

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

VI — 1 MAART 1963

INHOUD

Dr. Joh. H. Wansink: De eerste Nederlandse Wiskunde-Olympiade	161
Prof. Dr. E. W. Beth: Logische en denkpsychologische aspecten van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs	179
Boekbespreking	188
LIWENAGEL	190
Kalender	191
WIMECOS	191
Mededeling van de redactie.	191
Recreatie	191

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516;
secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367
Dr. P. M. VAN HIELE, Pr. Bernhardlaan 28, Bilthoven, tel. 03402/3379;
Drs. H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen f 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester *Wiskunde-werkgroep W.V.O.* te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

DE EERSTE NEDERLANDSE WISKUNDE-OLYMPIADE (1962)

door

Dr. JOH. H. WANSINK

Arnhem

1. *Initiatief*

Sinds enige jaren werd in de kringen van het Wiskundig Genootschap en van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde het plan besproken om ook in ons land jaarlijkse wiskunde-competities te organiseren voor leerlingen van het v.h.m.o. In het jaarverslag van de Onderwijscommissie over 1960 wordt gerapporteerd, dat de mogelijkheden waren onderzocht van een wedstrijd in de geest van de „wiskundige olympiades”, waaraan in de 36e jaargang van Euclides een artikel was gewijd (p. 109—117).

Aangezien de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde niet beschikt over eigen middelen ter financiering van zulke olympiades werd bij de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen een verzoek ingediend voor een extra-subsidie ter bestrijding van de kosten der geprojecteerde wedstrijden. Op dit verzoek werd gunstig beschikt, waardoor de materiële voorwaarden voor het slagen van de wedstrijden waren vervuld.

2. *Doelstelling*

Wiskundige prijsvragen zijn in ons land niet onbekend. Door het Wiskundig Genootschap worden ze reeds sinds 1805 uitgeschreven. Tegenwoordig zijn die prijsvragen echter bestemd voor universitair afgestudeerden, terwijl die van de Olympiades voor „beginners” zijn bedoeld. Onder Wiskunde-Olympiades zullen we voortaan verstaan nationaal, of althans regionaal georganiseerde wedstrijden in het oplossen van wiskundige problemen door de middelbare schooljeugd.

Deze Olympiades hebben tot doel:

- (a). de leerlingen tot wiskundestudie te animeren;
- (b). jeugdige talenten tijdig te ontdekken;
- (c). topprestaties te honoreren;
- (d). de keuze van een wiskundig beroep onder leerlingen van goede aanleg te propageren;

- (e). betrouwbare aanwijzingen te verzamelen voor een verantwoorde leerstofkeuze bij het v.h.m.o., waarmee in het bijzonder de meer begaafde leerlingen zullen zijn gebaat.

De Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, die de zorg voor de Nederlandse Olympiades op zich heeft genomen, maakt noch t.a.v. de idee der olympiades, noch t.a.v. de door haar gekozen naam enige aanspraak op oorspronkelijkheid. Wedstrijden in gelijke geest zijn reeds sinds het begin van deze eeuw, zij het onder andere namen (Eötvös-wedstrijden, Kurschak-wedstrijden), in Hongarije georganiseerd, in 1960 reeds voor de 60e maal. Voorts treffen we ze aan in Polen, Roemenië, Rusland, Amerika (competitions uitgaande van de Stanford University, van de Mathematical Society of America, van de Society of Actuaries). Prof. Polya, een der Hongaarse prijswinnaars, heeft de wedstrijden in zijn nieuwe vaderland geïntroduceerd.

De naam Olympiade is hiervoor in het buitenland reeds lang in zwang. Er is van enige zijden het bezwaar tegen deze naam aangevoerd, dat de naam een vierjarige periode suggereert, terwijl het in de bedoeling ligt om de wiskunde-olympiades jaarlijks te doen houden. Tegenover dit bezwaar staat dat de naam heenwijst naar een band met de Griekse cultuur, terwijl in internationale contacten de betekenis van de naam voetstoots duidelijk is.

Op de vergadering van de C.I.E.M. (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique) te Stockholm, augustus 1962, is de vraag onder ogen gezien, of het mogelijk en wenselijk is „Internationale” Wiskunde-Olympiades te organiseren. Men was echter van oordeel, dat dit thans nog niet uitvoerbaar is.

3. *Organisatie van de Wiskunde-Olympiade*

We laten hier een overzicht volgen van activiteiten die in verband staan met de Wiskunde-Olympiade-1962.

5 januari: Installatie der Adviescommissie van de Wiskunde-Olympiade-1962 door de voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, Prof. Dr. Freudenthal.

De Adviescommissie bestaat uit:

Prof. Dr. O. Bottema, Delft, voorzitter,

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, Eindhoven,

Dr. J. T. Groenman, Groningen,

Dr. C. P. S. van Oosten, Arnhem.

Aan de commissie wordt Prof. Dr. J. H. van Lint als plaatsvervangend lid toegevoegd.

De taak van de commissie is: het samenstellen van de opgaven voor de beide ronden, de beoordeling van het ingezonden werk, de selectie voor de tweede ronde en de vaststelling van de einduitslag.

- 19 januari: Persconferentie onder leiding van Prof. Freudenthal in het Mathematisch Instituut te Utrecht.
- 23 januari: Er worden circulaires gezonden aan alle scholen voor v.h.m.o. in Nederland, die een gymnasium-B of een h.b.s.-B afdeling bezitten. Hierin wordt het wedstrijdplan uiteengezet en de medewerking van rectoren, directeuren en wiskunde-docenten voor de te houden wedstrijden ingeroepen.
- 20 februari: Sluiting van de gelegenheid tot aangifte; ruim 4100 deelnemers hebben zich opgegeven.
- 26 maart: Circulaires aan de wedstrijdleiders bij de eerste ronde worden verzonden. Hierin worden mededelingen verstrekt omtrent de door de Staatsdrukkerij in de tweede helft van april toe te zenden verzegelde pakketten met opgaven en consignes vastgesteld voor de deelnemers aan de wedstrijd en voor de docenten die de zorg voor de correctie op zich nemen.
- 2 mei: De eerste ronde wordt gespeeld door 3346 deelnemers van 284 scholen, des namiddags van 2 tot 5 uur. Slechts in 15 gevallen bleken er scholen overgegaan te zijn tot het houden van een gecombineerde zitting.
- 2—30 mei: Beoordeling van het gemaakte werk door de wedstrijdleiders volgens door de Adviescommissie verstrekte normen.
- 2—16 juni: De Adviescommissie stelt de uitslag van de eerste ronde vast.
- 30 juni: De wedstrijdleiders ontvangen bericht, welke 60 deelnemers tot de tweede ronde zullen worden toegelaten. In de rondgezonden circulaire adviseert de Adviescommissie haar opvolgster bij de normen voor de beoordeling ook de oplossingen der gestelde opgaven in te sluiten. De in 1962 verstrekte normen (zie bijlage III) waren niet toereikend gebleken voor het verkrijgen van een uniforme beoordeling. Verschillende wedstrijdleiders hadden laten weten, dat zij de toevoeging van de oplossingen op prijs zouden stellen ter vergemakkelijking en ter bespoediging van de beoordeling van het werk van de eerste ronde,

welke beoordeling juist in de drukke eindexamenperiode valt. Voorts geeft de Adviescommissie de deelnemende scholen nog in overweging in de toekomst een voorzichtige voor-selectie toe te passen, die nog geenszins een verbod voor bepaalde leerlingen behoeft in te sluiten, maar waardoor toch een aantal werkelijk zwakke leerlingen een ontmoedigende ervaring zal kunnen worden bespaard. Voorts werd nog opgemerkt, dat de uitslag van de eerste ronde in volgende jaren aanmerkelijk eerder bekend zal kunnen worden dan in 1962 het geval bleek, indien er een termijn wordt vastgesteld, waarbinnen het gecorrigeerde werk dient te zijn ingeleverd.

- 25 september: In een circulaire aan de deelnemers aan de tweede ronde wordt de dagindeling voor 24 oktober, de dag, waarop de tweede ronde zal worden gespeeld, bekend gemaakt en gelegenheid gegeven zich op te geven voor een gemeenschappelijke maaltijd.
- 24 oktober: De tweede ronde kan dank zij de medewerking van Dr. W. J. Thijssen worden gespeeld in de Rijkshogereburgerschool te Utrecht. Toezicht werd uitgeoefend door Prof. Bottema en Prof. Van Lint, door Dr. Burgers, de heer De Jong, Drs. Menk, Dr. Van der Neut, Dr. Vredenduin en Dr. Wansink. De gemeenschappelijke maaltijd, waaraan door alle 60 medespelers wordt deelgenomen, had plaats in de „Mensa”, Lepelenburg 1, Utrecht.
- 14 november: De prijswinnaars ontvangen bericht, dat ze tot de groep der tien besten behoren (zie §6).
- 21 november: De voorlopige uitslag wordt toegezonden aan alle deelnemers aan de tweede ronde en aan de wedstrijd-leiders.
- 29 november: Prijsuitreiking op het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen door de Secretaris-Generaal van dit departement, Dr. J. H. Wesselings. Aanwezig waren de Directeur-Generaal Mr. J. G. M. Broekman, de Inspecteur-Generaal van het Onderwijs, Mr. Ir. M. Goote, de chef van de hoofdafdeling v.h.m.o., Dr. J. J. A. Verlinden, de Inspecteurs van het v.h.m.o. Dr. H. A. Gribnau en Dr. D. N. van der Neut, de voorzitter van de Adviescommissie Prof. Dr. O. Bottema, de voorzitter van

de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde Prof. Dr. H. Freudenthal en de secretaris, en alle prijswinnaars met leraren, ouders en rectoren. De prijzen bestonden uit boeken en boekenbonnen, terwijl alle winnaars een „oorkonde” meekregen, waarop hun rangnummer stond vermeld.

15 december: Het verslag van de Eerste Nederlandse Wiskunde-Olympiade wordt aan Euclides ter plaatsing aangeboden; het zal aan de deelnemende scholen worden verzonden.

4. *Reacties op de aard der gestelde opgaven*

De Adviescommissie heeft bij de door haar verstrekte wenken voor de beoordeling van de opgaven van de eerste ronde laten weten, dat zij het op prijs stelde van de docenten te vernemen, tot welke opmerkingen de gestelde opgaven aanleiding gaven.

Vele docenten hebben hun oordeel uitgesproken. De waardering voor de als bijzonder mooi en oorspronkelijk gekwalificeerde opgaven bleek algemeen en groot. Alleen opgave 6 maakte op deze regel een duidelijke uitzondering; de meeste briefschrijvers vonden deze opgave van een te traditioneel type, dat op sommige scholen wel, op andere echter nog niet behandeld was, en dat voor een wedstrijd als deze daardoor ongeschikt moest worden geacht. Velen vonden de mooie opgave 9 (eventueel: de mooie opgaven 8 en 9) beter op hun plaats in de tweede ronde dan in de eerste. Frequent was voorts de klacht, dat de opgaven als stel te moeilijk waren voor de eerste ronde, die immers slechts beoogde een voorselectie te zijn voor de hoofdwedstrijd, en dat het aantal opgaven te groot was. Men constateerde, dat op tal van scholen door werk als dit het enthousiasme voor de wiskunde bezwaarlijk kon worden gewekt of versterkt, dat velen gedeprimeerd het wedstrijdlokaal verlieten, dat bestaand zelfvertrouwen werd geschokt. Daartegenover staan echter ook scholen, waar ondanks geringe resultaten van een gedeprimeerde stemming geen sprake bleek te zijn.

In verband hiermee heeft de Adviescommissie in de circulaire van 30 juni enige opmerkingen gemaakt over de wenselijkheid van een voorzichtige voor-selectie door de scholen.

Tal van briefschrijvers zouden het op prijs hebben gesteld, als een of twee der moeilijker opgaven door eenvoudiger typen zouden zijn vervangen, ook terwille van het enthousiasme van de vele leerlingen, die sportief aan de wedstrijd deelnamen zonder redelijk uitzicht op een prijs en die desondanks toch, overeenkomstig de bedoeling van

de organisatoren, aan de wedstrijd genoeg zouden mogen beleven. De selectieve waarde van de test zou door deze vereenvoudiging niet in gevaar zijn gekomen. Thans bedroeg het gemiddelde van de maxima van de deelnemende scholen slechts 39 op een theoretisch bereikbaar puntental van 120.

In de consignes voor de eerste ronde was erop gewezen, dat het aantal opgaven zo groot was, dat men niet mocht verwachten, dat de meeste kandidaten ze in de gestelde tijd zouden kunnen maken. Zulks in tegenstelling met eindexamenwerk, waarbij de tijd zo ruim gekozen is, dat kandidaten wel alles af kunnen maken. Het valt niet te miskennen, dat zeer veel kandidaten, ook vele kandidaten die tot de topploeg zouden blijken te behoren, in ernstige tijdnood zijn geraakt en daardoor sommige opgaven, hetzij van de hogere nummers hetzij van de nummers aan het begin, geheel hebben laten liggen.

Detailkritiek ten aanzien van de gestelde opgaven kunnen we hier niet opnemen. Slechts merken we nog op, dat de wens is geuit, dat de opgaven van de Olympiades zullen worden geredigeerd overeenkomstig de wensen van de Nomenclatuurcommissie van Wimecos en Liwenagel en dat er dus bijvoorbeeld niet meer gesproken zal worden over termen van „reeksen”, maar van „rijen”, (zie opgave 2 van de tweede ronde).

5. Waardering van het gemaakte werk

a. Een steekproef over ongeveer 10 % der inzendingen bij de eerste ronde leverde de volgende verdeling op:

0— 4 punten: 50 deelnemers	40—44 punten: 5 deelnemers
5— 9 punten: 57 deelnemers	45—49 punten: 6 deelnemers
10—14 punten: 70 deelnemers	50—54 punten: 6 deelnemers
15—19 punten: 62 deelnemers	55—59 punten: 2 deelnemers
20—24 punten: 47 deelnemers	60—64 punten: 0 deelnemers
25—29 punten: 29 deelnemers	65—69 punten: 1 deelnemer
30—34 punten: 14 deelnemers	70—79 punten: 0 deelnemers
35—39 punten: 10 deelnemers	80—84 punten: 1 deelnemer.

b. De maxima van de deelnemende scholen waren als volgt verdeeld:

0— 4 punten: 1 school	50— 54 punten: 21 scholen
5— 9 punten: 0 scholen	55— 59 punten: 22 scholen
10—14 punten: 3 scholen	60— 64 punten: 4 scholen
15—19 punten: 15 scholen	65— 69 punten: 4 scholen
20—24 punten: 24 scholen	70— 74 punten: 2 scholen
25—29 punten: 37 scholen	75— 79 punten: 0 scholen
30—34 punten: 34 scholen	80— 84 punten: 3 scholen
35—39 punten: 37 scholen	85—104 punten: 0 scholen
40—44 punten: 42 scholen	105—109 punten: 1 school.
45—49 punten: 30 scholen	

Het gemiddeld maximum bedraagt 39.

Van de deelnemende scholen die bij de eerste ronde gecombineerde zittingen hebben georganiseerd, hebben niet alle de puntentallen over de deelnemende scholen gespecificeerd.

c. De volgorde in moeilijkheid der bij de eerste ronde opgegeven vraagstukken beoordeeld naar de in de schaal 0—10 berekende cijfers bedroeg:

(1) voor de 360 leerlingen behorende tot de bovenvermelde steekproef:

1 7 3 2 5 4 6 8 9

(2) voor de 60 deelnemers aan de tweede ronde:

1 7 3 8 4 9 2 5 6

Van de „moeilijker” opgaven 6, 7, 8 en 9, die elk met meer dan 10 punten konden worden gehonoreerd, sloot nummer 7 het nauwst aan bij het in het v.h.m.o. gangbare oefenmateriaal, waaruit de tweede plaats in beide rijen is te verklaren.

Nummer 6 sloot weliswaar ook aan bij de gangbare typen, maar zal op tal van scholen nog niet aan de orde geweest zijn, waaruit de plaats achter in de rijen verklaarbaar wordt.

d. De volgorde in moeilijkheid van de opgaven van de tweede ronde beoordeeld naar de in de schaal van 0—10 omgerekende cijfers bedroeg:

(1) voor de 60 deelnemers aan de tweede ronde:

1 2 4 5 3

(2) voor de tien prijswinnaars:

4 2 1 5 3.

In onderstaande tabel zijn voor elk der vijf opgaven de gemiddelden aangegeven van de behaalde punten telkens voor groepen van 10 deelnemers.

	I	II	III	IV	V
1—10	7,1	8,1	1,6	8,4	6,5
11—20	6,8	6,7	0,2	5,5	3,3
21—30	6,5	5,7	0,4	4,5	2,0
31—40	5,8	4,3	0,3	3,4	2,0
41—50	4,9	4,6	0,4	1,8	0,3
51—60	3,6	2,8	0,0	0,8	0,7

Opgave 3 bleek te moeilijk voor de deelnemers; slechts één hunner vermeldde het goede antwoord zonder dit echter te verklaren; van

de overigen behaalde niemand meer dan 6 punten voor een partiële oplossing.

Opgave 5 stelde aan de deelnemers buitengewone eisen; toch slaagden 12 van de 60 deelnemers erin deze opgave „voldoende” te maken.

Voor de nummers 1, 2, 3, 4 en 5 waren de aantallen deelnemers die meer dan de helft van de beschikbare punten behaalden, opvolgend:

36, 22, 1, 18, 12.

e. In hoeverre er correlatie bestaat tussen de rangorden verkregen op grond van de prestaties bij de eerste ronde en van die bij de tweede ronde moge uit de volgende tabel blijken.

		tweede ronde									
eerste ronde		1—6	7—12	13—18	19—24	25—30	31—36	37—42	43—48	49—54	55—60
	1—6	3	1		1					1	
	7—12	2	1	1	1	1					
	13—18		2		1	2					1
	19—24	1			2		1		1		
	25—30			3		2	2		1		1
	31—36				1			1	1	1	
	37—42		2	1				2	1	1	1
	43—48					1		1			
	49—54				1	2	1	2	1	1	3
	55—60								2	1	

Niet in iedere rij en in iedere kolom is het totale aantal deelnemers 6. Dit staat in verband met de omstandigheid, dat in vele gevallen enige deelnemers eenzelfde aantal punten verwierven, in welke gevallen ieder hunner als rangnummer het gemiddelde ontving van de beschikbare nummers.

f. De rangorde van de deelnemers in de einduitslag is afhankelijk gesteld van de prestaties in beide ronden. Van de punten behaald in de eerste ronde is 25 % gevoegd bij de punten behaald in de tweede ronde.

Het theoretisch maximum dat gehaald kon worden, kwam daarvoor op 120.

De eerste ronde heeft hierdoor de definitieve volgorde beïnvloed: zou echter de eerste ronde buiten beschouwing zijn gelaten, dan zouden dezelfde tien winnaars zijn aangewezen als thans het geval is, zij het in een andere volgorde.

g. Leeftijden

De homogeniteit in leeftijd van de deelnemers is bevorderd doordat deelname slechts open stond voor leerlingen die in mei 1962 tot de op één na hoogste klasse behoorden van gymnasium, lyceum of hbs. Toch is er nog een behoorlijke spreiding. Bij de tweede ronde was de oudste deelnemer 19 jaar, de jongste 16 jaar. Van de tien prijswinnaars waren er 6 nog geen 17 jaar.

h. Verband met schoolprestaties

De meeste prijswinnaars hebben zich niet alleen bij de Olympiade, maar ook bij hun schoolwerk door hoge cijfers weten te onderscheiden. Bij velen ligt het gemiddelde voor de exacte vakken in de klasse hoger dan 8, soms zelfs hoger dan 9.

Slechts een enkele prijswinnaar bleef op school voor de exacte vakken (en eveneens voor de overige vakken) beneden de 6. Deze deelnemer werd bij de overgang naar de hoogste klasse van zijn school voorwaardelijk bevorderd.

6. Uitslag van de Wiskunde-Olympiade-1962

De prijswinnaars zijn:

1. A. A. B. M. van der Meijs, 91 punten (70; 73);
St. Aloysiuscollege, Den Haag; oud 19 jaar, 1 maand; gymn.
2. P. van Oostrum, 84 punten (107; 57);
Christelijke HBS, Culemborg; oud 16 jaar, 11 maand; hbs.
3. J. C. Kuypers, 82 punten (58; 67);
Koninklijke HBS, Apeldoorn; oud 17 jaar, 8 maand; hbs.
4. C. H. Verhoeven, 81 punten (82; 60);
St. Odolphuscollege, Tilburg; oud 16 jaar, 8 maand; gymn.
5. M. J. van Gelder, 80 punten (80; 60);
Lorentzlyceum, Eindhoven; oud 17 jaar, 11 maand; hbs.
6. R. Worm, 74 punten (69; 57);
Spinozalyceum, Amsterdam; oud 17 jaar, 11 maand; gymn.
7. C. Soeters, 72 punten (74; 53);
Het Charloise Lyceum, Rotterdam; oud 16 jaar, 8 maand; hbs.
8. J. J. Drenth, 62 punten (60; 47);
Dalton HBS, Groningen; oud 16 jaar, 6 maand; hbs.
9. W. H. L. M. Prüst, 59 punten (48; 47);
St. Joriscollège, Eindhoven; 16 jaar, 5 maand; hbs.
10. J. A. Petterson, 56 punten (60; 41);
St. Montfortcollege, Rotterdam; 16 jaar, 3 maand; hbs.

N.B. Van de twee getallen tussen haken geeft het eerste het puntental aan van de eerste ronde, het tweede dat van de tweede ronde. De leeftijden gelden voor de datum van de tweede ronde.

Opgaven eerste ronde

Woensdag 2 mei, 14.00—17.00 uur

1. Gegeven is een vlakke vierhoek, waarvan elke hoek kleiner is dan een gestrekte hoek.
Geef het punt aan, waarvoor de som van de afstanden tot de hoekpunten van de vierhoek zo klein mogelijk is.
Bewijs dat uw antwoord goed is.
2. Los x en y op uit de vergelijking

$$\{\sin(x - y) + 1\} \{2 \cos(2x - y) + 1\} = 6.$$
3. Gegeven zijn een bol met middelpunt M en straal $7a$ en een vlak V ; A is de projectie van M op V ; $MA = 15a$.
 P is een variabel punt op de bol en Q een variabel punt in vlak V , zodanig dat de afstand van P tot Q gelijk is aan $32a$.
Druk de grootste en de kleinste afstand die Q tot A kan hebben, in a uit.
4. In het vlak van het rechthoekig assenstelsel OXY beschouwen we de punten waarvoor $0 < x < 2\pi$ en $0 < y < 2\pi$.
Geef door arceringen de punten aan waarvoor geldt:

$$\sin x > \sin y.$$
5. Van de positieve, gehele getallen p , q , r en s is gegeven:

$$\frac{p}{q} = \frac{r^2}{s^2}.$$

Geef voor elk van de volgende uitspraken aan, of zij al of niet uit deze gegevens volgt.
 - a. p en q zijn beide het kwadraat van een geheel getal.
 - b. Als p en q onderling ondeelbaar zijn, dan zijn ook r en s onderling ondeelbaar.
 - c. Als p een oneven aantal factoren 7 bevat, dan bevat ook q een oneven aantal factoren 7.
 - d. Als r deelbaar is door 7, dan is p deelbaar door 49.
 - e. Als p deelbaar is door r , dan is q deelbaar door s .
6. Van de vergelijking in x

$$x^{\log x^2} - 4x^{\log x} + p = 0,$$
 waarin logaritmen beschouwd worden met 2 als grondtal, is N het aantal verschillende wortels.
Welke waarden kan N aannemen?
Geef van elk dezer waarden aan, bij welke waarde(n) van p zij behoort.
7. a. Teken in één figuur de grafieken van de functies:

$$f(x) = |x - 1| + x + 1 \quad \text{en} \quad g(x) = x - 1 + |x + 1|.$$
 b. Onder de afstand van een punt tot een grafiek zullen we verstaan de afstand van dat punt tot het dichtstbij gelegen punt van de grafiek.
Geef in de figuur de punten aan, waarvoor de afstand tot de ene grafiek gelijk is aan de afstand tot de andere.
8. Van de getallenrij

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \dots$$
 wordt gegeven:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \text{ voor } n = 3, 4, 5, \dots$$

Bereken de rest van a_{366} bij deling door 7.

9. Men vormt met het gewone alfabet

$a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z$

alle mogelijke „woorden” van negen letters. Een „woord” is een rij van letters, geheel ongeacht de uitspreekbaarheid.

De woorden worden in een lijst alfabetisch gerangschikt.

Het aantal woorden dat in deze lijst voorkomt tussen

$j w b s c t y w i$ en $s d t f a a x p$

stellen we voor door N .

Welk is het N -de woord van de lijst?

BIJLAGE II

Opgaven tweede ronde

Woensdag 24 oktober, 14.00—17.00 uur

- Gegeven is een driehoek ABC , waarin de hoek C recht is; $AC = b$ en $BC = a$.
 - Construeer de cirkel met middelpunt C zodanig dat één van de raaklijnen uit B aan die cirkel evenwijdig is aan één van de raaklijnen uit A aan die cirkel.
 - Druk de straal van die cirkel uit in a en b .

- Van een reeks is de n^e term t_n .

t_n is gegeven door de betrekking:

$$t_n = n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{6} \quad (n \geq 1).$$

Van een tweede reeks is de n^e term T_n . Daarbij stelt T_n het kleinste gehele getal voor dat groter is dan t_n .

Bereken: $(T_1 + T_2 + \dots + T_{1014}) - (t_1 + t_2 + \dots + t_{1014})$.

- Men beschouwt de positieve gehele getallen die in het tientallige stelsel geschreven worden met n cijfers, waarvan het voorste geen nul is en waarbij nergens twee zevens naast elkaar staan. Het aantal van deze getallen noemt men u_n . Leid een betrekking af die u_{n+2} uitdrukt in u_{n+1} en u_n .

- Als g een getal is, duidt men met $[g]$ het grootste gehele getal aan, dat kleiner dan of gelijk aan g is.

(Voorbeelden: $[3\frac{1}{2}] = 3$; $[\frac{3}{4}] = 0$; $[2] = 2$).

Zij n een in het tientallige stelsel geschreven positief geheel getal. Druk met U bekende wiskundige notaties en symbolen, aangevuld met de notatie $[\dots]$, in n uit:

- het achterste cijfer van n ;
- het op één na achterste cijfer van n (als $n \geq 10$ is);
- het voorste cijfer van n .

- Er zijn drie soorten van dingen, die resp. worden aangeduid met de (van elke gangbare betekenis ontdane) woorden *noten*, *balken* en *vellen*.

Tussen een noot en een balk kan een zekere betrekking bestaan die uitgedrukt wordt door de zegswijze: zij *passen bij elkaar*. Ook kunnen een noot en een vel bij elkaar passen, een balk en een vel kunnen bij elkaar passen en twee verschillende balken kunnen bij elkaar passen.

Gegeven zijn de volgende axioma's:

- I. Als een noot en een vel elk passen bij eenzelfde balk, dan passen zij bij elkaar.
 - II. Als twee verschillende noten beide passen bij de balk b en ook beide passen bij het vel v , dan passen b en v bij elkaar.
 - III. Als twee balken bij elkaar passen, dan is er een noot die bij beide past.
 - IV. Als een noot en een balk zijn gegeven, dan is er een vel dat bij beide past.
- Bewijs de volgende stelling en geef daarbij telkens door zijn nummer het axioma aan dat U toepast:
- Als van drie onderling verschillende balken elke past bij elke andere en er geen noot is die bij alle drie balken past, dan is er een vel dat bij alle drie balken past.

BIJLAGE III

Aanwijzingen omtrent de beoordeling

Eerste ronde

De vraagstukken zijn niet gelijkwaardig.

Voor elke opgave wordt een aantal punten toegekend en wel voor elk van de opgaven 1 tot en met 5 ten hoogste tien punten, voor 6 en 7 elk ten hoogste vijftien punten en voor 8 en 9 elk ten hoogste twintig punten.

Alle beoordelingen worden gegeven in gehele getallen.

Voor een opgave die niet is beantwoord, of waarvan het antwoord geen verdienste bezit, worden nul punten gegeven.

Bij opgave 3 is het noemen van de beide antwoorden voldoende; alle begeleidende tekst kan worden weggelaten.

Bij de opgaven 4 en 7 kan volstaan worden met een duidelijke tekening.

Bij de vijf onderdelen van opgave 5 behoeft telkens alleen het antwoord „ja” of het antwoord „neen” te worden gegeven.

Bij de overige opgaven moet het antwoord worden toegelicht.

Tweede ronde

Voor opgave 1 worden ten hoogste tien punten toegekend; voor elk van de overige opgaven ten hoogste twintig punten.

Verdere toelichting bij de beoordeling van het werk van de eerste ronde

1. Als het snijpunt S der diagonalen als antwoord wordt vermeld: 4 punten. Wordt de ongelijkheid alleen bewezen voor een niet op een diagonaal gelegen punt, dus met twee ongelijkheden, dan wordt het totaal 8 punten. Is ook het geval beschouwd van een buiten S op een diagonaal gelegen punt, dan 10 punten.
2. Voor het uiteenvallen van de vergelijking: 6 punten; voor de afwerking: 4 punten; hiervan gaan 2 punten af, als de oplossing onvolledig is.
3. Voor het maximum: 4 punten; voor het minimum: 6 punten. Deze opgave kan dus alleen met 0, 4, 6 of 10 punten worden gewaardeerd.
4. Het al of niet noemen van de randen wordt bij de beoordeling buiten beschouwing gelaten. Een geheel goede figuur: 10 punten; als de tekening niet geheel goed is, mogen ten hoogste 4 punten worden toegekend.
5. Alle vijf antwoorden goed: 10 punten; vier antwoorden goed: 4 punten; minder dan 4 antwoorden goed: 0 punten.

6. Voor de kritieke waarden $p = 4$ en $p = 3$ worden opvolgend 3 en 6 punten toegekend. De overige 6 punten worden toegekend als zowel voor de kritieke waarden van p als voor de drie intervallen de juiste waarde voor N is vermeld. Is in dit gedeelte één fout gemaakt, dan worden er van de 6 beschikbare punten slechts 3 toegekend; worden er meer fouten gemaakt, dan wordt de maximale waardering voor de hele opgave 9 punten.
7. Voor elke goede grafiek worden 2 punten toegekend. Zijn de grafieken niet beide goed, dan vervalt elke verdere waardering, zodat in dit geval het totale aantal punten voor de opgave ten hoogste 2 bedraagt. Zijn beide grafieken goed, waarvoor dus 4 punten zijn gegeven, dan wordt de beoordeling voortgezet. In de figuur moeten twee bissectrices, een loodlijn en een middenparallel worden getrokken. Voor elk van deze vier onderdelen kunnen 2 punten worden gegeven, waarmee dus een totaal van 12 punten kan worden bereikt. De voltooiing van de tekening wordt met de resterende 3 punten gewaardeerd.
8. De sleutel tot de oplossing is de bepaling van de rij der periodiek terugkerende resten. Is dit inzicht getoond en het repetendum van 8 cijfers bepaald, dan worden 16 punten toegekend. Voor de juiste afwerking zijn dan nog 4 punten beschikbaar. Is het repetendum niet gevonden, maar blijkt wel, dat getracht is een wetmatigheid in de resten te vinden, dan is een positieve waardering toegestaan tot ten hoogste 4 punten.
9. Voor het zonder fouten gevonden antwoord

i h r m x g c b f

worden 20 punten toegekend. Voor het inzicht, dat in het zesentwintigtallig stelsel (met $a = 0$) moet worden afgetrokken: 8 punten. Van de overige 12 punten gaan er 3 af voor elke verwarring van $N - 1$, N en $N + 1$.

Bij rekenfouten in de aftrekking gaat het puntental 12 terug tot ten hoogste 4.

Oplossingen, waarbij de bovenstaande normen geen uitsluitsel gaven, dienden naar de eigen opvatting van de beoordelende docent te worden gewaardeerd.

BIJLAGE IV

OPLOSSINGEN

van de opgaven van de Wiskunde-Olympiade-1962

Eerste ronde ¹⁾

1. Het snijpunt van de diagonalen van vierhoek $ABCD$ voldoet.

Valt P niet samen met dat snijpunt S , dan ligt P minstens buiten één van de diagonalen, bv. buiten AC .

Dan is:

$$\begin{array}{r} PA + PC > AC \\ PB + PD \geq BD \\ \hline PA + PB + PC + PD > AC + BD \\ \text{dus: } PA + PB + PC + PD > SA + SB + SC + SD. \end{array}$$

¹⁾ De figuren bij de oplossingen zijn overgenomen uit het N.T.v.W., 50e jaargang, p. 63—70.

2. In verband met de extreme waarden van de sinus en van de cosinus kan het produkt van de beide factoren in het linker lid slechts 6 worden, als de eerste factor 2 en de tweede 3 is.

Oplossing van de twee vergelijkingen geeft:

$$x = (2k - \frac{1}{2})\pi$$

$$y = (2m + 1)\pi \text{ met } k \text{ en } m \text{ gehele getallen.}$$

3. De extremen voor QA treden op als P, Q, M en A in één vlak liggen.

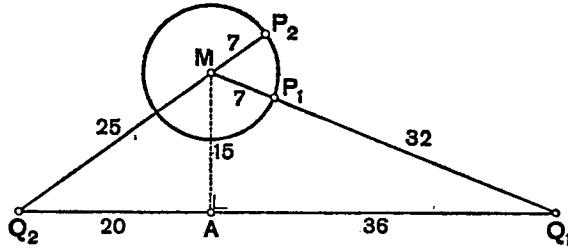


fig. 1.

De gevraagde afstanden zijn dus $36a$ en $20a$.

4.

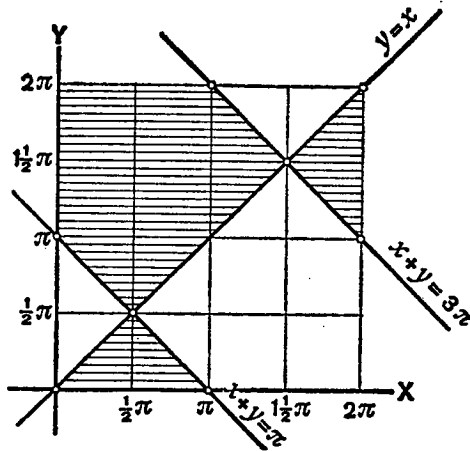


fig. 2.

5. a. neen; b. neen; c. ja; d. neen; e. neen.
6. Stellen we $x^{\log x} = y$ dan gaat de vergelijking over in

$$y^2 - 4y + p = 0 \text{ met } y \geq 1.$$

Stellen we $y = z + 1$ dan gaat de vergelijking over in

$$z^2 - 2z + (p - 3) = 0$$

met $z \geq 0$.

We vinden:

$4 < p$: geen wortels:

$$N = 0$$

$4 = p$: één wortel ($z = 1$):

$$N = 2$$

$3 < p < 4$: twee positieve wortels z :

$$N = 4$$

$p = 3$: $z_1 = 0$ en $z_2 > 0$:

$$N = 3$$

$p < 3$: één positieve en één negatieve wortel z :

$$N = 2.$$

7. Onderscheid de volgende intervallen:

- | | |
|---------------------|------------------------------|
| (1) $x < -1$ | $f(x) = 2$ en $g(x) = -2$ |
| (2) $-1 \leq x < 1$ | $f(x) = 2$ en $g(x) = 2x$ |
| (3) $x \geq 1$ | $f(x) = 2x$ en $g(x) = 2x$. |

Zie verder de figuur.

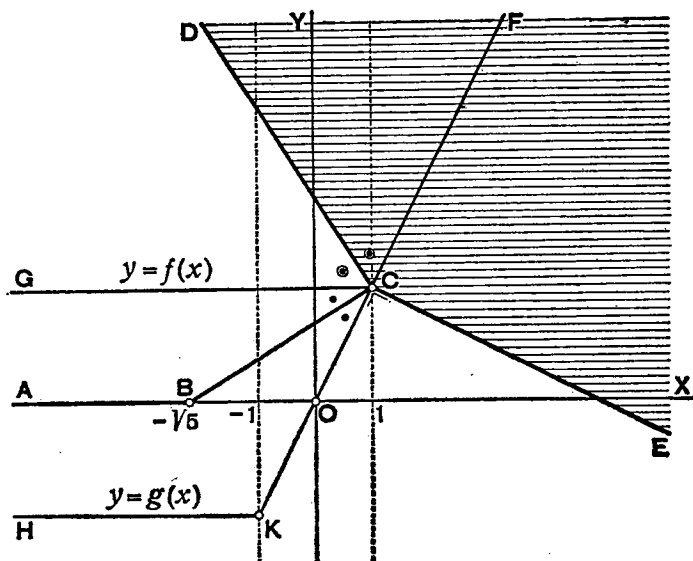


fig. 3.

8. De getallenrij is:

1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, ...

Uit $g_1 = 7n + r_1$ en $g_2 = 7m + r_2$ leiden we af, dat het produkt $g_1 \cdot g_2$ bij deling door 7 dezelfde rest laat als het produkt van de resten $r_1 \cdot r_2$.

De rij der resten is dus:

1, 2, 2, 4, 1, 4, 4, 2, 1, 2, 2, 4, 1, ...

d.i. een getallenrij met een periode van 8.

Wegens $366 = 45 \times 8 + 6$ laat a_{366} dezelfde rest als a_6 .

De gevraagde rest is dus 4.

9. Voor het aantal getallen N dat tussen de gehele getallen A en B ligt ($A > B$) geldt:

$$N = A - B - 1.$$

In de met „nul” beginnende getallenrij

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

is het N^{de} getal gelijk aan $N - 1$, d.i. voor $N = A - B - 1$ dus het getal $A - B - 2$.

We kunnen nu de opvolgende „woorden” laten corresponderen met de opvolgende getallen in het zesentwintigtalig stelsel met $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, ..., $y = 24$, $z = 25$.

We vinden:

$$\begin{array}{l} s d t f a a a x p = (18) (3) (19) (5) (0) (0) (0) (23) (15) \\ j w b s c t y w i = (9) (22) (1) (18) (2) (19) (24) (22) (8) \end{array}$$

$$\text{Verschil:} \quad (8) (7) (17) (12) (23) (6) (2) (1) (7)$$

Het N -de woord correspondeert met

$$(8) (7) (17) (12) (23) (6) (2) (1) (5)$$

en is dus:

$$i h r m x g c b f.$$

Tweede ronde¹⁾

1. a. Analyse.

Als de raaklijn uit B (raakpunt G) en die uit A (raakpunt H) evenwijdig zijn, liggen G , C en H op één rechte. De lijn door C evenwijdig aan de raaklijnen deelt BA middendoor, omdat $GC = CH$.

Constructie.

Trek de zwaartelij CM ; trek door B de rechte $l \parallel MC$. Construeer de afstand r van C tot l , dan is cirkel $(C; r)$ de gevraagde cirkel.

Bewijs.

Wegens $BM = MA$ is de afstand van C tot l even groot als de afstand van C tot de rechte k door A evenwijdig aan l getrokken. De cirkel $(C; r)$ raakt aan l en aan k , omdat de straal van de cirkel gelijk is aan de afstanden van C tot k en tot l ; k en l zijn dus evenwijdige raaklijnen.

- b. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken BGC en BCA , die de hoeken gelijk hebben, volgt:

$$r : a = b : \sqrt{a^2 + b^2}$$

zodat:

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Opmerking.

Beschouwen we „samenvallen” als een bijzonder geval van „evenwijdig zijn”, dan geldt het evenwijdig zijn ook voor de tweede raaklijn uit A t.o.v. de tweede raaklijn uit B .

Tweede oplossing.

a. Analyse.

Als raaklijnen uit A en B evenwijdig zijn, zal ieder punt van één dier raaklijnen na spiegeling t.o.v. C een punt van de andere raaklijn opleveren. Het punt D , zó gelegen dat C midden tussen B en D ligt, ligt dus op de raaklijn uit A . Daar driehoek BDA gelijkbenig is (tophoek A), en C het midden is van de basis, heeft C gelijke afstanden tot AD en AB . De cirkel raakt dus aan AB .

Constructie.

Laat de loodlijn uit C op AB neer; voetpunt E . Teken nu de cirkel met middelpunt C en straal CE .

¹⁾ Voor de hier opgenomen oplossingen is zoveel mogelijk gebruik gemaakt van het door de deelnemers ingeleverde werk; de tweede oplossing van de eerste opgave en het bewijs van de derde opgave zijn van de hand van prof. dr. N. G. de Bruijn.

Bewijs.

Beschouw de ruit die C tot middelpunt en A en B tot hoekpunten heeft. De getekende cirkel raakt aan één zijde, dus ook aan de andere.

- b. In driehoek ABC heeft de hoogtelijn uit C de lengte $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; dit is dus ook de straal van de gevraagde cirkel.

2. Stellen we $n = 6k + p$, waarin k een niet-negatief geheel getal is en $p = 1, 2, 3, 4, 5$ of 6 , dan vinden we:

$$t_n = (6k + p)^3 + 18k^2 + 6pk + 2k + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{1}{4},$$

zodat $T_n - t_n$ gelijk is aan het bedrag waarmee

$$\frac{p^2}{2} + \frac{p}{3} + \frac{1}{4}$$

vermeerderd moet worden om het naasthogere gehele getal te krijgen.

Voor $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ vinden we voor deze bijdrage opvolgend:

$$\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12},$$

zodat de bijdrage tot de som

$$(T_1 - t_1) + (T_2 - t_2) + \dots + (T_{1014} - t_{1014})$$

voor een opvolgende rij van 6 termen 3 bedraagt.

Er zijn 169 groepen van 6 opvolgende verschillen ($k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 167, 168$).

De gevraagde som is dus $169 \times 3 = 507$.

3. Beschouw de getallen van $(n + 2)$ cijfers die niet met een nul beginnen en waarbij nergens twee zevens naast elkaar staan. Het aantal dezer getallen is u_{n+2} . We verdelen ze in twee groepen, nl. degene die niet op een 7 eindigen en degene die wel op een 7 eindigen.

In de eerste groep zitten $9u_{n+1}$ getallen, want op de laatste plaats kan staan één der cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, terwijl de $(n + 1)$ cijfers daarvoor één der u_{n+1} getallen mogen en moeten vormen die niet met een nul beginnen en nergens twee zevens naast elkaar hebben.

In de tweede groep zitten $9u_n$ getallen, want op de laatste twee plaatsen kan staan één der combinaties 07, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 87, 97, terwijl de n cijfers daarvoor één der u_n getallen mogen en moeten vormen die niet met een nul beginnen en nergens twee zevens naast elkaar hebben.

Derhalve is, voor $n = 1, 2, 3, \dots$

$$u_{n+2} = 9u_{n+1} + 9u_n.$$

4. a. $\left[\frac{n}{10} \right]$ is het getal dat men krijgt door van het getal n het laatste cijfer weg te laten. Dit laatste cijfer is dus

$$n - 10 \left[\frac{n}{10} \right].$$

- b. $\left[\frac{n}{100} \right]$ is het getal dat men krijgt door van het getal n de cijfers van eenheden en tientallen weg te laten. Het op één na achterste cijfer is dus

$$\left[\frac{n}{10} \right] - 10 \left[\frac{n}{100} \right].$$

- c. Het voorste cijfer van het getal is $\left\lceil \frac{n}{10^{m-1}} \right\rceil$, waarin m het aantal cijfers van het getal voorstelt. Voor n en m geldt:

$$10^{m-1} \leq n < 10^m,$$

dus

$$m - 1 \leq \log n < m$$

waarin 10 de basis van de logaritme is, zodat

$$[\log n] = m - 1$$

Bijgevolg is het voorste cijfer:

$$\left\lceil \frac{n}{10^{[\log n]}} \right\rceil = \left\lceil 10^{\log n - [\log n]} \right\rceil.$$

5. Het bij elkaar passen van 2 of meer elementen wordt aangegeven door die elementen tussen haken te zetten.

Gegeven.

Er zijn drie balken $b_1, b_2, b_3 \dots (1)$.

$(b_2, b_3) \dots (2)$

$(b_1, b_3) \dots (3)$

$(b_1, b_2) \dots (4)$

Er is geen n waarvoor geldt: (n, b_1) en (n, b_2) en $(n, b_3) \dots (5)$

Te bewijzen.

Er is een v waarvoor geldt:

(v, b_1) en (v, b_2) en (v, b_3) .

Bewijs.

Volgens axioma III volgt uit (2), dat er een n_1 is zo dat

(n_1, b_2) en $(n_1, b_3) \dots (6)$ en (7).

Voorts is er een n_2 zo dat (n_2, b_1) en $(n_2, b_3) \dots (8)$ en (9).

En een n_3 zo dat (n_3, b_1) en $(n_3, b_2) \dots (10)$ en (11)

n_1, n_2 en n_3 zijn verschillend; uit $n_1 \equiv n_2$ zou volgen, dat deze n zou passen bij b_1, b_2 en b_3 in strijd met gegeven (5).

We hebben dus nu drie verschillende balken en drie verschillende noten, zo dat de balken twee aan twee bij elkaar passen en de noot n_i past bij de balk b_k indien $i \neq k$.

Bij b_1 en n_1 past volgens axioma IV een vel v , dus:

(b_1, v) en $(n_1, v) \dots (13)$ en (14).

We moeten nu aantonen, dat ook b_2 en b_3 bij v passen.

We geven het bewijs voor b_2 .

n_3 past bij $b_1 \dots (10)$ } dus n_3 past op grond van axioma I bij $v \dots (15)$
 b_1 past bij $v \dots (13)$ }

Volgens (14) en (15) passen n_1 en n_3 bij v .

Volgens (6) en (11) passen n_1 en n_3 bij b_2 .

Volgens axioma II past b_2 dus bij $v \dots (16)$

Analoog voor $b_3 \dots (17)$.

Conclusie.

b_1, b_2, b_3 passen alle drie bij v , volgens (13), (16) en (17).

LOGISCHE EN DENKPSYCHOLOGISCHE ASPECTEN VAN DE VERNIEUWING VAN HET WISKUNDE-ONDERWIJS¹⁾

door

Prof. Dr. E. W. BETH

(Amsterdam)

Terwille van de helderheid van mijn betoog zou ik een niet geheel ongebruikelijke onderscheiding willen vooropstellen tussen drie „soorten” wiskunde die elk geacht kunnen worden een fase in de ontwikkeling van het mathematisch denken te vertegenwoordigen.

(1) De *naïeve wiskunde*, vertegenwoordigd door de meetkunde van Euclides, heeft een aanschouwelijk en elementair karakter; de begripsvorming is nog maar zeer weinig exact, en reeds daardoor kan ook de bewijsvoering niet zeer streng zijn.

(2) De *kritische wiskunde* stelde zich in de eerste plaats ten doel, het antwoord te leveren op de vragen die de ontwikkeling van de infinitesimaalrekening had doen rijzen; het minder elementair karakter van deze stof maakte meer aandacht voor een exacte begripsvorming noodzakelijk.

(3) De *abstracte wiskunde* is de vrucht van de unificatie van de zuivere wiskunde²⁾ die nodig werd door haar volledige emancipatie ten aanzien van empirie en aanschouwing; deze emancipatie vloeide voort uit de ontwikkeling van de kritische wiskunde en uit de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde. Behalve meer exacte begripsvorming eist de abstracte wiskunde ook grotere strengheid van bewijsvoering.

Terwille van de volledigheid van mijn betoog behoor ik natuurlijk nog een fase te vermelden, te weten:

(0) De *empirische wiskunde*;

maar deze zal nauwelijks ter sprake komen, omdat ik niet zal ingaan op de problemen die het L.O. betreffen.

Iedere fase wordt gekenmerkt door bepaalde gebieden van de wiskunde op welke beoefening ze in het bijzonder haar stempel heeft gezet. Zo beantwoordt aan de naïeve wiskunde de meetkunde,

¹⁾ Voordracht Vakantiecursus 1962, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

²⁾ E. W. Beth, *Monisme en pluralisme in logica en wiskunde*, *Alg. Ned. Tijdschr. voor Wijsbeg. en Psychol.* 48 (1955/56)

aan de kritische wiskunde de klassieke analyse, en aan de abstracte wiskunde de verzamelingenleer met de abstracte algebra. De latere fasen danken klaarblijkelijk niet alleen hun ontstaan, maar in zekere zin ook hun bestaansrecht, aan de voorafgaande, en het is dan ook te begrijpen dat deze naast en in de schaduw van de latere blijven voortbestaan. Overgang van een vroegere naar een latere fase eist een grote intellectuele inspanning die alleen onder uitzonderlijk gunstige omstandigheden een blijvend resultaat oplevert. Een grote beschaving als de Chinese schijnt nooit boven de empirische wiskunde te zijn uitgekomen.

Het is dan ook begrijpelijk dat het M.O. zich overal heel lang tot de naïeve wiskunde heeft beperkt. De hervormingsplannen die de invoering van de kritische wiskunde ten doel hadden zijn pas omstreeks 1900 naar voren gekomen; dit vernieuwingsstreven werd in Duitsland door Felix Klein, in Frankrijk door Emile Borel gedragen.

In Nederland, waar trouwens ook het H.O. zich betrekkelijk lang tot de naïeve wiskunde heeft bepaald, is pas veel later iets gedaan in de hier bedoelde richting, en wel omstreeks 1925 door de zog. Commissie-Beth. Op het werk van deze Commissie ¹⁾ zal ik nog moeten terugkomen. Ik bepaal me nu tot de constatering dat de praktische uitwerking gering was, ook in vergelijking met wat in andere landen reeds eerder was bereikt. De tegenstanders, die de vernieuwing veelal in tegengestelde richting zochten, beriepen zich vooral op psychologische argumenten. ²⁾ Het Leerplan-1937 was slechts een uiterst verwaterde versie van het concept-leerplan der Commissie; het is bovendien tengevolge van allerlei omstandigheden maar zeer ten dele in het onderwijs tot uitvoering gekomen.

De Leerplan-Commissie-1954 van Wimecos kreeg tot taak, een eind te maken aan de toestand van onzekerheid die hiervan het gevolg was. De voorstellen van deze Commissie zijn onmiskenbaar van overwegende invloed geweest op de samenstelling van het Leerplan-1958. Helaas dient te worden geconstateerd dat, zelfs in vergelijking met het Leerplan-1937, het Leerplan-1958 een stap achteruit betekent. De toch reeds meer dan bescheiden positie van de kritische wiskunde werd in sterke mate uitgehoud.

¹⁾ Samengesteld uit H. J. E. Beth, voorzitter, J. van Andel, P. Cramer en E. J. Dijksterhuis, secretaris. Een *Ontwerp van een Leerplan* verscheen in *Bijvoegsel Nieuw Tijdschr. voor Wisk.* 2 (1925/26); in dit tijdschrift, voortgezet als *Euclides*, vindt men nadere gegevens betreffende het werk van de Commissie en de reacties op haar voorstellen.

²⁾ E. W. Beth, De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde, *Euclides* 16 (1939/40).

Hoogachtend,
De Administratie van
Het Nederlandsch Lyceum.

Hoe ver men hier te lande de klok wel terugzette, wordt pas recht duidelijk uit een vergelijking met wat terzelfder tijd elders geschiedde. In *The American Mathematical Monthly* van oktober 1954 vindt men een uitvoerig rapport over „Mathematics for Social Scientists”; het daarin opgenomen programma begint als volgt:

1. Set algebra, relations, functions, one-to-one correspondence, equivalence relations, partitions, order relations.
2. Axiomatic development of number system including the concept of limit of a sequence. Careful definitions, but proofs limited to heuristic discussions.

Het ligt u allen ongetwijfeld nog vers in het geheugen dat dit streven in de V.S. plotseling de wind mee kreeg, toen op 4 oktober 1957 in Rusland met succes de Spoetnik I werd gelanceerd. In West-Europa kregen deze zaken al spoedig de aandacht van de O.E.E.S. Met een zekere vertraging is ook ons land meegegaan, zoals kan blijken uit de instelling van de Commissie modernisering leerplan wiskunde onder voorzitterschap van Collega H. Th. M. Leeman.¹⁾

Voor wie de discussies in de jaren 1954—58 (en daarvóór) nog niet geheel vergeten is zijn de nieuwe plannen volkomen verbijsterend. De vernieuwing waarvan thans sprake is gaat veel verder dan wat indertijd zonder veel succes door de Commissie-Beth werd voorgesteld. Ze moet klaarblijkelijk vooral bestaan in besnoeiing van de naïeve, her-invoering c.q. uitbreiding van de kritische en invoering van de abstracte wiskunde bij het M.O. De overweging van zo ingrijpende maatregelen werpt tal van problemen op, te meer omdat ze samenvalt met de lancering van onze nationale Mammoetnik I die helaas nog allerlei symptomen van tegengestelde vernieuwingstendenties manifesteert, zoals de algemene brugklasse, voor de kritische en abstracte wiskunde natuurlijk een verloren jaar. U verdenkt mij er misschien van dat ik gedurende dit leerjaar een select gezelschap zou willen vergasten op verzamelingenleer à la Papy; dat zij verre van mij, maar ik zou wel iets voelen voor het programma rekenkunde voor Klasse I van de Commissie-Beth.

Intussen, wil men niet verzeild raken in de allergrootste moeilijkheden, dan zal men niet, zoals helaas maar al te vaak geschiedt, zich moeten verliezen in beschouwingen over het voor en tegen van allerlei min of meer moderne onderwerpen, maar men zal het in de eerste plaats eens moeten worden over bepaalde algemene

¹⁾ Zie het desbetreffende bericht in *Euclides* 37 (1961/62), alsmede de artikelen in de N.R.C. van 3 en 25 juli 1962 door Dr. A. F. Monna, secretaris der Commissie.

principiële richtlijnen die bepalend kunnen zijn voor de structuur van een leerplan. In dit verband zou ik met enige aandrang de aandacht willen vestigen op een drietal principes dat impliciet ten grondslag heeft gelegen aan het werk van de Commissie-Beth, te weten:

- (1) Het principe van de deskundigheid van de leraar;
- (2) Het principe van de breedheid van behandeling;
- (3) Het principe van de grondige en zo nodig langdurige voorbereiding vooral van moeilijke onderwerpen.

Ik zou om te beginnen een enkel woord willen zeggen over het eerste principe. De aanvaarding ervan lijkt weliswaar in de Nederlandse verhoudingen vanzelf te spreken, maar de praktijk in andere landen schijnt te leren dat het ook wel anders kan. Als daar nieuwe stof wordt ingevoerd waarmee vele leraren niet vertrouwd zijn, dan worden de docenten die deze stof zullen moeten geven vooraf (zoveel mogelijk op voet van vrijwilligheid) opgeroepen voor het volgen van een soort vakantiecursus. Deze cursus heeft echter niet de bedoeling, hen zover in te wijden in de nieuwe stof dat ze de lessen voortaan zelfstandig zullen kunnen geven. De lessen worden hun als het ware voorgespeld en het bijbehorende materiaal krijgen ze in gestencilde vorm mee naar huis, met inbegrip van sommen en antwoorden. Van dit stelsel naar wiskunde-onderwijs door middel van film of televisie, waarbij de leraar ten hoogste als explicateur en corrector fungeert, is dan nog maar een heel kleine stap.

De onderwijsbevoegdheid steunt dus niet op iemands kennis van het betrokken vak, maar op zijn vermogen, een onderdeel van dat vak te doceren dat hij wellicht niet kent maar waarvoor hem passend materiaal is verschaft. Men kan deze werkwijze niet als onbruikbaar afwijzen, de grote bezwaren liggen m.i. vooral in het pedagogische vlak. Bij zo ingrijpende wijzigingen in het leerplan als thans aan de orde zijn zal men echter bijzondere aandacht moeten schenken ook aan de opleiding en aan de eventuele herscholing van de leraren, wil men ontkomen aan de noodzaak, te eniger tijd van de beschreven werkwijze gebruik te maken.

Ik kom nu tot de bespreking van de principes (2) en (3); daarbij zou ik enkele richtlijnen willen ontleen aan de denkpsychologie van Jean Piaget.¹⁾ Tegen de opvattingen van deze zielkundige wordt bij ons nog al eens het bezwaar aangevoerd, dat hij de intellectuele ontwikkeling te eenzijdig als een biologisch groeiproces

¹⁾ E. W. Beth & J. Piaget, *Épistémologie mathématique et psychologie*, Paris 1961.

zou zien. Ik geloof echter niet dat hier het kernpunt ligt.

Hoofdzaak is dat Piaget de intellectuele ontwikkeling beschouwt als een opéénvolging van labiele overgangsfasen en stabiele evenwichtsfasen. Deze wisseling van fasen behoeft niet uitsluitend biologisch bepaald te zijn, ze kan ook zijn gegrond op de interne structuur van de leerstof, in ons geval dus door de interne structuur van de wiskunde en van haar onderdelen.

Om een concreet voorbeeld te noemen: een kind, dat bezig is te leren tellen, verkeert in een labiele overgangsfase. Op een gegeven moment echter beheerst het kind het telprocédé, dit procédé is dan, zoals Piaget het uitdrukt, „opératoire” geworden; maar men kan desgewenst evengoed spreken van een „doorbraak van inzicht”. In ieder geval is nu een stabiele evenwichtstoestand bereikt die zich hierdoor kenmerkt dat het kind met een zichtbaar genoegen en ook met een onmiskenbare zekerheid de meest uiteenlopende tellingen uitvoert. Maar na verloop van tijd komt hieraan een eind; opnieuw treedt een labiele overgangsfase in die ditmaal bijvoorbeeld tot de beheersing van de optelling zal kunnen leiden.

Het principe van de breedheid van behandeling houdt, denkpsychologisch, in dat de leerling die een zekere evenwichtsfase heeft bereikt gelegenheid moet hebben, daar enige tijd te vertoeven. Ook een schoolklas heeft behoefte aan zo'n rustpauze. Om deze tijd nuttig te besteden dient men het betreffende onderwerp met een zekere breedheid te behandelen. Men kan de inhoud van de voornaamste stellingen in de vorm van corollaria ontwikkelen; hier ligt ook een van de belangrijkste functies van het vraagstuk. Emotionele klachten over overlading kunnen funeste reacties uitlokken in de vorm van radicale besnoeiingen waardoor aan het hier bedoelde principe afbreuk wordt gedaan; het gevolg is dan dat de leerling er niet in slaagt, zich de betreffende leerstof werkelijk eigen te maken. Ik behoef hier niet te zeggen dat juiste „timing” de hoogste kunst is in de didactiek.

Het principe van de grondige voorbereiding vindt, denkpsychologisch, steun in de overweging dat de verwerving van een gecompliceerd inzicht het doorlopen van een lange reeks van ontwikkelingsfasen vereist. Dit houdt dus in het algemeen de noodzaak van een langdurige voorbereiding in waarmee men derhalve vroeg zal moeten beginnen. Gunt men zich de nodige tijd niet, dan zal men het gestelde doel niet kunnen bereiken.

Wat zijn nu de consequenties van dit alles voor de vernieuwingsplannen zoals die thans aan de orde zijn? Natuurlijk valt het niet te ontkennen dat uit een oogpunt van abstracte axiomatic de

kritische en de abstracte wiskunde noch de voorafgaande fasen noch elkaar ook maar in één enkel opzicht vooronderstellen. Evenwel: denkpsychologisch, historisch en ook zakelijk staat het anders; de abstracte wiskunde is niet te begrijpen zonder de kritische, de kritische niet zonder de naïeve, de naïeve niet zonder de empirische. Men zal derhalve de naïeve wiskunde niet onbeperkt kunnen besnoeien en men zal de kritische wiskunde zeker niet ongestraft kunnen „overslaan”. Een en ander stemt mij sceptisch ten aanzien van het welslagen van de geruchtmakende pogingen, de verzamelingenleer in te voeren bij het kleuteronderwijs.¹⁾

Het beste dat men, onder extreem gunstige omstandigheden, zal kunnen bereiken zou ik willen uitdrukken in het volgende tijdschema voor het M.O.: 3 jaar naïeve wiskunde, 2 jaar kritische wiskunde en 1 jaar abstracte wiskunde. Natuurlijk zal men moeten streven naar een zinvolle integratie; wil men in klasse VI werkelijk iets doen aan abstracte wiskunde, dan zal men daarvoor reeds in klasse I de grondslag dienen te leggen. Het ligt *niet* in mijn bedoeling, de invoering te bepleiten van een leerplan, als hier geschetst; ik zal me beperken tot een discussie van voorwaarden en consequenties.

Het wordt nu echter hoog tijd dat ik iets nader omschrijf wat ik (ongetwijfeld met vele anderen) onder *kritische* resp. *abstracte wiskunde* versta. Ook nu trek ik me van de eisen der axiomatic niets aan (men oogst daarmee toch alleen maar ondank) en volsta met een verwijzing naar kenmerkende voorbeelden.

De kritische wiskunde dan worde vertegenwoordigd door wat we de *klassieke strenge analyse* plegen te noemen. Hier vinden we de bekende exacte definitie van het limiet-begrip die strenge bewijzen mogelijk maakt van limiet-stellingen. De klassieke strenge analyse, en daarmee de kritische wiskunde, is tegen het einde van de 18de en in de eerste decennia van de 19de eeuw ontstaan. Ze heeft in de opleiding van ons allen, met uitzondering misschien van de alleroudsten, een overwegende rol gespeeld.

Zou ik de abstracte wiskunde met behulp van één enkel voorbeeld moeten karakteriseren, dan zou ik waarschijnlijk Cantor's *verzamelingsleer* kiezen. Maar geheel bevredigd zou ik toch niet zijn. Wat men aanduidt als abstracte wiskunde heeft zich aanvankelijk gemanifesteerd in wiskundige resultaten en concepties die ogenschijnlijk niets gemeen hadden en waarin men pas later, vooral ook in het licht van de verzamelingenleer, een zekere eenheid heeft kunnen

¹⁾ P. G. J. Vredenduin, Pedagogische studiedagen te Arlon over de begrippen relatie en functie, *Euclides* 36 (1960/61).

zien. Van die manifestaties heb ik er elders ¹⁾ enige genoemd die tot de eerste helft van de 19de eeuw behoren. Ik doe nu, met een iets andere bedoeling, een andere keuze.

1819: J. D. Gergonne, opvatting van een axioma-stelsel als een *impliciete definitie*.

1829—30: N. J. Lobachewskij, niet-Euklidische meetkunde.

1830 (gepubl. 1848): E. Galois, theorie der vergelijkingen.

1847: G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*.

1871: R. Dedekind, invoering van de begrippen *getallenlichaam* en *ideaal*.

1872: R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*; invoering van het begrip *sede*.

1884: G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*; *definities door abstractie*.

1887: R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* het begrip *keten* en de *bewijzen en definities door recurrentie*.

1887—88: G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*.

1899: D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*.

1910—1913: A. N. Whitehead & B. Russell, *Principia Mathematica*.

Men zal een aantal onderwerpen herkennen waarover naar aanleiding van de voorstellen der Commissie-Beth reeds hooglopende discussies zijn gevoerd en waarvan de behandeling in de klasse ook wel grote moeilijkheden zal hebben opgeleverd. Dergelijke onderwerpen zijn echter op zichzelf nog niet bepalend; pas door combinatie van al deze ingrediënten (als illustratie vermeld ik F. Hausdorff's „*Mengenkörper*” waarin men naderhand de algebra's van Boole heeft herkend) is in de jaren na 1910 de abstracte wiskunde ontstaan die zich naar opzet en stijl steeds duidelijker van de kritische wiskunde is gaan onderscheiden. Omstreeks 1935 is men haar gaan erkennen als een zelfstandige en legitieme vorm van wiskundig denken. Vóór 1935 kan ze dan ook in ons universitair onderwijs nauwelijks een rol van betekenis hebben gespeeld; trouwens, ook nu heeft de kritische wiskunde nog altijd een aanzienlijk overwicht.

Een vernieuwing van het wiskunde-onderwijs zoals die thans aan de orde is zal dan ook zware eisen stellen aan leraren en leerlingen en ze zal ook uiterst moeilijke problemen opwerpen in het vlak van de school-organisatie. Het klinkt misschien paradoxaal, maar met de leerlingen zal men de minste moeite hebben; men is het er blijkbaar wel over eens ¹⁾ dat een zeer strenge selectie noodzakelijk zal

¹⁾ E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959, pp. 57—58.

zijn, en daarmee is dit aspect van het probleem tot een kwestie van school-organisatie herleid. De oplossing van de problemen die de school-organisatie betreffen behoort tot de taak van de overheid; de overheid zal die problemen ongetwijfeld tot oplossing brengen indien ze de thans overwogen onderwijsvernieuwing als voldoende urgent beschouwt.

Ik kom nu tot de eisen, aan de leraren gesteld, en zou in dit verband melding willen maken van een persoonlijke ondervinding. Gedurende enkele jaren heb ik met bijzonder veel genoegen aan de bekende Brusselse Perfectionerings-cursus gedoeceerd. Van Nederlandse zijde werd deze cursus telkens door een 20-tal leraren gevolgd; in de uitvoering van een eventueel nieuw leerplan in de geest van de huidige besprekingen zou deze groep m.i. een belangrijk aandeel moeten nemen.

De colleges waren, ongetwijfeld in overeenstemming met de bedoeling, voor een aanzienlijk deel gewijd aan onderwerpen uit de abstracte wiskunde. Wanneer ik nu let op wat door de docenten geboden werd en tevens op de reacties van de cursisten, dan voel ik wel zeer veel twijfel rijzen aan de praktische uitvoerbaarheid van de plannen tot invoering van de abstracte wiskunde bij het M.O. Pogingen in deze richting zullen leiden tot een herhaling, maar dan in veel radicaler vorm, van de ervaringen opgedaan met het Leerplan-1937. De afstand tussen de kritische wiskunde, waarmee de huidige generatie van leraren vertrouwd is, en de abstracte wiskunde, die verreweg de meesten nog onbekend is, blijkt veel groter te zijn dan men zich schijnt voor te stellen.

Er is nog een enkele overweging die voor een ogenblik onze aandacht verdient. De invoering van de kritische wiskunde bij het M.O. (ik denk nu in de eerste plaats aan een behoorlijk gefundeerde inleiding tot de infinitesimaalrekening) was rechtstreeks bevorderlijk voor de studie ook van de exacte natuurwetenschappen en ze was zodoende nuttig niet alleen voor de a.s. mathematici maar eveneens (ik trek de kring zeer nauw) voor de a.s. astronomen en fysici.

Van de abstracte wiskunde kan hetzelfde zeker niet worden gezegd; wil men deze invoeren bij het M.O., dan zal men het onderwijs in deze „soort” wiskunde wel moeten beperken tot a.s. wiskundigen. Voor deze groep zullen dan natuurkunde en sterrenkunde (voorzover van de laatste nog iets overblijft) moeten vervallen. Opnieuw moet ik u lastig vallen met een persoonlijke ondervinding.

¹⁾ H. G. Brinkman, Het wiskundeonderwijs in het V.H.M.O. van morgen, *Euclides* 37 (1961/62).

Enkele jaren geleden bemerkte ik in een gesprek met een ambt- en vakgenoot uit een groot en welvarend land van overzee, een man van zeer brede belangstelling en ontwikkeling, dat hij onbekend was met de feiten die wij samengevat plegen te denken in de drie wetten van Kepler. Een modernisering van het wiskunde-onderwijs die tot dergelijke gevolgen zou leiden lijkt mij al te duur gekocht.

Samenvattend meen ik te mogen constateren dat er tal van vragen beantwoord zullen moeten worden vóór men zal kunnen overgaan tot een enigermate verantwoorde tenuitvoerlegging van radicale vernieuwingsplannen zoals die sedert enkele jaren aan de orde zijn. In het bijzonder voor de invoering van de abstracte wiskunde bij het M.O. is, naar het me voorkomt, de tijd nog niet gekomen. Ik wil nog eens onderstrepen dat ik hier, evenals in het voorgaande, de term „*abstracte wiskunde*” in een pregnante zin gebruik. Bedoelt men (ik heb de indruk dat dit niet zelden het geval is) met „*abstracte wiskunde*” zoiets als: kritische wiskunde in een nieuwerwetse inkleding, dan heb ik tegen invoering daarvan bij het M.O. geen enkel principieel bezwaar.

Maar ook afgezien daarvan ben ik geenszins gekant tegen vernieuwing en ik ben ook niet van mening dat op het ogenblik niets zou kunnen worden gedaan. Integendeel, men zou mijns inziens enkele maatregelen kunnen treffen die op vrij korte termijn een effectieve verbetering zouden teweegbrengen en waardoor tevens een verdergaande vernieuwing zou worden voorbereid, te weten:

1. Partiële vernieuwing, bestaande in her-invoering c.q. uitbreiding van de kritische wiskunde in de geest van de voorstellen van de Commissie-Beth,

2. Bevordering, op universitair niveau, van de studie van wiskundige logica, verzamelingenleer en grondslagenonderzoek en van de daaruit voortgekomen abstracte wiskunde,

3. Bevordering van studie en onderzoek op het gebied van de denkpsychologie, en wel meer in het bijzonder met betrekking tot het wiskundig denken,

4. Bevordering van aanvullend en voortgezet onderwijs in de wiskunde zoals dat bijvoorbeeld gegeven wordt in de bekende cursussen van het Mathematisch Centrum,

5. Verbreiding van het inzicht dat de wiskunde een levende wetenschap is zodat ook de leraar in de wiskunde na voltooiing van zijn vakopleiding zijn vakstudie geregeld en intensief behoort voort te zetten, en schepping van de voorwaarden die bevorderlijk zijn voor zulke voortgezette studie.

BOEKBESPREKING

Karl Wellnitz, *Kombinatorik*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961. 53 blz., 2. Aufl., DM 3.50.

Dit boekje is in de eerste plaats „als Unterlage für Arbeitsgemeinschaften der 13. Klasse gedacht“. Er zijn permutaties, combinaties en variaties in behandeld met of zonder herhalingen, met of zonder vaste elementen, e.d., om kort te gaan: grondig. De leraar zal er echter geen nieuws in vinden, terwijl het voor de leerling te grondig en te taai is.

Ik zou het zeer toejuichen, als voor onze goede leerlingen eens dergelijke monografieën geschreven werden. Maar, helaas moet ik eraan toevoegen, niet op deze manier.

P. G. J. Vredenduin.

Prof. Dr. Paul Lorenzen, *Formale Logik*, 2. Aufl., Sammlung Götschen 1176/1176a, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1962, 165 blz., DM 5.80.

Het boekje draagt alle kenmerken, die we verwachten van een deeltje uit de Sammlung Götschen: het is compact geschreven, er staat veel in, het is degelijk, het is geschreven voor de vakman. Onder vakman versta ik hier niet de vakwiskundige, die zich wil gaan oriënteren op het terrein van de formele logica, want het werkje pretendeert niet een geschikte inleiding te zijn in de formele logica, maar degenen die zich met dit terrein van onderzoek al heeft beziggehouden.

De schrijver begint met een uiteenzetting van de syllogistiek, hetgeen didactisch goed gezien is. Daarna volgt de propositierekening. Eerst worden regels gegeven voor het samenstellen van proposities: als a en b proposities zijn, dan zijn ook $\bar{a}$, $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \supset b$ proposities. Hierin is $a \supset b$ gedefinieerd als $\bar{a} \vee b$. Lorenzen noemt dit de subjunctie en niet, zoals gebruikelijk, de implicatie. De reden hiervoor is, dat hij naast de bovengenoemde operatoren een relatie tussen proposities invoert, die hij $<$ noteert en logische implicatie noemt. Nu is $a < b$ geen propositie, maar een uitspraak over proposities. In het axiomastelsel, dat hij voor de tweewaardige propositierekening kiest, zijn $\neg$, $\wedge$ en $<$ grondsymbolen. Dit systeem maakt een zeer natuurlijke indruk.

Daarna wordt de opbouw moeilijker. De schrijver gaat zich ten doel stellen door middel van redeneringen in een metasysteem en zelfs in een metametasysteem van een propositierekening, te vinden welke regels aangaande $\wedge$, $\vee$ en $<$ in een propositierekening in elk geval thuishoren. Voorlopig laat hij daarbij de negatie buiten beschouwing. Hij komt zo tot een rechtvaardiging van een soort intuïtionistische logica. Doordat hierbij veel verschillende implicaties een rol spelen, moet men zich ter dege inspannen om de bedoeling van de schrijver te volgen. Op verrassende wijze wordt daarna de negatie ingevoerd en het verschil tussen klassieke en intuïtionistische negatie duidelijk gemaakt.

Hierna volgt de invoering van de kwantoren „alle” en „er is”. Schrijver gaat uit van de intuïtieve betekenis van deze kwantoren om dan te besluiten tot de geldigheid van enige metaregels. Deze metaregels gelden voor een systeem, dat er nog niet is, nl. een systeem, waarin de kwantoren axiomatisch ingevoerd worden. Uitgaande van de gevonden metaregels worden nu de axioma's van dit systeem opgesteld. Het gehele betoog geschiedt in natuurlijke taal. Het komt me voor, dat deze vrij gecompliceerde werkwijze alleen heuristische waarde heeft. Duidelijk wordt weer ingegaan op het verschil tussen de intuïtionistische en de klassieke kwantorenlogica.

Ten slotte wordt nog de logische betekenis van de gelijkheid onderzocht.

P. G. J. Vredenduin.

Dr. L. Lips, *Wiskunde voor Economen*, 237 blz., f 15,75, 1962, P. Noordhoff N.V. Groningen.

De eerste vijf hoofdstukken (107 blz.) van dit boekje behandelen de elementaire beginselen van de schoolalgebra. Het is n.l. bedoeld om studenten met een A-diploma de weg te effenen naar de hogere wiskunde.

Na deze inleiding komen dan de eigenlijke onderwerpen aan de orde: differentiëren, integreren en de meest voorkomende differentiaalvergelijkingen, systematisch opgebouwd, geleidelijk opklimmend in moeilijkheid, waarbij een groot aantal oefeningen zijn uitgewerkt en veel vraagstukken zijn opgenomen, die de studerende vertrouwd kan maken met de voor hem vreemde technieken.

De legende, dat voor een extreem o.a. $f'(x) = 0$ moet zijn ontbreekt ook hier niet. Zo kan men meer vraagtekens plaatsen. Maar, „wiskundige strengheid mag men in dit boek niet verwachten”, zegt de schrijver in het voorwoord.

Met deze reserve, lijkt het me echter een geschikt boek voor niet-wiskundig georiënteerde studenten.

Burgers.

Harvey Cohn, *A second course in number theory*, (John Wiley and Sons, New York-London 1962), XIII+276 blz.

Het woord „second” in de titel houdt in, dat dit werk aansluit bij, doch verder gaat dan de onderbouw gelegd in de gangbare leergangen over elementaire getallenleer (zeg te onzent in Wijdenes' Beginselen van de getallenleer) die culminereren in de kwadratische reciprociteitswet en haar toepassingen. Dit boek gaat over de algebraïsche getallenleer en houdt zich voornamelijk bezig met de *ideaaltheorie in kwadratische getallenlichamen*. Zowel bij de opbouw als bij de toepassingen komen belangrijke onderwerpen ter sprake (theorie der karakters voor Abelse groepen, stelling van Dirichlet over het klassenaantal, stellingen van Dirichlet en Weber over priemgetallen in een rekenkundige reeks etc.) Hoewel de hoofdschotel dus klassiek is, doet de auteur veel moeite om het verband aan te wijzen, niet alleen met de historische ontwikkeling (kwadratische vormen) maar ook met de moderne problematiek en methodiek (theorie der klassenlichamen bv.) al gaat dat meer in vogelvlucht. Daar het eigenlijke onderwerp duidelijk en uitvoerig is behandeld, met meer dan 200 vraagstukken tussen de tekst, is het boek mede door de uitvoerige literatuurlijst heel geschikt voor zelfstudie, die de lezer kan brengen tot dieper en verder gaande werken. Enige minder bekende tabellen zijn achterin opgenomen: I kleinste priemdelers van de getallen 1—18000 (niet deelbaar door 2, 3 of 5); II de hogeremachtsresten voor de priemgetallen < 100 ; III gegevens over de structuur van de getallenlichamen $K(\sqrt{\pm m})$ met $m < 100$. Het boek is fraai uitgegeven.

J. F. Koksma

Lothar Koschmieder, *Variationsrechnung*, I Das freie und gebundene Extrem einfacher Grundintegrale. (2e Auflage) (Sammlung Götschen, Band 1074); Walter de Gruyter & Co, Berlin 1962. (128 blz.)

In kort bestek, maar met voldoende uitvoerigheid en toegelicht aan diverse voorbeelden, worden hier de gangbare onderwerpen (met de in de ondertitel aangegeven begrenzing, waarbij zowel vaste als beweeglijke eindpunten ter sprake komen) behandeld: differentiaalvgl. van Euler, voorwaarden van Jacobi en Weierstrass, transversalenstelling van Kneser, methode van Hamilton-Jacobi, onafhankelijkheidstelling van Hilbert, isoperimetrische problemen etc.

Een tweede deeltje met toepassingen op algemenere vragen naar het extremum en met een behandeling der modernere directe methoden wordt in het uitzicht gesteld.

J. F. Koksma

LIWENAGEL

Notulen van de ledenvergadering op donderdag 30 augustus 1962 om 14,30 uur in het Centrum „Hydepark” te Driebergen.

De voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin, sprak een woord van welkom, in het bijzonder tot Dr. Ir. B. Groeneveld (Wimecos), Drs. H. C. Vernout (Wiskundewerkgroep van de W.V.O.), Dr. L. N. H. Bunt, de bestuursleden van het Genootschap, de heren J. W. Koning en Drs. S. Roodenburg, en de sprekers.

De notulen van de vorige vergadering werden goedgekeurd en Dr. C. P. Koene werd bij enkele kandidaatstelling als bestuurslid verkozen in de vacature-Krans.

De woorden, die de voorzitter daarna wijdde aan de nagedachtenis van Dr. D. J. E. Schrek, werden staande aangehoord.

Alvorens over te gaan tot het wetenschappelijke gedeelte van de vergadering, wilde de voorzitter eerst nog de rondvraag aan de orde stellen, maar niemand gaf zich hiervoor op, zodat toen de eerste spreker, Dr. W. J. Claas, direct het woord kreeg. Zijn voordracht „Welke onderwerpen uit de sterrenkunde zijn voor het gymnasium van belang?” zal in „Euclides” gepubliceerd worden. Bij de discussie bleek wel, dat men algemeen de nadruk van de hemelmechanica naar de astrofysica verlegd wil zien; over de vraag of sterrenkundige onderwerpen in de fysica geïncorporeerd moeten worden, is men het niet eens; in verband met het ontbreken van de door spreker behandelde stof in de meeste leerboeken, werd gewezen op het bestaan van goede pockets over deze onderwerpen; tenslotte werd nog het vermoeden uitgesproken, dat er vrij veel scholen zijn zonder een sterrenkundige.

Nadat de voorzitter Dr. Claas had bedankt voor zijn boeiend betoog en voor de daaraan bestede tijd en moeite, werd een kwartier gepauzeerd.

Na de pauze was het woord aan Dr. J. Rekveld, die onder de titel „Relativiteitstheorie bij het V.H.M.O.” een pleidooi hield voor de invoering van de relativiteitstheorie (in het volgende afgekort tot r.t.) in het programma van ons natuurkundeonderwijs. Achtereenvolgens werden de volgende punten besproken:

- a) hoe ontstond de r.t. en wat is haar wezenlijke inhoud;
- b) waarom is het gewenst om de r.t. bij het V.H.M.O. te onderwijzen;
- c) op welke wijze kan men de r.t. in behandeling nemen;
- d) hoe is de internationale opinie met betrekking tot het onderwijs in de r.t.

Deze voordracht, die inmiddels is gepubliceerd in „Faraday”¹⁾, werd met grote aandacht gevolgd. Spreker beantwoordde hierna nog enkele vragen, o.a. welke stof uit het huidige programma zou kunnen verdwijnen (antwoord: zie Amerika) en de vraag of het wiskunde-programma voor de beoogde behandeling van de r.t. toereikend is (antwoord: ja).

Na ook Dr. Rekveld namens de aanwezigen hartelijk dank gebracht te hebben voor het gebodene en voor zijn bereidwilligheid deze voordracht voor Liwenagel te houden, sloot de voorzitter de vergadering.

De secretaris,
D. Leujes.

¹⁾ *Faraday* 32 (1962-1963), blz. 14.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien ze binnen drie dagen na verschijning van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, de Houtmanstraat 37, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*” in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op dinsdag 19 maart:

Dr. P. C. Sikkema: *Over de „approximatiestelling van Weierstrass”*.

Aanvang 20,00 uur.

In de serie „*Actualiteiten*” in Hotel Krasnapolsky, Warmoesstraat 173—179, Amsterdam op zaterdag 30 maart:

Dr. W. Kuyk: „*Delers van het kransprodukt*”. Aanvang 14,00 uur.

WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden, die hun contributie (f 8,00 van 1 sept. 1962 t/m 31 aug. 1963) nog *niet* betaald hebben, dit zo spoedig mogelijk te doen door storting op postrekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam.

Aan die *nieuwe* leden, die Euclides no. V als eerste nummer ontvingen en reeds f 8,00 betaalden (de uitgever heeft de nummers I t/m IV niet meer voorradig) wordt f 2,50 (halve prijs van het tijdschrift) terugbetaald. De *nieuwe* leden, die nog niet betaald hebben, kunnen alleen voor *dit* verenigingsjaar f 5,50 overmaken.

MEDEDELING van de REDACTIE

De nummers VII (april) en VIII (mei) van Euclides zullen samengevoegd worden. De lezers kunnen het dubbelnummer omstreeks 15 april verwachten.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

83. Een vierkant is verdeeld in 64 onderling even grote vierkanten (schaakbord). Men moet gaande langs de omtrek van de kleine vierkanten, van een hoekpunt van het grote vierkant naar het overstaande hoekpunt gaan, daarbij geen langere weg volgend, dan nodig is. Op hoeveel verschillende manieren kan dit? (Dr. J. D. A. Boks).

84. Vind alle driehoeken, waarvan de zijden gehele getallen zijn en waarvan de oppervlakte gelijk is aan de omtrek.

85. Op 10 januari j.l. ontving ik van de heer B. Kootstra bij wijze van nieuwjaarswens de volgende opgave. Twee getallen verschillen 1963. We schrijven het

grootste in het zeventallig stelsel en het kleinste in het zestallig stelsel. Nu doen we, alsof deze beide getallen tientallig geschreven zijn en trekken ze af. We krijgen dan weer 1963 als uitkomst. Welke waren de beide getallen?

En als persoonlijke vraag erbij: als u van plan is mij een gelukkig 1964 te wensen, doet u het dan ook op deze manier. U kunt er zich maandenlang op voorbereiden.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

Ad nr. 78. Verschillende collega's hebben mij erop attent gemaakt, dat de gegeven oplossing niet juist is. Er is een gegeven te veel. Het is namelijk voldoende te geven, dat P_2 op EF ligt zonder daarbij iets over de lengte van FP_2 te onderstellen. Daaruit volgt, dat men, als men wel iets over de lengte van PF_2 geeft, in het algemeen strijdige gegevens krijgt.

De oplossing wordt nu als volgt. Noem het snijpunt van P_1P_3 en AE punt S . Dit punt is te construeren. Construeer nu de cirkel met middellijn SP_3 en de boog vanuit welks punten P_2P_3 gezien wordt onder een hoek van 120° . Deze snijden elkaar in E . (Deze oplossing is afkomstig van J. H. Meyer te Eindhoven.)

81. Onderstaande fraaie oplossing kreeg ik van onze oud-landgenoot Prof. Dr. A. Nijenhuis, hoogleraar te Seattle (en vroeger leerling van het Stedelijk Gymnasium te Arnhem, vandaar mijn connectie met hem).

Denoting by $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ the unit vectors along $\mathbf{PA}$, $\mathbf{PB}$, $\mathbf{PC}$ for any P ($P \neq A, B, C$ respectively) and by $\mathbf{u}$ any vector at P , the directional derivative $d_{\mathbf{u}}K$ of the cost function K is easily seen to be

$$d_{\mathbf{u}}K = -r(\mathbf{a}, \mathbf{u}) - s(\mathbf{b}, \mathbf{u}) - t(\mathbf{c}, \mathbf{u}) = -(\mathbf{u}, r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c});$$

thus minima of K (which obviously exist) occur only at points P' where $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = 0$ (unless $P' = A, B$ or C); such P' lie inside $\triangle ABC$. Denoting $\varphi = \angle BP'C$ the parallelogram for vector addition shows $r^2 = s^2 + t^2 + 2st \cos \varphi$; since $\alpha < \varphi$ ($\alpha = \angle BAC$) we find $r^2 < s^2 + t^2 + 2st \cos \alpha$ (and two similar inequalities) as necessary conditions for a minimum other than A, B or C ; the uniqueness of φ from the equation (and elementary geometry) prove there is at most one such minimum. K has a minimum at A only if $d_{\mathbf{u}}K \geq 0$ for all $\mathbf{u}$ at A . Since $d_{\mathbf{u}}K = r|\mathbf{u}| - (\mathbf{u}, s\mathbf{b} + t\mathbf{c})$ we find for $\mathbf{u} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ (direction of slowest ascent) the necessary condition $r \geq |s\mathbf{b} + t\mathbf{c}|$; or $r^2 \geq s^2 + t^2 + 2st \cos \alpha$. This condition excludes the previous one (for P' inside $\triangle ABC$); we now show that under this hypothesis the same situation cannot also occur at B . Let Q be any point of $\overline{AB}$, let $\mathbf{u}$ be the unit vector at Q in the direction of $\mathbf{AB}$, and $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$. Put $\varphi = \angle(QC, \mathbf{AB})$, then $\alpha < \varphi < \pi - \beta$ for $Q \neq A, B$; hence

$$d_{\mathbf{u}}K(Q) = r - s - t \cos \varphi > r - s - t \cos \alpha = d_{\mathbf{u}}K(A)^1)$$

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{v}}K(Q) &= s - r + t \cos \varphi > s - r + t \cos (\pi - \beta) = \\ &= s - r + t \cos \beta = d_{\mathbf{v}}K(B); \end{aligned}$$

hence $d_{\mathbf{v}}K(B) < -d_{\mathbf{u}}K(A) \leq 0$. Uniqueness of a minimum, with method of determination has thus been found.

¹⁾ $d_{\mathbf{u}}K(Q) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (K(P + t\mathbf{u}) - K(P))$; als men gewoon $t \rightarrow 0$ neemt is $d_{\mathbf{u}}K$ niet gedefinieerd in A, B en C . (N)

STICHTING HET RIJNLANDS LYCEUM WASSENAAR — OEGSTGEEST

Aan het Rijnlands Lyceum te Wassenaar zijn met ingang van 1 september 1963 de volgende vacatures te vervullen:

WISKUNDE, 5-8 uur;

NATUURKUNDE, 15-18 uur

Vaste benoeming in een volledige betrekking wis- en natuurkunde is mogelijk.

Zij die hiervoor in aanmerking wensen te komen, worden uitgenodigd een sollicitatie (geen stukken) in te zenden aan de Rector, Dr. H. L. Oussoren, Backershagenlaan 5, Wassenaar.



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Bij de **Onderafdeling der Wiskunde** van de Technische Hogeschool te Eindhoven bestaat plaatsingsmogelijkheid als

- **medewerker bij de "Analyse"**
onder leiding van prof. dr. N. G. de Bruijn en prof. dr. J. H. van Lint
- **medewerker bij de "Mechanica"**
onder leiding van prof. dr. J. B. Alblas
- **medewerker bij de "Numerieke Wiskunde"**
onder leiding van prof. dr. E. W. Dijkstra en prof. dr. G. W. Veltkamp
- **medewerker bij de "Operations Research"**
onder leiding van prof. dr. J. F. Benders

Academische graad vereist.

Schriftelijke sollicitaties onder vermelding van nr. V793 te richten aan het hoofd van de centrale personeelsdienst van de technische hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven.

Inlichtingen zijn te verkrijgen bij prof. dr. J. J. Seydel, voorzitter der onderafdeling wiskunde, telefoon 04900-68000, toestel 2220 of 04900-11908.

Drs. J. C. Kok e.a.

pn

Differentiaal- en Integraal- rekening voor het V.H.M.O.

ing. f 4,40 gek. f 4,90

Bij het samenstellen van dit boek is de leidende gedachte geweest, de grootste moeilijkheden uiteen te rafelen. Aan de vraagstukken is veel zorg besteed. Ze klimmen geleidelijk op in moeilijkheid, terwijl door splitsing in een a- en een b-serie, die gelijkwaardige vraagstukken bevatten, de mogelijkheid tot repetitie is vergroot.

Na een duidelijke en voldoende strenge inleiding over de limieten wordt het differentiaal-quotiënt zuiver analytisch ingevoerd. Het hoofdstuk van de differentiaalrekening is vlot te lezen; dit geldt trouwens voor het gehele boek. Een uitgebreide verzameling vraagstukken stelt de leerling in staat zich de nieuwe begrippen beter eigen te maken. De kettingregel is fraai afgeleid, ook in didactisch en typografisch opzicht. De extreme waarden komen uitstekend uit de verf Het resultaat van de samenwerking van deze vijf schrijvers is voortreffelijk. Ze hebben het onderwijs een goede dienst bewezen.

(Christelijk Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs)

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

pn

NATUURKUNDE VOOR HET V.H.M.O.

Drs. L. H. Kammerer en Dr. J. H. Raat

REPETITIEBOEK NATUURKUNDE VOOR HET V.H.M.O.

2e druk, ing. f 6,50; geb. f 7,75

Supplement bij de 1ste druk ing. f 1,25

Dr. J. H. Raat

NATUURKUNDE PRACTICUM

deel 1 - Algemeen gedeelte, vloeistoffen,
gassen, bewegingsleer, warmte ing. f 1,90

deel 2 - Licht, geluid, magnetisme, elektriciteit ing. f 1,90

deel 3 - Mechanica, trillingsleer, speciale
onderwerpen, electronica ing. f 1,90

Verantwoording en toelichting voor docenten ing. f 1,25

Dr. J. H. Raat

WERKSCHRIFT GEOMETRISCHE OPTICA

2e druk, f 1,90

P. Noordhoff n.v. - Groningen