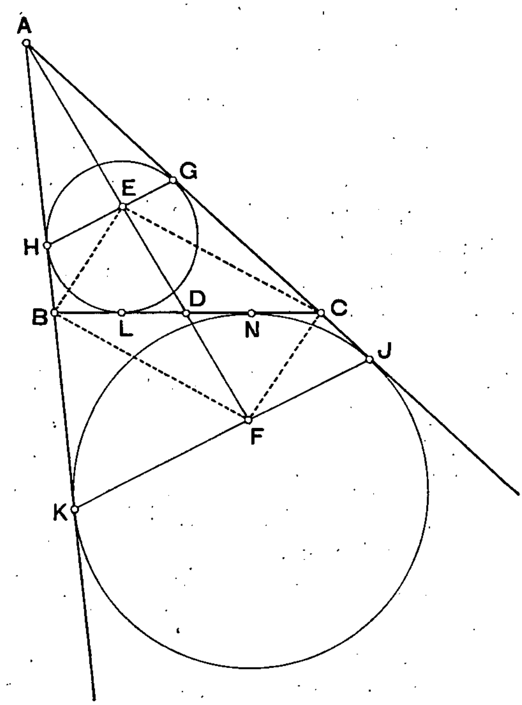

Fig. 1.

Van $\triangle ABC$ is AD een zwaartelijn; GH en JK zijn de poollijnen van A t.o.v. de ingeschreven cirkel en de aangeschreven cirkel aan BC.

Dan is $BECF$ een parallellogram.

De stelling wordt bewezen met behulp van de machtlijn van beide cirkels, die door de middens van GJ, HK en LN gaat. Hieronder volgt een ander bewijs met behulp van spiegeling.

2.

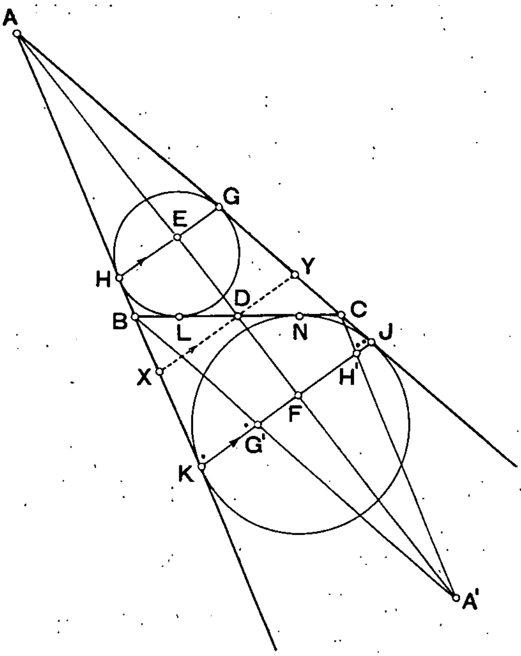

Fig. 2

$AB = c;\ BC = a;\ CA = b.$
$AG = AH = s - a$
$CN = CJ = BL = BH = s - b$
$CL = CG = BK = BN = s - c.$

(1) $\boxed{ND = LD = \tfrac{1}{2}(b - c)}$ . . . . $b \geqq c.$

Wij spiegelen $\triangle\, ABC$ t.o.v. D en vinden $\triangle\, A'CB$.

$BA' \,//\, AC;\ CA' \,//\, AB.$
$\angle J_1 = \angle K_1 = \angle G_1' = \angle H_1'$[1].
$BG' = BK = s - c.$ $A'G' = b - (s - c) = s - a.$
$A'H' = s - a.$

De ingeschreven cirkel van $\triangle A'CB$ raakt $A'B$ en $A'C$ resp. in G' en H'. Bij de spiegeling gaat HG over $H'G'$, dus in KJ.

(2) $\boxed{ED = FD.}$

[1]) In fig. 2 zijn deze hoeken met een stip aangegeven.

Omdat ook $BD = DC$ en $LD = ND$, zijn $BECF$ en $LENF$ parallellogrammen.

3. De lijn door $D \parallel HG$ is de machtlijn van beide cirkels en halveert dus GJ en HK.

$$AY = AG + GY = s - a + \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}(b + c).$$

$$AD : EF = AY : GJ = \tfrac{1}{2}(b + c) : a.$$

(3) $$\boxed{EF = \frac{2a \, . \, z_a}{b + c} = \frac{a \, . \, AA'}{b + c}}$$

Wij vragen naar bijzondere vormen der parallellogrammen.

4. a. Ruit.
Noodzakelijk en voldoende is $AD \perp BC$, dus $AB = AC$. $EBFC$ is dan inderdaad een ruit; $LENF$ is ontaard.
b. Rechthoek.
Noodzakelijk en voldoende is resp. $EF = BC$ en $EF = LN$.

$$EF = BC \rightarrow \frac{a \, . \, AA'}{b + c} = a \rightarrow AA' = b + c;$$

dit is uitgesloten.

$$EF = LN \rightarrow \frac{2a \, . \, z_a}{b + c} = b - c \rightarrow 2a \, . \, z_a = b^2 - c^2.$$

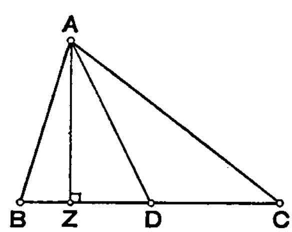

Fig. 3

$$2a \, . \, z_a = CZ^2 - BZ^2 = a(CZ - BZ)$$
$$2z_a = \tfrac{1}{2}a + DZ - \tfrac{1}{2}a + DZ = 2DZ.$$
$z_a = DZ$ Ook dit is uitgesloten.

De beide parallellogrammen kunnen dus geen rechthoek zijn en $LN < EF < BC$.

5.

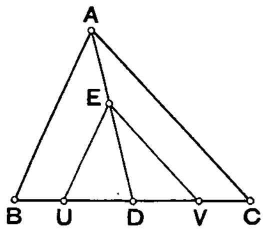

Fig. 4.

Trekken wij uit E twee lijnen evenwijdig aan c en b, dan is

$$EU = \frac{a}{b+c} \cdot c \text{ en } EV = \frac{a}{b+c} \cdot b \text{ dus } EU + EV = a.$$

Doorloopt A een ellips met B en C als brandpunten, dan doorloopt E een gelijkvormige ellips met brandpunten U en V en lange as BC. De halve brandpuntsafstand $= \frac{1}{2} \dfrac{a^2}{b+c}$.

Indien $\angle B = 90°$ (en dus $b^2 = a^2 + c^2$) is die afstand gelijk aan $\frac{1}{2}(b - c)$ en vallen U en V met L en N samen.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN GYMNASIUM A en B in 1962

Wiskunde

Wat de A-kandidaten betreft deelt de subcommissie voor de wiskunde mede, dat het gemiddeld cijfer behaald voor het onderdeel VIa 5,0 (vorig jaar 5,1) en voor het onderdeel VIb 5,0 (v.j. 5,3) was.

Aan het onderdeel VIa, dat als verplichte examenstof de vierkantsvergelijkingen en de lineaire en kwadratische functies omvat, moet een keuze-onderwerp worden toegevoegd.

191 kandidaten namen hiervoor de in het K.B. van 1958 Stb. 431 voorgeschreven overige leerstof voor de algebra in de klassen I-IV van het gymnasium, met uitzondering van de logaritmen en de rijen,
64 kozen de logaritmen en de rijen,
3 de differentiaalrekening,
14 de geschiedenis van de wiskunde en
3 de statistiek.

Enkele kandidaten, die de geschiedenis van de wiskunde of de statistiek genomen hadden, verkeerden in de mening, dat zij van de bovengenoemde verplichte examenstof vrijgesteld waren. Dit berust op een misverstand.

Voor het onderdeel VIb ging de voorkeur van 223 kandidaten uit naar de planimetrie en van 52 naar de stereometrie.

De subcommissie wil over de algebra-examens der A-kandidaten nog de volgende opmerkingen maken:

a. Men moet inzien, dat uit $a^2 + 2a + b = 3$ volgt, dat b een functie van a is.
b. Indien gevraagd wordt, hoe groot $\sqrt{(x-2)^2}$ is, kan men niet volstaan met te zeggen, dat dit $x - 2$ is. Men moet begrijpen, dat het te geven antwoord afhangt van de waarde van x en dat het dus $x - 2$ moet zijn voor $x \geqq 2$ en $2 - x$ voor $x \leqq 2$.
c. Als men zijn keuze bepaalt op de overige algebra uit de klassen I—IV, mag geëist worden, dat men stelsels vergelijkingen kan oplossen. Zo kan gevraagd worden x en y op te lossen uit het stelsel: $x^2 + 2xy = 0$ en $x^2 + y^2 = 1$.
Nogmaals wordt de aandacht gevestigd op het feit, dat dan ook het onderwerp strijdigheid en afhankelijkheid van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden tot deze examenstof behoort.

Vaak bleek, dat de kandidaten, die voor het onderdeel VIb in de planimetrie geëxamineerd werden, de opmerkingen, die in vorige verslagen hierover gemaakt zijn, niet ter harte hadden genomen.

De goniometrische verhoudingen, de sinus- en de cosinusregel, de formule voor de straal van de omgeschreven cirkel van een driehoek ($a = 2R \sin \alpha$), moeten bekend zijn. Hetzelfde geldt voor de macht van een punt ten opzichte van een cirkel en het verband tussen hoeken en bogen.

Dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, als de ene congruent is met een produktfiguur van de andere, acht de subcommissie de meest bruikbare definitie. Vele malen werd om de gelijkvormigheid van twee driehoeken te bewijzen de niet ter zake doende opmerking gemaakt, dat de betreffende driehoeken een bepaalde zijde gelijk hadden.

Op het examen kunnen eenvoudige opgaven over de vermenigvuldiging van figuren gegeven worden.

Om misverstand te voorkomen moge hier nogmaals vermeld worden, dat de examenstof voor de stereometrie de volgende onderwerpen bevat: ligging van punten, lijnen en vlakken; eenvoudige verzamelingen; het viervlak (ook de eigenschappen van het orthocentrische viervlak); de kubus en de bol. Voorts moet de kandidaat in staat zijn een constructie in een stereometrische figuur uit te voeren en een lijnstuk of hoek in ware grootte te construeren.

Wat de B-examens betreft, is het gemiddelde van de behaalde cijfers: voor de algebra 5,4 (v.j. 5,7), voor de stereometrie 5,4 (v.j. 4,7) en voor de goniometrie en de analytische meetkunde 5,0 (v.j. 5,9).

De subcommissie heeft geconstateerd, dat sommige kandidaten de extreme waarde van een functie bepalen door de eerste afgeleide = 0 te stellen en het teken van de tweede afgeleide in de betreffende nulpunten na te gaan. Deze methode is soms omslachtig en leidt niet altijd tot het gewenste resultaat. Verder bestaat hiertegen het bezwaar, dat het in onbegrepen routine kan ontaarden. Beter is meestal om de variatie van het teken van de eerste afgeleide te beschouwen.

Vele kandidaten gaan bij opgaven over logaritmen steeds weer op het grondtal 10 over. Dit is in het algemeen onnodig en vaak ongewenst. Het is alleen dan noodzakelijk, als een berekening met behulp van de logaritmentafel moet worden gemaakt.

Ook voor de B-kandidaten geldt de opmerking, dat zij in staat moeten zijn een constructie met toepassing van verzamelingen in een gegeven stereometrische figuur uit te voeren.

Als in een opgave over een goniometrische functie het argument uitgedrukt is in radialen, zal men ook de oplossing in radialen moeten geven. Gaat men bij een berekening met een goniometrische functie over tot differentiëren, dan moet men het argument in radialen uitdrukken. De gangbare formules voor het differentiëren van genoemde functies zijn immers alleen dan geldig.

De subcommissie moet de opmerking uit een vorig verslag herhalen, dat bij de analytische meetkunde de cirkelbundels tot de examenstof behoren. Ook dient men te weten, dat een cirkel en een rechte een cirkelbundel bepalen.

De oplossing van een vraagstuk mag in geen geval bestaan uit het opsommen van een aantal formules. Hier en daar behoort er een verbindende tekst bij en het spreekt vanzelf, dat die tekst correct moet zijn.

BOEKBESPREKING

Dr. A. van Heemert, *Wiskunde en eeuwige waarheden*, openbare les bij de aanvaarding van het ambt van lector in de propaedeutische meetkunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen. J. B. Wolters, Groningen, 1963, *f* 1,50.

Schrijver behandelt in deze openbare les eerst de mythische en religieuze bindingen van de wiskunde in de oudheid. Dan staat hij stil bij Pythagoras en Plato en in de Christelijke periode o.a. bij Augustinus. Ten slotte bespreekt hij hoe de band tussen wiskunde en theologie vervolgens werd losgemaakt.

Tot in de negentiende eeuw heeft deze band nog bestaan o.a. in de vorm van het ,,klein mathesis examen,'' dat ook door theologische studenten moest worden afgelegd. De lezing van deze openbare les is zeker de moeite waard.

Een opmerking wil ik nog graag toevoegen. Dr. van Heemert vertelt ook weer het verhaal hoe Napoleon aan Laplace gevraagd zou hebben welke rol God in diens boek ,,Exposition du système du monde'' heeft en dat Laplace toen antwoordde: ,,Sire, ik had aan deze hypothese geen behoefte''.

Dit verhaal kan men n.l. in verschillende werken vinden. Ik wil hier attent maken op een opmerking in het boek ,,Het geloof aan God in de XXste eeuw'' door dr. J. R. Slotemaker de Bruïne. Deze geeft het verhaal in de eerste druk van dit boek ook. In latere drukken verving hij de naam ,,Laplace'' door ,,Lalande'', en hij tekent daarbij aan:

,,De sterrekundige Lalande; 1732—1807. In de eerste druk volgde ik een bekende traditie door het aangehaalde woord toe te schrijven aan Laplace. Ten onrechte. Een vriendelijke hand verwees mij later naar het mij inderdaad geheel onbekende werk van HERVE FAYE, Sur l'origine du Monde; 1907, p. 123—130, waar de kwestie uitvoerig onderzocht wordt en waar als resultaat wordt gegeven, dat Laplace ,,n'a pas professé l'athéisme''.

J. F. Hufferman.

Paul G. Hoel, *Introduction to Mathematical Statistics*, third edition. John Wiley & Sons Inc. New York, London, 1962; 427 blz., 53 sh.

De bedoeling van de schrijver is de gebruiker van het boek een grondige kennis bij te brengen van de beginselen, en stellig niet alleen van de eerste beginselen, van de statistiek. Een korte inleiding, waarin de kansrekening ter sprake komt, is onvermijdelijk, maar deze is zo geschreven, dat de explicatie van het kansbegrip tendeert op de latere statistische toepassingen.

Dan begint de wiskundige statistiek. We lezen al direct:

Definition. A statistical hypothesis is an assumption about the frequency function of a random variable.

Ik vermeld deze uitspraak, omdat ze kenmerkend is voor de wijze van behandeling. Elk nieuw begrip wordt niet alleen duidelijk toegelicht, maar ook kort en zakelijk omschreven op een zodanige wijze, dat men er houvast aan heeft. Deze helderheid en bondigheid kenmerkt trouwens de betoogtrant van de schrijver in het gehele boek. Veel statistische methoden worden uiteengezet op een manier, die de aandacht gespannen houdt. Waar dit wenselijk was, zijn ze aan de hand van voorbeelden toegelicht.

Schrijver begint met uiteen te zetten het verschil tussen fouten van de eerste en de tweede soort. Daarna stelt hij het probleem: gegeven is een frequentieverdeling van de vorm $f(x,p)$, waarin de waarde van de parameter p onbekend is. Bepaal p op grond van een serie gevonden waarden voor x (methode van de maximum „likelihood"). Na deze algemene beschouwingen volgt de bespreking van frequentieverdelingen (momenten: gemiddelde, variatie) en in het bijzonder van de binomiale verdeling met als benaderingen de poisson-verdeling en de normale verdeling. Hierna volgt een hoofdstuk over correlatie en regressie.

Misschien zal men opmerken, dat men deze onderwerpen in iedere inleiding in de statistiek vindt. Dit is inderdaad het geval, maar de behandelingswijze geschiedt hier vanuit een hoger gezichtspunt dan doorgaans het geval is. Het gevolg hiervan is, dat men zich enerzijds wel meer moeite zal moeten geven zich in de betekenis van deze begrippen in te leven, maar als beloning dan ook een helder en goed gefundeerd inzicht verkrijgt.

Eerst nu gaat schrijver over tot het testen van hypothesen. Ook hier is hij niet tevreden met het geven van testmethoden, maar zet hij uiteen, dat bepaalde methoden de voorkeur verdienen boven andere op grond van het minimaal zijn van de fouten van de tweede soort. Verscheidene testmethoden passeren de revue. Ook hier dezelfde nauwkeurigheid als in de voorgaande hoofdstukken. Zo vindt men b.v. een scherpe definitie van „aselect" en bovendien een methode om uit te maken, of een serie keuzen inderdaad aselect geweest is.

Om kort te gaan: een uitstekend boek voor diegenen, die niet tevreden zijn met een oppervlakkige kennis van statistiek, maar een goed inzicht willen verkrijgen in de beginselen van deze wetenschap.

P. G. J. Vredenduin.

Dr. Georg Wolff, *Handbuch der Schulmathematik*, Band VI, *Analysis*, 268 blz. met 163 figuren, geb. 38 D.M., Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Na mijn recencies van de reeds eerder verschenen delen van dit werk (zie voor deel I en deel II Euclides **36**, p. 317—319 en voor deel III en deel V Euclides **38**, p. 282—283) kan ik ten aanzien van dit nieuwe deel kort zijn. Mijn waardering voor deze groots opgezette, wel verzorgde uitgave, van belang voor ieder wiskundedocent die zich voor de problematiek van zijn vak interesseert, is onverminderd gebleven.

Voor de leraar bij het v.h.m.o. in Nederland is in het bijzonder het eerste hoofdstuk over „Infinitrechnung', (p. 11—130) van betekenis door de erin opgenomen paragrafen over het limietbegrip, het functiebegrip, de differentiaal- en integraalrekening en de theorie der rijen.

Hoofdstuk II bespreekt tal van toepassingen der wiskunde op het terrein van de mechanica en de natuurkunde en geeft een uitvoerig overzicht over de wiskundeproblemen die in verband staan met satellieten en raketten.

Hoofdstuk III behandelt „Gebiete für Arbeitsgemeinschaften", o.a. de conforme afbeelding, differentiaalvergelijkingen, de differentiaalmeetkunde en de analogierekenmachines. Voor de Nederlandse wiskundeleraar is deze stof niet van onmiddellijke betekenis.

Op het nog ontbrekende vierde deel na dat zich bezig zal houden met de meetkunde voor de ,,Oberstufe'' is nu dit standaardwerk voltooid.

Het legt getuigenis af van de daadwerkelijke belangstelling die er in Duitsland bestaat voor methodische problemen van het wiskundeonderwijs, een belangstelling die ook de opleiding van de wiskundeleraar ginds ten goede zal komen.

We vertrouwen dat veel Nederlandse collega's van deze betrouwbare informatiebron kennis zullen willen nemen.

Joh. H. Wansink

Dr. W. Verdenius, *Benaderingen*, Openbare les bij de aanvaarding van het ambt van lector in de propaedeutische analyse aan de Rijksuniversiteit te Groningen, J. B. Wolters, Groningen, 1963, *f* 1,50.

Spreker begint met een beknopt historisch overzicht, waarin hij vooral de aandacht erop vestigt, hoe in de 19e eeuw aan de analyse een stevig fundament gegeven werd en hoe de grootse conceptie van de aritmetisering van de wiskunde verwezenlijkt werd. Vervolgens wijst hij op de grote veranderingen, die in de laatste 30 jaar ongeveer, in de wiskunde hebben plaats gehad.

Meer uitvoerig worden dan verder vermeld het onderzoek naar het aantal priemgetallen $< N$ en het z.g. probleem van Waring.

N.a.v. de grote rol, die de ongelijkheden thans spelen, maakt hij een paar opmerkingen waarop ik graag de aandacht vestig door ze hier over te nemen:

,,Het onderwijs aan onze middelbare scholen is gelukkig voldoende met zijn tijd meegegaan, zodat de tegenwoordige eerstejaars studenten voldoende geoefend zijn in het gebruik van ongelijkheden, om de aanvankelijke moeilijkheden van de analyse snel te boven te komen.

Toch schuilt in deze ontwikkeling een gevaar, namelijk dat der verstarring. Dat dit niet denkbeeldig is moge blijken uit het lot dat mogelijk de meetkunde op onze middelbare scholen boven het hoofd hangt. Deze meetkunde die eeuwenlang generaties van wetenschapsbeoefenaren, langs steeds weer dezelfde weg, heeft ingeleid in de deductieve denkwijze en daar steeds nog bijzonder toe geëigend is, is nauwelijks beïnvloed door de ontwikkeling van de laatste honderd jaar. Het aantal beoefenaren van deze richting in de meetkunde is mede daardoor verhoudingsgewijs sterk verminderd. De moderne wiskunde heeft andere vakken naar voren doen komen, die de genoemde taak van de meetkunde kunnen overnemen. De gedachten van de voorstanders van een wijziging van het wiskundeprogramma gaan daarom uit naar een vervanging van een gedeelte der meetkunde door bepaalde onderdelen der abstracte algebra. Een groot voordeel is daarbij dat een betere aansluiting met het hoger onderwijs wordt verkregen'', enz. (bladz. 8).

Het geheel is zeker de moeite van het lezen waard.

J. F. Hufferman

E. D. Nering, *Linear Algebra and Matrix-theory*, John Wiley and Sons Inc., New York-Londen 1963, 290 blz., prijs 53/—.

Voor degenen, die zich oriënteren willen in bovengenoemde onderwerpen, staan thans vele geschikte verhandelingen, ook in de Nederlandse taal, ter beschikking. Het is echter leerzaam verschillende behandelingswijzen te bestuderen, al zou men een unificatie van de technische termen op prijs stellen.

De onderwerpen, die in dit boek behandeld worden, vectorruimten, lineaire transformaties, waaruit op natuurlijke wijze de matrix-algebra groeit, permutaties, determinanten, iets over groepentheorie, een elegant bewijs van het Hamilton-Cayley probleem, dat elke matrix een wortel is van een polinoom, eigenwaarden en eigenvectoren van een transformatie, kan men wel vermoeden.

De eerste drie hoofdstukken, waarin men dit behandeld vindt, worden (evenals de drie volgende) begeleid door een stel illustratieve uitgewerkte voorbeelden en opgaven, waarvan achter in het boek de oplossingen worden gegeven. Men vindt er ruim voldoende, om een bewerking, geschikt voor de hoogste klassen van het V.H.M.O., te maken, zoals mijn ervaring uitwijst.

De drie volgende hoofdstukken bevatten een verzameling van indringende toepassingen.

Enkele kleine opmerkingen. Het laatste element van de matrix boven aan blz. 56 moet 1 i.p.v. 0 zijn. Dit geldt ook voor de matrix A op blz. 268 No. 10, terwijl in II-4 No. 3 de worteltekens zijn weggevallen. Op blz. 271 vindt men de antwoorden van 9 opgaven van blz. 98 en 99. Op deze bladzijden komen echter slechts 8 opgaven voor. Antwoord No. 6 moet vervallen, de drie volgende moeten een nummer verlaagd worden.

Samenvattend een boek waarin men met plezier werkt.

Burgers

Dr. G. R. Veldkamp, *Drukken en binden*. Openbare les bij de aanvaarding van het ambt van lector in de wiskunde aan de Technische Hogeschool te Delft, J. B. Wolters, Groningen, 1963, *f* 1,50.

In deze openbare les wordt het volgende vraagstuk behandeld. Gegeven een uitgever, die over één drukpers en over één bindmachine beschikt. Beide machines zijn vrij op het tijdstip nul. Verder een aantal manuscripten. Gevraagd: in welke volgorde moeten, te beginnen op het tijdstip nul, de manuscripten aan de drukpers en aan de bindmachine worden toegevoerd, opdat de gehele partij in de kortst mogelijke tijd gedrukt en gebonden is?

Dit interessante vraagstuk wordt op duidelijke wijze besproken. Met een goede, hogere klas zou het op deze wijze b.v. in een extra-uur behandeld kunnen worden. Zeer aanbevolen.

J. F. Hufferman

ONTVANGEN BOEKEN

Dr. Th. G. D. Stoelinga en Dr. M. G. van Tol, *Leerboek der gonio- en trigonometrie*, 6e druk, Tjeenk Willink, Zwolle, *f* 3,50 (Antwoorden *f* 1,00).

Van Hiele-Geldof en van Hiele, *Werkboek der algebra* 2, 6e druk, J. Muusses N.V., Purmerend, *f* 5,90.

Prof. Dr. Hans Freudenthal, *Waarschijnlijkheid en statistiek*, VU-bibliotheek, tweede reeks, 2e druk, Erven F. Bohn, Haarlem, 185 blz., *f* 7,50. Recensie in Euclides, **32**, p. 248.

Prof. Dr. Ir. R. J. Forbes, *Van Newton naar Einstein*, een serie artikelen over wetenschapsmensen, hun werken en genootschappen. Shell-Nederland N.V., 1962.

Dr. L. N. H. Bunt, *Van Ahmes tot Euclides*, 4e druk, J. B. Wolters, Groningen, 180 blz., *f* 5,75. Deze druk is op kleine wijzigingen na gelijk aan de vorige.

C. J. Alders, *Algebra* dl III, 21/23e druk, P. Noordhoff, Groningen, *f* 2,25.

Dr. J. Bijl, Dr. D. Kijne, Drs. W. J. H. Salet, *Basis voor de analytische meetkunde*, 2e druk, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1963, *f* 4,50.

Prof. Dr. H. Hasse, *Höhere Algebra I, Lineare Gleichungen*, Sammlung Göschen, Bd 931, 5e druk, Walter de Gruyter en Co, Berlin, 150 blz., DM 3.60.

Prof. Dr. G. Hoheisel, *Integralgleichungen*, 2e druk, Sammlung Göschen, Bd 1099, Walter de Gruyter en Co., Berlin.

WISKUNDE WERKGROEP

Het bestuur van de Wiskunde Werkgroep meent, dat de fase van de informatieve bijeenkomsten over onderwerpen betreffende de moderne wiskunde afgesloten moet worden en dat overgegaan dient te worden op èen meer systematische aanpak.

Wij stellen ons daàrbij ten doel om te onderzoeken op welke wijze moderne wiskundige methoden een plaats kunnen vinden binnen de leerstof die voert tot het huidige examenprogramma.

Wellicht ten overvloede merken wij op, dat dit doel een ander is dan de staatscommissie zich heeft gesteld; deze immers streeft naar een volledig vernieuwd programma.

Wij hebben Prof. dr. F. v. d. Blij bereid gevonden een algemene inleiding tot deze problematiek te houden op zaterdag 7 maart a.s. om 3 uur in het Mathematisch Instituut te Utrecht, Boothstraat 17.

Wij stellen ons voor, deze inleiding op dezelfde middag te laten volgen door een bespreking omtrent de verdere uitwerking van onze plannen.

Daarbij gaan onze gedachten in de richting van het formeren van een aantal subgroepen, zoals b.v. voor functiebegrip, vectorbegrip, verzamelingsleer, logica, e.a. Deze groepen zouden tot opdracht moeten krijgen bepaalde stukken bestaande leerstof om te werken in moderne zin.

Het is duidelijk, dat bij deze opzet de wijze van samenstelling van de groepen zeer belangrijk is. Het bestuur zou dan ook graag zo spoedig mogelijk, in ieder geval voor 15 maart, van u willen vernemen of en zo ja, in welke subgroep u eventueel ingedeeld zoudt willen worden.

Het bestuur:

Prof. dr. H. Freudenthal, voorz.
drs. H. C. Vernout, secr.-penn.
drs. H. J. Jacobs jr.

Alle correspondentie aan de secretaris:
van Nouhuysstraat 11, Haarlem.

n.b. Mocht u nog geen lid van de Wiskunde Werkgroep zijn, maar toch aan deze komende activiteiten willen deelnemen, geeft u dan als lid op. Dit kan door *f* 5,— te gireren (voor W.V.O.-leden *f* 4,—) op giro 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde Werkgroep te Haarlem. U bent dan lid voor het kalenderjaar 1964, en u ontvangt iedere maand ons Mededelingenblad.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

105. Voor welke waarden van n kan een gelijkzijdige driehoek in n niet noodzakelijk congruente gelijkzijdige driehoeken verdeeld worden?

106. In opgave 93 (Euclides, **38**, p. 318) werd gevraagd het maximale aantal paarden te vinden, dat op een schaakbord geplaatst kan worden zonder dat een van de paarden door een paardesprong een veld kan bereiken, waarop een ander paard staat. Het blijkt mogelijk 32 paarden op deze manier te plaatsen door ze allemaal op velden van dezelfde kleur te zetten. Er wordt nu gevraagd te *bewijzen*, dat meer dan 32 niet mogelijk is.

Het bewijs, dat in het volgend nummer geplaatst zal worden, is afkomstig van L. van den Brom.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

103. Laat 4.9.11 geschreven zijn in het a-tallig stelsel en 2.1.11 in het b-tallig. Dan is

$$4a^2 + 9a + 11 = 2b^2 + b + 11,$$
$$4a^2 + 9a = 2b^2 + b, \qquad (1)$$
$$a(4a + 9) = b(2b + 1).$$

We zien uit (1) gemakkelijk, dat $a < b < 2a$. Omdat een van de getallen a en b priem is, hebben a en b dan geen factor gemeen. Dus is a een deler van $2b + 1$. Omdat uit $a < b < 2a$ volgt

$$2a + 1 < 2b + 1 < 4a + 2,$$

is dan $2b + 1 = 3a$ ($4a$ kan niet, omdat $2b + 1$ oneven is). Dus is

$$2b + 1 = 3a$$
$$4a + 9 = 3b,$$

waaruit volgt $a = 21$ en $b = 31$. Het gevraagde getal is dus 1964.

Dit was de nieuwjaarsgroet van de heer Kootstra aan de lezers van Euclides. Van Dr. P. Bronkhorst te Eindhoven ontving ik een oplossing, waarbij de voorwaarde, dat een van de grondtallen priem is, wordt weggelaten. Er blijken dan oneindig veel oplossingen te zijn, welke we in het volgende nummer zullen geven. U hebt dus een extra opgave. (107).

104. De voortvarendheid, waarmee in het vorige nummer een oplossing gegeven werd, was wel enigszins verdacht. De oplossing was dan ook fout.

Onderstel we doen het experiment een groot aantal keren. Dan zal

in 50 % van de gevallen de eerste knikker wit, de tweede knikker wit en de getrokken knikker wit zijn,

in 25 % van de gevallen de eerste knikker zwart, de tweede knikker wit en de getrokken knikker wit zijn,

in 25 % van de gevallen de eerste knikker zwart, de tweede knikker wit en de getrokken knikker zwart zijn.

Nu weten we, dat de getrokken knikker wit is. Volgens het voorgaande is de kans, dat de eerste knikker wit is dan twee keer zo groot als de kans, dat de eerste knikker zwart is. De kans, dat de eerste knikker wit is, is dus $\frac{2}{3}$.

De fout in de oorspronkelijke beantwoording was, dat we er geen rekening mee hielden, dat we te maken hebben met een kans a posteriori. D.w.z. gezien het feit, dat het experiment een bepaalde afloop heeft, is de kans op een zwarte en op een witte beginknikker niet meer gelijk. (Men ziet dit nog duidelijker, als men aanneemt, dat de getrokken knikker zwart is. Dan is de kans, dat de eerste knikker wit was, 0.)

GEMEENTE 's-GRAVENHAGE

Burgemeester en Wethouders roepen sollicitanten op voor de volgende met ingang van 1 september 1964 bij het gemeentelijk v.h.m.o. te vervullen volledige betrekkingen van leraar(ares) in de:

Wis- en natuurkunde

Maerlant-lyceum, Johannes Bildersstraat 11
Stevin-H.B.S., Raamstraat 28/Melis Stokelaan 1199

Natuurkunde

Dalton-lyceum, Aronskelkweg 1

Scheikunde en/of natuurkunde

H.B.S. „Beeklaan", Beeklaan 445

Schei- en natuurkunde

Stevin-H.B.S.

In de vacatures kan ook worden voorzien door de benoeming van twee of meer leerkrachten in een onvolledige betrekking.

Inlichtingen verstrekken de rectoren/directeuren. Voor het verkrijgen van huisvesting wordt de grootst mogelijke medewerking verleend. Geneeskundig onderzoek verplicht. Sollicitaties, inhoudende bereidverklaring eventuele tewerkstelling aan andere gemeentelijke v.h.m.o.-scholen te aanvaarden, uiterlijk 14 dagen na het verschijnen van deze oproep bij B. en W. in te zenden.

Prof. J. C. H. Gerretsen

LECTURES ON TENSOR CALCULUS AND DIFFERENTIAL GEOMETRY

'In dit mooie boek ontwikkelt de schrijver de moderne methoden van de differentiaalmeetkunde en past hij deze toe op de studie van krommen en hyperoppervlakken, welke in een lineaire ruimte met Euclidische metriek zijn ingebed . . .
Het eindoordeel is: een aanwinst in de rij van Nederlandse standaardwerken op wiskundig gebied, waarmee zowel de schrijver als de studenten in de wiskunde (waartoe hopelijk een groot aantal docenten in de wiskunde bij het V.H.M.O. zich wil rekenen) gelukgewenst kunnen worden . . . mag gehoopt en verwacht worden dat dit boek bij de opleiding van een groot aantal geïnteresseerden een belangrijke rol gaat spelen."

W. J. Claas in „Euclides".

1962; 202 blz.; geb. f 27,50.

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Wiskundeboeken voor het V.H.M.O.

Dr. H. Streefkerk

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M.O. EN V.H.O.

I (5e druk) **f 3,25** - II (4e druk) **f 3,50** - III (3e druk) **f 3,75**

„De boeken munten uit door strenge en tegelijk duidelijke behandeling van de theorie. In de aanhangsels wordt nog eens dieper op enkele moeilijke kwesties ingegaan."

(*Weekblad van het „Genootschap"*)

Dr. D. J. E. Schrek

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

3e druk, met afzonderlijk antwoordenboekje **f 3,90**, geb. **f 4,60**

„Een uitstekend boek voor het V.H.M.O. in elk mogelijk opzicht!"

(*Nieuw Tijdschr. voor Wiskunde*)

Drs. J. C. Kok e.a.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

voor het V.H.M.O. - **f 4,40**, gekartonneerd **f 4,90**

„Een korte en prettige behandeling van de differentiaal- en integraalrekening met een serie toepassingen, welke in een afzonderlijk hoofdstuk opgenomen is. Grote aandacht is besteed aan de vraagstukken, die dan ook een aanzienlijk deel van het boek in beslag nemen."

(*Economisch Beheer/Advies*)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

ALGEBRA VOOR M.M.S.

2e druk **f 3,75**

„Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van de verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen... van harte aanbevolen."

(*Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs*)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

Deel I (2e druk) - **f 3,90** - Deel II - **f 4,50**

„Hoewel deze boeken niets bevatten, dat men spectaculair zou kunnen noemen, is zowel om hun inhoud als om hun uiterlijke vorm - ik denk ook aan de aardige omslag - een gelukwens voor de schrijvers en de uitgeefster wel op zijn plaats."

(*Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs*)

PN NOORDHOFF GRONINGEN

Alle uitgaven zijn zowel bij de uitgever als via de boekhandel verkrijgbaar