EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

II — 1 OKTOBER 1963

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

LOFZANG OP DE MEETKUNDE [1])

door

Prof. dr. N. H. Kuiper

Bennekom

Citaat

op de beknopte en klaare

GROND-BEGINSELEN

der

MEETKONST

In 't ligt gegeven, door

Pieter Warius

Schoolmeester tot Oostwoud, groot Liefhebber der Wiskonst, en onvermoeid Arbeider in deselve.

Meetkonstenaren, streepetrekkers,
Hoekmeeters, weest nu vry verblyd.
Spring op van vreugde, dit's wat lekkers,
Zie Wysheyd, groeid nog door de tyd.

Euclid', u meetsnoer voor veel Jaaren,
Komt nu, so fraai gedost, in 't ligt,
Dit werk kan Eeuwen evenaaren,
Euclid' heeft ieder een verpligt.

U konst, heeft hy ten top gevyselt,
't Onnutte heeft hy afgeweert.
Verwarringe, tot gruis verbryselt.
't Is overtuigend, 't geen hy leert.

Dit word op nieuw, u aangeweesen,
Soo bondig, kragtig, wel ter sneed,
Dat men dubbeld dankbaar wesen,
Aan Warius, die de uitgift deed.

---

[1]) Voordracht vakantiecursus van het Mathematische Centrum, Amsterdam, 1962

Dees schenkt, dat meer is, ook 't verand'ren
Der streepen, hoekig of vierkant.
Hoe dat dit slingert door malkand'ren,
Als m'af- of toe-doet, na u trant.

Prys Warius, syn nutten yver,
Die konstiglyk dees schat ontsloot,
Geef lof aan soo een braave schryver,
Vlegt Eerekranssen, na syn doot.

J. P.
Schoolhouder.

Uit een Nederlandse uitgave van enige der boeken van Euclides, derde druk, Wed. J. Loots en T. Swigters, Boek- en Zeekaartverkooper en Graadboogmaker in de Nieuwe Brugsteeg, in de Jonge Lootsman. Amsterdam Anno 1735.

0. *Inleiding*

De vakantiecursus van het Mathematisch Centrum in 1962 staat evenals die van 1960, in het teken van de modernisering van het V.H.M.O. wiskunde onderwijs. In 1960 heb ik aan een groot aantal voorbeelden in het wiskunde onderwijs onder meer in het meetkunde onderwijs laten zien, hoe bepaalde aspecten van de moderne ontwikkeling der wiskundige wetenschappen reeds in het V.H.M.O. tot uiting kunnen komen, zodat de voorbereiding tot later gebruik van de wiskunde beter doel treft (zie [1])).

Tevens heb ik daarbij met betrekking tot *de stereometrie* gesteld, dat deze moet worden opgenomen in en *moet samengaan met de analytische meetkunde in behandeling met vectoren, en deze analytische meetkunde mag niet worden beperkt tot dimensie twee, doch dient ook te worden behandeld voor dimensie drie.* Dit voorstel sluit aan bij een veel drastischer voorstel van Prof. Dieudonné [2]) van het Institut des Hautes Etudes Scientifiques te Parijs, die de euclidische meetkunde van zijn ereplaats in het onderwijs wil ontheffen, en die de geruchtmakende zinspreuk „Weg met Euclides en weg met de driehoeken" lanceerde. Deze gedachte leeft niet alleen bij Dieudonné, doch ook bij vele andere belangrijke wiskundigen. Daarbij meent Dieudonné dat voor de meetkunde als uitgangs-

---

[1]) N. H. Kuiper: Welke gevolgen voor het V.H.M.O. brengt de moderne ontwikkeling der wiskundige wetenschappen met zich mede. Euclides 1961, p.257—284 (met vele literatuurverwijzingen).

[2]) Zie: J. Dieudonné. New thinking in school mathematics 1961, p. 31—49. Organisation for european economic cooperation. Office of scientific and technical personnel.

punt en fundament de 2-dimensionale en 3-dimensionale vectorruimten gekozen moeten worden, eerst zonder en dan met inprodukt. De stelling van Pythagoras zou daarmee een soort axioma worden, hetgeen wel bij velen weerstand opwekt.

Het is mijn bedoeling om in deze voordracht aandacht te besteden aan de schoolmeetkunde, waarbij ik aan vlakke meetkunde, stereometrie en analytische meetkunde bij het V.H.M.O. denk.

Eerst zal ik in par. 1 enige eigenschappen van de meetkunde noemen die lofwaardig zijn, en die het onderwijs in dit vak, in een vorm die in het midden blijft, wettigen.

Vervolgens zal ik in par. 2 de kritiek op het huidige meetkunde-onderwijs, in het bijzonder door Dieudonné geuit, formuleren en bespreken.

In par. 3 noem ik wensen die ten aanzien van het wiskunde- en meetkunde onderwijs in verband met voortgezette studie en gebruik, zuiver zowel als toegepast, bestaan. Een aantal wiskundige begrippen kunnen worden geïntroduceerd, geïllustreerd of herkend in de gewone meetkunde. Welke zijn dat? Kan het onderwijs daarop richten en zodoende vruchtbaar zijn voor later gebruik? Dit is een vraag die ik in de vakantiecursus 1960 [1]) behandelde maar toen ook geenszins uitputtend of volledig.

In par. 4 geef ik suggesties voor een aanpak van de analytische meetkunde, die aan de genoemde wensen tegemoetkomt en misschien tamelijk vroeg voor leerlingen aanvaardbaar is of gemaakt kan worden, indien de leraar zich er eenmaal mee vertrouwd heeft gemaakt. In par. 5 noem ik een aantal affiene stellingen, met een analoge strekking.

Vraag: Kan de theorie in par. 4 en par. 5, na een eerste jaar experimentele meetkunde en genoeg algebra, in de tweede klas als uitgangspunt voor het meetkunde onderwijs dienen?

1. *Lof voor het onderwijs in de meetkunde van vlak en ruimte*

a. De leerling leert bij het vak meetkunde het onderscheid tussen „het gegeven" en het „te bewijzen". Hij oefent in *het maken van logische gevolgtrekkingen.* Volgens Choquet (Parijs) leert de leerling in het leeftijdsinterval 13—16 wat een bewijs is, en er ontwikkelt zich in hem een ware en hevige dorst naar logica en deductieve redenering. In deze tijd waarin veel over modernisering van het V.H.M.O. wordt gedacht, hoort men wel vaak opmerken dat de meetkunde niet het enige wiskundevak is waarin gededuceerd wordt. Het is dus ook niet het enige vak waaraan het deduceren geleerd kan worden. En ook dat sommige andere axiomastelsels veel eenvoudiger zijn, en *daarom* beter als eerste oefenstof gekozen kunnen worden. In de meetkunde echter hoort bij elke gededuceerde stelling of bewering een verwante bewering over potloodstrepen op papier, of beter gezegd over de natuurkundige ruimte waar we in zijn. Eerst langzaam zal zich bij vele leerlingen het inzicht ontwikkelen, dat de gevonden beweringen opgevat kunnen worden als *waar uitsluitend in hun relatie tot de axioma's* of grondbeweringen. De leerlingen hebben de beweringen echter eerst aanvaardbaar geacht, en dus aanvaard, op grond van de juistheid (binnen de meetnauwkeurigheid) van hun fysische interpretatie. Een volledige scheiding van de twee interpretaties, namelijk als wiskunde en als natuurwetenschap, is voor vele leerlingen bij het begin te moeilijk. Anders gezegd: de leerling krijgt reeksen beweringen voorgeschoteld waarvan hij de fysische interpretatie en waarheid kan beamen; hij went aan zulke reeksen beweringen; de mate waarin hij de wiskundige interpretatie en logische juistheid der deducties als zodanig zal kunnen waarderen neemt daarbij allengs toe.

Dit betekent dat de *oefening in het deduceren bij voorkeur in de meetkunde* moet plaatsvinden en wel uit didactische overwegingen. Ook al zou voor 20 % van de leerlingen de oefening in het deduceren aan andere onderdelen van de wiskunde even goed verlopen, voor 80 % zou dit een ramp betekenen.

Vraag: Wat is de mening van leraren over deze conclusie?

b. De leerling raakt *vertrouwd met het vlak en met de ruimte.*

Daarmee bedoel ik dat hij het meetkundige inzicht van de ervaren timmerman krijgt, zonder te timmeren. Hij begrijpt wat het primitieve is in een primitief schilderij van een tafel met een bord erop. Hij weet of kan begrijpen dat de kortste verbinding van twee punten op aarde langs een grote cirkel loopt, die bijv. door de Noordpool gaat.

Zijn vertrouwd zijn in de ruimte kan blijken uit zijn tekeningen van planten, dieren, huizen, plattegronden en uit zijn vermogen zulke tekeningen te begrijpen. Dit alles is voor de leerling van *praktische betekenis, en nuttig.* De vertrouwdheid met vlak en ruimte steunt uiteraard voor een belangrijk deel op de kennis van een aantal stellingen, die dus geleerd moeten worden.

c. Tijdens het onderwijs in de meetkunde heeft men reeds na enige lessen de mogelijkheid van een groot aantal vraagstukken, van uiteenlopende moeilijkheid wat de oplossing betreft. Een deel van de vragen ligt voor de hand, zodat de begaafde leerling zelf al eens op zo een „nieuwe" vraag kan komen Ik bedoel dus niet alleen het beantwoorden van een vraag, maar ook het vinden van een vraag. *Het initiatief van de leerling wordt daarmee gestimuleerd en geprikkeld; de creatieve of inventieve leerling ondervindt zijn vermogen tot het vinden van iets nieuws,* dat niet alleen abstract waar is, maar ook voor zijn ogen in figuren (praktisch) waar blijkt te zijn (uitkomt). Juist daarom is er meer kans dat hij een ontdekking doet. De slimheid wordt beloond met succes. Dit geldt misschien vooral voor de meer begaafde leerling. Maar die heeft tenslotte ook recht op hem passend onderwijs.

d. Ook velen, die niet beroepswiskundigen zijn geworden, kunnen onderschrijven dat het onder c. genoemde een geestelijk genot veroorzaakt, dat bij de meetkunde en stereometrie meer voorkomt dan bij de andere onderdelen der schoolwiskunde. *De leerling geniet.* (N.B. het genieten is een wezenlijk aspect van een stuk cultuur dat leeft.)

e. Het geven van een definitie van intuïtie, in het bijzonder bij de meetkunde, is moeilijk. Maar misschien vindt u aanvaardbaar wanneer ik zeg dat intuïtie het bezit van geselecteerde feitenkennis of ervaring impliceert, en dat een goede intuïtie betekent dat deze selectie uit de kennis veelomvattend is, zonder noodzakelijk van grote technische omvang te zijn, en vruchtbaar (efficiënt) bij het zoeken van oplossingen.

Een groot aantal wiskundige begrippen hebben namen die aan de meetkunde herinneren. Deze begrippen kunnen in de meetkunde worden geïllustreerd. Soms kunnen zij binnen de meetkunde worden geïntroduceerd als min of meer speciale gevallen. De *intuïtie* van de wiskundegebruiker *met betrekking tot deze abstracte begrippen krijgt vorm of wordt verstevigd aan de hand van de gewone meetkunde.*

Een meetkundige interpretatie of analogon kan maken dat de leerling een wiskundige situatie of bewijs in een oogwenk kan overzien. Zo kan men bijv. alle gevallen betreffende twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden in een oogwenk overzien door te denken aan de mogelijke standen van twee rechte lijnen in een vlak. (Analoog n vergelijkingen en n onbekenden, later, indien de kennis over deze toestand, in enkele meetkundige termen wordt samengevat). Het nut van meetkundige beschouwingen bij de analyse werd kortgeleden uitvoerig belicht door Professor Lekkerkerker in zijn inaugurele rede aan de gemeentelijke universiteit van Amsterdam met titel „Meetkundige voorstelling". Anderzijds kan worden opgemerkt dat sommige wiskundigen en andere personen geheel zonder zo een „meetkundige" behoefte leven en werken. De meetkundige kan tegenwoordig misschien worden opgevat als de wiskundige, die gaarne de weg naar de resultaten ontsluit met behulp van enige belangrijke begrippen, die intuïtief inhoud bij hem krijgen of hebben. Het onderscheid tussen iemand die moderne meetkunde doet en iemand die moderne algebra doet wordt bij deze definitie wel zeer klein. Ook sommige algebraici zouden meetkundigen kunnen worden genoemd.

f. Vele praktisch belangrijke wiskundige begrippen en technieken kunnen reeds in het V.H.M.O. in een of andere vorm optreden, waardoor de leerling *voorbereid* wordt tot *later doeltreffend gebruik* van wiskunde in diverse wetenschappen. Zie [1]). Men denke aan groepen, verzamelingen, symbolen ervoor, afbeeldingen, functies, topologie, vectoren.

Overzicht lof

a. deduceren
b. vertrouwdheid met vlak en ruimte; praktisch nut
c. creativiteit en inventiviteit geprikkeld
d. genot
e. opbouw intuïtie en steun voor belangrijke wiskundige begrippen
f. voorbereiding voor later te gebruiken wiskunde.

2. *Kritiek*

Dieudonné [2]) heeft weliswaar kritiek op de schoolmeetkunde, maar deze kritiek is naar mijn smaak nog te weinig uitgewerkt. Daarom leek het mij nuttig de kritiek niet slechts te reproduceren, maar ook dieper erop in te gaan.

a. *De schoolmeetkunde schiet te kort in eenheid, beknoptheid en efficiëntie van gebruikte begrippen.* Het is een hoop stellingen waarin men geen structuur onderscheidt, en ook valt niet in te zien waarom de hoop niet groter of kleiner zou moeten zijn. De genoemde eigenschappen eenheid en beknoptheid zijn echter voor elke wetenschap onmisbaar, wil men de overstelpende ontwikkeling in de breedte van de wetenschap bijhouden. Bij een toegenomen eenheid, beknoptheid en efficiëntie van begrippen zal men bij het kennen van evenveel (maar andere) stellingen een veel groter gebied overzien en beheersen. Dat dit mogelijk is, is de strekking van deze kritiek.

b. Een deel van het huidige meetkunde onderwijs bestaat in de *uitvoerige bestudering van* een aantal *wiskundig doodlopende wegen*. De bedoelde stof mist de lofwaardige eigenschappen 1b, e en f.

Ik denk hier bijv. aan het volgende onderwerp: Om- en ingeschreven cirkel; formules voor R en r; koordenvierhoek. Men kan er sommen over maken, maar net zo goed kan men andere sommen maken. Dit is dus een deel van het onderwijs in de derde klas van de H.B.S.

c. De ontwikkeling van de wiskunde weerspiegelt zich in het gebruik van nieuwe meer doeltreffende begrippen en namen en symbolen voor die begrippen. In de gebruikelijke schoolmeetkunde heerst echter nog een *ouderwets* en *onvruchtbaar taalgebruik*. Zo mist men bijv. in de schoolmeetkundeboeken de bewering dat *een lijn een verzameling punten is*. Het woord verzameling is in de wiskunde thans fundamenteel, en het komt in alle delen van de wiskunde veel voor. Zelfs zonder de stof te veranderen kan een moderner taalgebruik de gedachten van de leerlingen beter richten en geschikt maken voor later onderwijs of wiskundegebruik. De invoering van de symbolen ϵ, $\subset$, $\cap$ en $\cup$ helpt daarbij. Behalve het begrip en woord *verzameling* dienen ook de woorden *relatie, equivalentie, afbeelding, functie,* (bijv. op een vlak en met reële getallen als waarden), *vectorruimte, groep van afbeeldingen, symmetrie, groep,* zeker niet vermeden te worden, indien die begrippen inderdaad in de stof voorkomen. De volgende beweringen kunnen bijv. zonder moeite ingelast worden. *Een translatie is een afbeelding. Een beweging is een afbeelding. Een meetkundige vermenigvuldiging is een afbeelding. Een coördinaat op het vlak of in de ruimte is een* (lineaire) *functie. De translaties vormen een groep.* (Vergelijk verder[1]) vak.cursus 1960 pag. 269—273, deel II 3.)

d. Er is *onvoldoende verband en aansluiting tussen V.H.M.O. en universitair onderwijs in de wiskunde.* De scholier krijgt op school een verkeerde indruk van de wiskunde. Het onderwijs in de wiskunde aan universiteiten en hogescholen gaat namelijk sneller met de tijd mee dan het V.H.M.O., en de ex-scholier heeft veel energie en tijd nodig om de grote overgang te verwerken. Die overgang is zwaar, niet omdat een stuk stof wordt overgeslagen, maar wel omdat de belangstelling anders is gericht, en omdat de methoden en met name het taalgebruik aan hogeschool en universiteit zijn veranderd en moesten veranderen. De bezwaren geuit onder c. zijn mede oorzaak van de nu genoemde kritiek. Het bezwaar geldt niet slechts voor hen die wiskunde gaan studeren, doch ook voor economen, landbouwkundigen, natuurkundigen en andere wiskundegebruikers.

e. Het is niet voldoende om dezelfde stof met een modernere terminologie te behandelen, maar het is nodig de tegenwoordig belangrijk geachte wiskundige begrippen meer te laten domineren, ook in het meetkunde onderwijs. Tevens is *gewenst dat de stof zo behandeld en gewijzigd wordt dat voor de verschillende stellingen duidelijk wordt binnen welk kader* (met name bijvoorbeeld het kader der affiene meetkunde) *zij gelden.*

In de laatste jaren is in dit verband al veel en met goede resultaten geëxperimenteerd met een nieuwe opzet van de meetkunde. De oude axioma's van Euclides (of Hilbert) zijn ongeschikt voor 13-jarigen. Consequente behandeling is voor deze leerlingen onmogelijk en in de praktijk heeft men een tussenvorm gegeven, waarbij niet duidelijk is in welke gevallen aan de aanschouwing ontleend wordt of mag worden, en wanneer streng gededuceerd moet worden.

In de nieuwe onderwijsexperimenten neemt men na een periode van wennen aan diverse figuren, aan symmetrie en aan beweging (dit wennen had ook reeds bij het L.O. kunnen geschieden), de *bewegingen of de spiegelingen* als uitgangspunt. Verg. ook: Bulens, de Groot, Habermann, Troelstra: Bewegingsmeetkunde, Wolters 1963. Daarmee komt men zeker aan vele wensen tegemoet. Diverse fundamentele begrippen krijgen de belangrijke plaats die ze verdienen. Toch valt niet alle kritiek vanzelf weg. De vectoren bijv. krijgen daarbij niet voldoende plaats of voorbereiding. De hele affiene structuur wordt bij de spiegel en beweegopzet van de meetkunde onder de tafel gewerkt.

Zo werd ik in het boek van Fladt-Kraft-Dreetz (Mathematisches Unterrichtswerk IV; Mittelstufe, Geometrie; Verlag Moritz Diesterweg) onaangenaam getroffen door de volgende definitie: *Rechten die in een vlak liggen heten evenwijdig, wanneer ze op eenzelfde rechte lijn loodrecht staan. Deze definitie is lelijk, omdat de evenwijdigheid een veel robustere eigenschap is dan de loodrechtheid.* Evenwijdigheid blijft behouden indien de figuur vervangen wordt door een nieuwe vlakke figuur, verkregen door evenwijdige projectie uit de eerste. Loodrechtheid kan daar niet tegen. Evenwijdigheid hoort in de affiene meetkunde, loodrechtheid niet. Voor de definitie van evenwijdigheid is dus hier een verkeerd milieu gekozen. Het gevolg is dat de leerling onbewust lang zal blijven denken, dat evenwijdigheid alleen maar bestaat bij de gratie van loodrechtheid. Dit belemmert de juiste ontwikkeling van zijn begrip van vectoren en lineaire afhankelijkheid, waarbij loodrechtheid of inprodukt een geheel apart aspect is, dat er net zo goed niet als wel bij genomen kan worden.

Een bezwaar van dezelfde soort heb ik tegen de definitie van puntspiegeling in het genoemde boek. De definitie luidt aldus: Een draaiing over een hoek van 180° heet een halfdraaiing. De daardoor gedefinieerde afbeelding heet ook een puntspiegeling.

Echter de puntspiegeling behoeft helemaal niet te steunen op het hoekbegrip (graden). Het begrip behoort bij de affiene meetkunde. Het is geheel vastgelegd door het begrip midden.

Algemeen kan aan een alleenzaligmakende opzet van de meetkunde met bewegingen en spiegelingen worden verweten, dat de belangrijke plaats van de affiene eigenschappen niet wordt onderkend, en dat daarmee het gebruik en de voorbereiding van vectorruimten wordt belemmerd.

Wat betreft de opzet van de meetkunde merk ik op, dat men algemeen van mening is dat een consequente axiomatische behandeling niet in aanmerking komt voor 12—15 jarigen (zie [2]) blz. 47 par. 157).

3. *Wensen*

De meetkunde moet zo worden behandeld dat vooral *die begrippen, woorden en symbolen* op de voorgrond komen en een belangrijke rol spelen, *welke* A. *in de meetkunde orde brengen*, en *welke* B. *onmisbaar en fundamenteel zijn bij elk voortgezet gebruik van wiskunde.*

Zulke begrippen zijn genoemd in de onderstaande indeling in vier paragrafen volgens afnemende urgentie. I en II dienen onverwijld te worden toegepast en ingevoerd. III zal in de hogere klassen pas tot zijn recht kunnen komen.

I.a. *Verzameling* met de symbolen $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$.

N.B. Het nut van gebruik van deze symbolen ligt in het gedwongen denken aan verzamelingen. Het nut ligt voor het V.H.M.O. niet in de kortheid van notatie!

b. *Afbeelding*, zoals translatie, beweging, spiegeling, projectie, functie.

c. *Functie*, zoals een coördinaat op vlak of ruimte (gedefinieerd voor punten van het vlak met getallen als waarden), afstand tot een lijn, afstand tot een punt (zie par. 4).

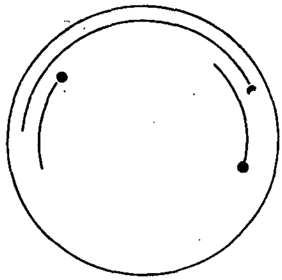
II. *Affiene meetkunde.* Hieronder vallen: evenwijdigheid, midden, evenredige lijnstukken, meetkundige vermenigvuldiging, puntspiegeling. De strekking van deze wens is dat deze begrippen als bij elkaar behorend worden gezien (zie par. 5).

III.a. *Vectoren* en lineaire afhankelijkheid in dimensie twee *en drie.* Ook vectoren met in-produkt.

b. *Groep*, zoals die der vectoren. Groep der translaties (dim. 1: optelgroep der getallen). Groep der rotaties om een punt $\simeq$ optelgroep der georiënteerde hoeken $\simeq$ optelgroep der getallen modulo 1 (of 2π of 360). N.B. *voorbeeld van een „niet-groep"*: de positieve getallen vormen geen groep bij de optelling. Groep der bewegingen.

c. *Equivalentie,* zoals evenwijdigheid, gelijkheid, congruentie. *Equivalentieklasse* zoals richting (lijnen) en hoekgrootte (hoeken) bij diverse begrippen bij het woord „hoek".

IV.a. *Topologie,* in het bijzonder *samenhang, omgeving* en *continuïteit.* Een lijn (punt) verdeelt het vlak (een lijn) in drie samenhangende delen nl. de lijn (het punt) en twee halfvlakken (halfrechten) zonder randpunten. Men zou de *oriëntatie* in een rechte als volgt kunnen definiëren door middel van halfrechten. Twee halfrechten (zonder randpunt) op een rechte heten oriëntatie-equivalent indien een van beide bevat is in de andere. Een equivalentieklasse is een oriëntatie van een rechte (ook genaamd een gerichte rechte). Analoog kan een oriëntatie van het vlak worden gedefinieerd uit een halfvlak met op de randrechte een halfrechte. (Via vectoren gaat echter een betere definitie op hoger niveau (determinant $>$ 0).



Oriëntatie op een cirkel.

Drie evenwijdige lijnen verdelen twee hen snijdende lijnen in evenredige stukken, ook voor geval deze stukken niet een rationale verhouding hebben. Dit kan in verband met continuïteitsoverwegingen volgen uit dezelfde bewering voor rationale verhoudingen.

b. *Relatie* bijv. equivalentie, functie, $>$ (ordening).

c. *Ordening.* Het begrip ordening en tussen speelt in vele moderne behandelingen van de schoolmeetkunde een grote rol [3]. Naar mijn smaak komt het begrip in belangrijkheid na topologie en oriëntatie. In het bijzonder voor de gesloten kromme (cirkel) acht ik *oriëntatie*

[3]) Grundzüge der Mathematik II, Geometrie. Behnke u.a. Göttingen 1960.

een woord dat voorkeur verdient boven cyclische ordening. Oriëntatie op cirkel te definiëren door oriëntatie op half open cirkelsegmenten (met kop en staart). Twee zulke zijn equivalent, indien ze gemeen hebben a) een stuk dat bij een van twee de kop bevat, b) een stuk dat bij een van twee de staart bevat, òf indien ze equivalent zijn met een ander. Zie de figuur.

d. *Vektoren der* R^n.

4. *Lineaire functies in de analytische meetkunde*

4.1. *Een lineaire functie* (coördinaat)

In het algemeen zal meetkunde onderwijs beginnen met het demonstreren van een aantal beweringen over punten en lijnen, die op papier in tekening gebracht goed schijnen uit te komen. Sommige van die beweringen, die vruchtbaar zijn voor de verdere logische ontwikkeling van de theorie worden vervolgens als uitgangspunt gekozen (axioma). De leerling zal daar geen bezwaar tegen hebben, indien hij ziet dat de bewering, in de natuurkundige zin geïnterpreteerd, waar is. Voor de analytische meetkunde gaat de experimentele inleiding als volgt.

Neem een stuk papier en beschouw alle punten aan één kant van een rechte lijn (gespannen touw) p. Voor elk punt kan men de afstand ξ tot de rechte lijn p beschouwen. Schrijf dat getal bij enige punten. Men constateert dat de punten waarvoor $\xi = 1$ op een rechte schijnen te liggen. Zo ook voor de punten met $\xi = 2$ of algemeen $\xi =$ constant (> 0). Men kan hetzelfde ook voor de andere kant van de rechte lijn p doen. Na enige oefening met zo een functie „afstand tot rechte" en met de functie „afstand tot punt P", vervolgen we echter anders. Beschouw de andere kant van de rechte lijn p, en laat voor elke punt aldaar ξ het tegengestelde van de afstand tot p zijn. Aan elk van de punten aan deze kant wordt dus een negatief getal toegevoegd. Er schijnt te gelden dat algemeen de punten met $\xi =$ constant een rechte lijn vormen.

ξ is een functie op het vlak. Zij voegt aan elk punt van het vlak een getalwaarde toe. Men kan met die functie drie verzamelingen punten onderscheiden namelijk: de lijn p met $\xi = 0$; de ene kant met $\xi > 0$; en de andere kant met $\xi < 0$.

In de ruimte kan men analoog te werk gaan t.o.v. een vlak. Is dit vlak horizontaal op de vloer dan kan de functie „hoogte" heten. Men heeft punten met hoogte nul, positief en negatief.

Na de experimentele bestudering van de genoemde functie ξ volgt de experimentele studie van de volgende functies.

2 (een constante functie), $\xi + 2$, 3ξ, $-\xi$, $3\xi + 2$. De studie bestaat in het noteren van functiewaarden bij een groot aantal punten. Al die functies hebben, zo leert het experiment, rechte lijnen als „niveaukrommen". Onder meer om die reden heten ze lineaire functies op het vlak.
Vraag: Is dit te verwerken voor 13—14-jarigen?

4.2. *Twee coördinaten op het vlak*

Teken twee elkaar snijdende lijnen p en q en definieer als boven lineaire functies ξ en η bij de lijnen p en q. (p en q niet noodzakelijk loodrecht!).
Experimenteel wordt vastgesteld dat de punten waarvoor $2\xi + \eta = 3$ op een rechte (schijnen te) liggen. Analoog voor $2\xi + \eta = 4$, of algemeen: $2\xi + \eta =$ constant. Studie van de functie $2\xi + \eta$ leert dat deze functie analoge eigenschappen heeft als de functie ξ. (Gebruik ruitjespapier en parallellogram-papier bij dit onderwijs.)
De experimentele studie van de functie $2\xi + \eta$ bestaat in het noteren van de functiewaarde voor een groot aantal punten. Het doel van de studie is het inzicht dat $2\xi + \eta$ even goed een functie op het vlak is als ξ, en met analoge eigenschappen. Hetzelfde geldt voor de functies $3\xi + 5\eta - 4$ en

$$a\xi + b\eta + c \quad \text{met} \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

In plaats van (ξ, η) gebruikt men ook andere symbolen, bijv. (x_1, x_2).
Experimenteel wordt vastgesteld dat bij elke keuze van twee getallen a_1 en a_2, bijv. 3 en 5, er precies één punt behoort, waarvoor de functies x_1 en x_2 juist de waarden a_1 en a_2 aannemen. Dit geldt ook voor de functies $y_1 = 2x_1 + x_2$ en $y_2 = x_1 - x_2$ bijvoorbeeld.
Op een dergelijke wijze wordt de leerling rijp gemaakt voor het affiene aspect in de analytische meetkunde en hij went aan een ruim begrip van functie. Hij zal nu het volgende uitgangspunt kunnen aanvaarden.

4.3. *Uitgangspunt voor de affiene analytische meetkunde*

Een vlak is een verzameling elementen genaamd *punten*. Sommige verzamelingen punten in het vlak heten *lijnen*. Sommige functies op het vlak heten *lineaire functies*.
Er zijn lineaire functies ξ en η, met de volgende eigenschappen.
(1). De punten van het vlak worden ééneenduidig door de getal-

lenparen die de waarden van ξ en η vormen, voorgesteld.

(2). De lineaire functies zijn juist de functies

$$a\xi + b\eta + c,\ a, b, c \text{ getallen met } (a, b) \neq (0, 0).$$

Er bestaan vele zulke paren functies (ξ, η). Zo een paar heet *een paar coördinaten.*

Is ξ een lineaire functie en c een getal, dan heet de verzameling punten P waarvoor $\xi(P) = c$, een rechte lijn.

Nu is het uitgangspunt beschreven [4]) en men kan streven naar de volgende stellingen.

Stelling. Is p een rechte lijn dan bestaat een paar coördinaten (ξ, η) zo dat p bestaat uit de punten P, waarvoor $\xi(P) = 0$.

Stelling. Twee rechte lijnen hebben alle punten, één punt of geen punt (evenwijdig) gemeen.

Bewijs: rekenen. Kies coördinaten zo dat de eerste lijn is $\xi = 0$.

Stelling. Zijn 2 lijnen snijdend, dan bestaan coördinaten (ξ, η) zó dat de lijnen $\xi = 0$ en $\eta = 0$ zijn.

Stelling. Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.

Stelling. Door een punt P buiten een lijn p gaat precies één lijn $q \parallel p$.

Vraag: Het bovenstaande lijkt mij geschikt als uitgangspunt voor de analytische meetkunde. De vraag is echter of deze stof verwerkt kan worden door leerlingen van de 2e klas, die in de eerste klas reeds het onderwerp twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden gehad zouden hebben en tevens wat experimentele vlakke meetkunde?

Uitgaande van het bovenstaande kan men *translaties* definiëren en bewijzen:

A1. Bij twee punten P en Q bestaat precies één translatie τ met $\tau(P) = Q$.

A2. Is p een lijn en τ een translatie, dan zijn p en $\tau(p)$ samenvallend of evenwijdig. (Samenvallend kan een bizonder geval van evenwijdigheid heten.)

A3. Is $\tau(p) = p$, $p' \parallel p$, p'' snijdt p in een punt, dan is $\tau(p') = p'$, $\tau(p'') \neq p''$.

A4. De translaties vormen een groep.

Is F een figuur en τ een translatie, dan heten F en $\tau(F)$ *translatie-congruent* (t-congruent).

---

[4]) Men vergelijke deze opzet met functies met de volgende bewering uit een schoolleerboek over analytische meetkunde: „$Ax + By + C = 0$ is de verg. van een rechte lijn. $L \equiv Ax + By + C = 0$ is een symbolische vergelijking van een rechte lijn. Het r.lid is in het l.lid door één letter voorgesteld."

5. *Affiene meetkunde* („Translatie meetkunde")

Zonder dat mij geheel duidelijk voor de geest staat, *waar* de onderwerpen van deze par. in de stof zouden kunnen passen, bied ik ze u ter overdenking aan [5]).

Voornamelijk op grond van stellingen A1, 2, 3, 4 van de vorige paragraaf kan een aantal bekende affiene eigenschappen worden gevonden.

Stelling (5.1). Snijden de evenwijdige lijnen p en q de lijn r, dan is $p \cup r$ t-congruent met $q \cup r$.

Bewijs. Noem de snijpunten A en B. De translatie die A in B afbeeldt, beeldt $p \cup r$ af op $q \cup r$ volgens A2).

Stelling (5.2).

a. Elke figuur is t-congruent met zichzelf.

b. Als F t-congruent is met F', en F' met F'', dan F met F''.

c. Twee willekeurige punten F en F' zijn t-congruent.

d. t-congruentie is een equivalentie.

Definitie. Als het lijnstuk AB t-congruent is met het lijnstuk BC ($AB \stackrel{t}{=} BC$) dan heet B het ***midden*** tussen A en C.

Definitie. Een parallellogram (par.) is een niet-collineaire vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.

Stelling (5.3). In een parallellogram zijn twee willekeurige overstaande zijden t-congruent.

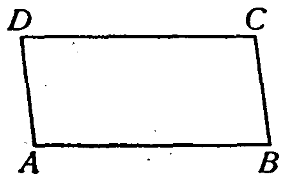
Bewijs. Stel $ABCD$ is een par. Beschouw de translatie τ, die A in D overvoert. Er geldt:

$$\tau(A) = D$$

$\tau(\text{lijn } AB) = (\text{lijn } // AB, \text{ door } D) = \text{lijn } DC$ (geg.)

$\tau(\text{lijn } AD) \doteq \text{lijn } AD$ volgens A2.

$\tau(\text{lijn } BC) = \text{lijn } BC$ volgens A3.



Dan volgt

$$\tau(B) = C$$

Dus $\tau(AB) = DC$, het gestelde.

Stelling (5.4). Is in vierhoek $ABCD$: $AB \stackrel{t}{=} DC$, dan is $ABCD$ een par.

---

[5]) Terecht merkte Prof. Freudenthal in de discussie op dat de translatiemeetkunde binnen het kader van de gewone meetkunde weinig inhoud (vlees) heeft, en dus niet tot een hoofdschotel mag uitgroeien.

Bewijs. We moeten alleen maar bewijzen: $AD \parallel BC$.

Omdat $AB \overset{t}{=} DC$ bestaat een translatie τ zo dat

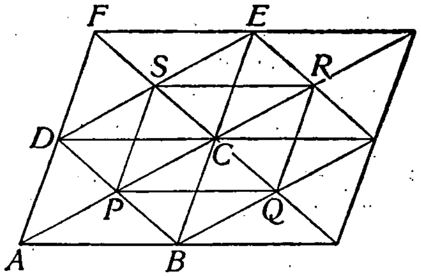
$$\tau(AB) = DC,\ \tau(A) = D,\ \tau(B) = C$$
$$\tau(\text{lijn } AD) = \text{lijn } AD \quad (\text{A2})$$
$$\tau(\text{lijn } BC) = \text{lijn } BC \quad (\text{A2})$$

Volgens A3 is dan $BC \parallel AD$.

Stelling (5.5). In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

Geg. $ABCD$ is een par., $AC \cap BD = P$.

Te bew. $AP \overset{t}{=} PC$.



Bewijs. Noem de translatie welke A in D afbeeldt τ:

$$\tau(ABCDP) = DCEFS$$

Nu is $AP \overset{t}{=} DS$. Dus $APSD$ is een par., en PS is t-congruent met AD.

Analoog vindt men Q en later R. Vervolgens beschouwt men de translatie τ' welke A in P overvoert en constateert, omdat $APSD$ een par. is, dat $\tau'(D) = S$. Voorts

$\tau'(\text{lijn } AP) = \text{lijn } AP$

$\tau'(\text{lijn } BD) = (\text{lijn } SC = \text{lijn } CQ) = \text{lijn } QS \Rightarrow \tau'(P) = C$

Dus $AP \overset{t}{=} PC$.

P is het midden van AC.

Stelling (5.6). Een par. heeft een middelpunt.

Stelling (5.7). Als in vierhoek $ABCD$ de diagonalen elkaar middendoordelen in P, dan is $ABCD$ een par.

Bewijs. Teken $CQ \overset{t}{=} PB$, en toon aan: $AB \overset{t}{=} DC \overset{t}{=} PQ$.

Stelling (5.8). Stel p, q en r zijn drie evenwijdige lijnen gesneden door s (in A, B, C) en t (in D, E, F). Als B midden tussen A en C ligt, dan ligt E midden tussen D en F.

Hiermee kan men rationale verhoudingen van evenwijdige lijnstukken definiëren en de stelling over drie evenwijdige lijnen die twee lijnen snijden, waarvan een in een rationale verhouding. Daarbij sluiten aan de meetkundige vermenigvuldiging van figuren met rationale factor en (bijv.) de puntspiegelingen. Loodrechtheid speelt hierbij geen enkele rol.

POOL EN POOLLIJN

door

W. A. VAN DER SPEK
(Amsterdam)

De definitie van poollijn, die prof. dr. B. L. van der Waerden in EUCLIDES 38 p. 277 voorstelt, laat nog een belangrijke vereenvoudiging toe. Het is nl. mogelijk, de poollijn van een punt t.o. van een cirkel met gebruikmaking van het begrip *machtlijn* (waarmede men de leerling zonder bezwaar eerder kan laten kennismaken) te definiëren op de volgende korte en duidelijke wijze:

De poollijn van een punt P t.o. van een cirkel met middelpunt M is de machtlijn van die cirkel en de cirkel op PM als middellijn.

Deze definitie heeft o.m. het voordeel, dat zij aansluiting geeft aan de gewone planimetrische constructie van de door P gaande raaklijnen ingeval P buiten de cirkel M ligt, en dat zij een goede gelegenheid om het begrip machtlijn in de schoolwiskunde wat meer „achtergrond" te geven, niet ongebruikt laat.

De afleiding van de poollijnvergelijking gaat nu zo:

Zijn gegeven het punt $P(x_0; y_0)$ en de cirkel

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \tag{1}$$

met middelpunt $M(a; b)$, dan heeft de cirkel op PM als middellijn de vergelijking

$$x^2 + y^2 - (a + x_0)x - (b + y_0)y + ax_0 + by_0 = 0. \tag{2}$$

Aftrekking van de overeenkomstige leden van (1) en (2) levert de vergelijking van de poollijn van P op:

$$(x_0 - a)x + (y_0 - b)y - ax_0 - by_0 + c = 0$$

of:

$$x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0. \tag{3}$$

Nog eenvoudiger wordt de afleiding, als men — zoals prof. v. d. W. doet — de oorsprong in M neemt:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4}$$

en

$$x^2 + y^2 - x_0x - y_0y = 0 \tag{5}$$

leveren dan door aftrekking:

$$x_0x + y_0y = r^2. \tag{6}$$

Het lijkt mij geen bezwaar, dat de leerling, na déze meetkundige grondslag van de poolverwantschap t.o. van een cirkel te hebben leren kennen, over de poollijn van een punt t.o. van een willekeurige kegelsnede niet méér verneemt dan dat haar vergelijking uit die van de kromme wordt afgeleid volgens hetzelfde recept als dat, waarmee men (3) uit (1) verkrijgt. Hierbij moge nog worden aangetekend, dat de beschouwing van (6) en (4) dit recept slechts ten dele leert kennen; ik zie er dan ook — anders dan prof. v. d. W. — geen voordeel in, bij de onderwerpelijke afleiding de coördinaatassen door M te leggen.

EEN EXPERIMENT

door

Dr. A. van Haselen
Tiel

Tijdens een werkweek was ik in de gelegenheid om met VIβ op één ochtend van 2½ uur een nieuw onderwerp te behandelen. Van deze les wil ik hier een verslag geven.

Het onderwerp was het artikel: „*Lineare Vectorräume und Lösungsmannigfaltigkeiten linearer Gleichungssysteme*" van G. Lange, gepubliceerd in „Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht", Heft 3 - 1 juli 1962.

Vóór de koffie gebruikte ik 1½ uur om de theorie uit te leggen en na de koffie nog 1 uur om de leerlingen vraagstukken te laten maken.

De beschikbare tijd bleek voor hen te kort te zijn om alles rustig te kunnen verwerken. De vraagstukken, die de leerlingen zelf maakten, leverden hun dan ook vrij veel moeilijkheden op.

De leerlingen vonden het onderwerp interessant en maakten thuis nog een paar vraagstukken, die ik op school behandelde. Het resultaat was niet zo goed als ik gehoopt had, maar als er voldoende tijd voor beschikbaar zou zijn, geloof ik, dat dit onderwerp voor de β's niet te moeilijk is.

De leerlingen waren bekend met het (inwendige) produkt van twee vectoren, met lineair onafhankelijke stelsels vectoren en met de vectorruimten R_1 en R_2. Vorig jaar had ik bovendien bij een werkweek ook met vectoren in R_3 gewerkt.

1. De vergelijkingen

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = p$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = q$$

kunnen worden opgevat als vectorvergelijkingen

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{x} = p$$
$$\bar{a}_2 \cdot \bar{x} = q$$

waarin $\bar{a}_1 = (a_{1,1}, a_{1,2})$ en $\bar{a}_2 = (a_{2,1}, a_{2,2})$.

We leiden de formule af voor de oplossing van deze vergelijkingen als $\bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$, dus als $\bar{a}_1 \,.\, \bar{a}_2 = 0$.

We beschouwen $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ als basis van het vectorveld en schrijven:

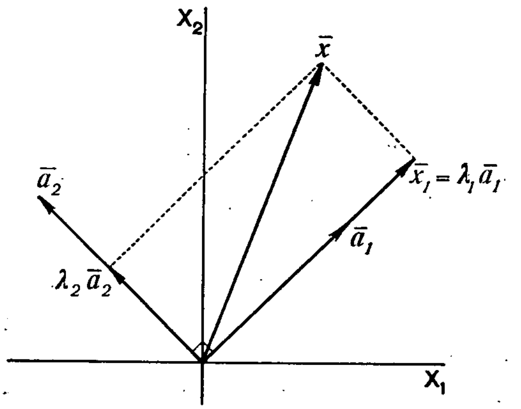


Fig. 1.

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2.$$

Dan is

$$\bar{a}_1 \,.\, \bar{x} = \bar{a}_1 \,.\, \lambda_1 \bar{a}_1$$
$$= \lambda_1 |\bar{a}_1|^2 = p,$$

dus

$$\lambda_1 = \frac{p}{|\bar{a}_1|^2}$$

en

$$\lambda_2 = \frac{q}{|\bar{a}_2|^2},$$

want $\bar{a}_1 \,.\, \bar{a}_2 = 0$. Dus

$$\bar{x} = \frac{p}{|\bar{a}_1|^2}\bar{a}_1 + \frac{q}{|\bar{a}_2|^2}\bar{a}_2.$$

Lossen we b.v. op

$$\begin{matrix} 3x_1 + 4x_2 = 10 \\ -4x_1 + 3x_2 = -5 \end{matrix} \quad \text{of} \quad \begin{matrix} (3, 4)\bar{x} = 10 \\ (-4, 3)\bar{x} = -5, \end{matrix}$$

dan is $\bar{a}_1 = (3, 4)$ en $\bar{a}_2 = (-4, 3)$, terwijl $\bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$.

Als $\bar{x} = \lambda_1(3, 4) + \lambda_2(-4, 3)$ vinden we dan:

$$\lambda_1 = \frac{10}{|3, 4|^2} \text{ en } \lambda_2 = \frac{-5}{|-4, 3|^2}$$

en

$$\bar{x} = \frac{10}{25}(3, 4) + \frac{-5}{25}(-4, 3) =$$

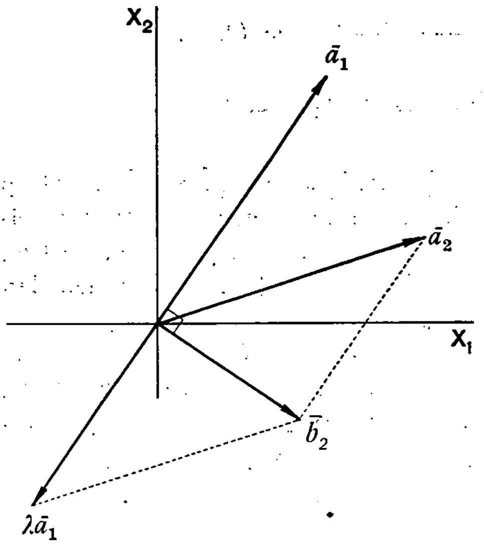


Fig. 2.

Voorbeeld.

Los op:

$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$3x_1 - x_2 = 4$$

of

$$(2, 1)(x_1, x_2) = 1$$
$$(3, -1)(x_1, x_2) = 4.$$

We berekenen λ uit

$\bar{b}_2 = \lambda(2, 1) + (3, -1)$

en $\quad \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_2 = 0,$

dus uit

$(2, 1)\{\lambda(2, 1) + (3, -1)\}$
$= 0.$

$$4\lambda + 6 + \lambda - 1 = 0,$$
$$\lambda = -1.$$

Dan is

$$\bar{b}_2 = -(2, 1) + (3, -1) = (1, -2)$$

en is

$$r = -1 \cdot 1 + 4 = 3.$$

Het nieuwe stelsel vergelijkingen wordt dan

$$(2, 1) \cdot (x_1, x_2) = 1$$
$$(1, -2) \cdot (x_1, x_2) = 3.$$

Volgens 1 is de oplossing hiervan

$$\bar{x} = \frac{1}{|2, 1|^2}(2, 1) + \frac{3}{|1, -2|^2}(1, -2) = \frac{1}{5}(2, 1) + \frac{3}{5}(1, -2)$$
$$= (1, -1).$$

Dus is $x_1 = 1$ en $x_2 = -1$.

Opmerking. Als $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ afhankelijk zijn, vinden we op deze manier $\bar{b}_1 = 0$, omdat $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ dan een R_1 bepalen. In deze R_1 is $\bar{b}_1 \perp \bar{a}_1$ alleen mogelijk, als $\bar{b}_1 = 0$. Het hangt dan van r af, of de vergelijkingen strijdig of afhankelijk zijn.

3. Hierna behandelde ik het voorbeeld:

$$\begin{array}{llll} \bar{a}_1 \cdot \bar{x} = x_1 + x_2 & = 3 & \text{dus} & \bar{a}_1 = (1, 1, 0) \\ \bar{a}_2 \cdot \bar{x} = 2x_1 + x_2 + x_3 & = 6 & & \bar{a}_2 = (2, 1, 1) \\ \bar{a}_3 \cdot \bar{x} = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = 14 & & \bar{a}_3 = (3, 5, 3). \end{array}$$

$$= \frac{2}{5}(3, 4) - \frac{1}{5}(-4, 3) = (2, 1).$$

De oplossing van de vergelijking is dus $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

2. Als $\bar{a}_1 \cdot \bar{x} = p$ en $\bar{a}_2 \cdot \bar{x} = q$, terwijl $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ niet loodrecht op elkaar staan, vervangen we dit stelsel door een gelijkwaardig stelsel $\bar{a}_1 \cdot \bar{x} = p$ en $\bar{b}_2 \cdot \bar{x} = r$, waarin $\bar{a}_1 \perp \bar{b}_2$. Hierbij bepalen we λ zo, dat $\bar{b}_2 = \lambda \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ en dus r zo, dat $r = \lambda p + q$. We kunnen dan 1 toepassen.

In de vectorruimte, bepaald door $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ en $\bar{a}_3$ construeren we op de manier van 2 een orthogonale basis $\bar{a}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$. We kiezen $\bar{b}_2$ zo, dat $\bar{b}_2 = \lambda \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ en $\bar{b}_2 \perp \bar{a}_1$. Verder kiezen we $\bar{b}_3$ zo, dat $\bar{b}_3 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_3$, $\bar{b}_3 \perp \bar{a}_1$ en $\bar{b}_3 \perp \bar{b}_2$. Dan is $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_2 = (1, 1, 0)\{\lambda(1, 1, 0) + (2, 1, 1)\} = 2\lambda + 3 = 0$,

$$\lambda = -\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Om het rekenwerk te vereenvoudigen, kiezen we -2 maal de vector, die uit (1) volgt voor b_2, dus

$$\bar{b}_2 = 3(1, 1, 0) - 2(2, 1, 1) = (-1, 1, -2).$$

Dan is

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{x} = 3\bar{a}_1 \cdot \bar{x} - 2\bar{a}_2 \cdot \bar{x} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = -3.$$

$$\bar{b}_3 = \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 1, -2) + (3, 5, 3),$$

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_3 = (1, 1, 0) \cdot \{\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 1, -2) + (3, 5, 3)\} = 0,$$

$$2\lambda_1 + 8 = 0,$$

$$\lambda_1 = -4.$$

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3 = (-1, 1, -2).\{\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(-1, 1, -2) + (3, 5, 3)\} = 0,$$

$$6\lambda_2 - 4 = 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}.$$

We kiezen nu een andere $\bar{b}_3$ en wel

$$\bar{b}_3 = -12\bar{a}_1 + 2\bar{b}_2 + 3\bar{a}_3,$$

dus

$$\bar{b}_3 = -12(1, 1, 0) + 2(-1, 1, -2) + 3(3, 5, 3) = (-5, 5, 5).$$

Dan is

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{x} = -12 \cdot 3 + 2 \cdot -3 + 3 \cdot 14 = 0.$$

Uit 1 volgt nu weer de oplossing van deze vergelijkingen, nl.

$$\bar{x} = \frac{3}{|\bar{a}_1|^2}\bar{a}_1 - \frac{3}{|\bar{b}_2|^2}\bar{b}_2 + 0 \cdot \bar{b}_3 =$$

$$= \frac{3}{2}(1, 1, 0) - \frac{3}{6}(-1, 1, -2) = (2, 1, 1).$$

Dus $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

4. Daarna loste ik op:

$$\begin{array}{lcl} \bar{a}_1 \cdot \bar{x} = 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 & & \bar{a}_1 = (2, 3, 1) \\ \bar{a}_2 \cdot \bar{x} = x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, & \text{dus} & \bar{a}_2 = (1, 1, 2) \\ \bar{a}_3 \cdot \bar{x} = x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & & \bar{a}_3 = (1, 2, -1). \end{array}$$

Evenals in 3 berekenen we weer twee vectoren $\bar{b}_2$ en $\bar{b}_3$.

$$\bar{b}_2 = \lambda(2, 3, 1) + (1, 1, 2),$$

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_2 = (2, 3, 1)\{\lambda(2, 3, 1) + (1, 1, 2)\} = 14\lambda + 7 = 0,$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}.$$

We kiezen

$$\bar{b}_2 = \bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 = (0, 1, -3).$$

Dan is

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{x} = \bar{a}_1 \cdot \bar{x} - 2\bar{a}_2 \cdot \bar{x} = 7 - 2 = 5.$$

$$\bar{b}_3 = \lambda_1(2, 3, 1) + \lambda_2(0, 1, -3) + (1, 2, -1),$$

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_3 = (2, 3, 1). \{\lambda_1(2, 3, 1) + \lambda_2(0, 1, -3) + (1, 2, -1)\} =$$
$$= 14\lambda_1 + 7 = 0,$$

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3 = (0, 1, -3)\{\lambda_1(2, 3, 1) + \lambda_2(0, 1, -3) + (1, 2, -1)\} =$$
$$= 10\lambda_2 + 5 = 0,$$

$$\lambda_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\bar{b}_3 = -\tfrac{1}{2}(2, 3, 1) - \tfrac{1}{2}(0, 1, -3) + (1, 2, -1) = (0, 0, 0),$$

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{x} = -\tfrac{1}{2}\bar{a}_1 \cdot \bar{x} - \tfrac{1}{2}\bar{b}_2 \cdot \bar{x} + \bar{a}_3 \cdot \bar{x} = -\tfrac{1}{2} \cdot 7 - \tfrac{1}{2} \cdot 5 + 6 = 0.$$

De vergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \cdot \bar{x} &= 7 \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{x} &= 5 \\ 0 \cdot \bar{x} &= 0. \end{aligned}$$

We zien dus, dat de vergelijkingen afhankelijk zijn. Als de laatste vergelijking wordt $\bar{0} \cdot \bar{x} = c$, waarin $c \neq 0$, dan zijn de vergelijkingen strijdig.

Het gegeven stelsel vergelijkingen is dus gelijkwaardig met

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \cdot \bar{x} &= 7 \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{x} &= 5. \end{aligned}$$

Een oplossing hiervan is volgens 1:

$$\bar{x} = \frac{7}{|\bar{a}_1|^2}\,\bar{a}_1 + \frac{5}{|\bar{b}_2|^2}\,\bar{b}_2 = \frac{7}{14}\,(2, 3, 1) + \frac{5}{10}(0, 1, -3) = (1, 2, -1).$$

Als $\bar{p}$ een vector is, die zowel loodrecht op $\bar{a}_1$ als loodrecht op $\bar{b}_2$ staat, dan is $\bar{a}_1 \cdot \bar{p} = 0$ en $\bar{b}_2 \cdot \bar{p} = 0$. De vector $(1,2,-1) + \lambda\bar{p}$ voldoet dan ook aan de vergelijkingen.

We zoeken daarom een vector $\bar{p}$, die loodrecht op $\bar{a}_1$ en loodrecht op $\bar{b}_2$ staat.

Daartoe kiezen we eerst een vector $\bar{q}$, die loodrecht op $\bar{a}_1$ staat. We nemen hiervoor $\bar{q} = (-3, 2, 0)$. Omdat $\bar{b}_2 \perp \bar{a}_1$ moet $\bar{p}$ dan geschreven kunnen worden als $\bar{q} + \lambda\bar{b}_2$, dus

$$\bar{p} = (-3, 2, 0) + \lambda(0, 1, -3),$$

want $\bar{p}$ moet een vector zijn van de R_2 met basis $\bar{q}$ en $\bar{b}_2$.
Dan moet

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{p} = 0,$$

dus

$$(0, 1, -3)\{(-3, 2, 0) + \lambda(0, 1, -3)\} = 2 + 10\lambda = 0,$$

$$\lambda = -\frac{1}{5}.$$

Voor p kunnen we nu ook kiezen:

$$5(-3, 2, 0) - (0, 1, -3) = (-15, 9, 3).$$

Omdat in de R_3 de vectoren $\lambda\bar{p}$ de enige vectoren zijn, die loodrecht op $\bar{a}_1$ en loodrecht op $\bar{b}_2$ staan, is de R_1

$$\bar{x} = (1, 2, -1) + \lambda(-15, 9, 3)$$

de algemene oplossing van ons stelsel vergelijkingen.

5. Als laatste voorbeeld loste ik op:

$$\begin{array}{llr}
\bar{a}_1 \cdot \bar{x} = 3x_1 - 4x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 11 & \bar{a}_1 = (3, -4, 0, -2) & (1)\\
\bar{a}_2 \cdot \bar{x} = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad\quad = 1 & \bar{a}_2 = (4, 3, 2, 0) & (2)\\
\bar{a}_3 \cdot \bar{x} = x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -10 & \bar{a}_3 = (1, 7, 2, 2) & (3)\\
\bar{a}_4 \cdot \bar{x} = x_1 - 18x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 31 & \bar{a}_4 = (1, -18, -4, -6). & (4)
\end{array}$$

Om het rekenwerk eenvoudig te houden, koos ik $\bar{a}_1 \perp \bar{a}_2$. We berekenen nu een vector $\bar{b}_3$, zodat $\bar{b}_3 \perp \bar{a}_1$ en $\bar{b}_3 \perp \bar{a}_2$, terwijl $\bar{b}_3 = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \bar{a}_3$.

We vinden dan $\bar{b}_3 = \bar{0}$. Zo vinden we ook $\bar{b}_4 = \bar{0}$ uit (4) en kunnen we inzien, dat (3) en (4) afhankelijk zijn van (1) en (2).

Het gegeven stelsel is dus gelijkwaardig met

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{x} = 11$$
$$\bar{a}_2 \cdot \bar{x} = 1.$$

Een oplossing hiervan is

$$\bar{x} = \frac{11}{|\bar{a}_1|^2}\bar{a}_1 + \frac{1}{|\bar{a}_2|^2}\bar{a}_2 = \left(\frac{37}{29}, -\frac{41}{29}, \frac{2}{29}, -\frac{22}{29}\right).$$

Om de algemene oplossing van de vergelijkingen te vinden, kiezen we twee vectoren $\bar{p}$ en $\bar{q}$, zodat $\bar{p} \perp \bar{a}_1$, $\bar{p} \perp \bar{a}_2$, $\bar{q} \perp \bar{a}_1$ en $q \perp \bar{a}_2$, b.v. $\bar{p} = (0, -2, 3, 4)$ en $\bar{q} = (8, 6, -25, 0)$.

Omdat in de R_3 met $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ en $\bar{p}$ als basis $\lambda\bar{p}$ de enige vectoren zijn loodrecht op $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$, kan $\bar{q}$ niet tot de R_3 behoren en zijn $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{p}$ en $\bar{q}$ onafhankelijk.

Voor de algemene oplossing van het stelsel vergelijkingen kunnen we dus schrijven

$$\bar{x} = \left(\frac{37}{29}, -\frac{41}{29}, \frac{2}{29}, -\frac{22}{29}\right) + \lambda(0, -2, 3, 4) + \lambda_2(8, 6, -25, 0).$$

De oplossingsruimte is dus een R_2, die op de bekende manier van een orthogonale basis voorzien kan worden.

Als vraagstukken losten de leerlingen op:

1. $(1, 2) \cdot \bar{x} = 5$
   $(4, 3) \cdot \bar{x} = 10.$

2. $(1, 1, 1) \cdot \bar{x} = 2$
   $(1, -1, 0) \cdot \bar{x} = 1$
   $(0, 2, 1) \cdot \bar{x} = 1,$

3. $(3, 2, 1, 0) \cdot \bar{x} = 5$
   $(4, 7, 2, 1) \cdot \bar{x} = 13$
   $(1, 5, 1, 1) \cdot \bar{x} = 8$
   $(2, -3, 0, 1) \cdot \bar{x} = -3.$

Thuis losten ze op:

1. $(2, 3, 1) \cdot \bar{x} = 7$
   $(1, 1, 2) \cdot \bar{x} = 1$
   $(1, 2, -1) \cdot \bar{x} = 6.$

2. $(2, 1, 3, 0) \cdot \bar{x} = 7$
   $(1, -4, 3, -1) \cdot \bar{x} = -20$
   $(1. 5. 0. 1) \cdot \bar{x} = 27$
   $(3, 6, 3, 1) \cdot \bar{x} = 34.$

Na mijn experimenten met vectoren geloof ik, dat we onze leerlingen een grote dienst zouden bewijzen, als we de stereometrie zouden vervangen door vectorrekening, ook in R_3, aansluitend aan de analytische meetkunde. Een poging in deze richting zou ik rustig durven te wagen.

WIMECOS. De jaarvergadering zal gehouden worden op vrijdag 27 december te Utrecht. Voordrachten zullen gehouden worden door Prof. Dr. A. C. Zaanen, Dr. M. Euwe en Dr. L. N. H. Bunt.

BOEKBESPREKING

R. Troelstra, drs A. N. Habermann, A. J. de Groot, Ir. J. Bulens, *Transformatiemeetkunde I*, J. B. Wolters, Groningen, 1962, ing. *f* 4,25, geb. *f* 4,90.

In dit boek wordt de vlakke meetkunde behandeld met behulp van transformaties. Aan het voorwoord ontlenen wij:

,,Het is de bedoeling een nauwkeurige definitie te geven van verschillende transformaties; uitgaande van axioma's worden stellingen afgeleid. Er worden drie congruentietransformaties behandeld — spiegeling, draaiing en verschuiving. Na een intuïtieve inleiding volgt een systematische opbouw. Opvallend is een evenwijdigheidsaxioma in de volgende vorm: Als van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is ook de vierde hoek recht.

Alle onderwerpen van het schoolprogramma worden behandeld. De driehoeken verliezen hun centrale plaats; de congruentiegevallen worden slechts genoemd".

Het zal duidelijk zijn, dat dit boek voor de schoolmeetkunde weinig minder dan een revolutie betekenen kan. Ik zal mij dan ook niet verstouten een oordeel te geven; daarvoor is gebruik van dit boek gedurende jaren noodzakelijk. Wel komen enkele vragen bij mij op, die de schrijvers als blijk van warme belangstelling mogen opvatten.

De auteurs menen dat de theorie in de meetkunde hoofdzaak is, dat is hun recht. Zij menen, dat opgaven alleen dienen om na te gaan in hoeverre het behandelde is verwerkt. Met die mening ga ik graag akkoord. Maar een meetkunde met alleen maar onmiddellijke toepassing van de theorie, lijkt mij wat dor te worden; een zeker romantisch element mag er wel bij zijn. Ik weet niet of deze strakke opbouw met zijn even strakke vraagstukken voor de leerlingen animerend zal zijn. De vraagstukken zijn overigens consequent gekozen, zoals het hele boek uitermate consequent is. Zich goed kunnen uitdrukken, is niet de sterkste zijde van onze leerlingen; hun taalgebruik is gebrekkig. Mogelijk wordt die gebrekkigheid hier wat verholpen, maar er zal wel wat water in de beoordelingswijze moeten worden gedaan; dit speciaal voor de provincie. Kans op uit het hoofd leren is niet uitgesloten, omdat zelfstandig formuleren zeker moeilijkheden zal geven.

De leraar, die dit boek gaat gebruiken moet goed weten, dat hij het werk eerst zelf grondig dient te bestuderen. Hij moet eigenlijk alles, wat hij gewend is, volkomen vergeten. Men vergeet nl. gauw, wat of men al mag weten en wat niet. Dit omdat de van ouds bekende volgorde absoluut ontbreekt.

Ik moge dit als volgt illustreren:

De vlieger ontmoet men op pag. 15, deze figuur speelt een belangrijke rol; de ruit op pag. 58; de rechthoek op pag. 61; het trapezium op pag. 77 en .... het parallellogram op pag. 90. Evenwijdige lijnen verschijnen op pag. 66. De som der hoeken van een driehoek wordt op pag. 73 als 180° gevonden.

De bekende grondconstructies zien we op pag. 31, maar we kunnen pas een hoek overbrengen op pag. 115. Op pag. 53 horen we dat een gelijkzijdige driehoek drie gelijke hoeken heeft, maar pas op pag. 74 blijken die hoeken 60° te zijn. Al met al een verbijsterende zaak.

Ik heb dus wel enkele vragen; ik zal niet alle noemen. Maar dat betekent niet, dat het boek m.i. geen aandacht verdient. Het is niet onwaarschijnlijk, dat de ontwikkeling der schoolmeetkunde gaat in de door de schrijvers geschetste zin. Elke leraar moet beslist van dit boek kennis nemen en zijn eigen standpunt bepalen. Hij dient te weten, wat een progressieve groep beoogt.

Het boek is wel overwogen en helder geschreven; de taal is voor leerlingen eenvoudig en duidelijk. De uitvoering is zo, als men van de uitgever mag verwachten. Het zal mij benieuwen of het boek het gaat „doen"; het is niet uitgesloten, dat hiervoor eerst een nieuwe generatie docenten moet opgroeien.

Groenman.

A Survey of numerical Analysis. Edited by John Todd, Mc Graw-hill Book Compagny, 1962; 589 pag., 97 s.

Dit boek is ontstaan uit een opdracht aan de uitgever om een cursus samen te stellen voor min of meer gevorderde wiskundigen betreffende problemen en methoden van de numerieke wiskunde. Een groot deel van de verzamelde voordrachten is nu gebundeld in dit boek. Omdat enkele voordrachten niet in deze publikatie een plaats gevonden hebben zijn er enkele lacunes, maar daar een overvloed van monografieën op dit gebied verschijnt is dit niet zo'n erg bezwaar.

Wat kunnen we nu uit dit verzamelwerk, dat 17 hoofdstukken beslaat leren? In de eerste plaats een stuk klassieke numerieke analyse. Een honderdvijftig bladzijden zijn hier aan gewijd, alle van de hand van de heruitgever. Daar ieder hoofdstuk besloten wordt met een vraagstukkenverzameling (en bovendien tientallen literatuurverwijzingen) kunnen we proberen de inhoud van dit deel te benaderen door een vraagstukje te vermelden:

Bespreek de approximatie van $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(1+x^2)^{-1}dx$ met $h\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2h^2}(1+n^2h^2)^{-1}$ voor verschillende waarden van h. In het tweede deel komt de automatische computer aan de beurt, naast enkele fundamentele opmerkingen over de begrenzing van de mogelijkheden wordt vooral nadruk gelegd op het numerieke element.

Vanzelfsprekend komen de moderne problemen ook aan bod, in uitvoerige studies worden de lineaire problemen (matrices, de bepaling van de eigenwaarden, etc.) behandeld. Gewone en partiële differentiaalvergelijkingen volgen dan, onder andere de iteratieve methoden voor de oplossing van elliptische vergelijkingen met differentierekening. Na integraalvergelijkingen en functionaalanalyse komen dan nog enkele grappige discrete problemen aan de orde. Op dit gebied zijn, wiskundig gesproken, exacte resultaten (in tegenstelling tot de analytische problemen waar benaderingen geconstrueerd worden) te bereiken. We denken aan de bekende problemen van de Grieks-Latijnse vierkanten en de samenhang met de eindige meetkunden. Met enkele opmerkingen over de toepassingen van numerieke methoden in de getaltheorie en in de statistiek (lineaire schattingen) besluit dit boek.

Het is een waardevolle verzameling opstellen van auteurs, die ieder op hun eigen gebied met vrucht numerieke analyse gebruikt en beoefend hebben. Naast voor de „leek" interessante algemene inleidingen, vinden we er uitgewerkte details in. Zo er een lezer van Euclides mocht zijn, die in de waan verkeerde dat door de introductie van de elektronische rekenmachines de numerieke wiskundige overbodig geworden is (de machines rekenen toch veel beter dan de mens), hij leze dit boek en ontdekke dat de ontwikkeling van deze machines niet alleen veel meer mogelijkheden voor numeriek werk geschapen heeft, maar ook een groot aantal nieuwe problemen opgeroepen heeft van wiskundig belang.

De omslag van dit fraai uitgevoerde boek bevat een eenvoudige legpuzzle en de oplossing ervan. Gelukkig zijn niet alle in dit boek voorkomende problemen zo eenvoudig!

F. v. d. Blij

M. David, *Précis de mathématiques I.* Presses universitaires de France (collection „Euclide"), Paris, 1962, 304 pag. NF 22,—.

De modernisering van het leerplan voor wiskunde op de Franse middelbare scholen zal binnenkort studenten opleveren, die meer dan tot dusver al wat met diverse wiskundige begrippen hebben gewerkt, b.v. met algebraïsche structuren, met het begrip „afgeleide functie", met logaritmen, zelfs met enkele eenvoudige differentiaalvergelijkingen, onderwerpen, waarmee zij thans voor het eerst bij hun verdere studie in aanraking komen. Dit heeft gevolgen voor de wijze van behandelen van die onderwerpen bij de voortgezette studie en dus ook voor de inrichting van de hierbij gebruikte leerboeken.

Aangepast aan de nieuwe toestand behandelt het bovenstaande boek verschillende hoofdstukken uit de algebra en de analyse. Een inleidend hoofdstuk (nr. „nul") is gewijd aan herhaling en uitbreiding van enkele nu reeds bekende zaken; de volgende hoofdstukken sluiten hierop aan. Vrij veel vraagstukken zijn toegevoegd, van vaak uitvoerige aanwijzingen voor de oplossing voorzien. Het boek is bestemd voor a.s. fysici, chemici en technici, dus niet voor hen, die wiskunde als hoofdvak hebben.

Ook omdat zich bij ons wiskunde-onderwijs ongetwijfeld problemen van gelijke aard voordoen en voor zullen doen, nu ook onze programma's zijn gewijzigd, terwijl voor de naaste toekomst een ingrijpender herziening zijn schaduwen vooruit werpt, was het interessant het werk door te zien. Het maakt in zijn opzet een prettige indruk en aan de strengheid en goede formulering is kennelijk veel zorg besteed.

H. W. Lenstra.

New Thinking in School Mathematics. Organisation for European Economic Cooperation. 1961; 246 blz.; ing. *f* 8,90.

(In Nederland verkrijgbaar bij Meulenhoff & Co N.V., Amsterdam en bij W. P. van Stockum & Zn., Den Haag).

Dit boek bevat in de eerste plaats een door Prof. Fehr en Dr. Bunt opgesteld verslag van het eind 1959 te Royaumont gehouden congres over de mogelijkheden van radicale veranderingen en verbeteringen van het wiskundeonderwijs. We kunnen hiervoor verwijzen naar het fraaie verslag dat de Nederlandse deelnemers aan het congres hebben gepubliceerd in Euclides, **35**, pag. 218-229. Toch is het de moeite waard alles hier nog eens uitvoeriger te vinden opgetekend en Dieudonné's befaamde kreet: „à bas Euclide" hier weer tegen te komen als: „Euclid must go".

De indeling van het boek in genummerde alinea's is misschien nuttig voor verwijzingen bij discussies, maar onprettig bij het doorlezen.

Het tweede gedeelte van het boek bevat de verwerking van door een enquête verkregen gegevens over het wiskundeonderwijs in verschillende landen. De vele tabellen geven interessante informatie. Van de vermelde landen hebben Oostenrijk en Nederland de kortste vakanties: aantal schoolweken per jaar 41. De Italianen en de Grieken werken het kortste: 32 schoolweken. Het percentage bevoegde leraren is in Oostenrijk, België, Duitsland, Italië, Luxemburg en Noorwegen 100%. Voor Nederland wordt aangegeven 70%; een lager percentage hebben alleen: Portugal 60%, Turkije 38% en IJsland 30%.

Een schat van gegevens voor ieder die zich voor deze zaken interesseert.

R. Troelstra.

Prof. Heinrich Tietze, *Problemen uit de wiskunde*, Nederlandse bewerking door Bruno Ernst, N.V. W. J. Thieme & Cie, Zutphen, 1962, 175 blz. *f* 9.50.

Deze bewerking van lezingen gehouden door Prof. Tietze, behandelt opgeloste en niet opgeloste problemen in de wiskunde, op niet-wiskundige wijze. Persoonlijk kan ik nu niet bepaald enthousiast zijn over de vele onwiskundige uitweidingen, die om wiskundige onderwerpen geweven worden.

Men kan typisch wiskundige problemen nu eenmaal niet waarderen, als men niet enig inzicht bezit over de technische moeilijkheden, die een overmeestering in de weg staan (of hebben gestaan).

Het is om met de deur in huis te vallen, weinig interessant als men 28 bladzijden moet doorlezen over geodetische lijnen, zonder dat de lezer enig ander inzicht krijgt over dit onderwerp, dan een groot aantal figuren, waarop deze getekend staan in al hun grilligheid.

Verder vindt men nog: de trisectie van de hoek, enkele weetjes over priemgetallen (waarbij een tiental bladzijden tabellen), buurgebieden (Möbius), de kwadratuur van de cirkel, drie en meer dimensies en tenslotte iets over talstelsels.

Mogelijk is er kans op een plaats in de leerlingenbibliotheek?

Burgers

Josef Ehrenfried Hofmann, *Frans van Schooten der Jüngere*, Franz Steiner Verlag, G.M.B.H. Wiesbaden 1962, DM 12.—, 25 blz. en 29 blz. aantekeningen.

Het eerste deel van dit boekje bespreekt de activiteiten van Van Schooten (1615-1660), hoogleraar te Leiden, speciaal wat zijn aandeel betreft in de verspreiding van de ideeën van Descartes, die hij persoonlijk leerde kennen, tijdens diens verblijf in Leiden waar „Discours de la méthode" gedrukt werd.

Uitvoerig leest men van de activiteiten en reizen van Van Schooten, zijn contacten met de grote wiskundigen van die tijd, zoals Desargues, Fermat en Viète, om slechts enkelen te noemen.

Op aanbeveling van Descartes wordt hij aangezocht als leraar van Constantijn en Christiaan Huygens.

Het 2e deel bespreekt enkele van zijn geschriften, o.a. de organische voortbrenging van kegelsneden, bijdrage tot de oplossing van derdegraadsvergelijkingen e.a.

Het boekje besluit met een zeer uitvoerig register.

Voor hen, die graag grasduinen in historische bijzonderheden van de vele wiskundigen uit die tijd een aardig boek.

Burgers

D. Leujes, *Planimetrie voor V.H. en M.O.* Deel II, 151 blz. Prijs *f* 4.80; deel III, 111 blz. Prijs *f* 3.50. Uitg. J. Noorduijn en Zoon N.V. — Gorinchem — 1962.

Het eerste deel van dit leerboek ken ik niet, dit tweede en derde behandelen de gewone stof. In een los (samen met de antwoorden op de vraagstukken) bijgevoegde toelichting verantwoordt de schrijver uitvoerig al zijn afwijkingen van het gebruikelijke, de meest opvallende staan in het tweede deel. Dat zijn een hoofdstuk over transformaties van figuren (verplaatsing, draaiïng en spiegeling) als inleiding op de vermenigvuldiging, een hoofdstuk over omkering van stellingen en soorten bewijzen en van verzamelingstheoretische inleiding op het hoofdstuk verzamelingen. Het derde deel geeft in een aanhangsel iets over pool en poollijn ter aansluiting op de analytische meetkunde. Beide delen zijn overvloedig van oefenmateriaal voorzien; het geheel vormt een bruikbare leergang.

Ernstige kritiek heb ik alleen op de behandeling van het meten van lengten en oppervlakten. Het wilde mij niet lukken, die beknopt te formuleren, er waren te veel aangrijpingspunten in het bedoelde gedeelte. De auteur zou goed doen van het meten (in het algemeen) nog eens terdege studie te maken.

Tenslotte: de (los gestelde) uitdrukking $n \to \infty$ betekent niets (deel III, blz. 71, laatste regel).

Haren (Gron.). J. Koksma.

Dr. R. Broeckx. *Analytische meetkunde I*, 140 blz., idem II, 475 blz. De Nederlandse boekhandel, Antwerpen. 1962.

De boeken zijn bestemd voor de afdelingen Wetenschappen en Latijn-wiskunde tweede en eerste klassen. Twee dingen vallen direct op: het veelvuldig gebruik van scheefhoekige coördinaten en verder de enorme uitgebreidheid van het tweede deel. Merkwaardig is de opzet in het eerste deel. Nadat in het eerste hoofdstuk coördinaten worden ingevoerd, waarbij reeds direct gesproken wordt over dubbelverhoudingen en harmonische puntenviertallen, begint het tweede hoofdstuk met „veranderlijke coördinaten" met als eerste voorbeeld de punten met $0 < x < 2$, $1 < y < 4$. Dus een gebied! Letterlijk staat er dan: „Het beperken van de verandering van de coördinaten x en y van het bewegend punt P kan geschieden door het opgeven van een vergelijking $F(x, y) = 0$, waardoor de ene veranderlijke afhankelijk wordt van de andere". De verzameling punten, waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen, wordt dan de meetkundige of grafische voorstelling van de vergelijking genoemd. Ook wordt omgekeerd $F(x, y) = 0$ de verg. van de kromme genoemd. De behandeling van de rechte lijn wijkt in zoverre af van die bij ons, dat de eerste 60 bladzijden het assenstelsel scheefhoekig is, terwijl veel met determinanten gewerkt wordt. De cirkel wordt uitvoerig, de kegelsneden zeer beknopt besproken, alles in rechthoekige coördinaten. Nauwgezet wordt nagegaan, of bij de afleidingen van de verg. van ellips en hyperbool „bestaansvoorwaarden en kwadrateringsvoorwaarden" vervuld zijn. Mooie ruimtefiguren laten de „kegelsneden" zien.

Was het eerste deel nog enigermate te vergelijken met onze behandeling, het tweede deel wijkt sterk af, ja, lijkt me geschikt voor degenen, die zich voor een middelbare akte bekwamen. Door bij voortduring scheve assen te gebruiken worden de formules zeer ingewikkeld. B.v. de tangens van de hoek van twee rechten:

$$\frac{(m_2 - m_1)\sin\theta}{1 + m_1 m_2 + (m_1 + m_2)\cos\theta}\text{; hierin is } \theta \text{ de hoek van x-as en y-as.}$$

Vergelijking van de cirkel $(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\theta = R^2$ enz.

Uitvoerig worden verder behandeld: homogene coördinaten, imaginaire elementen, dubbelverhoudingen, alle mogelijke combinaties van rechtenparen, cirkelpunten, isotrope rechten, discriminanten bij de krommen van de tweede graad, invarianten bij assentranslaties en draaiingen, partiële afgeleiden (voor het middelpunt), zelfs formules, die een scheefhoekig assenstelsel omzetten in een rechthoekig, formule van Taylor met toepassing op de homogene kwadratische functie, kegelsnedenbundels (zeer uitvoerig), kegelsneden in en om driehoeken, pooldriehoek, pooltransformatie, Pascal en Brianchon, brandpunt in verband met isotrope rechten, stellingen van Poncelet, collineaties enz.

De verzorging van de leerboeken is uitstekend, de bewijzen exact; er zijn zeer veel vraagstukken, maar hoe leraren met hun klas in één jaar het tweede deel kunnen doorkomen, is me een raadsel. Het aantal lesuren moet wel zeer groot zijn. Iedere leraar echter, die nog eens een goed boek over analytische meetkunde wil bezitten met veel prettige vraagstukken, kan ik het van harte aanbevelen.

P. Bronkhorst.

Unified algebra and trigonometry by Dr. Dick Wick Hall and Dr. Louis O. Kattsoff; 455 blz.; John Wiley and Sons, Inc. New-York –London. 1962.

De inhoud van het boek komt in hoofdzaak overeen, met wat in onze scholen behandeld wordt. Uitvoeriger dan bij ons wordt gesproken over verzamelingen, terwijl ook het getalbegrip uitgebreider wordt behandeld. Bij vergelijkingen worden ook matrices en determinanten besproken. Alles bij elkaar is het boek juist een tikkeltje moderner, dan de Nederlandse leerboeken. Het aantal vraagstukken is beperkt gehouden en dient alleen om de theorie vast te leggen. Dit lijkt me voortreffelijk en navolgenswaard, al zou men moeten weten, of met dit beperkte oefenmateriaal ook behoorlijke resultaten te verkrijgen zijn. De uitgave is zeer luxueus; de behandeling wordt het best getypeerd door de volgende zin uit de voorrede: ... a few basic ideas of calculus are introduced as painlessly as possible...

P. Bronkhorst.

Robert Broeckx, *Schooltafels*, hogere cyclus; 131 blz., Antwerpen; De Nederlandse Boekhandel, 1962.

De gewone logaritmentafels, echter in ... 5 decimalen; dus ook „seconden" bij de hoeken. Enkele „overgangstafels" tussen radialen en graden (tiendelige en zestigdelige).

Robert Broeckx, *Driehoeksmeting, goniometrie, boldriehoeksmeting*; hogere cyclus; Antwerpen, De Nederlandse boekhandel, 1962, 420 blz.

Daar dit boek nog de driehoeksmeting en goniometrie behandelt, zoals bij ons de gewoonte was vóór de laatste programmawijziging, heeft het voor ons weinig betekenis meer. De behandeling is traditioneel, zoals — tenzij men sterk met vectoren werkt — nu eenmaal moeilijk anders kan. De boldriehoeksmeting bevat nog evenveel formules als vroeger!

Over de uitgave overigens alleen maar lof. Het aantal vraagstukken is zeer groot en voor een deel ook wel boeiend.

P. Bronkhorst.

S. Elzinga. *De ontwikkeling van het wiskunde-experiment.* Uitgave Stichting Instituut Technisch Onderwijs. 24 blz.

Het werkje geeft een verslag van en een aantal opmerkingen over een experiment van een wiskundewerkgroep van de genoemde stichting (Sito). Het bespreekt kritisch de gevolgde werkwijze en de resultaten of het gebrek aan resultaten.

Hoewel ik het niet vermeld vond, meen ik, dat het gaat over een experiment i.v.m. wiskunde-onderwijs op de lagere technische school(?)

Voor het V.H.M.O. is het dus van minder belang, hoewel het wel aardig is om kennis te nemen van de pogingen, die ook anderen doen om tot verbetering van het wiskunde-onderwijs te komen.

Het is alleen jammer dat het in slordig Nederlands is geschreven.

Prof. dr. Werner Burau, *Algebraische Kurven und Flächen II*, Sammlung Göschen Band 436/436a. 160 blz.

Dit is het tweede deeltje van het werk, waarvan deel I als no. 435 in genoemde „Sammlung" verscheen en dat eerder besproken werd.

Wat daar over de wijze van behandeling opgemerkt werd, geldt ook voor dit nieuwe deeltje.

Het bevat in het eerste hoofdstuk een bespreking van de oppervlakken van de tweede en derde graad, waarbij betrekkelijk veel aandacht besteed wordt aan de 27 rechte lijnen op dit laatste.

In een tweede hoofdstuk worden ruimtekrommen van de 3e en 4e graad besproken.

J. F. Hufferman

Prof. dr. O. Perron, *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*, B. J. Teubner — Stuttgart, 1962, 134 blz., DM 21,00.

Een prachtige behandeling van de niet-Euclidische vlakke meetkunde, door in het axiomastelsel van de Euclidische meetkunde, het parallellenaxioma te vervangen door zijn ontkenning.

Een behandeling van bijna volledige strengheid, die toch slechts een gedegen kennis van de elementaire meetkunde eist, en daarmee de weg opent naar dit toch belangwekkend deel der meetkunde.

Voor hen, die hiervoor belangstelling koesteren, zeer aan te bevelen. In de schoolbibliotheek kan het goede diensten bewijzen aan intelligente leerlingen.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

96. Enige boompjes staan op een rij op afstanden van 5 meter. Een tuinmansjongen krijgt van zijn baas de opdracht de bomen van plaats te verwisselen op zodanige manier, dat geen enkele boom zijn plaats behoudt. Na afloop keurt zijn baas het werk. Hij constateert, dat de som van de verplaatsingen, die de bomen ondergaan hebben, 300 meter is, en zegt: „Je had met geen mogelijkheid de bomen zo van plaats kunnen verwisselen, dat de som van de verplaatsingen nog groter geweest was." Hoeveel bomen waren er? (B. Kootstra)

97. Van twee rekenkundige rijen is gegeven

$$S_n : s_n = (7n + 1) : (4n + 27)$$

Bereken de verhouding $T_4 : t_4$.

Stellen we $S_n = k.(7n + 1)$ en $s_n = k.(4n + 27)$, dan heeft men

$$T_4 = S_4 — S_3 = 29k — 22k = 7k \text{ en}$$
$$t_4 = s_4 — s_3 = 43k — 39k = 4k, \text{ dus}$$
$$T_4 : t_4 = 7 : 4.$$ Waar zit de fout? (R. Kooistra)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

94. We nemen aan, dat we een deel der gewichten op de ene schaal en een ander deel op de andere schaal mogen leggen.

Stellen we de serie gewichten voor door de opklimmende rij $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dan moet het mogelijk zijn, hiermee alle in gehele getallen uitgedrukte gewichten van 1 tot en met s_n te wegen.

Vooreerst merken we op, dat de serie alleen dan goed kan zijn, als ook de rij $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ aan de gestelde voorwaarde voldoet. Immers, als we met die tweede serie het getal x (waarbij $x \leqq s_{n-1}$) niet zouden kunnen wegen, dan zouden we met de eerste serie het gewicht $t_n + x$ niet kunnen wegen, wat toch mogelijk moet zijn. Hieruit volgt, dat $t_1 = 1$.

Stel nu, dat de serie $t_1, t_2, \ldots, t_n$ aan de vraag voldoet. Voegen we hieraan het gewicht t_{n+1} toe, dan zijn alle gewichten te wegen van 1 tot en met s_n en van $t_{n+1} - s_n$ tot en met $t_{n+1} + s_n$. Dit laatste gewicht is s_{n+1}. Daar in de rij geen enkel gewicht mag ontbreken, mag $t_{n+1} - s_n$ niet groter zijn dan $s_n + 1$. Hieruit volgt, dat t_{n+1} kleiner moet zijn dan of gelijk aan $2s_n + 1$. Willen we de gewichten zo groot mogelijk maken, dan geldt dus:

$$\begin{array}{r} t_{n+1} = 2s_n + 1 \\ t_n = 2s_{n-1} + 1 \\ \hline t_{n+1} - t_n = 2t_n, \text{ dus } t_{n+1} = 3t_n. \end{array}$$

Daar $t_1 = 1$, is de gezochte rij dan: 1, 3, 9, 27, enz.

95. We gaan eerst na, hoe de situatie is, als er elke dag vier personen de bibliotheek bezoeken. Noem deze personen in volgorde van hun binnenkomst a, b, c en d. Als de personen allen tegelijk op een bepaald moment aanwezig zijn, is de oplossing triviaal. Onderstel, dat dit niet het geval is. We krijgen dan de volgende mogelijkheden:

a | b c d
a b | c d
a b c | d.

Met de verticale streep is in het eerste geval bedoeld, dat a niet tegelijk met b aanwezig is en dat op een bepaald ogenblik b, c en d tegelijk aanwezig zijn. In het tweede geval, dat op een bepaald moment a en b tegelijk aanwezig zijn, op een ander moment c en d, terwijl c niet tegelijk met a en b aanwezig is.

Breiden we het gezelschap met een vijfde persoon e uit, dan krijgen we

a | b c d e
a b | c d e
a b c | d e
a b c d | e.

Het optreden van drie verticale strepen is uitgesloten, doordat dan drie personen uit de drie groepen zo gekozen kunnen worden, dat ze elkaar geen van drieën ontmoeten.

In het niet triviale geval moet de portier dus tweemaal de mededeling doen, eenmaal vlak voordat voor het eerst een bezoeker de bibliotheek verlaat, en eenmaal vlak nadat de laatste bezoeker binnengekomen is.

WISKUNDE WERKGROEP

Op 23 en 24 november vindt weer de jaarlijkse weekend conferentie plaats van de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O.

Traditiegetrouw vinden we onderdak in 't conferentieoord De Grasheuvel, de Genestetlaan 9, Amersfoort.

Het thema luidt:

Aspecten en Verwachtingen van de opleiding tot wiskundeleraar in Nederland.

Zaterdagmiddag opent dr. A. F. Monna de conferentie met een algemene inleiding. Direct daarna spreekt dr. Joh. H. Wansink over de huidige stand van zaken. 's Avonds gaan we discussiëren hierover in drie groepen, elk onder een discussieleider. Zondagochtend spreekt de Heer W. Brandenburg over de verwachtingen, waarna weer groepsdiscussies. 's Middags zal prof. dr. H. Freudenthal een samenvatting geven, waarna nog discussie mogelijk is.

De kosten bedragen f 15,— voor nietleden, f 12,50 voor leden van de Wiskunde Werkgroep. Zonder logies: f 12,50 en f 10,— voor één dag f 10,— en f 7,50, te storten op giro 614418 t.n.v. de penningmeester te Haarlem.

Na opgave ontvangt men een volledig programma. Alle verdere inlichtingen bij drs. H. C. Vernout, Van Nouhuysstraat 11, Haarlem, telefoon 02500—57288.

Rectoren, directeuren en docenten bij v.h.m.o. of kweekschool krijgen van het departement de reiskosten boven de f 2,50, alsmede maximaal 50% van de verblijfkosten, vergoed.

„PYTHAGORAS" GAAT ZIJN DERDE JAARGANG IN

De redactie van Pythagoras (Wiskundetijdschrift voor Jongeren) heeft bij het afsluiten van de tweede jaargang de docenten gevraagd opmerkingen, wensen of kritiek te zenden.

Niet aan alle wensen, die werden uitgesproken kan worden voldaan. Er zal echter in de komende jaargang zoveel mogelijk aandacht aan geschonken worden. Zo zal „op veler verzoek" het aantal problemen uitgebreid worden, vooral ook met meetkundige opdrachten. We ontvingen daarvoor enkele bijzonder mooie opgaven.

Doordat het grote aantal abonnees van de tweede jaargang voor een voldoende financiële basis zorgde, kan aan een wens van veel lezers tegemoet gekomen worden, n.l. door het tijdschrift zesmaal te laten verschijnen in de derde jaargang. „Streefdata" zijn 15-10, 1-12, 15-1, 1-3, 15-4, en 1-6. Indien dit lukt kan tevens aan de wens worden voldaan het laatste nummer iets vroeger te laten verschijnen.

Het uitbreiden van het aantal nummers per jaargang maakte het wenselijk ook de redactie te vergroten. Hieraan kon worden voldaan, doordat de Heer A. F. van Tooren te 's-Gravenhage zich bereid verklaarde als derde redactielid op te treden.

Een van de zes nummers zal weer gewijd zijn aan een onderwerp, deze keer de nomografie. Enkele vaste rubrieken zullen zijn: Wiskunde in de biologie; Computers; Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde; Wikken en wegen (iets in de richting van linear programming). Daarnaast liggen weer een aantal artikelen klaar over uiteenlopende onderwerpen. De medewerking uit de kring der docenten is verheugend, ook door het inzenden van artikelen.

De circulaires en aanmeldingskaarten zullen begin september de scholen bereiken. Wanneer de docenten voor een spoedige aanmelding willen zorgdragen, kan de oplage op tijd worden vastgesteld en het eerste nummer, dat geheel persklaar is, worden afgedrukt in een zodanig aantal, dat niet achteraf scholen teleurgesteld moeten worden, omdat het uitverkocht is. Alleen als het eerste nummer op 15-10 uit kan komen, is het mogelijk de streefdata aan te houden, het is ook daarom noodzakelijk dat de opgaven voor abonnementen tijdig binnen zijn.