

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

IX - 1 juni 1963

INHOUD

Het beroep van wiskundige	257
W. J. Brandenburg en W. P. Thijssen: Derde internationale post-universitaire vervolmakingscursus te Brussel (1962)	270
B. L. van der Waerden: Pool en poollijn	277
Een bijzonder jubileum	278
Dr. J. T. Groenman: 0'62-II-1	279
Boekbespreking	282
Recreatie	286
Wiskunde Werkgroep van de W.V.O.	288

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. P. M. VAN HIELE, Pr. Bernhardlaan 28, Bilthoven, tel. 03402/3379;
Drs. H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen / 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester *Wiskunde-werkgroep W.V.O.* te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

NIEUWE OPGAVEN

(Deel 21 nrs. 161—200).

De oplossingen der vraagstukken 161—200 kunnen tot 1 februari 1964 worden gezonden aan de redacteur Prof. N. G. de Bruijn, Technische Hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven. Publikatie der daartoe geschikte oplossingen zal plaatsvinden in „Wiskundige Opgaven met de Oplossingen”, 21 (5) 1964.

Beknoptheid der oplossingen wordt ten zeerste op prijs gesteld. Het is niet nodig de oplossing te geven in de taal waarin de opgave is gesteld.

Men beschrijf het papier slechts aan één kant.

Nieuwe opgaven (met oplossingen) zijn steeds welkom.

No. 161. In een plat vlak zijn n , niet alle op één rechte gelegen, punten A_i gegeven. In een willekeurig punt P van het vlak richt men de loodlijn PQ op, met lengte $\sum_{i=1}^n p_i$, waarin p_i de afstand PA_i voorstelt. De punten Q vormen het oppervlak V . Bewijs dat elk niet boven een A_i gelegen punt Q een elliptisch punt van V is.

(O. Bottema).

No. 162. In een plat vlak zijn $n + 1$ vaste punten $A_0, A_1, \dots, A_n$ gegeven, niet alle op één rechte gelegen, alsmede het veranderlijke punt P . Men beschouwt de functie $f(P) = \sum_{i=0}^n p_i$, waarin p_i de afstand PA_i voorstelt. De hoek die de vectoren A_0A_i en A_0A_j met elkaar maken wordt met φ_{ij} aangeduid. Bewijs dat $f(P)$ in A_0 dan en alleen dan een minimum heeft als

$$\sum_{i>j} \cos \varphi_{ij} \leq -\frac{1}{2}(n-1).$$

(O. Bottema).

No. 163. Aan het koord $A_1A_2\dots A_{n+1}$ zijn in de punten A_i ($i = 1, \dots, n$) stoffelijke punten met massa m aangebracht en in A_{n+1} de massa pm ; de afstanden A_iA_{i+1} ($i = 1, \dots, n$) zijn alle gelijk aan l . Deze samengestelde slinger heeft A_{n+1} als ophangpunt;

dit punt kan zich vrij langs een vaste horizontale rechte q bewegen. De slinger beweegt zich in het verticale vlak door q , onder invloed van de zwaartekracht waarvan de versnelling g is. Als λ_i de frequenties zijn van de kleine slingeren om de verticale stand, bewijs dan dat de getallen $z_i = (l/g)\lambda_i^2$ de wortels zijn van de vergelijking

$$pL_n(z) - L_n'(z) = 0$$

waarin L_n het polynoom van LAGUERRE van de n de graad voorstelt.

(O. Bottema).

No. 164. Gegeven is een vlakke kromme K , waarop de booglengte s als parameter is gekozen. Het punt $M(s)$ van K is middelpunt van de cirkel $C(s)$ met straal $R(s)$. Bepaal $R(s)$ zo dat de twee takken waaruit de omhullende van $C(s)$ bestaat in overeenkomstige punten gelijke boogelementen hebben.

(O. Bottema).

No. 165. Een stoffelijk punt P met massa m beweegt zich over een boloppervlak met straal R onder invloed van een kracht die loodrecht staat op een vast equatorvlak U en gelijk is aan pmz waarin z de afstand van P tot U is en p een (positieve of negatieve) constante. In het begin ligt P op de breedte α en heeft het een langs de breedtecirkel gerichte beginhoeksnelheid ω . Bepaal de breedte van P als functie van t .

(O. Bottema).

No. 166. In het hyperbolische vlak zijn de punten A en B gegeven; D ligt op het verlengde van AB . Bepaal de meetkundige plaats van C als 1) $\angle CAD = 2\angle CBD$; 2) $\angle CAD = \angle CBD + \alpha$, waarbij α een gegeven hoek is ($0 < \alpha < \pi$).

(O. Bottema).

No. 167. If $p > 0$, $p \rightarrow 0$, show that

$$e^{-\frac{1}{2}p} \int_0^\infty \cosh^2 u e^{-p \sinh^2 u} u du =$$

$$= \frac{1}{4p} L + \frac{1}{16} L^2 - \frac{1}{64} p L^2 - \frac{1}{64} p L + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\pi^2}{12} \right) + O(p),$$

where L stands for $\log(4/p) - \gamma$, and γ is Euler's constant.

(C. J. Bouwkamp).

No. 168. Evaluate

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{J_n''(nx)\}^2 \quad (0 \leq x < 1).$$

(C. J. Bouwkamp and N. G. de Bruijn).

No. 169. Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} J_n(nx) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

(H. Bremekamp).

No. 170. Te bewijzen, voor elk reëel getal α ,

$$\int_0^{\infty} \log(\cos x - \cos \alpha)^2 J_0(x\sqrt{2}) dx = \sqrt{2} \log 2 + 4 \cos \alpha.$$

(H. Bremekamp).

No. 171. Bewijs, als γ de constante van Euler voorstelt, α .

$$\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} J_0(x) dx = (2\pi)^{-1} \Gamma^2(\frac{1}{4}),$$

$$\int_0^{\infty} J_0(x) \log x dx = -\gamma - 2 \log 2,$$

$$\int_0^{\infty} J_0(x) x^{-\frac{1}{2}} \log x dx = (2\pi)^{-1} \Gamma^2(\frac{1}{4}) (4 \log 2 - \pi - \gamma).$$

(H. Bremekamp).

No. 172. Men vraagt de oplossing der vergelijking

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2zx \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \\ + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u, \end{aligned}$$

waarbij

$$u = a^{-1}(y^2 + z^2) + b \text{ voor } x = a,$$

$$u = b^{-1}(y^2 + z^2) + a \text{ voor } x = b.$$

(H. Bremekamp).

No. 173. Men vraagt de oplossing der vergelijking uit No. 172 waarbij voor $x = a$

$$u = \frac{y^2 + z^2 + a^2}{a}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2 + z^2 + a^2}{a^2}.$$

(H. Bremekamp).

No. 174. Men vraagt de algemene oplossing der vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1 + y^2),$$

en de particuliere oplossingen waarbij y een enkelvoudig periodieke functie van x is.

(H. Bremekamp).

No. 175. Let k be a positive integer, and let $x_1, \dots, x_k$ be real numbers satisfying $|x_1| + \dots + |x_k| < \pi$. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-j} \sin nx_1 \sin nx_2 \cdots \sin nx_k$$

has the value 0 if $k - j$ is an even integer with $0 < j < k$, and has the value $\frac{1}{2}x_1 \cdots x_k$ if $j = k$.

(N. G. de Bruijn).

No. 176. Let p be an odd prime. We want to construct an infinite sequence of integers $x_1, x_2, x_3, \dots$ such that $x_1^2 \not\equiv 1 \pmod{p}$ and such that $2x_{n+1}x_n \equiv x_n^2 + 1 \pmod{p}$ for $n = 1, 2, 3, \dots$. Show that this construction is possible if and only if p is not a Fermat prime.

(N. G. de Bruijn).

No. 177. Let the function φ satisfy

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 & (x < 0), \\ \varphi(x) &= x & (0 \leq x \leq 1), \\ \varphi(x) - \varphi(x-1) &= x\varphi'(x) & (x > 0). \end{aligned}$$

Show that $\varphi(x)$ tends to a positive limit if $x \rightarrow \infty$.

(N. G. de Bruijn).

No. 178. Show that the limit mentioned in the previous problem equals e^γ , where γ is Euler's constant.

(N. G. de Bruijn).

No. 179. If m and n are integers, $0 < m < n$, show that

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k-1}{m-1} \frac{1}{n-k} = \binom{n-1}{m-1} \sum_{r=m}^{n-1} \frac{1}{r}.$$

(K. L. Chung).

No. 180. Evaluate

$$\int_0^1 t^{-1} \log(1-t) dt \int_0^t u^{-1} \log(1-u) du.$$

(P. J. de Doelder).

No. 181. Show that

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cos t \log^2 t dt = (\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\pi + \gamma + 2 \log 2)^2.$$

(P. J. de Doelder).

No. 182. Show that

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin \varphi \cos 2\varphi}} \log \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{4\sqrt{2}} (\pi + \log 2) B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

and

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos \varphi}{(\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \log \cos 2\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}).$$

(P. J. de Doelder).

No. 183. If ν is a non-negative integer, evaluate

$$\int_0^\infty |x - [x + \frac{1}{2}]| J_{\nu+1}(x) J_{\nu-1}(x) dx.$$

(P. J. de Doelder).

No. 184. Evaluate

$$\int_0^R r dr \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} (a^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$$

in terms of complete elliptic integrals of the first and second kind (R and a are positive constants).

(P. J. de Doelder).

No. 185. Gegeven twee constante radioactieve bronnen B_1, B_2 . Bij B_1 zijn er twee uitgangen, U_1, U_2 , en er is tussen B_1 en U_2 een venster dat vanuit B_2 wordt bestuurd. Een desintegratie van B_1 veroorzaakt bij U_1 steeds een signaal, bij U_2 dan en slechts dan als het venster open is. De toestand van het venster (open of dicht) slaat om door een desintegratie-sigitaal vanuit B_2 . Aan een signaal van B_1 , dat alleen bij U_1 geregistreerd wordt, beantwoordt een 0, aan een signaal dat bij U_1 én U_2 geregistreerd wordt, een 1. Men onderzoek de stochastische rij van nullen en enen, die op deze wijze ontstaat, in het bijzonder de afhankelijkheid tussen een term en zijn opvolger. (Men make de gebruikelijke veronderstellingen zoals: alle reacties zijn instantaan, de waarschijnlijkheid van gelijktijdige desintegraties verdwijnt, enz.).

(H. Freudenthal).

No. 186. A is an infinite matrix (a_{ij}) ($i, j = 1, 2, \dots$). A subset d of the set of all elements is a quasi-diagonal if it contains not more than one element from each row and not more than one from each column of A . The subset d is a diagonal if it contains exactly one element from each row and column. Q_A is the set of quasi-diagonals and D_A the set of diagonals of A . Let p be a positive number. Put

$$\sigma(d) = (\sum_{a \in d} |a|^p)^{1/p}, \quad \|A\| = \sup_{d \in D_A} \sigma(d);$$

$\|A\|$ may be infinite. Prove that

$$\|A\| = \sup_{d \in Q_A} \sigma(d).$$

Moreover, if $\|A\| < \infty$ and

$$a_{ij} \rightarrow 0 \text{ as } j \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$a_{ij} \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow \infty \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

then show that there is a $d \in Q_A$ such that $\|A\| = \sigma(d)$.

(D. J. Harris and C. K. Hill).

No. 187. We use the notation of the previous problem.

a. Give an example of a matrix A with $\|A\| < \infty$, satisfying (1) and (2), and such that $\sigma(d) < \|A\|$ for all $d \in D_A$.

b. Give an example of a matrix A with $\|A\| < \infty$, such that $\sigma(d) < \|A\|$ for all $d \in Q_A$, but such that (1) is not satisfied.

c. Give an example of a matrix A with $\|A\| < \infty$, such that there is a diagonal d with $\sigma(d) = \|A\|$, but such that both (1) and (2) are false.

(C. K. Hill).

No. 188. $f(z)$ is a differentiable function of the complex variable z for $|z| < 1$ and is continuous for $|z| \leq 1$. By applying Cauchy's theorem to either the upper or the lower half of the circle $|z| = 1$, R. M. GABRIEL (Proc. London Math. Soc. (2) 28 (1928) 121-127) has shown that, for p and p' conjugate indices exceeding unity,

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \left(\int_{-\pi}^0 |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \left(\int_0^\pi |f(e^{i\theta})|^{p'} d\theta \right)^{1/p'}.$$

(This is a generalisation and sharpening of a well known inequality of FEJÉR and F. RIESZ (Math. Zeitschr. 11 (1921) 305-314)). Show that this inequality is strict unless f is null.

(C. K. Hill).

No. 189. In het platte vlak zijn gegeven twee punten A en B . Gevraagd wordt het rechte lijnstuk AB te construeren met behulp van twee „langs elkaar verschuifbare” eindige tekendriehoeken. Toegelaten is de toepassing van het richtingsadjunctiepostulaat: bij gegeven punten P en Q , gegeven hoek α , en gegeven getal $\delta_\alpha > 0$, is het mogelijk een lijnstuk door P te construeren dat, aan een voorgeschreven zijde van de niet-geconstrueerde lijn PQ , hiermede een hoek φ maakt zodanig, dat $|\varphi - \alpha| < \delta_\alpha$.

(D. Kijne).

No. 190. Zij G de multiplicatieve groep der niet-singuliere $n \times n$ matrices, waarin de elementen rationale functies zijn van een parameter λ met reële coëfficiënten; zij K een stel natuurlijke getallen: ($k_1 = 1 < k_2 < \dots < k_r = n + 1$). Aan de plaats van een element $a_{ij}(\lambda)$ in de matrix wordt door middel van K een plaatsgetal N_{ij} toegevoegd als volgt: $N_{ij} = p + q$, waarbij p het rangnummer is van k_p , zodanig dat $k_p \leq i < k_{p+1}$, en q dat van k_q , zodanig dat $k_q \leq j < k_{q+1}$. Noem nu $H(K)$ de verzameling van die matrices uit G waarvoor geldt: $a_{ij}(\lambda) = a_{ij}(-\lambda)$ als N_{ij} even is, en $a_{ij}(\lambda) = -a_{ij}(-\lambda)$ als N_{ij} oneven is. Bewijs, dat $H(K)$ een ondergroep is van G .

(D. Kijne).

No. 191. Zij $I(\lambda) = \int_0^1 f(x) e^{i(x^{-1} + \lambda x)} dx$. Verondersteld mag worden dat $f''(x)$ continu is voor $0 \leq x \leq 1$, of dat $f(x)$ analytisch is in een gebied dat het gesloten interval $[0, 1]$ bevat. Bewijs dat, als $\lambda \rightarrow \infty$,

$$I(\lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i(\frac{1}{2}\pi + 2\sqrt{\lambda})} f(\lambda^{-\frac{1}{2}}) \lambda^{-\frac{1}{2}} + e^{i(\lambda + 1 - \frac{1}{2}\pi)} f(1) \lambda^{-1} + \\ + \frac{3}{8} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{i(\frac{3}{2}\pi + 2\sqrt{\lambda})} f(\lambda^{-\frac{1}{2}}) \lambda^{-\frac{3}{2}} + O(\lambda^{-\frac{5}{2}}).$$

(F. de Kok).

No. 192. Let E be a Riesz space (= vector lattice, see N. BOURBAKI, Livre VI (Intégration), Chap. II (Act. Sci. et Ind. 1175)) with elements $x, y, z, \dots$ It is well-known that if $x \perp y$ (i.e., $\inf(|x|, |y|) = 0$), then $|x + y| = |x - y| = \sup(|x|, |y|)$. Show that, conversely,

- (i) $|x + y| = |x - y|$ implies $x \perp y$,
- (ii) $|x + y| = \sup(|x|, |y|)$ implies $x \perp y$.

(W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen).

No. 193. Let A, B, C, D be matrices whose elements belong to some commutative field, of such a type that all matrix products, matrix sums and determinants $|X|$ which occur in what follows in fact exist. Prove that if $AB = BD$ then

$$|A + BC||D| = |D + CB||A|. \quad (R. Rado).$$

No. 194. Op de zijden van driehoek ABC worden buitenwaarts de driehoeken BCP, CAQ en ABR beschreven. De twee hoeken van deze drie driehoeken, die A tot hoekpunt hebben, bezitten beide de grootte x . Evenzo bezitten de twee hoeken bij B de grootte y en de twee hoeken bij C de grootte z .

Onderzoek of het mogelijk is de constanten x, y en z zodanig te kiezen, dat de vorm van driehoek PQR onveranderlijk is bij variatie van de vorm van driehoek ABC .

(A. van Tooren).

No. 195. Als het punt D op de omgeschreven ellips van Steiner van driehoek ABC ligt, dan raakt de centrale kegelsnede van de bundel met basispunten A, B, C en D in het zwaartepunt van driehoek ABC aan de kegelsnede die D tot middelpunt heeft en waarvan driehoek ABC pooldriehoek is.

(J. H. Tummers).

No. 196. Een parabool raakt aan de zijden BC, CA en AB van driehoek ABC in de punten A_0, B_0 en C_0 . De lijnen AA_0, BB_0 en CC_0 gaan door één punt L . Bewijs dat L op de omgeschreven ellips van Steiner van driehoek ABC ligt.

Zijn a, b en c de lengten van de zijden van driehoek ABC en heeft L in normaalcoördinaten met driehoek ABC als fundamentealdriehoek de coördinaten (l_1, l_2, l_3) , bereken dan de coördinaten van het brandpunt van de parabool.

(J. H. Tummers).

No. 197. Liggen de punten A, B, C en D op één cirkel (met middelpunt O) en is Q het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van de driehoeken ABO en CDO , dan geldt voor de lengten van de lijnstukken QA, QB, QC en QD :

$$QA \times QB = QC \times QD.$$

(J. H. Tummers).

No. 198. Zijn a, b, c en d vier rechten in één vlak en zijn A_1, B_1, C_1 en D_1 de trilineaire polen van a, b, c en d resp. ten opzichte van de driehoeken BCD (zijden b, c en d), ACD , ABD en ABC , dan vallen de poollijnen van A_1, B_1, C_1 en D_1 ten opzichte van de ingeschreven ellipsen van Steiner van de driehoeken BCD, ACD, ABD en ABC samen met de rechte, die de meetkundige plaats is van de middelpunten van de kegelsneden, die aan a, b, c en d raken, (de zgn. rechte van Gauss van de rechten a, b, c en d).

(J. H. Tummers).

No. 199. In het vlak van driehoek ABC liggen de rechten d en e ; D en E zijn de trilineaire polen van d en e ten opzichte van driehoek ABC . De lijnen AB, BC, CA, EA, EB en EC snijden d in de punten $P_1', P_2', \dots, P_6'$. P_1 is het punt, dat ten opzichte van het puntenpaar AB harmonisch toegevoegd is aan P_1' ; P_2 is het punt dat ten opzichte van het puntenpaar BC harmonisch toegevoegd is aan P_2' ; enz.

Analoog snijden de zes verbindinglijnen van de vierpunt $ABCD$ de rechte e in $Q_1', \dots, Q_6'$, waarvan $Q_1, \dots, Q_6$ de harmonisch toegevoegde punten ten opzichte van de puntenparen AB, BC, CA, DA, DB en DC zijn. Bewijs dat de twaalf punten $P_1, \dots, P_6, Q_1, \dots, Q_6$ op één kegelsnede liggen.

(J. H. Tummers).

No. 200. Let μ be a nonnegative countably additive measure in the point set X such that (for simplicity) $0 < \mu(X) < \infty$, and let there be no atoms for μ in X . The set L of all real, finite, μ -measurable functions on X is a Riesz space under the natural identification of μ -almost equal functions and the natural definition of (partial) ordering, and it is well-known that every positive linear functional on L is identically zero. This is usually proved by first topologizing L (L is metrizable) and showing then that every continuous linear functional on L is zero. It is asked to present a purely measure-theoretic proof of the fact that every positive linear functional on L is zero.

(A. C. Zaanen).

HET BEROEP VAN WISKUNDIGE

Van Prof. Freudenthal ontving de redactie een overdruk van een artikel van A. N. Kolmogorov, hoogleraar aan de universiteit van Moskou, getiteld *La profession de mathématicien*.¹⁾ Gaarne volgen we zijn suggestie de inhoud van dit artikel, althans in verkorte vorm, aan de lezers van *Euclides* kenbaar te maken. Het artikel geeft een indruk van het wiskundig leven in Rusland. We laten hier een vertaling van delen van het artikel volgen.

1. De functie van de wiskundige methoden in wetenschappen zoals de mechanica, de fysica en de astronomie is welbekend. Hetgeen eveneens welbekend is, is dat de wiskunde onmisbaar is voor het praktische werk van de ingenieur en de technicus. Eenvoudig meetkundig inzicht en het vermogen formules te hanteren moet elke opzichter en geschoolde arbeider bezitten. Maar velen hebben een minder duidelijke voorstelling ervan, wat nu eigenlijk het typische is van datgene, waarmee de wiskundige zich uit hoofde van zijn beroep bezighoudt.

Velen denken, dat in de wiskundige handleidingen en boeken reeds voldoende regels en formules voorkomen om alle wiskundige problemen op te lossen, die zich in de techniek kunnen voordoen. Zelfs ontwikkelde mensen vragen soms: Maar kan men dan nog iets nieuws tot stand brengen in de wiskunde? Hierdoor komt het, dat men zich een mathematicus soms voorstelt als een vervelende man, die een groot aantal formules en stellingen kent en wiens taak het is anderen afgezaagde kennis over te brengen.

Van dit alles is alleen waar, dat de wiskundige kennis, die op de middelbare school en in het begin van voortgezette studie wordt verkregen, reeds lang in het bezit van de mensheid is. Maar zelfs de eenvoudigste wiskundige begrippen kunnen niet met succes worden gehanteerd als men ze zich niet op een zodanige manier heeft eigen gemaakt, dat men ziet, hoe men ze zelf had kunnen scheppen. Van de wiskundedocent, zowel bij het middelbaar als bij het hoger onderwijs, eist men niet alleen een gedegen kennis van hetgeen hij moet onderwijzen. Slechts hij is in staat op juiste wijze wiskunde te onderwijzen, die dit vak hartstochtelijk beleeft en voor wie het

¹⁾ Bulletin de l'A.P.M.E.P. nr. 215, p. 403 sq., nr. 217, p. 67 sq. (1961).

een levende wetenschap is, die zich in volle ontwikkeling bevindt. Zonder twijfel weten vele leerlingen van de middelbare school uit ervaring hoe meeslepend en dientengevolge gemakkelijk wiskunde wordt bij dergelijke leermeesters.

Verder, in een hoger stadium, is het vermogen op een eigen manier een probleem aan te pakken en het mathematisch te formuleren onmisbaar voor degenen, die zich wil bedienen van de mathesis voor het oplossen van technische problemen. Dit slaat op het werk van elke ingenieur. Maar omdat de wiskundige kennis en de hiervoor vereiste bekwaamheid niet bij ieder van hen in toereikende mate aanwezig zijn, zijn de meeste van onze instituten voor wetenschappelijk onderzoek en zelfs enige belangrijke fabrieken er in steeds toenemende mate toe overgegaan mathematische specialisten aan te trekken om in samenwerking met de ingenieurs aan technische problemen te werken.

Men heeft in het bijzonder behoefte aan wiskundigen, die in staat zijn leiding te geven bij het uitvoeren van omvangrijk rekenwerk. Er zijn tegenwoordig veel problemen, die voor het verkrijgen van een numeriek resultaat rekenwerk vereisen, dat de menselijke mogelijkheden te boven gaat. Het berekenen van elastische spanningen in een stuwdam, van de mate van doorsijpelen van water door een stuwdam, van de luchtweerstand van vliegtuigen en van de baan van een projectiel zijn typische voorbeelden van dergelijke problemen.

Sedert lang al zijn in wetenschappelijke instituten en fabrieken, die geïnteresseerd zijn in het oplossen van deze problemen rekenafdelingen ontstaan met tientallen rekenaars uitgerust met rekenmachines, waarbij het om berekeningen uit te voeren met grote getallen alleen nodig is de getallen op een toetsenbord aan te slaan en een toets in te drukken, die de aard van de bewerking (+, -, $\times$, :) aangeeft. Maar in de huidige wetenschap en techniek komt men problemen tegen, die met deze beperkte hulpmiddelen voor het rekenen verscheidene maanden en zelfs jaren werk van tientallen rekenaars zouden vorderen. Deze situatie heeft de onstuimige ontwikkeling van de moderne rekenmachines in de hand gewerkt.

Het construeren van en het omgaan met moderne rekenmachines is een vorm van belangrijk specialistisch ingenieurswerk, waarvoor specialisten opgeleid worden in daartoe geschikte afdelingen van hogere technische scholen. Voor het werken als rekenaar in een ouderwetse rekenafdeling of voor het uitvoeren van de oplossing van een probleem met behulp van een moderne elektronische rekenmachine is een gemiddelde ontwikkeling en een leertijd van zes

maanden voldoende. Voor het omwerken van mathematische problemen zo, dat men door middel van een rekenmachine ze op kan lossen zijn echter veel medewerkers nodig, die over een gedegen mathematische kennis beschikken.

De wiskundige theorie van de rekenmethoden is tegenwoordig van groot belang en de behoefte aan specialisten, die op de hoogte van deze methoden zijn, neemt toe met het aantal rekenmachines. Er doet zich het probleem van de programmering voor, d.i. het doorvoeren van een rekenproces tot de vorm, die het mogelijk maakt de oplossing verder automatisch te verkrijgen door middel van een rekenmachine van een bepaald type.

De U.S.S.R. heeft tegenwoordig behoefte aan een groot aantal onafhankelijke onderzoekers op het terrein van de theoretische wiskunde. Als men de gegevens vergelijkt, die over de vooruitgang van de wiskunde in Sovjet-Rusland over de periode 1917—1947 zijn gepubliceerd, ziet men, dat de eerste vijftien jaar ongeveer tweehonderd mathematici een bijdrage tot de wiskunde geleverd hebben, die iets nieuws inhield, en de tweede vijftien jaar zes- à achthonderd.

Het aantal wiskundigen met universitaire vorming, dat nodig is voor het werk aan de problemen, die door de natuurwetenschappen of de techniek gesteld worden, is belangrijk hoger, vooral als men in aanmerking neemt, dat men hier niet alleen de theorie moet uitbouwen, maar ook omvangrijke numerieke berekeningen moet uitvoeren. Men ziet geregeld de jaarlijkse behoeften van de wetenschappelijke en technische instituten en van de centra voor numerieke berekeningen aan jonge mathematische medewerkers, die aan de universiteit opgeleid zijn, toenemen.

Als men verder nog de behoefte in ons land aan wiskundeleraren in aanmerking neemt, zal men begrijpen, waarom de U.S.S.R. zoveel hoog gekwalificeerde mathematici vraagt, die opgeleid zijn in de faculteiten van de mechanica en van de theoretische natuurkunde.

De laatste jaren zijn in ons land maatregelen van belang genomen om de bekwaamheid van de wiskundedocenten aan instellingen van hoger onderwijs op te voeren en in de universiteiten een groot aantal jongeren op te sporen, die liefde voor wiskunde hebben.

Het is in dit verband interessant er aan te herinneren, dat in de jaren, die op de grote socialistische oktoberrevolutie volgden, de jeugd vrijwel uitsluitend naar de grote technische scholen wilde gaan. Veel jonge lieden verbeeldden zich toen, dat ze alleen langs deze weg onmiddellijk deel konden nemen aan de verwerkelijking van het socialisme. In de eerste jaren van de revolutie was een

dergelijke geesteshouding in zeker opzicht zinvol. Maar later, toen de ontwikkeling van de natuurwetenschap onmisbaar werd voor de economie van ons land, werd het noodzakelijk maatregelen te nemen om het wantrouwen van de jeugd ten aanzien van de toekomst-mogelijkheden, die de universiteit bood, te overwinnen. Deze geesteshouding is thans verdwenen. Maar in de wiskunde, die te dor en abstract lijkt, vergeleken met andere wetenschappen, moet men er nog altijd tegen strijden.

In 1952 werd de toelating tot gespecialiseerde wiskunde aan de universiteiten van de U.S.S.R. sterk verruimd vergeleken met de vorige jaren. Het is van groot belang, gezien deze verruiming, dat de jeugd liefde voor de wiskunde bijgebracht wordt. Daarom is het nodig, dat overal aan deze amateur-wiskundigen de gelegenheid geboden wordt hun smaak te ontwikkelen en hun krachten en bekwaamheden te meten.

Om met kennis van zaken een keuze te kunnen doen, is het nuttig deel te nemen aan het werk van een wiskundeclub en aan plaatselijke olympiaden. Het kan nog nuttiger zijn publikaties te lezen, die op deze werkzaamheden betrekking hebben en zijn krachten te beproeven op het oplossen van moeilijke opgaven.

2. De noodzaak van speciale aanleg voor het bestuderen en begrijpen van wiskunde wordt vaak overschat. De wiskunde maakt soms een erg moeilijke indruk ten gevolge van een slechte, veelal te formele, manier van uitleggen. De vermogens van de gemiddelde mens zijn in het algemeen ruim voldoende om, onder goede leiding of met goede boeken, zich niet alleen de wiskunde eigen te maken, die op de middelbare school onderwezen wordt, maar ook b.v. de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening te begrijpen. Niettemin, als het erom gaat wiskunde als hoofdvak te kiezen, spreekt het vanzelf, dat men eerst verifieert of men voldoende wiskundige aanleg heeft. Het is duidelijk, dat verschillende personen zich wiskundige redeneringen niet met hetzelfde gemak eigen maken en dat — op een hoger niveau — zij er niet even snel in slagen nieuwe mathematische vondsten te doen. En natuurlijk moeten we ervoor zorgen, dat van onze miljoenen jongeren diegenen zich op wiskunde gaan specialiseren, die het best op dit gebied zullen slagen.

Daarom is samenwerking om jongelieden die mathematische gaven hebben, vooruit te brengen een van de voornaamste taken van de wiskundige schoolclubs en olympiaden en van de overige organisaties, die zich ten doel stellen wiskundige kennis te verbreden en individuele bestudering van de wiskunde aan te moedigen.

Men moet niet overhaast jonge lieden talentvolle mathematici noemen. Maar men mag niet nalaten op een geschikt moment door een raad of door een beloning op een olympiade mathematisch begaafden ertoe te brengen de wiskunde als hun toekomstige bezigheid te kiezen.

Waaruit bestaat deze begaafdheid? Allereerst moeten we erop wijzen, dat succes in de wiskunde geenszins berust op de kennis van een groot aantal feiten, losse formules, enz. Een goed geheugen is in de wiskunde, zoals overal elders, nuttig, maar de meeste beroemde mathematici hadden geen buitengewoon goed geheugen.

In het bijzonder kunnen de rekenwonderen, die lange series grote getallen onthouden en ze uit het hoofd optellen of vermenigvuldigen, niet dienen als voorbeelden van personen, die een goede wiskundige aanleg in de eigenlijke zin van het woord hebben.

Het vermogen algebraïsche berekeningen uit te voeren, in de zin van een handige herleiding van ingewikkelde uitdrukkingen, van het vinden van vruchtbare methoden om vergelijkingen op te lossen, die niet tot een bekend type behoren, enz., benadert al de bekwaamheid, die van de wiskundige geëist wordt bij serieus wetenschappelijk werk. Men is het er zelfs over eens, dat een uitzonderlijke ontwikkeling van de gave dit soort wiskundig „rekenwerk” te verrichten, een van de voornaamste kenmerken van mathematische begaafdheid is.

In de schoolalgebra vindt men de moeilijkheden, die van de leerlingen dit soort begaafdheid vereisen, vooral in de ontbinding in factoren van algebraïsche vormen. In de opgaven in aanhangsel 3 van dit artikel ziet men in de nrs. 1 en 2, dat soms de ontbinding in factoren van zeer eenvoudige uitdrukkingen veel vindingrijkheid vereist. Voorts is deze bekwaamheid vereist op het terrein van het oplossen van vergelijkingen.

Overal waar dit mogelijk is trachten de mathematici hun problemen op geometrische wijze te verduidelijken. Op de middelbare school blijkt tamelijk duidelijk het nut van grafieken bij de bestudering van functies. Het zal voor de lezer dan ook geen verrassing zijn, dat we beweren, dat de meetkundige voorstelling of, zoals men ook wel zegt, de meetkundige intuïtie, een grote rol speelt bij het onderzoek in bijna alle gebieden van de wiskunde, zelfs de meest abstracte.

Op school kost het vaak veel moeite een visuele voorstelling te krijgen van ruimtefiguren. Men moet b.v. een uitstekend leerling in de wiskunde zijn om zich duidelijk met gesloten ogen en zonder figuur de doorsnede van een kubus met het vlak door het middelpunt

loodrecht op een lichaamsdiagonaal te kunnen voorstellen.

In opgave 4 van aanhangsel 3 bestaat de hele moeilijkheid uit het zien hoe de beide viervlakken elkaar doorsnijden. Ook voor het oplossen van de opgaven 5, 6 en 7 is meetkundige intuïtie van essentieel belang, hoewel hier al meer enerzijds een stevige kennis van de stellingen, die voor het bewijs gebruikt moeten worden, noodzakelijk is en anderzijds bekwaamheid in logisch redeneren een vereiste is.

De kunst een logische redenering correct op te bouwen is eveneens een van de voornaamste aspecten van de mathematische begaafdheid.

Op school bedient men zich om de leerlingen logisch redeneren te leren van een systematische cursus in de meetkunde met zijn definities, stellingen en bewijzen. Maar veelal schuilt de grootste moeilijkheid bij het precies doorzien van de zin van een ingewikkelde logische constructie in het vatten van het principe van volledige inductie, dat aan het eind van de cursus algebra behandeld wordt. Velen zijn niet in staat de eigenlijke inhoud van dit principe, die verborgen gaat achter een aanreenschakeling van „als” en „dan”, helder in te zien. Het principe van volledige inductie goed begrijpen en kunnen toepassen is een bruikbaar criterium voor de logische rijpheid, die voor de wiskundige onmisbaar is.

Men leert niet zonder moeite in een onverwachte situatie een logisch consequente redenering houden. In de wiskundige olympiaden voor de scholen doen de meest onverwachte moeilijkheden zich juist voor bij het oplossen van die problemen, waarbij geen enkele voorkennis vereist wordt, maar waarbij men alleen de betekenis van de vraag moet begrijpen en logisch moet kunnen redeneren. Het volgende probleem brengt veel leerlingen van de 10e klasse al in verlegenheid: in een bos zijn 800000 naaldbomen en geen van hen heeft meer dan 500000 naalden; laat zien dat minstens twee van de bomen hetzelfde aantal naalden hebben (vgl. opgave 8 van aanhangsel 3; in de opgaven 9 en 10 is de voornaamste moeilijkheid eveneens gelegen in de ongewone redeneerwijze, die gevolgd moet worden).

De verschillende aspecten van mathematische begaafdheid komen in diverse combinaties voor. De ontwikkeling van een van hen is soms al voldoende om onverwachte en merkwaardige vondsten te doen, hoewel een zeer eenzijdige begaafdheid natuurlijk gevaarlijk is. Het spreekt vanzelf, dat begaafdheid op zichzelf niet voldoende is, maar samen moet gaan met liefde voor de wiskunde en met systematisch en dagelijks werk.

Mathematische gaven komen meestal reeds vroeg aan de dag en

moeten ononderbroken gecultiveerd worden. De invloed van het zich op school-een paar jaar niet met wiskunde bezighouden is dikwijls moeilijk herstelbaar. Het werk van tekenaar, van assistent op een laboratorium, het werken met onderdelen van machines, het monteren van radiotoestellen, enz. houdt duidelijk verband in sommige opzichten met het werk van de wiskundige, b.v. in die zin dat ruimtelijk voorstellen en functioneel denken erdoor geoefend worden. Het contact bij het werk met de moderne techniek kan een meer bewuste belangstelling voor de toepassing van de wiskunde opwekken. Toch raden we jonge mensen, die het plan hebben aan de universiteit in de mathematische sector te gaan studeren, sterk aan, als zij na het verlaten van de school enige jaren in de industrie gewerkt hebben, van te voren wiskunde te studeren en zich niet alleen voor te bereiden op het toelatingsexamen (daarvoor worden aan elke universiteit speciale cursussen gegeven), maar ook deel te nemen aan werk in wiskundeklubs en aan olympiaden en zich in de literatuur te verdiepen. Anders zal geen enkel voorrecht, dat de werkers in het productieproces geboden wordt om toegang tot de universiteit te verkrijgen, voldoende zijn om tijdens hun werk aan de universiteit gelijke tred te houden met hun kameraden, die direct van de school gekomen zijn.

3. Het onderwijs op school in de verplichte stof beoogt alle leerlingen een grondig begrip van wiskunde bij te brengen. Als men zijn krachten wil beproeven op het oplossen van moeilijker opgaven en men van meer nabij wil zien, hoe in de wetenschap ingewikkelde wiskundige problemen tot een goed eind gebracht worden of hoe de mathesis wordt toegepast in natuurwetenschap en techniek, kan men daartoe naar de wiskundeklubs gaan. Dergelijke clubs worden door de wiskundeleraars op verscheidenene scholen gesteund. Door de universiteiten en de pedagogische instituten worden in veel steden interscholair wiskundeklubs verzorgd en voordrachten gehouden voor scholieren over bepaalde wiskundige onderwerpen of over de geschiedenis van de wiskunde.

Het spreekt vanzelf, dat al deze instellingen tot zelfs de olympiaden in ruime mate opengesteld worden voor jonge werkers, die zich interesseren voor wiskunde.

De wiskundige olympiaden, waar moeilijke vragen gesteld worden en waar de „overwinnaars” prijzen en eervolle vermeldingen krijgen, bereiken hun doel daar, waar de clubs goed werken. De olympiaden moeten de kroon op het werk zijn, dat in de loop van het jaar verricht is, en niet een op zichzelf staand evenement.

Vragen, die op de clubs en de olympiaden gesteld worden, hebben vaak een gekunsteld en zelfs fantastisch karakter. Daar steekt geen kwaad in, als de vragen zo gekozen zijn, dat voor hun oplossing een ernstige geestelijke inspanning vereist is, die overeenkomst vertoont met de inspanning van een volwassen mathematicus in zijn persoonlijk werk.

De onderwerpen, die behandeld worden in de clubs en op de voordrachten en waarvan de inhoud opgesteld is door docenten van het hoger onderwijs, stellen duidelijk de voornaamste ontwikkelingslijnen van de wiskundige wetenschap en het belang van de wiskunde voor de natuurwetenschap en de techniek in het licht. Het is juist op de clubs stof van vitaal belang of van duidelijke toepasbaarheid te geven, maar het zou niet juist zijn de eis te stellen, dat aan deze voorwaarde alle „training” van de jonge wiskundige zou voldoen.

Los van het deelnemen aan clubs kan men zich individueel bezighouden met het oplossen van moeilijker problemen. Er zijn verscheidene interessante verzamelingen van opgaven voor amateurs op het gebied van de wiskunde. Sommige zijn zo geschreven, dat de lezer door systematisch een serie opgaven te maken, een duidelijk inzicht krijgt in de ontwikkeling van een tamelijk gecompliceerde mathematische theorie. Behalve deze verzamelingen, die op een vrij hoog plan staan, bestaat er een groot aantal kleine, goed toegankelijke boekjes over speciale wiskundige onderwerpen. Sommige van hen leiden de lezer in, onder vermindering voorzover mogelijk van technische moeilijkheden, in het soort problemen, dat heden nog onderwerp van wetenschappelijk onderzoek is.

Het werk in de clubs, het aanhoren van voordrachten en het lezen van aanvullende literatuur mag natuurlijk niet de aandacht van de leerlingen afleiden van hun verplicht en meer elementair werk, zowel op school of op voorbereidende cursussen. Men moet er wel aan denken, dat men om toegelaten te worden tot de universiteit voor alles de schoolstof moet beheersen en op de basis daarvan met zekerheid en nauwkeurigheid gewone opgaven moet kunnen oplossen van, om zo te zeggen, standaardtype.

In het aanhangsel 2 zijn voorbeelden gegeven van opgaven, die gesteld zijn op het toelatingsexamen van de mechanisch-mathematische faculteit van de universiteit van Moskou. Vergelijken we deze opgaven met die van de olympiaden, dan zien we belangrijke verschillen. Om de examenopgaven te maken is geen speciale spitsvondigheid nodig. In de meeste gevallen kunnen ze worden opgelost door consequente toepassing van de regels en methoden, die men op

school geleerd heeft. Al vraagt de oplossing soms enig nadenken, dit blijft toch beperkt tot de noodzaak de gestelde vraag op natuurlijke manier systematisch te analyseren.

Soms stellen de examinatoren, om aan de oplossing van een opgave de kennis van de kandidaat van een serie formules, regels of stellingen uit de cursus te verifiëren, vragen, die er door hun verwarrende en gekunstelde inkleding ingewikkeld uitzien. Onafhankelijk van de vraag of hiermee het beoogde doel bereikt wordt, moet men dit soort vragen niet te zeer schuwen. Hun principe is vaak veel eenvoudiger dan dat van vraagstukken, die beknopter en eleganter geformuleerd zijn. Het oplossen van vraagstukken, die ingewikkeld en verwarrend geformuleerd zijn, komt gewoonlijk hierop neer: nauwkeurig de opgave lezen, zich niet verstrikken in de lange serie berekeningen en redeneringen, waarvan elk onderdeel elementair is, hoewel er een serie formules en stellingen uit de cursus in toegepast moet worden.

Het is van veel belang zijn krachten te verdelen over het grondig verwerken van de cursus, het nadenken over de moeilijkste en uit ideologisch oogpunt belangrijkste problemen van de cursus, het trainen op examenvragen en (als er vrije tijd overblijft) het ontwikkelen van zijn persoonlijke smaak door het lezen van boeken en het deelnemen aan clubs en olympiaden.

Tot slot wilde ik opmerken, dat volgens veel hoogleraren van de universiteit van Moskou de verzamelingen met examenopgaven, werk van de wiskundeclubs en opgaven van de olympiaden aan een zeker deel van onze jeugd een sterke vrees voor het toelatings-examen van de universiteit (en in het bijzonder van dat van de universiteit van Moskou) heeft ingeboezemd. Het ligt voor de hand, dat elke kandidaat de wens koestert elk examenvraagstuk te kunnen maken, maar men moet niet denken, dat de universiteit alleen diegenen toelaat, die alle op het examen gestelde vragen goed hebben beantwoord.

Aanhangsel 1. *De afdeling wiskunde van de universiteit van Moskou.*

De afdeling wiskunde van de mechanisch-mathematische faculteit van de universiteit van Moskou is de belangrijkste afdeling wiskunde van de sovjet universiteiten door het peil van de studenten die toegelaten worden, en door de hoedanigheid van de hoogleraren. Alle studenten uit andere steden, die in Moskou worden toegelaten, krijgen een plaats in het studentenhuus van de universiteit. Gezien het nationale belang van de universiteit van Moskou geven we hier enkele bijzonderheden betreffende de afdeling wiskunde.

De afdeling wiskunde leidt op voor wetenschappelijke werkzaamheid in de wiskunde zelf en in haar toepassingen en ook voor leraar in de wiskunde bij het middelbaar, het technisch en het hoger onderwijs. Bovendien is de laatste jaren aandacht besteed aan het opleiden van specialisten voor het werk met grote moderne rekenmachines.

De universiteit van Moskou bekleedt in de U.S.S.R. de eerste plaats voor de opleiding van mathematici van verschillende aard. Men kan zeggen, dat de helft van het wetenschappelijk werk op het gebied van de wiskunde in de U.S.S.R. gedaan wordt door mathematici, die hun opleiding gehad hebben aan de universiteit van Moskou. Een belangrijk deel van de beste studenten, die in de afdeling wiskunde van deze universiteit afstuderen, wordt dan ook aangewezen om hun wetenschappelijk werk in de wiskunde voort te zetten als „aspirant” van de universiteit of wordt wetenschappelijk medewerker van een wiskundig instituut.

Men heeft tegenwoordig meer en meer een tekort aan mathematici, die op wetenschappelijke of technische instituten werken en zich bezighouden met aanverwante vakken (natuurkunde, geofysica, enz.) en met verschillende onderdelen van de moderne techniek. Het werk van de wiskundigen in deze instituten blijft niet beperkt tot het leiden van het rekenwerk of het oplossen van wiskundige problemen, die door de fysici of technici gesteld worden. Veel geleerden worden, na wiskunde gestudeerd te hebben, onderzoekers van naam in de een of andere concrete wetenschap, waarvoor een grote mate van wiskundige scholing noodzakelijk is. De afdeling wiskunde is een van de belangrijkste centra voor de opleiding van specialisten in al die gebieden van wetenschap of techniek, waar het apparaat van de moderne wiskunde nodig is.

Bij de aanvang van de derde cursus moeten de studenten in de wiskunde kiezen tussen specialisatie in de richting „wiskunde” of „wiskundig rekenwerk”. De studenten, die „wiskunde” gekozen hebben, specialiseren zich de vierde cursus verder in een van de volgende richtingen:

1. analyse, 2. hogere algebra, 3. hogere meetkunde en topologie, 4. differentiaalmeetkunde, 5. waarschijnlijkheidsrekening, 6. getallentheorie, 7. differentiaalvergelijkingen, 8. functietheorie, 9. mathematische logica en geschiedenis van de wiskunde.

De studenten in „wiskundig rekenwerk” werken in laboratoria of rekencentra van de universiteit, die over een grote moderne rekenmachine beschikken. Deze studenten en ook zij, die waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek gekozen hebben, door-

lopen een praktische stage bij verschillende wetenschappelijke en technische instellingen.

Tot het studieprogramma voor mathematici behoren in de latere cursussen buiten de zuivere wiskunde ook theoretische natuurkunde en andere takken van natuurwetenschap en techniek naar keuze.

Behalve de verplichte cursussen worden elk jaar tientallen cursussen gehouden, waarin de laatste ontwikkeling van de wetenschap uiteengezet wordt. In tientallen wetenschappelijke kringen of seminars komen mathematici van alle generaties samen om problemen op te lossen, die actueel voor de wiskundige zijn. Bij dit speurwerk worden zoveel mogelijk studenten uitgenodigd.

Aanhangsel 2. Opgaven voor het toelatingsexamen tot de mechanisch-mathematische faculteit van de universiteit van Moskou (1958).

1. — a. Een bassin wordt gevuld door vier kranen. Als men de 1e, 2e en 3e openzet, is het bassin in 12 minuten vol; als men alleen de 1e en 4e openzet in 20 minuten. In hoeveel tijd is het bassin vol, als men alle vier kranen openzet? ¹⁾

b. Bewijs, dat voor elke gehele positieve n het getal $4^n + 15n - 1$ door 3 en door 9 deelbaar is.

c. Punt M is gegeven binnen $\angle A$. Trek door M een lijn l , die met de benen van de hoek een driehoek met minimale oppervlakte vormt. Hoe construeert men l ?

d. In een afgeknotte regelmatige driezijdige piramide is een bol met straal r beschreven; de opstaande ribbe is gelijk aan de ribbe van het bovenvlak. Bereken de inhoud van de afgeknotte piramide.

2. — a. Vijf personen doen een zeker werk. De 1e, 2e en 3e kunnen het werk samen in 7,5 uur doen, de 1e, 3e en 5e in 5 uur, de 1e, 3e en 4e in 6 uur en de 2e, 4e en 5e in 4 uur. In hoeveel tijd kunnen de vijf personen samen het werk doen?

b. Gegeven is, dat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Bewijs, dat de som van twee van de drie getallen a , b en c gelijk aan 0 is.

c. A , B , C en D liggen op een cirkel, in deze volgorde. Wat is de meetkundige plaats van de punten, waarin twee cirkels elkaar raken, waarvan de ene door A en B en de andere door C en D gaat?

d. Bereken de ribbe van een kubus, die beschreven is in een regelmatige driezijdige piramide, waarvan de ribbe van het grondvlak a en de opstaande ribbe b is; vier hoekpunten van de kubus liggen in het grondvlak van de piramide, de andere vier in de opstaande zijvlakken.

[Van de overige in het artikel voorkomende opgaven vermeld ik alleen nog:]

Welke cijfers a , b en c voldoen aan de voorwaarde, dat voor de getallen $abc1$ en $2abc$ (bestaande uit de vier cijfers 1, a , b , c resp. a , b , c , 2) geldt $abc1 = 3 \cdot 2abc$.

Los op: $\sin x \sin 2x + \sin^2 x \sin 4x + \dots + \sin^n x \sin 2nx = 1$.

Bewijs, dat voor de bissectrice b_a van driehoek ABC geldt

$$b_a = \frac{2bc \cos \frac{1}{2}\alpha}{b+c}.$$

Leid hieruit af, dat een driehoek met twee gelijke bissectrices gelijkbenig is.

¹⁾ Vermoedelijk is een deel van de oorspronkelijke opgave weggefallen (vert.).

Aanhangsel 3. *Opgaven gegeven op de wiskundige olympiaden.*

1. Ontbind in factoren: $x^5 + x + 1$. (Leningrad, 1951, 8e kl.)
2. Ontbind in factoren: $a^{10} + a^5 + 1$. (Lvov, 1946, 9e–10e)
3. Los op het stelsel vergelijkingen

$$xy(x + y) = 30$$

$$x^3 + y^3 = 35. \text{ (Leningrad, 1951, 9e)}$$

4. In een kubus worden twee regelmatige viervlakken zo beschreven, dat vier hoekpunten van de kubus de hoekpunten van een van hen zijn en de andere vier hoekpunten van de kubus de hoekpunten van het andere zijn. Welk deel van de inhoud van de kubus heeft het gemeenschappelijk deel van beide viervlakken? (Ivanovo, 1951, 9e–10e)

5. De vier zijden van een scheve vierhoek raken een bol. Bewijs, dat de vier raakpunten in één vlak liggen. (Moskou, 1950, 9e en 10e)

6. Bewijs, dat de som van de afstanden van een punt binnen een viervlak tot de vier zijvlakken constant is. (Stalingrad, 1950, 10e)

7. Bewijs, dat de lijnen, die het midden van een hoogtelijn van een regelmatig viervlak met de hoekpunten van het vlak, waarop de hoogtelijn is neergelaten, verbinden, loodrecht op elkaar staan. (Kazan, 1947, 9e en 10e)

8. In 500 kisten zitten appels. Geen kist kan meer dan 240 appels bevatten. Bewijs, dat minstens drie van de kisten evenveel appels bevatten. (Kiev, 1950, 7e en 8e)

9. Hoeveel keer per dag staan de wijzers van een horloge loodrecht op elkaar? (Kiev, 1950, 7e en 8e)

10. Wat is het grootste aantal scherpe hoeken, dat een convexe n -hoek kan hebben? (Kiev, 1950, 7e en 8e)

11. Bewijs, dat voor elke gehele a het getal $a^2 - a$ deelbaar is door 42.

12. Bewijs, dat $a + bi$, als $b \neq 0$ en de modulus van $a + bi$ gelijk aan 1 is, geschreven kan worden in de vorm $\frac{c+i}{c-i}$. (Kazan, 1947, 10e)

13. Bewijs, dat er geen veelvlak met 7 ribben bestaat. (Kiev, 1952, 9e en 10e)

14. Los op het volgende stelsel vergelijkingen met 15 onbekenden:

$$1 - x_1 x_2 = 0$$

$$1 - x_2 x_3 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$1 - x_{14} x_{15} = 0$$

$$1 - x_{15} x_1 = 0. \text{ (Moskou, 1952, 7e)}$$

15. Bewijs, dat voor $n > 1$ geldt $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. (Ordjonikidze, 1953, 10e)

16. Twee opvolgende zijden van een parallellogram zijn a en b . Hoe verhouden zich de inhoud van de lichamen, die ontstaan door het parallellogram om deze twee zijden te wentelen? (Moskou, 1958, 10e)

17. Welke paren gehele getallen voldoen aan $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$? (Moskou, 1958, 10e)

18. Bewijs, dat voor $n > 2$ geldt $(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)^2 > n^n$. (Moskou, 1958, 8e)

19. Los op het stelsel vergelijkingen

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y, \quad \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \quad \frac{2z^2}{1+z^2} = x. \text{ (Moskou, 1957, 9e)}$$

20. Los in het reële getalsysteem het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$1 - x_1^2 = x_2$$

$$1 - x_2^2 = x_3$$

.....

$$1 - x_{n-1}^2 = x_n$$

$$1 - x_n^2 = x_1.$$

[Nog drie opgaven vindt men in de rubriek recreatie.]

Hier eindig ik de vertaling. In een vierde aanhangsel vindt men een tamelijk groot aantal (55) titels van boeken, die speciaal dienen om leerlingen van het niveau van de middelbare school in de gelegenheid te stellen onderwerpen van de wiskunde te bestuderen, die niet tot de gewone schoolstof behoren. Onder de titels vindt men verschillende verzamelingen opgaven, maar ook, om enkele onderwerpen te noemen, werkjes over volledige inductie, merkwaardige krommen, de getallen van Fibonacci, sommatie van oneindig kleine grootheden, complexe getallen en conforme afbeelding, hyperbolische functies, de meetkunde van Lobatchevsky, toepassingen van de mechanica op de wiskunde, inleiding in de groepentheorie, priemgetallen, projectieve meetkunde, geschiedenis van de wiskunde, elektronische rekenmachines. Bovendien is er een tijdschrift „Wiskunde op school” met zes afleveringen per jaar.

Merkwaardig is, dat men onder de titels slechts één werkje vindt over differentiaalrekening. Hoewel dit onderwerp op de middelbare school niet wordt besproken, is er in de wiskundeclubs merkwaardigerwijs weinig belangstelling voor. Als reden wordt opgegeven, dat men in de wiskundeclubs probeert weinig theorie te geven en snel te komen tot het oplossen van vraagstukken, die op een behoorlijk niveau staan. Wil men doordringen in de differentiaalrekening, dan is een vrij lange theoretische voorbereiding noodzakelijk om het begrip onder de knie te krijgen en daarom vindt men het ondoelmatig er in dit stadium aandacht aan te besteden.

Vertaald door P. G. J. Vredenduin

DERDE INTERNATIONALE POST-UNIVERSITAIRE
VERVOLMAKINGSCURSUS VOOR DOCTORS EN
LICENTIATEN IN DE WISKUNDE IN 1962 TE BRUSSEL

door

W. J. BRANDENBURG en W. P. THIJSEN

Dit jaar was deze cursus uitgebreid met cursussen voor natuurkunde, scheikunde en biologie. Zij werden gehouden van 24 tot 30 augustus 1962. De voorzitter en organisator van deze cursussen was wederom de heer Dr. J. J. van Hercke, secretaris-generaal tot Hervorming van het Secundair Onderwijs van het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur te Brussel. De deelnemers waren ook nu weer gehuisvest in het studentenhuis „Paul Héger”. Vele voordrachten werden in de Franse taal, sommige in de Nederlandse taal gehouden. De cursus werd georganiseerd en gefinancierd door het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur in België in samenwerking met de O.E.S.O. Het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen heeft de reiskosten der Nederlandse deelnemers betaald.

In aanwezigheid van de heer G. van den Borre, directeur-generaal, mevr. L. de Brouckère, presidente van de faculteit en de heer Dr. J. J. van Hercke opende de heer S. Levarlet, directeur-generaal de cursussen. Vervolgens kreeg prof. L. Massart, voorzitter van de Nationale Raad voor Wetenschapsbeleid, het woord. Hij wees erop, dat de vernieuwing van het onderwijs sinds 1935 geen stap verder gekomen was. Het middelbaar en hoger onderwijs is niet meer aangepast aan de huidige tijd. Juist in dit kader zijn deze cursussen van zo groot belang.

Over de *logica van de beschrijvingen en bepalingen* sprak Prof. Dr. Alfons Borgers (Leuven).

In het begin kwamen daarbij enige numerieke quantoren aan de orde omdat de quantor „voor een en slechts een individu” nodig was voor het onderwerp van bespreking. Na algemeenheden over de beschrijvingen werden de nodige uitgangswetten geformuleerd en een aantal zeer noodzakelijke gevolgen plausibel gemaakt. Het nut van de beschrijvingen werd verduidelijkt door de wetten, die aantonen dat ze aan de basis liggen van het begrip functie. Op die manier gaf de spreker een idee van de logica van de predicaten met gelijkheid en beschrijvingen. Daarna illustreerde hij de rol van de beschrijvingen bij de definities door gelijkheid. Er volgden voorbeelden van definities van constanten, van termen met een of

meer variabelen, die tegelijk dienden om de regels van het definiëren in concrete gevallen te bespreken. De nadruk werd gelegd op het exacte quotiënt van twee reële getallen en op de eisen, die in acht genomen moeten worden bij reeksen van definities. Na een enkel woord over definities door equivalentie kwamen er toepassingen. Vooreerst het definiëren van een functie door geval-onderscheidingen, geïllustreerd met de definitie van de volstreckte waarde en van het minimum van twee getallen. Tenslotte liet de spreker zien, dat de logica van de predicaten met gelijkheid en beschrijvingen ons toestaat een logische analyse te geven van het bewijs van de stelling, dat de som van twee continue functies weer continu is.

Prof. Dr. E. W. Beth (Amsterdam, gem. univ.) gaf een *uitleg* van de verzamelingenleer zonder het oneindigheidsaxioma. Ook de opbouw van de verzamelingenleer en de plaats daarvan in de opbouw der wiskunde werd nagegaan. Men kan uitgaan van een of ander bekende discipline, zoals de planimetrie. Punten uit het vlak zijn dan *primitieve elementen*, geen verzamelingen. Figuren zoals rechten en cirkels worden beschouwd als verzamelingen van punten. In zo'n geval spreekt men van een toegepaste theorie der verzamelingen.

Men kan ook geheel anders te werk gaan. Er worden daarbij niet hier of daar primitieve elementen aan andere gebieden ontleend, maar er bestaan niets dan verzamelingen, die eigenlijk de elementen van verzamelingen zijn. In deze abstracte verzamelingenleer impliceren de axioma's het bestaan van deze elementen. Deze laatste manier van werken is enigermate absolutistisch. Vooral om eventuele paradoxen te vermijden moet men zeer zorgvuldig te werk gaan.

Prof. Dr. M. Teghem (Brussel) had als onderwerp *Beslissingsreeksen*. Het stochastisch proces werd als volgt gedefinieerd:

Een oneindige verzameling van reële veranderlijken beschrijft de ontwikkeling in de tijd van een systeem, dat aan toestandsverandering onderhevig is. $\xi(t)$, $t \in T$.

Als T aftelbaar is, is het proces continu in de tijd en als T niet aftelbaar is, is het proces discontinu in de tijd.

Bij deze bespreking was het aantal toestanden van het systeem eindig. Een markovproces werd gedefinieerd als:

$$\text{Prob}(\xi(t) = x | \xi(t_1) = y_1, \xi(t_2) = y_2, \dots, \xi(t_n) = y_n) = \\ \text{Prob}(\xi(t) = x | \xi(t_n) = y_n) \underbrace{(t_1 < t_2 < \dots < t_n < t)}_{ET}$$

$$\text{Prob}(\xi(t) = x | \xi(s) = y) = P(s, y; t, x) \underbrace{(s < t)}_{\text{overgangswaarschijnlijkheid}}$$

Het is een bijzonder geval als $P(s, y; t, x)$ niet gesepareerd van s en t afhangt, maar alleen van het verschil $t-s$. In dit geval is het een homogeen markovproces.

Alleen homogene processen kwamen bij dit onderwerp aan de orde. Een eindige homogene markovketen is een homogeen markovproces met een eindig aantal toestanden en discontinu in de tijd.

$$T = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

$$\xi(n) = i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (N \text{ toestanden } E_1, \dots, E_n)$$

De overgangswaarschijnlijkheid in n stappen werd genoteerd als: $\text{Prob}(\xi(m+n) = j | \xi(m) = i) = P_{ij}^{(n)}$, terwijl $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$ de overgangswaarschijnlijkheid in één stap is.

De matrices $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$ en $P = (P_{ij})$ zijn stochastische matrices, d.w.z. ze zijn vierkant, de elementen zijn groter dan 0 of gelijk aan 0 en de som van de elementen van welke rij dan ook is 1.
 $P^{(n)} = P^n$

$$\text{Prob}(\xi(n) = j) = p^{(n)} = \sum_i p_i^{(0)} P_{ij}^{(n)}$$

$$\text{als vectoren: } p^{(n)} = p^{(0)} P^n$$

E_j is toegankelijk vanaf E_i , als er een n_n zo is, dat $p_{ij}^{(n)} > 0$

$$C \text{ is de gesloten verzameling van toestanden als } \left. \begin{array}{l} E_i \in C \\ E_j \in C \end{array} \right\} \Rightarrow P_{ij} = 0$$

De toestanden werden door de volgende regels geclassificeerd:

Als F_j de waarschijnlijkheid is, opdat het systeem vanaf E_j y maal terugkomt.

$F_j = 1$ (zekere terugkeer): E_j = recurrente toestand.

$F_j < 1$ (onzekere terugkeer): E_j = overgangstoestand.

Als eigenschappen gelden nu:

1) Een eindige keten omvat noodzakelijkerwijze recurrente toestanden.

2) De recurrente toestanden van een keten kunnen verdeeld zijn in gesloten verzamelingen zó, dat elke toestand van elk van die verzamelingen toegankelijk is vanaf elke andere toestand van die verzameling,

$$\text{Vorm van de matrix } P: \begin{vmatrix} P_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & P_r & 0 \\ A & B & . & . & . & K & L \end{vmatrix}$$

waarin $P_1, \dots, P_r$, stochastische matrices zijn, welke achtereenvolgens corresponderen met de gesloten verzamelingen $C_1, \dots, C_r$, en waarin $A, B, \dots, K, L$, rechthoekige matrices zijn, waarvan de

rijen corresponderen met de overgangstoestanden.

Elke van deze gesloten verzamelingen $C_1, \dots, C_r$ vormt op zich zelf een markovketen.

E_j is een periodieke toestand als $p_{ij}^{(n)} = 0$, indien $n \neq 0 \pmod{\phi}$, $\phi > 1$. Een periode is het grootste gehele getal ϕ met deze eigenschap.

Het onderzoek van niet periodieke toestanden onder aanneming van een groot aantal stappen, hangt samen met dat van de periodieke toestanden. Als periodieke toestanden uitgesloten worden en we dus onderstellen, dat een keten slechts in niet periodieke toestanden verkeert, wordt het asymptotisch gedrag bepaald door:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_{ij}, \text{ de matrix } \pi = (\pi_{ij})$$

Als $r = 1$ dan is π_{ij} onafhankelijk van i ($= \pi_j$), dat wil zeggen, dat de rijen van de matrix π identiek zijn (eigenschap van ergodisme). Daarenboven

$$\pi_j \begin{cases} = 0 & \text{voor } E_j, \text{ als overgangstoestand} \\ \neq 0 & \text{voor } E_j, \text{ als recurrente toestand.} \end{cases}$$

De keten is per definitie geheel ergodiek.

Als eigenschappen gelden

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_{ij}$$

2) Als er een oplossing met de getallen $\pi_i \geq 0$ voor het systeem

$$\pi_j = \sum_i p_{ij} \pi_i \text{ en } \sum_i \pi_i = 1$$

bestaat, dan is een keten geheel ergodiek.

Als $r > 1$, hangt π_{ij} van i af, evenwel:

$\pi_{ij} = \pi_{i'j} \neq 0$ (als $E_i, E_{i'}$, en E_j recurrent zijn en behoren tot eenzelfde gesloten verzameling C_ρ).

$\pi_{ij} = 0$ (als E_i en E_j , recurrent zijn en niet tot eenzelfde gesloten verzameling C_ρ behoren).

$\pi_{ij} = 0$ (als E_j overgangstoestand is.)

Zodat de limiet

$$\begin{vmatrix} \pi_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \pi_2 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & \pi_r & 0 \\ \alpha & \beta & . & . & K & 0 \end{vmatrix}$$

waarin $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ stochastische matrices zijn met identieke rijen, samengesteld uit positieve elementen.

Het maximale rendement in een interval is vervat in

$$V_i^{(k\ell)}(n+1) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_{n+1}} P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \dots P_{j_n j_{n+1}} (r_{ij_1} + r_{j_1 j_2} \dots + r_{j_n j_{n+1}}),$$

waarin $V_i^{(ki)}(n)$ de mathematische verwachting is van het rendement in een tijdsinterval, en $r_{ij}^{(k)}$ het economisch rendement.

Prof. Dr. A. Deprit (Leuven) behandelde de klasse der *periodieke banen*, voortkomende uit *het drie-lichamen-probleem*. Het ging om de mogelijke banen van een kunstmaan, ten opzichte waarvan de aarde en de maan als lichaam hun rol speelden. De zon en Jupiter werden hierbij verwaarloosd. Deze verwaarlozing vereenvoudigde het probleem, waardoor het voor niet ingewijden iets meer toegankelijk werd.

Behalve de theorie over periodieke banen, die reeds door Poincaré ontwikkeld is, kwam de klassieke methode van Thiele en Ström-gren aan de orde. Het electie-principe uit de theorie van Egarov werd in deze methode gebruikt. De voordracht werd rijk geïllustreerd met afbeeldingen van berekende banen.

Prof. Dr. Libois (Brussel) behandelde enkele lineaire ruimten. Hij stelde voor om o.a. meer aandacht te besteden aan niet-homogene groepen.

Prof. Dr. Dieudonné (Parijs) bekend vertegenwoordiger van de Bourbaki, (even zeer bekend door de kreet: „Weg met Euclides en weg met de driehoeken”) nam de klassieke groepen onder de loep. Uitgaande van een groep van lineaire transformaties ontwikkelde hij een theorie, welke resulteerde in de behandeling van de groepen van Lie uit de algebra van Lie.

Prof. Papy (Brussel) werd vervangen door de heer Holvoet. Deze sprak over een uitwendige algebra op het lichaam van de complexe getallen en met behulp hiervan het invoeren van determinanten. In het algemeen geeft een determinant zeer eenvoudige aanduidingen maar voor een berekening is het gebruik vaak zeer moeilijk.

De ontwikkeling uit die externe algebra was, nadat de theorie over die algebra ontwikkeld was, erg eenvoudig. Minstens even interessant lijkt ons de gebruikelijke wijze van invoering met behulp van een multilineaire afbeelding van n vectoren uit R_n in het lichaam der scalaren met de nevenconditie dat als $a_i = a_j$ met $i \neq j$, de functie de waarde nul aanneemt (dit naar aanleiding van het begrip volume).

De beide voordrachten van Prof. Dr. E. van der Blij (Utrecht) over *theorie en toepassingen van differentiaalvormen* leidden tot een

zeer korte en duidelijke afleiding van de wetten van Maxwell uit de elektriciteitsleer.

Om met differentiaalvormen in de euclidische vectorruimte E_2 of E_3 te werken, moet men de moeilijkheid van het delen van vectoren omzeilen. Eerst gaat men continuïteit invoeren door de aangroeiing te benaderen met een lineaire afbeelding. Als a en h tot E_3 behoren en $f(a)$ tot E_2 , waarin de afbeelding f lineair is, dan kan men $f(a+h) - f(a)$ niet delen door de $h \in E_3$. Dit wordt geheel ondervangen door de volgende definities:

f heet differentieerbaar in a , indien er een lineaire afbeelding $L_{f,a}$ bestaat en een lineaire afbeelding ε zodanig, dat $f(a+h) = f(a) + L_{f,a}(h) + \varepsilon(h)$ waarbij

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Zoals gebruikelijk stelt $\|h\|$ de lengte van de vector h voor. Men ziet direct dat als $a \in E_1$ en $f(a) \in E_1$ men de gewone regel krijgt: $L_{f,a}(h) = f'(a) \cdot h$, waarin het getal $f'(a)$ dan de afgeleide heet. Ook als $a \in E_n$ met $n \geq 2$ en $f(a) \in E_1$ krijgt men de gewone regels der bekende differentiaalrekening.

Met vele toepassingen van de moderne algebra, zoals het werken met een modulus, het definiëren van een uitwendig produkt enz. gelukt het de genoemde wetten van Maxwell eenvoudig te formuleren en algebraïsch af te leiden. Natuurlijk komt men zo niet aan een volledige interpretatie voor de natuurkunde.

Prof. Dr. G. Hirsch (Gent en Brussel) wees er in zijn inleiding tot de algebraïsche topologie op dat reeds de klassieke topologie met bedekkingstheorema's (Heine-Borel), de begrippen afstand en convergente rijen, een meer algemene vorm van het begrip continuïteit gegeven heeft.

De (1,1) duidige, bijv. continue, afbeeldingen noemt men vaak homeomorf en men zoekt daarbij naar topologische invarianten van zo'n afbeelding $E_1 \rightarrow E_2$. Enige daarvan zijn:

- 1) Bestaat E_1 uit één element dan ook E_2 .
- 2) Discrete punten van E_1 corresponderen met discrete punten van E_2 .
- 3) Het compact zijn van E_1 impliceert het compact zijn van E_2 . Bijv. het continue beeld van een gesloten interval is weer een segment. D. i. de beroemde stelling: het bereiken van een absoluut maximum en absoluut minimum van een continue functie gedefinieerd op een segment.

4) De dimensie is ook een invariant, wat gedemonstreerd kan worden aan de euclidische n -dimensionale ruimte.

Daarentegen zijn metrische eigenschappen niet topologisch invariant. Zelfs het beeld van een verzameling met lebesguemaat nul hoeft niet deze maat te hebben.

Het verband tussen de bovengenoemde eigenschappen werd nagegaan met een topologische combinatoriek. Als voorbeeld van een der problemen, die beschouwd werden noemen we: Als in een vlak R_2 een jordankromme S_1 gegeven is, en S' is het homeomorfe beeld van deze S_1 in een R'_2 , dan kan men deze afbeelding uitbreiden tot de hele R_2 op die R'_2 . Het voorbeeld van Alexander toont ons dat deze eigenschap niet in R_3 geldt.

In de metrische meetkunde kan men volgens Prof. Dr. P. J. van Albada (Eindhoven) uitgaan van topologische beschouwingen en daarna in de ruimte een geschikte algebraïsche structuur aanbrengen. Ook kan men meer aansluiten bij de gebruikelijke meetkunde met de afbeelding $V \times V \rightarrow W$. Hierin stelt V de verzameling van punten voor en W een getallenverzameling. Het is de bedoeling dat bij elk paar a en b (twee punten) met $a, b \in V$ een getal $w \in W$ behoort, waarbij aan de volgende axioma's is voldaan:

Ax. 1. W is de verzameling der niet-negatieve getallen.

Ax. 2. Als $ab = 0$ dan is $a = b$ en omgekeerd.

Ax. 3. Voor elk tweetal geldt $ab = ba$.

We noemen het getal ab de afstand van de punten a en b . Wanneer aan bovenstaand drietal axioma's is voldaan, noemt men de ruimte semi-metrisch.

Ax. 4. $ab + bc \geq ac$ heet de driehoeksongelijkheid.

De geldigheid van alle 4 axioma's maakt een verzameling tot een metrische ruimte. Behalve in de euclidische meetkunde kan men hiermee nog werken in een elliptische of hyperbolische meetkunde; zelfs in een hilbertruimte. In dit laatste zijn de punten dan continue functies en werkt men met de „afstand” van twee van zulke functies.

Als toepassing van de gewone metriek werd het bewijs geleverd van een stelling van Steinhaus (1958): Er bestaan 6 getallen $a > b > c > d > e > f$ zodat er 30 verschillende viervlakken bestaan met ribben gelijk a, b, c, d, e en f . Daartoe was een uitvoerige discussie nodig van de Cayley-Menge determinant, die het volume aangeeft in een n -dimensionale ruimte.

POOL EN POOLLIJN

door

B. L. VAN DER WAERDEN

Zürich

In een artikel onder deze titel in Euclides 38, p. 141 citeert *P. Wijdenes* vijf definities van het begrip „poollijn”, ontleend aan leerboeken, en geeft dan zelf een andere definitie.

De eerste definitie luidt: De poollijn van punt $P(x_1, y_1)$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ is de lijn $x_1x + y_1y = r^2$. Deze definitie is eenvoudig en duidelijk, maar on-meetkundig. Of de poollijn onafhankelijk is van de keus van het assenstelsel, wordt niet onderzocht. Waarom de meetkundigen zich juist voor deze lijn interesseren, blijkt niet. De heer Wijdenes heeft gelijk, dat hier aan de leerling het wezenlijke wordt onthouden.

De vier andere leerboeken geven vooreerst definities, die alleen dan gelden, als P buiten de cirkel ligt. Of het geval, dat P binnen of op de cirkel ligt, naderhand behoorlijk behandeld wordt, kan ik niet beoordelen. In elk geval is een algemeen geldige definitie (zoals die van het eerste leerboek) beter.

De definitie van Wijdenes luidt: De poollijn van een punt P t.o. van een cirkel C is de meetkundige plaats van het punt Q , dat op elke lijn door P harmonisch toegevoegd is aan P t.o. van de snijpunten van C en die lijn.

Deze definitie is alleen dan juist, als P binnen de cirkel ligt. Ligt P erbuiten, dan is de bedoelde meetkundige plaats een lijnstuk op de poollijn.

De behandeling van Wijdenes lijkt mij voor de school te ingewikkeld. Als ik verplicht was, het begrip poollijn voor de klas te behandelen, zou ik het zo definiëren:

Zij P een punt in het vlak van de cirkel, dat niet met het middelpunt O samenvalt. Bepaal op de halve lijn OP een punt Q zo dat het produkt $OP \cdot OQ$ gelijk r^2 is. De loodlijn op OP in Q heet poollijn van P .

Uit de definitie volgt direct:

- 1) De poollijn van een punt op de cirkel is de raaklijn.
- 2) Een punt Q ligt juist dan op de poollijn, als het scalaire produkt $OP \cdot OQ \cdot \cos \varphi$ gelijk r^2 is.

Uit 2) volgt:

3) Als Q op de poollijn van P ligt, dan ligt P op de poollijn van Q .

Uit 1) en 3) volgt:

4) Als P buiten de cirkel ligt, dan gaat de poollijn door de raakpunten van de twee raaklijnen uit P aan de cirkel.

Uit 3) volgt verder de vergelijking van de poollijn:

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Immers het scalaire produkt van $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{OQ}$ is juist $xx_1 + yy_1$:

$$\begin{aligned} OP \cdot OQ \cdot \cos \varphi &= OP \cdot OQ \cdot \cos (\alpha - \beta) \\ &= OP \cdot OQ \cdot (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= OP \cos \alpha \cdot OQ \cos \beta + OP \sin \alpha \cdot OQ \sin \beta \\ &= xx_1 + yy_1. \end{aligned}$$

Uit de definitie van de poollijn volgt onmiddellijk:

5) Elke rechte P , die niet door O gaat, is poollijn van één enkel punt P . Dit punt heet de pool van P .

Het is dus mogelijk, de poollijn elementair in de klas te behandelen. Maar toch zie ik niet, waartoe dit zou moeten dienen.

De theorie van pool en poollijn is een prachtig stuk projectieve meetkunde. De lectuur van het hoofdstuk daarover in *Reye's „Geometrie der Lage“* is een genot. Maar bij een elementaire behandeling gaat de schoonheid van de theorie grotendeels teloor. De samenhang met de theorie van de volledige vierhoek en en harmonische punten kan in de klas niet behandeld worden. Het middelpunt O heeft in het Euclidische vlak geen poollijn, en de rechten door O hebben geen polen. Uit de elementaire theorie blijkt niet, waarom de poollijn zo belangrijk is. Ingenieurs, fysici en chemici gebruiken de poollijn vrijwel niet. Waartoe dan dit begrip op school behandelen?

EEN BIJZONDER JUBILEUM

Op 10 mei j.l. was het 50 jaar geleden dat P. A. Okken te Groningen promoveerde — cum laude — op het proefschrift „Involutrische transformaties van de zesde klasse in het platte vlak“. Voorwaar een bijzonder jubileum, waarmee de redactie van *Euclides* hem van harte feliciteert. Daarbij wordt hem tevens gaarne dank gebracht voor de vele gedegen recensies die van zijn hand in *Euclides* verschenen. Moge hij nog lang deze zo gewaardeerde medewerking kunnen geven.

O'62-II-1

door

Dr. J. T. GROENMAN

Groningen

Met deze titel wordt bedoeld het eerste vraagstuk uit de tweede ronde van de wiskunde-olympiade 1962.

Het luidde als volgt: Van $\triangle ABC$ is $\angle C$ recht. Construeer een cirkel met middelpunt C , zò dat één raaklijn uit A aan die cirkel evenwijdig loopt aan één raaklijn uit B . Druk de straal van de gevonden cirkel uit in de rechthoekszijden a en b .

Het is voor de onderstaande oplossing van geen belang, dat $\angle C$ recht is. Voor elke andere grootte van $\angle C$ loopt de oplossing op dezelfde manier.

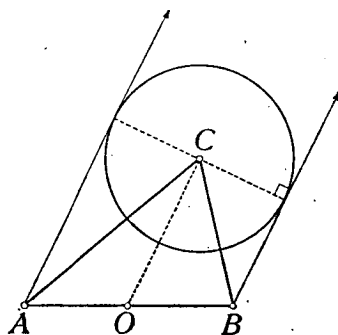


Fig. 1.

Geef A de coördinaten $(-a, 0)$

B de coördinaten $(a, 0)$

en C de coördinaten (b_1, b_2) .

De raaklijnen hebben dan de vergelijkingen

$$\lambda x - y - \lambda a = 0 \text{ en}$$

$$\lambda x - y + \lambda a = 0.$$

C heeft tot beide lijnen tegengestelde afstanden.

$$\frac{\lambda b_1 - b_2 - \lambda a}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{-\lambda b_1 + b_2 - \lambda a}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

waaruit $\lambda = \frac{b_2}{b_1}$. De raaklijnen lopen dus evenwijdig aan de zwaartelijijn CO .

$$\text{De straal} = \left| \frac{\frac{b_2}{b_1} b_1 - b_2 - \frac{ab_2}{b_1}}{\sqrt{\frac{b_2^2}{b_1^2} + 1}} \right| = \frac{ab_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{\text{Opp. } ACB}{OC} = \frac{O}{z_c}$$

Is de driehoek rechthoekig, dan is $z_c = \frac{1}{2}c$. Dan is de straal $= \frac{\frac{1}{2}h_c \cdot c}{\frac{1}{2}c} = h_c$.

Onze cirkel raakt dus aan de hypotenusa. Deze aardige bijkomstigheid was de reden, dat de driehoek als rechthoekig in C werd gegeven.

Wij kunnen het vraagstuk op de volgende wijze generaliseren; wellicht was het ook in de algemenere vorm voor de Olympiade bruikbaar geweest.

Gegeven is een $\triangle ABC$. Construeer een cirkel met middelpunt C zodanig, dat één der raaklijnen uit A aan die cirkel met een der raaklijnen uit B een gegeven hoek φ maakt. In O'62-II-1 is $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$.

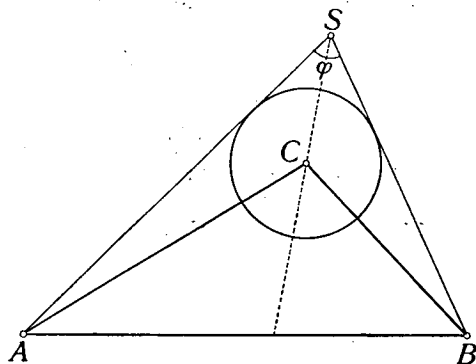


Fig. 2.

$\angle ASB = \varphi$. S ligt dus op één der cirkels, die AB als koorde hebben, terwijl een der bogen $AB = 2\varphi$. Verder is SC de bissectrice van $\angle ASB$; SC gaat dus door het midden P van één der bogen AB . Van deze middens zijn er 4, zodat er in de regel vier oplossingen zijn.

In figuur 3 is één der oplossingen volledig gegeven; de andere drie zijn aangegeven.

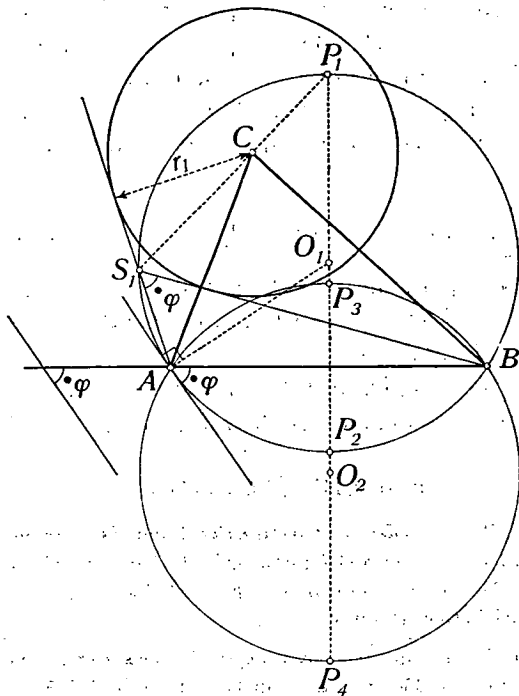


Fig. 3.

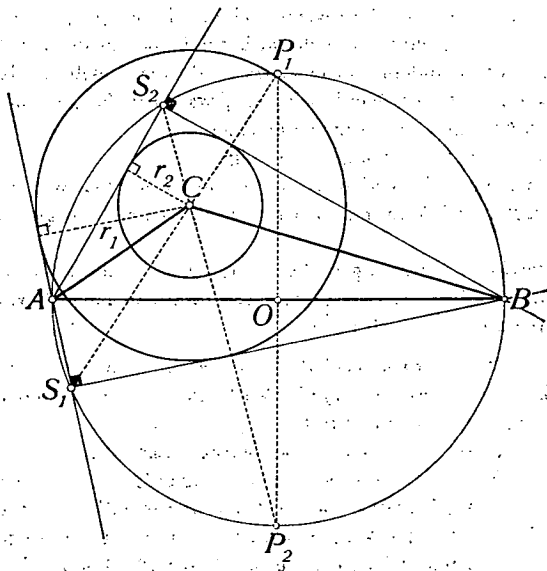


Fig. 4.

Constructie: Construeer met behulp van de basis-tophoek constructie de cirkels O_1 en O_2 . Bepaal de punten P_1 , P_2 , P_3 en P_4 . Neem bv. P_1C en snijd die met de cirkel O_1 . Het snijpunt is S_1 . Dan zijn AS_1 en BS_1 de raaklijnen. De cirkel $C(r_1)$ is de gevraagde cirkel. Op dezelfde wijze zouden nog drie cirkels kunnen worden gevonden.

Indien $\varphi = \frac{\pi}{2}$, vallen de cirkels O_1 en O_2 samen en komen er maar twee oplossingen, die in figuur 4 beiden zijn gegeven.

Ook voor $\varphi = 0$ komen er twee oplossingen:

1. De cirkel uit figuur 1.
2. De cirkel met middelpunt C , die aan AB raakt.

Deze twee cirkels vallen in O'62-II-1 samen.

BOEKBESPREKING

Dr. Georg Wolff, *Handbuch der Schulmathematik*, Band III, Geometrie der Unter- und Mittelstufe, 256 blz. met 453 figuren; geb. 38 DM.; Band V, Einzelfragen der Mathematik, 270 blz. met 175 figuren; geb. 38 DM.; Herman Schroedel Verlag, Hannover.

Voor een karakteristiek van dit groots opgezette werk van dr. Georg Wolff moge ik verwijzen naar de 36e jaargang van Euclides (blz. 317-319), waar ik van mijn grote waardering voor het eerste en het tweede deel blijk heb gegeven. Mijn bewondering voor de resultaten van dit stuk teamwork (Wolff beschikt over meer dan twintig medewerkers) is na de verschijning van het derde en het vijfde deel nog gestegen. In Duitsland zal geen wiskundedocent dit boek willen missen, in Nederland is het eveneens in iedere wiskundebibliotheek op zijn plaats. Het kan ook bij de didactische opleiding van de wiskundeleraar goede diensten bewijzen. Ten aanzien van elk wiskundeprobleem waarvoor de wiskundeleraar bij ons VHMO kan komen te staan, geeft dit handboek hetzij waardevolle informatie, hetzij betrouwbare en uitvoerige literatuurverwijzingen.

De indeling van deze twee delen is als volgt;

deel III: Geometrische Propädeutik, die elementaren ebenen Figuren, Geometrie der Abbildungen und Vektoren, Ebene Trigonometrie und geometrische Einzelfragen;

deel V: Geometrische Einzelfragen, Grundlagenfragen, Mathematik und Kultur.

Om de rijkdom van het geheel enigszins aan te geven noem ik van het laatste onderdeel de verdeling in hoofdstukken:

- (1) Mathematik und Naturwissenschaften (Entstehung der klassischen Physik, Mathematik und klassische Physik, Mathematik in der modernen Physik, Hinweise für die Unterrichtspraxis);
- (2) Wechselwirkung von Philosophie und Mathematik (das philosophische Problem der Vorsokratiker, Teilbarkeit und Stetigkeit, Zahl und Zahlverhältnis, die „Archai“ der Mathematik, das Sein der mathematischen Gegenstände, die spekulative Vorformen der Mathematik, das Raum- und Bewegungsproblem, das Ideal der mathematischen Methode, Streben nach Gewisheit und Notwendigkeit der Begründung);

- (3) Mathematische Logik (Aufgaben und Charakter, Funktionsformen einer Sprache, Aussagenkalkül, die tautologischen Sätze der Aussagenkalkül, Prädikatenkalkül, weiterer Ausbau, Anwendungen der symbolischen Logik, Philosophische Grundfragen);
- (4) Nieuere Grundlagenprobleme (Eerste Problemen, das Problem des Oneindigen, das Begründungsproblem, Intuitionismus, Logicismus, Formalismus, Operationalismus, das filosofische Begründingsproblem);
- (5) Psychologische Grundlagen der mathematischen Anschauung (Zum Begriff der Anschauung, die Anschauung in Wissenschaft und Unterricht, Wahrnehmen, Optische Täuschungen, Vorstellen, Zahlenvorstellung, Raumvorstellung, Entwicklung der Raumvorstellung nach Piaget);
- (6) Psychologische Grundlagen des mathematischen Denkens (Begriffe und Vorbemerkungen, Psychologische Theorie des Denkens, Entwicklungsstufen des Denkens nach Piaget, Methodische Folgerungen aus der Theorie Piagets, Produktives Denken und Mathematik, das Denken ondersteunende seelische Funktionen);
- (7) Begabung und Fehlleistung (das Wesen der mathematische Begabung, die Begabung nach Duncker, Zur Feststellung einer mathematische Begabung auf der Schule, Menschentypen und ihr Verhältnis zur Mathematik, Fehlleistung und ihre Ursachen).

Uiteraard houdt de Nederlandse lezer nog wel wat te wensen over ten aanzien van Nederlands onderzoek en Nederlandse publikaties. Maar ook aan ons land is aandacht gewijd. Ik noteerde naast de oudere namen Beeckman, Snellius, Huygens, van Ceulen, Spinoza, Stevin, Metius en Van Swinden de „hedendaagse" Brouwer, Heyting, Freudenthal, Dijksterhuis, Van der Waerden, Baudet, Beth en Bunt.

Kennismaking met dit breed opgezette handboek zal bij velen tot aanschaffing leiden. Het is een informatiebron van blijvende waarde.

Joh. H. Wansink.

Logic and Language, Studies Dedicated to Professor Rudolf Carnap on the Occasion of his Seventieth Birthday. Synthese Library; D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1962, 246 blz., f 24.50.

Carnap heeft bijzonder veel bijgedragen tot de ontwikkeling van de moderne logica. Aanvankelijk concentreerde hij zijn aandacht in hoofdzaak op de formele logica. Twee fundamentele uitspraken zijn kenmerkend voor zijn toenmalige geeshouding. De eerste, het z.g. tolerantieprincipe, luidt, dat het opereren met verschillende logische systemen neerkomt op het spreken van verschillende talen en dat uit dien hoofde er geen reden is een bepaald logisch systeem de voorkeur te geven boven een ander. De andere uitspraak is, dat elk probleem, dat niet formaliseerbaar is, een schijnprobleem is. Uit deze uitspraken blijkt, hoezeer van elke betekenis bij logische onderzoeken geabstraheerd werd en hoe logische problemen slechts beschouwd werden als problemen betreffende de structuur van een symbolische taal. De wetenschap, die zich met deze problemen bezighield, noemde Carnap de syntaxis. Hoe boeiend voor een wiskundige die probleemstelling door zijn grote scherpte ook mag zijn, de eenzijdigheid ervan is desondanks evident. In zijn latere ontwikkeling heeft Carnap dan ook ingezien, dat door te abstraheren van de betekenis een geheel veld van onderzoek braak blijft liggen. Dit geldt niet alleen binnen het gebied van de logica, maar ook voor de toepassing van logica op empirische wetenschappen. Vandaar dat in zijn latere werken naast

de syntaxis de semantiek een belangrijke rol is gaan spelen. Een formeel systeem wordt niet meer louter gezien als een spel met tekens, doch als een systeem, dat interpretatie behoeft of ontstaan is uit niet geformaliseerd wetenschappelijk denken. Men kan dan de relaties gaan onderzoeken tussen het geformaliseerde systeem en de interpretatie. Naast het probleem van de formele juistheid gaat nu de waarheid een rol spelen. Is het formele systeem volledig, d.w.z. is elke ware uitspraak deduceerbaar? Deze en vele verwante vragen maken het de onderzoeker niet gemakkelijk. Degene die zich in deze problemen gaat verdiepen, bemerkt al spoedig, dat de onaantastbare zekerheid van mathematische uitspraken uiteindelijk slechts schijn is.

In een zestiental artikelen belichten schrijvers van internationale reputatie de problemen, die hierboven aangestipt zijn. Sommigen gaan daarbij uit van het werk van Carnap om bepaalde facetten ervan historisch en kritisch te bezien. Anderen geven een exposé over een of ander modern onderwerp, dat in nauw verband staat met de problemen, die door Carnap centraal gesteld zijn. De artikelen zijn zeer lezenswaard. Ze zijn veelal niet te specialistisch van aard, hoewel ze uiteraard niet beogen slechts inleidende beschouwingen te zijn.

P. G. J. Vredenduin

Lyman G. Parratt, *Probability and Experimental Errors in Science*, John Wiley & Sons, New York and London, 1961, XV+255 blz., 55 sh.

De bedoeling van de schrijver is studenten in de natuurwetenschappen zoveel begrip van statistische problemen bij te brengen als nodig is om voldoende inzicht te krijgen in de wezenlijke trekken van de experimentele methode. Deze bedoeling wordt duidelijker, als we zijn beschrijving van de methode, volgens welke de natuurwetenschappen voortschrijden, bezien. Deze bestaat uit drie fasen: „(1) hypothesis, based on all experience available, (2) calculation of the a priori probabilities for certain events based on this hypothesis and (3) comparison of the a priori probabilities with actual measurements, i.e. with experimental probabilities.” (p. 101) Men wordt zich hierdoor bewust, welk een centrale rol de statistiek in dit proces speelt, zowel door de omstandigheden, dat sommige te meten grootheden statistisch van aard zijn, als door het feit, dat men veelal een meetresultaat slechts op grond van een steekproef verkrijgt. Dit laatste is in het bijzonder het geval, als op grond van een serie uitkomsten één getal als waarnemingsresultaat opgegeven wordt. Het spreekt dan ook vanzelf, dat in dit boek ter sprake komen: kansrekening, statistische grondbegrippen, foutendiscussie, normale verdeling, poissonverdeling. Als het typische van het boek hiermee uitgeput was, had het beter ongeschreven kunnen blijven. Kenmerkend voor de schrijver is echter, dat hij niet de nadruk legt op het verkrijgen van de nodige technische vaardigheid in het verwerken en interpreteren van waarnemingsresultaten, maar dat hij scherp en uitvoerig ingaat op de betekenis van elk begrip en op de rechtvaardiging van elke methode. Om een voorbeeld te noemen: we vinden in het boek natuurlijk de definitie van de standaarddeviatie, maar we vinden ook de reden, waarom juist deze gebruikt wordt als maat voor de spreiding en niet de (meer voor de hand liggende) gemiddelde absolute deviatie. Ik vermoed, dat het velen, die dit boek lezen, zo zal vergaan, dat verschillende inzichten die totnogtoe een zekere vaagheid vertoonden, plotseling verhelderd worden.

Wie prijs stelt op een behoorlijk inzicht in de problemen, waarmee de waarnemer te maken heeft, kan ik dit boek bijzonder aanbevelen, en speciaal ook diegenen, die les in statistiek geven.

P. G. J. Vredenduin

Bernard Epstein, *Partial Differential Equations*, Mc Graw-Hill, 1962.

In het voorwoord deelt de schrijver mee, dat hij in het gehele boek de nadruk heeft gelegd op existentiële theorie meer dan op de daadwerkelijke constructie der oplossingen van bepaalde soorten van problemen. Hij hoopt, dat het zo een nuttige aanvulling zal geven aan leerboeken, die meer de praktische kant of de toepassingen op de voorgrond stellen. Hierdoor is het karakter van het boek aangeduid. Het zal van de student, die voor het eerst met het onderwerp kennis maakt grote inspanning eisen.

In het eerste hoofdstuk worden enige onderwerpen behandeld of in herinnering gebracht, die op de grens van het elementair onderwijs liggen en in het volgende gebruikt worden. Daarin komt ook voor het existentiële theorema van Cauchy voor de oplossing van een gewone differentiaalvergelijking met het bewijs van Picard met behulp van successieve benaderingen. Er is ook een paragraaf over de Lebesgue-integraal, maar daarin komen, om ruimte te winnen, geen bewijzen voor. De schrijver raadt aan deze onderwerpen te bestuderen, daar waar ze in het volgende nodig zijn.

In het gehele boek worden de bewijzen zeer zorgvuldig gegeven.

Een enkele maal worden onderwerpen uit de natuurkunde genoemd, die tot de behandelde vergelijkingen aanleiding geven of meetkundige overwegingen aangeduid, die een bepaalde behandeling suggereren.

Bij de vergelijkingen van de tweede orde wordt uitvoerig het verschillend karakter van hyperbolische, elliptische en parabolische vergelijkingen toegelicht. Na de behandeling van het Cauchyprobleem bij hyperbolische vergelijkingen zijn twee hoofdstukken over de integraalvergelijking van Fredholm ingelast. Ook hier wordt de theoretische kant sterk naar voren gebracht. Eigenlijk zijn het hoofdstukken over genormeerde lineaire ruimten, in het eerste de Banachruimte, in het tweede de Hilbertruimte.

Vergelijkingen van hogere orde dan de tweede komen niet voor.

Het boek bevat ongeveer 250 vraagstukken. In sommige daarvan wordt het bewijs verlangd van een in de tekst vermelde conclusie, zij zijn dus een integrerend deel van de leerstof. Over het geheel zullen deze vraagstukken voor de student wel vrij moeilijk blijken. Van een honderdtal komen achter in het boek oplossingen voor, een enkele maal slechts een aanwijzing, maar ook dikwijls een geheel met zorg uitgewerkte oplossing.

H. Bremekamp

George Polya, *Mathematical Discovery*, volume 1, New York, London, John Wiley & Sons inc. 216 blz. circa fl. 20,00.

Dit boek is, aldus de schrijver (thans oudhoogleraar in de wiskunde aan de Stanford universiteit), op te vatten als een vervolg op twee vroegere werken: „How to solve it” en „Mathematics and Plausible Reasoning”. De boeken vullen elkaar aan, zegt hij, zonder in herhaling te vervallen: andere voorbeelden, andere bijzonderheden, andere aspecten worden ons geofferd. De auteur is te beschouwen als een geestverwant van Felix Klein, Beth, E. J. Dijksterhuis, Schuh, Freudenthal, Dr S. C. van Veen (passermeetkunde), Bottema, Van der Waerden, Dr L. N. H. Bunt (van Ahmes tot Euclides) enz. enz. wier streven het was (is) de kloof tussen het hoger- en voorbereidend hoger onderwijs zoveel mogelijk te overbruggen, zodat de beginnende docent minder „groen” voor de klasse komt te staan. Het is een zeer interessant boek; in het bijzonder voor het Daltononderwijs bezit het grote didactische waarde; in de appendix „Hints to teachers and teachers of

teachers" dringt de schrijver er bij zijn collega's op aan hem toch krachtig te steunen door een behoorlijk uitvoerig aangegeven werkwijze zoveel mogelijk te volgen. Het heeft er de schijn van, dat de Amerikanen in dezen een dertig jaar bij ons ten achter zijn.

Het eerste hoofdstuk (20 blz.) gewijd aan planimetrische constructies met passende uitstapjes naar de bolmeetkunde en de stereometrie, doet mij denken aan het prachtboekje: methoden en theorieën voor de oplossing van meetk. werkstukken van Dr. Jul. Petersen voor Nederland bewerkt door D. B. Wisselink (Noordhoff '81) en aan het leerboek der boldriehoeksmeting van J. J. C. Westendorp (W. J. Thieme & Cie, Zutphen 1914).

Het volgende caput zet Descartes (Discours de la méthode) in het middelpunt, maar ook Newton en Euler, die ter verpozing gaarne allerlei beredeneervraagstukken verzonnen en zich in gewone planimetrische kwesties verdiepten, worden niet vergeten. Maar ... twee vragen naar aanleiding van pag. 33 no 2.5(1). Kan y niet direct uit de verg. $\frac{1}{2}a^2 = (a - 2y)a$ worden verkregen? en pag. 36: Is het niet eenvoudiger op te merken, dat de oplossing van dit analogon van de stelling van Pythagoras direct naar voren springt door op te merken (laat uit het hoekp. O de loodl. op vlak D neer) dat $A^2 + B^2 + C^2 = A_1D + B_1D + C_1D = D^2$ (in navolging van Euclides?) eventueel nog: voor een boldriehoek gelde $\alpha + \beta = \gamma$, welke betrekking bestaat er tussen de zijden a , b en c ?

Hoofdstuk 3 „Recursion", de betekenis van dit woord wordt toegelicht door de wijze, waarop $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ en $S_2 = 1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ uit $\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$ kan worden verkregen. Ik mis hier een beschouwing over rek. reeksen van hogere orde dus de uitdrukkingen $S_2 = C_1^1 \times 1 + C_2^1 \times 3 + C_3^1 \times 2$ alsmede: $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = C_1^1 \times 1 + C_2^1 \times 7 + C_3^1 \times 12 + C_4^1 \times 6$, waartoe de vermelde namen Pascal, Bernoulli en Newton toch alleszins aanleiding geven; zie ook blz. 81, no 3.16 (en pag. 176) verder pag. 182 en 183 no 3.38, 3.39 en 3.40. Waarom de op blz. 93 vermelde methode der onbepaalde coëfficiënten ook hier niet toe te passen?

Voordat ik van dit aanbevelenswaardige boek afscheid neem, dat aan de appendix nog 55 blz. met oplossingen (zelfs van toevervierkanten) vooraf laat gaan nog één advies: Aan 5.2 van pag. 123 zou ik nog toevoegen de opgave: bewijs, dat alle rationale waarden (x, y) van $x^2 + y^2 = 1$ of van $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ verkregen kunnen worden, door aan $\tan \frac{1}{2}\varphi$ alle rationale waarden van -1 tot $+1$ toe te kennen.

Okken.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

88. Bewijs, dat geen enkele convexe dertienhoek in parallelogrammen verdeeld kan worden (wiskunde-olympiade Moskou, 1947, 7e en 8e kl.).

89. In een plat vlak zijn n halve lijnen getrokken, die een gemeenschappelijk eindpunt hebben. Deze vormen met elkaar $\frac{1}{2}n(n-1)$ hoeken (de hoeken worden alle gerekend $\leq 180^\circ$ te zijn). Wat is de maximale waarde, die de som van de hoeken bij gegeven n kan aannemen (wiskunde-olympiade Moskou, 1958, 9e kl.)?

90. De getallen 1, 2, 3, ..., 101 zijn op onbekende manier in een rij gerangschikt. Bewijs, dat het mogelijk is 90 van de getallen te schrappen zo, dat de overblijvende 11 een opklimmende of een afdalende rij vormen (wiskunde-olympiade Moskou, 1950, 9e en 10e kl.).

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

86. Onderstel de hoogste steen is dubbel $(n - 1)$. Het aantal stenen is dan $\frac{1}{2}(n^2 + n)$. Onderstel dit is gelijk aan p^2 . Dan is

$$n^2 + n = 2p^2.$$

Onderscheid nu de gevallen $n = 2k$ en $n = 2k - 1$. Resp. is dan

$$p^2 = k(2k + 1) \quad \text{en} \quad p^2 = k(2k - 1).$$

Omdat k noch met $2k + 1$ noch met $2k - 1$ een factor gemeen kan hebben, moeten dan zowel k als $2k + 1$ resp. $2k - 1$ kwadraten zijn. (In de beide gegeven gevallen is $k = 4$, $2k + 1 = 9$ en $k = 25$, $2k - 1 = 49$.)

Stel nu $k = x^2$ en $2k + 1 = y^2$. Dan moeten we x en y zo bepalen dat,

$$2x^2 = y^2 \pm 1.$$

Onderstel, dat aan deze betrekking voldaan is. We kunnen dan een groter stel waarden voor x en y vinden, dat ook aan de betrekking voldoet op de volgende manier:

$$\frac{2x^2 + 4xy + y^2 \mp 1 = 2x^2 + 4xy + y^2 \mp 1}{(2x + y)^2 \mp 1 = 2(x + y)^2} +$$

We vinden dus onbegrensd veel oplossingen. We doorlopen deze door te beginnen bij $x = 1$ en $y = 1$ en steeds bovenstaand proces toe te passen.

Bovendien kunnen we gemakkelijk constateren, dat geen andere oplossingen mogelijk zijn. Daartoe doorlopen we het proces in omgekeerde volgorde en laten zien, dat we dan ten slotte bij $x = 1$, $y = 1$ uitkomen. Stel

$$2x'^2 = y'^2 \pm 1.$$

Uit

$$x' = x + y \quad \text{en} \quad y' = 2x + y$$

vinden we dan

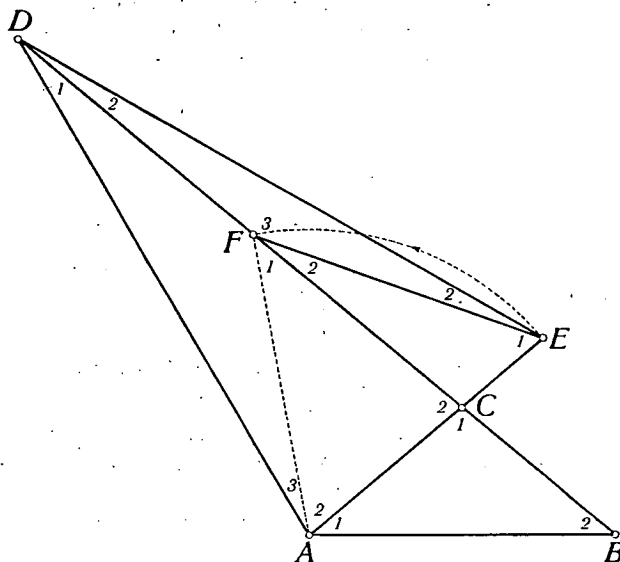
$$x = y' - x' \quad \text{en} \quad y = 2x' - y'.$$

Omdat $x' \leq y' < 2x'$, is dit inderdaad een oplossing, waarin $0 < x < x'$, tenzij $x' = y' = 1$. Teruggaand bereiken we ten slotte dus het triviale geval, waarin het gehele spel uit dubbel blank bestaat.

De oplossingen worden dus

x	y	$n (= 2x^2 \text{ of } 2x^2 - 1)$
1	1	1
2	3	8
5	7	49
12	17	288
29	41	840, enz.

Deze oplossing dank ik aan Drs. R. Sattler uit Leiden (van wie ik ook nog een goede oplossing van nr. 82 ontving).



87. Maak $AF = AE$. Dan is

$$\begin{aligned}\angle C_1 &= 100^\circ, \\ \angle A_1 &= \angle B_2 = 40^\circ, \\ AF &= AE = AB, \\ \angle F_1 &= \angle B_3 = 40^\circ, \\ \angle A_{1,2} &= 100^\circ, \\ \angle A_2 &= 60^\circ, \\ \triangle AFE &\text{ gelijkzijdig,} \\ \angle F_{1,2} &= 60^\circ, \\ \angle F_2 &= 20^\circ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle F_3 &= 160^\circ, \\ \angle C_2 &= 80^\circ = \angle A_{2,3}, \\ \angle A_3 &= 20^\circ, \\ \angle D_1 &= 180^\circ - 2 \times 80^\circ = 20^\circ, \\ FD &= AF, \\ FD &= EF, \\ \angle D_2 &= \angle E_2 = 10^\circ, \\ \angle D_{1,2} &= 30^\circ.\end{aligned}$$

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE W.V.O.

De jaarlijkse najaarsconferentie zal dit jaar op 9 en 10 november plaatsvinden, zoals altijd weer op De Grasheuvel te Amersfoort.

Het thema zal zijn: *Aspecten en verwachtingen van de opleiding tot Wiskundeleraar in Nederland.*

Nadere gegevens volgen nog. Reserveert u deze data vast? Zij, die zich nu als lid opgeven, betalen de helft van de jaarcontributie 1963 en kunnen tegen ledenprijs aan de conferentie deelnemen. Verdere gegevens in 't februariumnummer van Euclides.

Inlichtingen bij de secretaris-penningmeester, drs. H. C. Vernout, Van Nieuhuysstr. 11, Haarlem, tel. 02500-57288.



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Bij de Onderafdeling der Wiskunde van de Technische Hogeschool te Eindhoven bestaat plaatsingsmogelijkheid als

WETENSCHAPPELIJK REKENAAR/PROGRAMMEUR

bij de

- „Numerieke Wiskunde” en/of „Programma-ontwikkeling”

onder leiding van Prof. dr. E. W. Dijkstra en Prof. dr. G. W. Veltkamp

- „Operations Research”

onder leiding van Prof. dr. J. F. Benders

Diploma MO-A en/of Wetenschappelijk Rekenaar A vereist.

Aanstelling zal geschieden in het rangenstelsel van technische ambtenaren.

Inlichtingen zijn te verkrijgen bij prof. dr. G. W. Veltkamp, Technische Hogeschool, Eindhoven (tijdelijk: Postkantoor, 6e verdieping) telefoon 04900-68000 tst.2258.

Schriftelijke sollicitaties onder vermelding van nr. V1070 te richten aan het hoofd van de centrale personeelsdienst van de Technische Hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven.

Zo juist verschenen



Elementaire Wiskunde voor Economische Wetenschappen

door Drs. A. Kunst, Drs. R. H. Rooda en Dr. H. J. van de Vliet

ing. f 8,90

Een boek bestemd voor alle studerenden voor M.B.A., S.P.D. en de akten M.O. Boekhouden en M.O. Handelswetenschappen, alsmede voor hen die zich voorbereiden op de diverse accountantsexamens in financiële rekenkunde en statistiek.

Het geeft een volledige opleiding voor het examen „Elementaire Wiskunde voor Economische Wetenschappen” van de Nederlandse Associatie voor Praktijkexamens.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Wiskundeboeken voor het V.H.M.O.

Dr. H. Streefkerk

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M.O. EN V.H.O.

I (4e druk) f 3,25 - II (4e druk) f 3,50 - III (3e druk) f 3,75

„De boeken munten uit door strenge en tegelijk duidelijke behandeling van de theorie. In de aanhangsels wordt nog eens dieper op enkele moeilijke kwesties ingegaan.”

(Weekblad van het „Genootschap”)

Dr. D. J. E. Schrek

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

3e druk, met afzonderlijk antwoordenboekje f 3,90, geb. f 4,60

„Een uitstekend boek voor het V.H.M.O. In elk mogelijk opzicht!”

(Nieuw Tijdschr. voor Wiskunde)

Drs. J. C. Kok e.a.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

voor het V.H.M.O. - f 4,40, gekartonneerd f 4,90

„Een korte en prettige behandeling van de differentiaal- en integraalrekening met een serie toepassingen, welke in een afzonderlijk hoofdstuk opgenomen is. Grote aandacht is besteed aan de vraagstukken, die dan ook een aanzienlijk deel van het boek in beslag nemen.”

(Economisch Beheer/Advies)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

ALGEBRA VOOR M.M.S.

2e druk f 3,75

„Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van de verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen... van harte aanbevolen.”

(Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

Deel I (2e druk) - f 3,90 - Deel II - f 4,50

„Hoewel deze boeken niets bevatten, dat men spectaculair zou kunnen noemen, is zowel om hun inhoud als om hun uiterlijke vorm - ik denk ook aan de aardige omslag - een gelukwens voor de schrijvers en de uitgeefster wel op zijn plaats.”

(Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs)



NOORDHOFF GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar