

EUCLIDES

*MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN*

*ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL*

*MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND*

38e JAARGANG 1962/1963

I - 1 SEPTEMBER 1962

INHOUD

G. E. Kiers: Lijnenconstructies in en met behulp van een gegeven cirkel	1
P. C. Baayen: Het tensorprodukt	9
Dr. P. G. J. Vredenduin: De contrapositie en het bewijs uit het ongerijmde	20
Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften	23
Dr. P. G. J. Vredenduin: De Amerikaanse test	25
Bureau voor Internationale Technische Hulp	26
Boekbespreking	27
Recreatie.	31

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan. 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143017, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgeven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

LIJNENCONSTRUCTIES IN EN MET BEHULP VAN EEN GEGEVEN CIRKEL

door

G. E. KIERS

VOORBURG

In „Recreatie” no. 53 van de vorige jaargang werd de vraag gesteld om uitsluitend met behulp van een liniaal de loodlijn uit een punt P binnen de cirkel te construeren op een gegeven middellijn AB . Zolang het punt P niet op de cirkel en niet op AB ligt, is het vraagstuk eenvoudig op te lossen. Het vraagstuk kan uitgebreid worden door P ook te nemen op de cirkel of op de middellijn (zie Recreatie no. 59).

Behalve loodlijnen kan men ook de vraag stellen om rechten evenwijdig aan een gegeven rechte te construeren, lijnstukken te halveren of te verdubbelen, de bissectrice van hoeken te bepalen en rechten over gegeven hoeken te wentelen. In het onderstaande is getracht eenvoudige constructies daarvoor op te stellen. Wanneer bij constructies verwezen is naar voorgaande constructies, zijn de te gebruiken hulprechten niet altijd geconstrueerd om een opeenhoping van rechten in de figuur te voorkomen.

I. Door een punt P een rechte n te construeren loodrecht op een gegeven middellijn AB . Hierbij nemen we resp.:

- P ligt niet op de cirkel en niet op de middellijn.
- P ligt op de cirkel, doch niet in A of B .
- P valt met M samen.

Het geval, dat P op AB ligt doch niet met M samenvalt, wordt behandeld in V.

a.

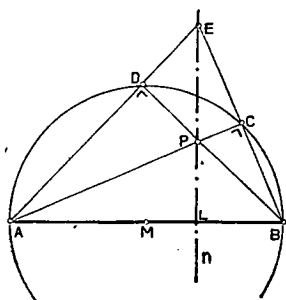


Fig. 1.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met middellijn AB en een punt P binnen of buiten de cirkel, doch niet op AB (fig. 1.).

Te constr.: De rechte n door P en $\perp AB$.

Constructie: Trek door P de beide koorden AC en BD . Het snijpunt E van AD en BC met P verbonden geeft de gevraagde rechte n .

b.

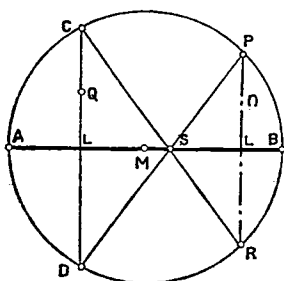


Fig. 2.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met middellijn AB en een punt P op de cirkel, doch niet in A of B . (fig. 2.)

Te constr.: De rechte n door P en $\perp AB$ ¹⁾.

Constructie: Trek door een willekeurig punt Q de rechte $CD \perp AB$ (zie Ia). Trek de rechte door C en het snijpunt S van DP en AB , die de cirkel in R snijdt, dan is PR de gevraagde rechte n .

c.

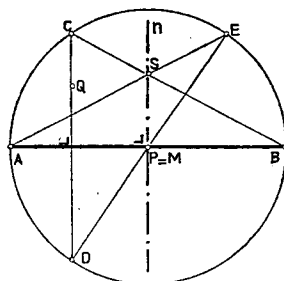


Fig. 3.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met middellijn AB , terwijl het punt P met M samenvalt. (fig. 3.)

Te constr.: De rechte n door P en $\perp AB$.

Constructie: Trek door een willekeurig punt Q de rechte $CD \perp AB$ (zie Ia) en daarna de middellijn DE . De rechte door M en het snijpunt S van AE en BC is de gevraagde rechte n .

II. Door een punt P een rechte n te construeren, die evenwijdig is met een gegeven middellijn AB . Hierbij nemen we resp.:

a. P ligt op de cirkel.

b. P ligt op de cirkel, waarbij $PM \perp AB$.

c. P ligt niet op de cirkel.

a.

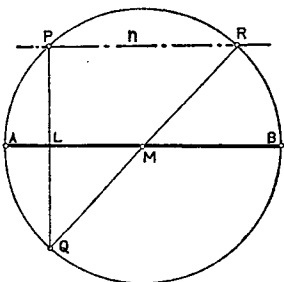


Fig. 4.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met middellijn AB en het punt P op de cirkel. (fig. 4.)

Te constr.: De rechte n door P en $\parallel AB$.

Constructie: Trek de rechte $PQ \perp AB$ (zie Ib) en daarna de middellijn QR . De rechte PR is dan de gevraagde rechte n .

¹⁾ Dit is recreatie-opgave 59a, waarbij M gegeven was. Dr. Vredenduin ontving van de collega's L. Crijns (Maastricht), J. Gootjes (Breda) en C. van Schagen (Almelo) oplossingen, waarbij van M geen gebruik gemaakt werd. Ook de hier door de heer Kiers gegeven constructie is zo'n oplossing (red.)

b. Dit geval komt neer op het construeren van een raaklijn in een punt P van een cirkel. Hiertoe wordt verwezen naar Vb.

c.

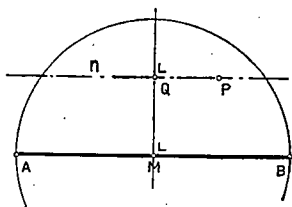


Fig. 5.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met middellijn AB en het punt P binnen of buiten de cirkel. (fig. 5.)

Te constr.: De rechte n door P en $\parallel AB$.

Constructie: Construeer de rechte $MQ \perp AB$ (zie Ic) en daarna de loodlijn uit P op MQ (zie Ia). Deze loodlijn PQ is de gevraagde rechte n .

III. In een cirkel een middellijn n construeren, die evenwijdig is met een gegeven rechte AB . Hierbij nemen we resp.:

- De rechte snijdt de cirkel in de punten A en B .
- De rechte snijdt de cirkel in de punten A en B , waarbij $\angle AMB = 90^\circ$.
- De rechte snijdt de cirkel niet.

a.

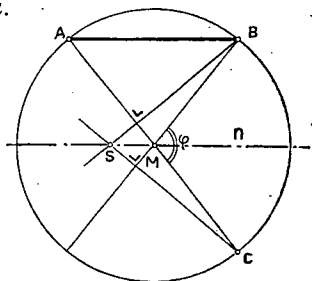


Fig. 6.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met de transversaal AB . (fig. 6.)

Te constr.: De middellijn $n \parallel AB$.

Constructie: Trek de middellijnen door A en B . Construeer door B de rechte $\perp AM$ en door C de rechte $\perp BM$ (zie Ib). Als deze loodlijnen elkaar in S snijden is SM de gevraagde middellijn n .

b.

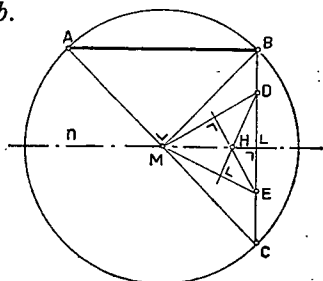


Fig. 7.

Gegeven: $\odot(M; r)$ met de transversaal AB , waarbij $\angle AMB = 90^\circ$. (fig. 7.)

Te constr.: De middellijn $n \parallel AB$.

Constructie: Doordat $\angle AMB = 90^\circ$ vallen in de voorgaande constructie de punten S en M samen. Verleng AM tot deze de cirkel in C snijdt en neem op BC twee willekeurige punten D en E . De loodlijnen uit D

en E resp. op de middellijnen ME en MD (zie Ia) bepalen het hoogtepunt H van $\triangle DEM$. Bijgevolg is $MH \parallel AB$ de gevraagde middellijn n .

c.

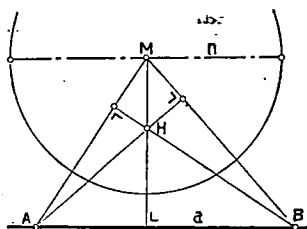


Fig. 8.

Gegeven: $\odot(M; r)$ en een rechte a buiten de cirkel. (fig. 8.)

Te constr.: De middellijn $n \parallel$ de gegeven rechte a .

Constructie: Neem op a twee punten A en B aan zo, dat $\angle AMB \neq 90^\circ$. Construeer de loodlijnen uit A en B resp. op BM en AM (zie Ia); dan is $MH \perp AB$ en de rechte n in M loodrecht de middellijn MH (zie Ic) de gevraagde middellijn n .

IV. Door een gegeven punt P een rechte n te construeren, die een gegeven rechte a loodrecht snijdt. Hierbij nemen we resp.:

- P valt in M en a snijdt de cirkel.
- P valt in M , a snijdt de cirkel in A en B en $\angle AMB = 90^\circ$.
- P valt in M en a snijdt de cirkel niet.
- P valt niet met M samen.

a.

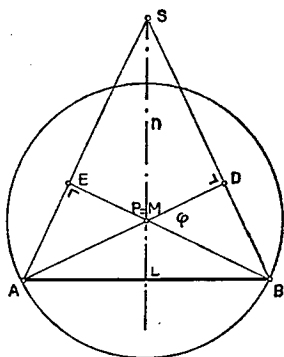


Fig. 9.

Gegeven: $\odot(M; r)$, een koorde $AB = a$ en een punt P , dat met M samenvalt. (fig. 9.)

Te constr.: De loodlijn n door P en $\perp AB$.

Constructie: Construeer de loodlijnen uit A en B resp. op de middellijnen BM en AM (zie Ib), die elkaar in S snijden. De rechte SP is dan de gevraagde loodlijn n .

b.

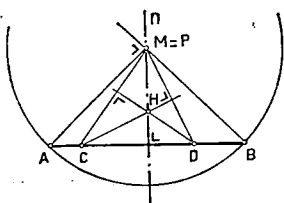


Fig. 10.

Gegeven: $\odot(M; r)$, een koorde $AB = a$; waarbij $\angle AMB = 90^\circ$ en een punt P , dat met M samenvalt. (fig. 10.)

Te constr.: De loodlijn n door P en $\perp AB$.

Constructie: Neem op AB twee willekeurige punten C en D en construeer de loodlijnen uit C en D resp. op de middellijnen DM en CM (zie Ia), die elkaar in H snijden. De rechte PH is dan de gevraagde loodlijn n .

c.

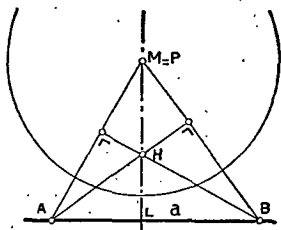


Fig. 11.

Gegeven: $\odot(M; r)$, een rechte a , buiten de cirkel gelegen en een punt P , dat met M samenvalt. (fig. 11.)

Te constr.: De loodlijn n door P en $\perp a$.

Constructie: Neem op a twee punten A en B aan zo, dat $\angle AMB \neq 90^\circ$. Construeer de loodlijnen uit A en B resp. op BM en AM (zie Ia), dan is MH de gevraagde loodlijn n .

d. *Gegeven:* $\odot(M; r)$, een rechte a en een punt P , dat niet met M samenvalt.

Te constr.: De loodlijn n door P en $\perp a$.

Construeer: Laat uit M de loodlijn m op a neer (zie IVa, b, c). Ligt P op deze loodlijn, dan is deze de gevraagde n en ligt P er niet op, dan construeren we door P de rechte $\parallel m$ (zie IIa, c).

V. Door een punt P een rechte n te construeren loodrecht op een gegeven middellijn AB . Hierbij nemen we resp.:

a. P ligt op AB , valt niet samen met A , M of B .

b. P valt samen met A of B . De raaklijnconstructie.

a.

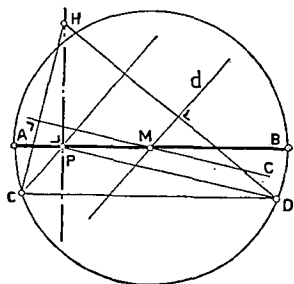


Fig. 12.

Gegeven: $\odot(M; r)$, een middellijn AB en een punt P op AB , dat niet samenvalt met A , M of B . (fig. 12.)

Te constr.: De rechte n door P en $\perp AB$.

Constructie: Construeer door een willekeurig punt C van de cirkel de rechte $CD \parallel AB$, (zie IIa). (Neem het punt C zo, dat $\angle CPD \neq 90^\circ$). Construeer vervolgens de middellijnen $c \parallel DP$ en $d \parallel CP$ (zie III). Laat

uit C en D loodlijnen neer resp. op de middellijnen c en d . Het snijpunt H van deze loodlijnen is het hoogtepunt van $\triangle CPD$ en HP de gevraagde loodlijn n .

b.

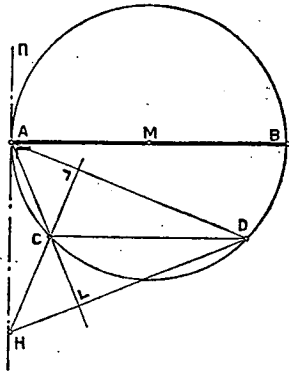


Fig. 13.

Gegeven: $\odot(M; r)$ en de middellijn AB . (fig. 13.)

Te constr.: De raaklijn n in A .

Constructie: Construeer door een willekeurig punt C van de cirkel de rechte $CD \parallel AB$ (zie IIa). Construeer vervolgens de loodlijnen uit C en D resp. op AD en AC (zie IVd). Het snijpunt H van deze loodlijnen is het hoogtepunt in $\triangle ACD$, AH staat dus loodrecht op AB en is de raaklijn n in A aan de cirkel.

Opmerking: Bovenstaande constructie is nu tevens de constructie

van IIb. Construeer de raaklijn in P van de cirkel. Deze is dan tevens evenwijdig met AB .

VI. Door een punt P een rechte n te construeren, die evenwijdig is met een gegeven rechte a .

Gegeven: $\odot(M; r)$, een punt P en een rechte a .

Te constr.: Door P een rechte $n \parallel a$.

Constructie: Door M construeren we de loodlijn op a (zie IVa, b en c) en vervolgens door P de rechte loodrecht op deze loodlijn (zie I en V). Deze is de gevraagde rechte n .

VII. Het midden van een gegeven lijnstuk te construeren.

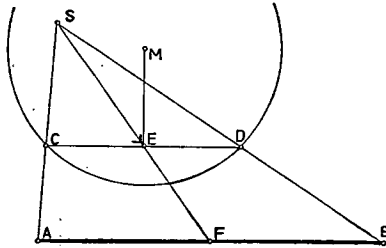


Fig. 14.

Gegeven: $\odot(M; r)$ en het lijnstuk AB .

Te constr.: Het midden van AB . (fig. 14.)

Constructie: Construeer door een willekeurig punt C van de cirkel de koorde $CD \parallel AB$ (zie VI) en bepaal daarna het snijpunt S van AC en BD . Construeer $ME \perp CD$ (zie IV) en bepaal het snijpunt F van SE met AB . Nu is $AF = FB$.

HET TENSORPRODUKT ¹⁾

door

P. C. BAAYEN

AMSTERDAM

1. Inleiding

Laat E en F twee moduli zijn (vgl. § 2 voor de definitie van het begrip modulus). Er is een welbekende methode om uit deze twee moduli een nieuwe modulus te vormen: de *directe som* $E \oplus F$. Deze bestaat uit alle paren (a, b) , met $a \in E$, $b \in F$; de operaties in $E \oplus F$ geschieden coördinaatsgewijs, e.g.

$$(1.1) \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Zo beschouwt men eigenlijk de verzameling van alle vectoren (punten) in het platte vlak, als men ieder punt in het vlak aangeeft met twee coördinaten, als directe som van de vectoren in de x -as en die in de y -as.

In 1938 heeft H. Whitney, in een artikel „Tensor products of abelian groups” het probleem gesteld of het ook mogelijk zou zijn aan E en F een soort *produkt* $E \otimes F$ toe te voegen. Hij stelde daarbij de eisen dat ieder element van $E \otimes F$ een eindige som moet zijn van elementen van de vorm $a \otimes b$ ($a \in E$, $b \in F$), en dat het „produkt” distributief moet zijn, in de zin dat

$$(1.2) \quad (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b;$$

$$(1.3) \quad a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2.$$

Dit probleem is door Whitney in bovengenoemd artikel volledig opgelost, en het door hem gedefinieerde produkt $E \otimes F$ is het *tensorprodukt* van E en F .

In deze voordracht interesseert ons voornamelijk de algebraïsche constructie die tot het tensorprodukt $E \otimes F$ voert. Deze constructie is een duidelijk voorbeeld van abstracte algebraïsche methoden. Vervolgens zal het begrip tensorprodukt toegelicht en verhelderd worden door enige stellingen en een aantal voorbeelden.

We zullen ons echter niet bezighouden met de eigenlijke toepassingen van het tensorprodukt en zijn plaats in de algebra. Daar-

¹⁾ Voordracht Vakantiecursus 1961, Mathematisch centrum.

voor ontbreekt op deze cursus de tijd. Deze toepassingen liggen op verschillend terrein. Zo kan men bijv. met behulp van het tensorprodukt een algebraïsche invoering van het begrip tensor geven, dat in de moderne differentiaalmeetkunde een belangrijke rol speelt. In de algebraïsche topologie treedt het tensorprodukt herhaaldelijk op, en in de homologische algebra, die zich uit de algebraïsche topologie ontwikkeld heeft, speelt het zelfs een zéér belangrijke rol. Maar ook in sommige puur-algebraïsche theorieën wordt het tensorprodukt wel gebruikt, zoals in de theorie van de ringen.

Het is wellicht nuttig er op te wijzen dat sommige auteurs in plaats van de term „tensorprodukt” een andere naam gebruiken voor hetzelfde begrip. Zo spreekt N. Jacobson over „Kronecker produkt”¹⁾, terwijl P. R. Halmos wel de uitdrukking „direct produkt” gebruikt heeft (maar niet meer in zijn latere publikaties).

Literatuur:

H. Whitney, Tensor products of abelian groups. Duke Math. Journal 4, 1938, p. 495-528.

D.G. Northcott, An introduction to homological algebra. Cambridge, 1960.

N. Bourbaki, Algèbre Multilinéaire. A.S.I. 1044, Parijs, 1958.

2. Grondbegrippen.

In de eerste plaats hebben we nodig het begrip *ring*. Een ring A is een verzameling van dingen die met elkaar verbonden zijn door een optelling en vermenigvuldiging. Deze operaties voldoen daarbij aan dezelfde regels als de optelling en vermenigvuldiging bij de gehele getallen:

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \mu + \lambda; \quad \lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda; \\ (\lambda + \mu) + \nu &= \lambda + (\mu + \nu); \quad (\lambda \cdot \mu) \cdot \nu = \lambda \cdot (\mu \cdot \nu) \\ \lambda \cdot (\mu + \nu) &= \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \nu.\end{aligned}$$

Er zijn speciale elementen in A die de rol van 0 en 1 vervullen, en die we daarom ook met 0 en 1 aanduiden:

$$\lambda + 0 = \lambda; \quad \lambda \cdot 0 = 0; \quad \lambda \cdot 1 = \lambda; \quad \text{etc.}$$

Evenals bij de gehele getallen heeft iedere λ een ondubbelzinnig bepaald tegengesteld element $-\lambda$:

$$\lambda - \lambda = \lambda + (-\lambda) = 0; \quad (\lambda - \mu) + \mu = \lambda; \quad 0 - (-\lambda) = \lambda; \quad \text{etc.}$$

Deling behoeft echter niet altijd mogelijk te zijn.

(In feite beperken wij ons hier tot commutatieve ringen met eenheid.)

¹⁾ De ideeën die ten grondslag liggen aan het begrip tensorprodukt zijn nl. uiteindelijk van Kronecker afkomstig.

Voorbeelden

1. Alle gehele getallen vormen een ring Z .
2. Alle rationale getallen vormen een ring Q ; alle reële getallen vormen een ring R ; alle complexe getallen vormen een ring C . In deze drie ringen is deling door een element $\neq 0$ wel altijd mogelijk.
3. Alle restklassen der gehele getallen modulo n , waar n een natuurlijk getal is, vormen een ring Z_n .
4. Alle polynomen met reële coëfficiënten vormen een ring (meestal aangeduid met $R[x]$).
5. Alle reële $n \times n$ matrices vormen een ring M_n .

Een tweede essentieel begrip is dat van een *modulus* over een ring A . Een A -modulus E is een verzameling objecten, waartussen een optelling gedefinieerd is, die voldoet aan

$$a+b = b+a; (a+b)+c = a+(b+c).$$

Eén van de objecten in E speelt weer de rol van nulelement, en ieder element heeft een tegengestelde:

$$a+0 = a; a-a = a+(-a) = 0.$$

Behalve deze optelling is er ook nog een vermenigvuldiging van objecten uit E met elementen van de ring A . Deze vermenigvuldiging is distributief:

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b; (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda a + \mu a;$$

terwijl verder geldt:

$$\lambda \cdot (\mu a) = (\lambda \mu) a; 1 \cdot a = a.$$

Voorbeelden

6. Alle vectoren in het platte vlak vormen een modulus over de ring R der reële getallen. Zij vormen ook een modulus over de ring Z der gehele getallen.
7. Alle vectoren in het platte vlak, waarvan de eindpunten gehele coördinaten hebben, vormen een modulus over Z , maar niet een modulus over R .
8. Iedere ring A kunnen we beschouwen als een modulus over zichzelf.
9. De ringen Z_n uit voorbeeld 3 kunnen we beschouwen als moduli over zichzelf, maar ook als moduli over Z .

Vervolgens zullen we spreken over functies $f(x)$, gedefinieerd op een A -modulus E , met waarden in een A -modulus F . We noemen

zo'n functie ook wel een *afbeelding* $E \rightarrow F$. De functie $f(x)$ heet *linear*, als

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2); \\ f(\lambda x) &= \lambda \cdot f(x); \end{aligned}$$

voor $x_1, x_2, x \in E$ en $\lambda \in A$.

Ook functies $f(x, y)$ van twee veranderlijken, $x \in E$ en $y \in F$, met waarden in een A -modulus G , zullen ter sprake komen. Zo'n functie heet *bilinear* als hij linear is in elk van zijn argumenten afzonderlijk

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1, y) + f(x_2, y); \\ f(x, y_1 + y_2) &= f(x, y_1) + f(x, y_2); \\ f(\lambda x, y) &= \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y). \end{aligned}$$

Laten E en F twee A -moduli zijn. Dan kan het zijn, dat er een lineaire afbeelding $f: E \rightarrow F$ bestaat, met de volgende twee eigenschappen:

- (1) iedere $y \in F$ treedt op als een beeldpunt $f(x)$;
- (2) f is 1-1-duidelijk, d.w.z. als $f(x_1) = f(x_2)$ dan is $x_1 = x_2$.

In dat geval heten E en F *isomorf*, aangegeven met $E \approx F$. De afbeelding f heet dan een isomorfe afbeelding van E op F .

3. Constructie van het tensorprodukt

Laten E en F twee moduli zijn over een ring A . Dan vormen we eerst een nieuwe modulus, $E * F$, als volgt.

Elementen van $E * F$ zijn alle lineaire combinaties

$$(3.1) \quad \lambda_1 \cdot (a_1, b_1) + \lambda_2 \cdot (a_2, b_2) + \dots + \lambda_n \cdot (a_n, b_n)$$

van paren (a_i, b_i) , waarbij steeds $a_i \in E$ en $b_i \in F$, met coëfficiënten $\lambda_i \in A$.

De optelling in $E * F$ gebeurt coëfficiëntsgewijs, d.w.z.

$$\begin{aligned} &[\lambda_1(a_1, b_1) + \lambda_2(a_2, b_2) + \dots + \lambda_n(a_n, b_n)] + \\ &+ [\mu_1(a_1, b_1) + \mu_2(a_2, b_2) + \dots + \mu_n(a_n, b_n)] = \\ &= (\lambda_1 + \mu_1) \cdot (a_1, b_1) + \dots + (\lambda_n + \mu_n) \cdot (a_n, b_n). \end{aligned}$$

Evenzo gebeurt vermenigvuldiging met een getal $\mu \in A$ coëfficiëntsgewijs:

$$\begin{aligned} \mu \cdot [\lambda_1(a_1, b_1) + \lambda_2(a_2, b_2) + \dots + \lambda_n(a_n, b_n)] &= \\ &= (\mu \cdot \lambda_1) \cdot (a_1, b_1) + (\mu \cdot \lambda_2) \cdot (a_2, b_2) + \dots + (\mu \cdot \lambda_n) \cdot (a_n, b_n). \end{aligned}$$

Men kan eenvoudig nagaan dat $E * F$, met deze optelling en vermenigvuldiging, inderdaad een A -modulus is.

Het merkwaardige is, dat we bij de constructie van $E * F$ in het

geheel geen gebruik hebben gemaakt van het feit dat er in E en F optelling, en vermenigvuldiging met scalaire λ , mogelijk is. Dat gaat pas bij de volgende stap een rol spelen.

We gaan ons nu nl. bezighouden met speciale elementen van $E * F$; en wel met de elementen die één van de volgende gedaanten hebben:

$$(3.2) \quad (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b);$$

$$(3.3) \quad (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2);$$

$$(3.4) \quad (\lambda a, b) - \lambda \cdot (a, b);$$

$$(3.5) \quad (a, \lambda b) - \lambda \cdot (a, b).$$

Zij R de kleinste deelmodulus van $E * F$ die al deze elementen bevat.

Definitie. De restklassenmodulus $(E * F)/R$ heet het *tensor-produkt* van E en F , en wordt aangegeven met $E \otimes F$.

Wat houdt deze definitie nu eigenlijk in? Om te beginnen komt de overgang van $E * F$ op $(E * F)/R$ neer op het volgende: twee elementen van $E * F$ achten we gelijk, identificeren we met elkaar, als hun verschil tot R behoort. I.h.b. worden alle elementen van R geïdentificeerd met 0.

Laten we de restklasse van een element $(a, b) \in E * F$ aangeven met $a \otimes b$. Dan kunnen we de restklasse van het element (3.1) aangeven met

$$(3.6) \quad \lambda_1 \cdot a_1 \otimes b_1 + \lambda_2 \cdot a_2 \otimes b_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n \otimes b_n.$$

Dit is dus de algemene gedaante van een element van $E \otimes F$; m.a.w. $E \otimes F$ voldoet in ieder geval aan de eerste eis die Whitney stelde: ieder element is een lineaire combinatie van elementen van de vorm $a \otimes b$.

De restklasse van het element (3.2) kan worden geschreven als

$$(a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b.$$

Aangezien ieder element van de vorm (3.2) behoort tot R en dus wordt geïdentificeerd met 0, vinden we dat

$$(a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = 0.$$

Anders gesteld

$$(3.7) \quad (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b.$$

Een gelijksoortige redenering, toegepast op elementen van $E * F$ van de vorm (3.3), (3.4) of (3.5), geeft

$$(3.8) \quad a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2;$$

$$(3.9) \quad (\lambda a) \otimes b = \lambda \cdot a \otimes b = a \otimes (\lambda b).$$

Aan beide eisen van Whitney is dus voldaan: ieder element van $E \otimes F$ is een som van elementen van de vorm $a \otimes b$, en $\otimes$ voldoet aan de distributieve wetten (3.7) en (3.8).

Bovendien hebben we nog gevonden dat (3.9) geldt. Dit houdt verband met het feit dat Whitney zich in zijn oorspronkelijke beschouwingen alleen bezighoudt met moduli over de ring van alle gehele getallen. Voor dergelijke moduli is (3.9) een gevolg van (3.7) en (3.8); e.g. geldt

$$(2a) \otimes b = (a+a) \otimes b = a \otimes b + a \otimes b = 2(a \otimes b).$$

Is A niet de ring der gehele getallen, dan is (3.9) niet een gevolg van (3.7) en (3.8), terwijl we toch een dergelijke relatie willen hebben, omdat $E \otimes F$ weer een A -modulus moet zijn, en we de scalaire vermenigvuldiging $\lambda \cdot a \otimes b$ in verband willen brengen met de vermenigvuldiging met λ in E en F . Algemeen volgt uit (3.9):

$$(3.10) \quad a \otimes 0 = 0 \otimes b = 0;$$

$$(3.11) \quad a \otimes (-b) = (-a) \otimes b = -(a \otimes b).$$

De eigenschappen (3.7), (3.8) en (3.9) kunnen we aldus samenvatten:

Stelling 1. De functie $f(x, y) = x \otimes y$ van de veranderlijken $x \in E$, $y \in F$, met waarden in $E \otimes F$, is *bilineair*.

Men kan aantonen, dat $E \otimes F$ in zekere zin de ruimste A -modulus G is met de eigenschap, dat er een bilineaire functie $f(x, y)$ ($x \in E$, $y \in F$) met waarden in G bestaat, zodanig, dat ieder element van G een eindige lineaire combinatie is van beeldelementen $f(x_i, y_i)$.

4. Enige eigenschappen

In § 1 is de directe som $E \oplus F$ van twee moduli E en F ter sprake gekomen. Deze directe som heeft de prettige eigenschap dat we E en F er in kunnen inbedden: de afbeelding $a \rightarrow (a, 0)$ is een isomorfe afbeelding van E op de deelverzameling van $E \oplus F$ die bestaat uit alle elementen met tweede coördinaat 0; daarmee kunnen we E , als we willen, identificeren. Evenzo kunnen we desgewenst F identificeren met de verzameling van alle elementen van de vorm $(0, b)$ van $E \oplus F$.

Het tensorprodukt $E \otimes F$ heeft i.h.a. deze prettige eigenschap niet. Dit blijkt o.a. uit het feit dat het tensorprodukt van twee fatsoenlijke, niet-triviale moduli de triviale modulus kan zijn die alleen uit het nul-element bestaat.

Voorbeeld.

$Z_2 \otimes Z_3$ is de nulmodulus.

Met Z_n bedoelen we, zoals in § 2 is gezegd, de verzameling van alle restklassen modulo n . We beschouwen Z_2 en Z_3 hier al moduli over Z . Zij $a \in Z_2$ en $b \in Z_3$; dan is

$$a \otimes b = 3(a \otimes b) - 2(a \otimes b) = a \otimes (3b) - (2a) \otimes b = 0,$$

want $3b = 0$ voor iedere $b \in Z_3$, en $2a = 0$ voor iedere $a \in Z_2$. Ieder element is een lineaire combinatie van elementen van de vorm $a \otimes b$, en is dus ook 0. Dus $Z_2 \otimes Z_3$ bestaat alleen uit het element 0.

Dit voorbeeld is een bijzonder geval van de volgende stelling:

Stelling 2. $Z_n \otimes Z_m \approx Z_d$, waar $d = \text{g.g.d.}(n, m)$.

Stelling 2 geldt ook als $m = 0$, waarbij $Z_0 = Z$, terwijl g.g.d. $(n, 0) = n$. We vinden in dit geval, dat $Z_n \otimes Z \approx Z_n$. Hiervan zullen we een generalisatie bewijzen:

Stelling 3. Zij E een A -modulus, en beschouw de ring A zelf ook als A -modulus. Er geldt: $E \otimes A \approx E$.

Bewijs. We merken eerst op dat we ieder element van $E \otimes A$ kunnen schrijven in de vorm $x \otimes 1$. Een willekeurig element van $E \otimes A$ heeft nl. de gedaante

$$z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \mu_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \mu_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \mu_n,$$

met λ_i en $\mu_i \in A$ en $x_i \in E$ ($1 \leq i \leq n$).

Maar

$$\begin{aligned} \lambda_i \cdot x_i \otimes \mu_i &= \lambda_i \cdot x_i \otimes (\mu_i \cdot 1) = \lambda_i \cdot \mu_i (x_i \otimes 1) = \\ &= (\lambda_i \mu_i) \cdot x_i \otimes 1 = (\lambda_i \mu_i x_i) \otimes 1, \end{aligned}$$

op grond van (3.9). Dus

$$\begin{aligned} z &= (\lambda_1 \mu_1 x_1) \otimes 1 + (\lambda_2 \mu_2 x_2) \otimes 1 + \dots + (\lambda_n \mu_n x_n) \otimes 1 = \\ &= (\lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \dots + \lambda_n \mu_n x_n) \otimes 1 = \\ &= x \otimes 1, \end{aligned}$$

met $x = \lambda_1 \mu_1 x_1 + \lambda_2 \mu_2 x_2 + \dots + \lambda_n \mu_n x_n \in E$.

Nu we dit bewezen hebben is het bijna evident dat $E \otimes A$ en E isomorf zijn: de afbeelding f van $E \otimes A$ naar E die aan $x \otimes 1$ toevoegt $f(x \otimes 1) = x$ is een isomorfie van $E \otimes A$ op E .

Stel nu, dat er in de A -modulus E elementen $a_1, a_2, \dots, a_m$ bestaan, waarvan ieder element van E een lineaire combinatie is:

$$(4.1) \quad x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m.$$

Stel evenzo, dat er in de A -modulus F elementen $b_1, b_2, \dots, b_n$ bestaan, waarvan ieder element van F een lineaire combinatie is:

$$(4.2) \quad y = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n.$$

Dan is klaarblijkelijk

$$(4.3) \quad x \otimes y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \cdot a_i \otimes b_j,$$

en er volgt dat ieder element van $E \otimes F$ een lineaire combinatie is van de $m \cdot n$ elementen $a_i \otimes b_j$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Men kan meer aantonen: als de elementen $a_1, \dots, a_m$ een *basis* vormen voor E , d.w.z. als ieder element van E op *ondubbelzinnige* wijze in de vorm (4.1) is te schrijven; en als evenzo de elementen $b_1, \dots, b_n$ een basis vormen voor F ; dan vormen de elementen $a_i \otimes b_j$ ($1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$) een basis voor $E \otimes F$.

Neem het bijzondere geval dat E een m -dimensionale reële vectorruimte (m -dimensionale euclidische ruimte) is, en F een n -dimensionale reële vectorruimte. Volgens het bovenstaande is er dan in $E \otimes F$ een basis met juist $m \cdot n$ onafhankelijke elementen; d.w.z. er geldt in dit geval

$$(4.4) \quad \dim(E \otimes F) = \dim E \times \dim F.$$

Dit resultaat, samen met stelling 3, stelt ons in de gelegenheid nog een belangrijke eigenaardigheid van het tensorprodukt toe te lichten: het tensorprodukt $E \otimes F$ is *afhankelijk van de ring A* waarover men E en F als moduli beschouwt.

Neem e.g. $E = F = C$, de verzameling der complexe getallen. Dan kunnen we E en F beschouwen als moduli over C , en volgens stelling 2 is in dat geval

$$(4.5) \quad E \otimes F = E \otimes C \approx E.$$

Maar we kunnen E en F ook beschouwen als moduli over R , de ring der reële getallen. In dat geval is de dimensie van E en van F gelijk aan de dimensie van het vlak der complexe getallen t.o.v. de reële getallen, dus 2; en uit (4.4) volgt dan dat $\dim(E \otimes F) = 4 \neq \dim E$. In dit geval is $E \otimes F$ dus zeker *niet* isomorf met E .

In verband met deze dubbelzinnigheid is het gebruik om, wanneer er sprake is van meer dan één ring, bij de notatie van het tensorprodukt aan te geven over welke ring dit genomen is: $E \otimes_A F$. We hebben dan aangetoond:

$$E \otimes_C F \neq E \otimes_R F.$$

Tenslotte merken we, op dat het tensorprodukt in zekere zin *commutatief* is. Er geldt nl.

Stelling 4. $E \otimes F \approx F \otimes E$.

Bewijs. De afbeelding die aan $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i \otimes b_i$ toevoegt $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i \otimes a_i$ is een isomorfie.

In dezelfde zin is het tensorprodukt *associatief*:

Stelling 5. Als E , F en G A -moduli zijn, dan is $(E \otimes F) \otimes G \approx E \otimes (F \otimes G)$.

5. Een toepassing.

Stel A en Σ zijn twee ringen, waarbij A een deelring is van Σ . Dat kan iedere modulus over de grotere ring, Σ , ook beschouwd worden als modulus over A . Het omgekeerde is echter i.h.a. niet het geval, zoals we reeds zagen in § 2, voorbeeld 7: alle roosterpunten in het platte vlak (i.e. alle punten met gehele coördinaten) vormen een modulus over de ring Z der gehele getallen, maar niet over de grotere ring R der reële getallen.

Met behulp van het tensorprodukt kan men nu een methode aangeven om een A -modulus E uit te breiden tot een Σ -modulus. Aangezien we nl. Σ zelf ook als A -modulus kunnen beschouwen, kunnen we vormen:

$$E \otimes_A \Sigma.$$

De elementen van $E \otimes_A \Sigma$ zijn lineaire combinaties van elementen van de vorm $x \otimes \sigma$, $x \in E$, $\sigma \in \Sigma$.

Als $\lambda \in A$, dan is, zoals immers uit de definitie van het tensorprodukt volgt,

$$\lambda \cdot x \otimes \sigma = (\lambda x) \otimes \sigma = x \otimes \lambda \sigma.$$

Beschouw nu een willekeurige $\rho \in \Sigma$. Noch $\rho \cdot x \otimes \sigma$, noch $\rho \cdot x$ is gedefinieerd, maar wel $\rho \cdot \sigma$. We definiëren nu:

$$(5.1) \quad \rho \cdot x \otimes \sigma = x \otimes \rho \sigma;$$

en algemeen, als $z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \sigma_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \sigma_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \sigma_n$ een willekeurig element van $E \otimes_A \Sigma$ is:

$$(5.2) \quad \rho \cdot z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \rho \sigma_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \rho \sigma_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \rho \sigma_n.$$

Men kan aantonen, dat op deze wijze $E \otimes_A \Sigma$ tot een Σ -modulus wordt.

Op grond van deze definitie kunnen we nu ook schrijven

$$(5.3) \quad x \otimes \sigma = x \otimes (\sigma \cdot 1) = \sigma \cdot x \otimes 1.$$

Dus ook, als $z = \lambda_1 \cdot x_1 \otimes \sigma_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \otimes \sigma_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \otimes \sigma_n$,

$$(5.4) \quad z = \lambda_1 \sigma_1 \cdot x_1 \otimes 1 + \lambda_2 \sigma_2 \cdot x_2 \otimes 1 + \dots + \lambda_n \sigma_n \cdot x_n \otimes 1.$$

Hieruit volgt eenvoudig: als E een basis heeft over A , bestaande uit elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$, dan heeft $E \otimes_\Lambda \Sigma$, over Σ , als basis de elementen $a_1 \otimes 1, a_2 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1$.

Laten we nog eens beschouwen het voorbeeld met $A = Z$, $\Sigma = R$, E = verzameling der roosterpunten in het platte vlak. Dan heeft E een basis over Z , bestaande uit de punten $e_1 = (1, 0)$ en $e_2 = (0, 1)$. Volgens het bovenstaande vormen de elementen $e_1 \otimes 1$ en $e_2 \otimes 1$ een basis voor $E \otimes_Z R$; d.w.z. ieder element van $E \otimes_Z R$ is ondubbelzinnig te schrijven als

$$\rho_1 \cdot e_1 \otimes 1 + \rho_2 \cdot e_2 \otimes 1,$$

waar ρ_1, ρ_2 reële getallen zijn. M.a.w. ieder element van $E \otimes_Z R$ is gekarakteriseerd door twee reële coördinaten, en $E \otimes_Z R$ is dus in wezen niets anders dan het hele platte vlak. (Dit laat tevens zien dat de Σ -modulus $E \otimes_\Lambda \Sigma$ i.h.a. echt „groter” is dan de A -modulus E).

Op dezelfde wijze kan men euclidische ruimte (beschouwd als modulus over R) uitbreiden tot een complexe ruimte, door het tensorprodukt (over R) te vormen met de ring der complexe getallen; of desgewenst tot een quaternionenruimte, door het tensorprodukt te vormen met de ring der quaternionen.

Als laatste voorbeeld nemen we voor A de ring R der reële getallen, en voor Σ de ring M_n van alle reële $n \times n$ -matrices. (Dan kunnen we A beschouwen als deelring van Σ , als we een reëel getal ρ identificeren met de diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} \rho & & 0 \\ & \rho & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \rho \end{pmatrix},$$

met n rijen en kolommen).

Tenslotte nemen we voor E de verzameling van alle reële $p \times q$ matrices. Hoe ziet dan de Σ -modulus $E \otimes_R M_n$ er uit?

De modulus E heeft over R een basis; hiervoor kunnen we nemen de $p \cdot q$ verschillende matrices waarvoor één matrix-element 1 is, terwijl alle andere matrixelementen 0 zijn. Schrijven we E_{ij} voor

die matrix uit deze basis waarbij de 1 op het kruispunt van de i° rij en de j° kolom staat, dan is een willekeurige matrix $A = (a_{ij})$ uit E te schrijven als

$$(5.5) \quad A = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij} \cdot E_{ij}.$$

Als we overgaan op het tensorprodukt $E \otimes_R M_n$, dan heeft dit over M_n nog steeds een basis van $p \cdot q$ elementen, maar we moeten nu lineaire combinaties vormen met coëfficiënten die tot M_n behoren, die dus $n \times n$ matrices zijn. Dit betekent dat we $E \otimes_R M_n$ kunnen opvatten als de verzameling der matrices

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \dots & X_{pq} \end{pmatrix},$$

waarbij alle X_{ij} $n \times n$ matrices zijn. Als we van deze voorstelling gebruik maken, dan moeten we het element $A \otimes B$ van $E \otimes_R M_n$ ($A \in E, B \in M_n$) schrijven als

$$(5.7) \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{pmatrix}$$

(als $A = (a_{ij})$). Vatten we dit op als een blokschrijfwijze van een $np \times nq$ matrix, dan is dit het zog. *Kroneckerprodukt* van de matrices A en B .

DE CONTRAPOSITIE EN HET BEWIJS UIT HET ONGERIJMDE

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

OOSTERBEEK

Elke leraar is bij zijn lessen wel eens de volgende of een analoge situatie tegengekomen. Bewezen zijn de stellingen:

als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan zijn overstaande hoeken elkaars supplement, (1)

als overstaande hoeken van een vierhoek elkaars supplement zijn dan is de vierhoek een koordenvierhoek. (2)

Gevraagd wordt te bewijzen:

als in een vierhoek overstaande hoeken niet elkaars supplement zijn, dan is de vierhoek geen koordenvierhoek. (3)

De vraag is, of (3) een direct gevolg is van (1) of van (2). De meeste leerlingen zeggen bij eerste kennismaking met dit probleem: (2), en leraren zeggen: (1).

Ik heb het altijd tamelijk moeilijk gevonden de leerlingen duidelijk te maken, dat (3) inderdaad een direct gevolg is van (1). Natuurlijk kan men zeggen: onderstel eens, dat de vierhoek wel een koordenvierhoek was. Dan waren volgens (1) overstaande hoeken elkaars supplement. En in (3) is gegeven, dat overstaande hoeken niet elkaars supplement zijn. Dus kan de vierhoek geen koordenvierhoek zijn. Dit sluit als een bus, maar mijn ervaring is, dat deze redenering de leerlingen niet aanspreekt. Ik heb daarom wel eens geprobeerd, of het inzicht wilde doorbreken met behulp van een voorbeeld uit het dagelijks leven. Een dergelijk voorbeeld moet vooral een natuurlijk karakter hebben. Het volgende heeft mij goed geholpen.

Als ik voor 1 uur het perron opkom, dan staat de trein naar Utrecht er nog. Dit is ons uitgangspunt. Nu doet zich de situatie voor, dat ik het perron opkom en dat de trein naar Utrecht er niet meer staat. Wat volgt hieruit? Voor ieder is het antwoord evident: het is niet meer voor 1 uur.

We kunnen nu het probleem algemener stellen. Gegeven is

$$A \rightarrow B.$$

Te bewijzen is

$$\sim B \rightarrow \sim A^1).$$

De redenering is weer hetzelfde. Onderstel, dat A wel waar is. Dan was wegens $A \rightarrow B$ ook B waar. Maar B is niet waar. En dus is A ook niet waar. De juistheid van de contrapositie hebben we zo uit het ongerijmde bewezen.

Hoewel ik didactisch geen bezwaar zou maken tegen deze redenering, als iemand meent, dat de klas intelligent genoeg is om haar te kunnen volgen, zou ik toch uit wetenschappelijk oogpunt de redenering willen verwerpen. We moeten daarbij bedenken, dat we het eigenlijke terrein van de wiskunde nu verlaten hebben en het terrein van de mathematische logica betreden hebben. Laten we onze redenering eens nader analyseren.

We willen bewijzen, dat uit $A \rightarrow B$ volgt: $\sim B \rightarrow \sim A$. Of anders gezegd:

gegeven: $A \rightarrow B$,

$\sim B$,

te bewijzen: $\sim A$.

Ons bewijs was als volgt. Onderstel A .

A
 $A \rightarrow B$ } impliceert B .

B
 $\sim B$ } impliceert $B \wedge \sim B$.

Als $A \rightarrow B$ en $\sim B$ gegeven zijn, dan kunnen we dus uit A afleiden $B \wedge \sim B$. Daarmee hebben we

gevonden: $A \rightarrow (B \wedge \sim B)$.

Verder weten we: $\sim (B \wedge \sim B)$.

En nu concluderen we:

$A \rightarrow (B \wedge \sim B)$
 $\sim (B \wedge \sim B)$ } dus $\sim A$.

Bij deze laatste overgang hebben we juist de stelling gebruikt, die we bewijzen wilden. We hebben namelijk uit

$$A \rightarrow (B \wedge \sim B)$$

afgeleid

$$\sim (B \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$$

en toen in verband met $\sim (B \wedge \sim B)$ geconcludeerd: $\sim A$.

Conclusie. *Als we trachten door een bewijs uit het ongerijmde de*

¹⁾ $\sim$ betekent „niet”; $\wedge$, „en”; $\vee$, „of”.

contrapositie te rechtvaardigen: geraken we in een vicieuze cirkel.

Wel is het uiteraard geoorloofd de toelaatbaarheid van een bewijs uit het ongerijmde te baseren op de contrapositie.

In zijn eenvoudigste vorm komt dit bewijs er namelijk op neer, dat we moeten bewijzen $A \rightarrow B$, aannemen, dat B niet juist is, en laten zien, dat A dan ook niet juist kan zijn. We bewijzen dus: $\sim B \rightarrow \sim A$. En door contrapositie volgt hieruit $A \rightarrow B$ (strikt genomen: $\sim \sim A \rightarrow \sim \sim B$, maar $\sim \sim A$ en $\sim \sim B$ mogen we door A resp. B vervangen).

Het ligt voor de hand nu de vraag te stellen, hoe we dan binnen de mathematische logica de juistheid van de contrapositie kunnen aantonen. Eigenlijk is de vraag niet juist gesteld. We zouden moeten beginnen een uitgangspunt voor onze mathematische logica te kiezen (b.v. een axiomastelsel) en dan vragen, hoe we uitgaande van het gekozen uitgangspunt de contrapositie kunnen bewijzen. Ik wil me er echter niet afmaken met op deze gronden de vraag onbeantwoord te laten. Het is waarschijnlijk bekend, dat men veelal $A \rightarrow B$ definieert als $\sim A \vee B$. ($A \rightarrow B$ houdt immers in, dat het uitgesloten is, dat A juist is en B onjuist. D.w.z. van $\sim B$ en A moet er minstens één juist zijn.) Aanvaarden we deze definitie, dan zien we:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &=_{\text{def}} \sim A \vee B, \\ \sim B \rightarrow \sim A &=_{\text{def}} \sim \sim B \vee \sim A, \end{aligned}$$

en omdat we de dubbele negatie van B vervangen mogen door B , staat in beide rechter leden van deze definities hetzelfde. En dus zijn $A \rightarrow B$ en $\sim B \rightarrow \sim A$ ekwivalent.

Dat de eis eerst behoorlijk vast te leggen, welk logisch uitgangspunt men kiest, geen overbodige luxe is, blijkt hieruit, dat de intuitionist bovenstaande redenering niet zou aanvaarden. Hij zou, zij het langs andere weg, wel komen tot de juistheid van: $A \rightarrow B$ impliceert $\sim B \rightarrow \sim A$, maar zal de ekwivalentie van deze beide uitspraken ontkennen.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

1. *Mathematica & Paedagogia* (VIII, 21, 1961).

- R. Holvoet, Relations, fonctions, éléments d'analyse combinatoire;
- L. Félix, Pouvons-nous créer notre propre symbolisme?
- G. Bosteels, Matrices;
- J. Lievens, L'enseignement de la géométrie dans la classe inférieure du cycle secondaire;
- O. Mogensen, Wiskundeclubs voor leraars-wiskundeclubs voor leerlingen.

2. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XL, 216, Sept. 1961).

Textes de concours et examens 1961:

- a. Agrégation de mathématiques;
- b. Professorats des écoles nationales d'ingénieurs, arts et métiers;
- c. Epreuves théoriques du C.A.P.E.S. et des C.A.P.E.T.;
- d. Concours d'admissions dans les écoles normales supérieures;
- e. Certificats de propédeutique;
- f. Concours général;
- g. Documents officiels sur le recrutement des maîtres.

3. *Praxis der Mathematik* (III, 10; Oktober 1961).

- Helmuth Gericke, Zum 150. Geburtstag von Evariste Galois;
- Oscar Becker, Die klassischen Pyramiden des Alten Reiches;
- Kurt Vogel, Zu zwei Problemen des Papyrus Rhind.

Praxis der Mathematik (III, 11; November 1961).

- H. Zeitler, Vektorsätze am Dreieck und an der Pyramide;
- H. Hoffmann, Bezeichnung räumlicher Gebilde;
- W. Junge, $pV=RT$ in räumlicher Darstellung;
- K. Güldner, Näherungskonstruktionen regelmässiger n -Ecke;
- H. Bauer, Elementare Berechnung einer Raketenbahn.

Praxis der Mathematik (III, 12; Dezember 1961).

- Stefan Vajda, Spieltheorie;
- W. L. Fisher, Die Boole-Algebra und ihre Anwendungen;
- I. Paasche, Die Flächensätze des rechtwinkligen Dreiecks;
- K. H. Hürten, Elementarer Mathematikunterricht.

4. *Elemente der Mathematik* (XVI, 6, November 1961).

- L. Locher—Ernst, Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik;
- E. Härtter, Über die Verallgemeinerung eines Satzes von Sierpinski;
- F. Leuenberger, Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel;
- B. Jäger, Ein Reduktionsverfahren für Determinanten und Gleichungssysteme.

5. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XVI, 6; November, 7; Dezember 1961)

Uit nummer 6:

K. Reeb, Mathematische Untersuchungen über Mutationen.

H. R. Busch, Über die Konstruktion von Quadratwurzelkörpern;

H. Bauersfeld, Ein Beitrag der Gruppentheorie zur Systematisierung geometrischer Figuren.

Uit nummer 7:

W. Franz, Die gegenwärtige Lage der Mathematik in der Sicht Nicolas Bourbakis;

H. Rau, Zum Unterricht in Mathematik und Physik an den mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien Niedersachsens;

W. Terwes, Ein wirtschaftliches Problem und seine geometrische Behandlung;

H. Zeitler, Die nichteuklidische Geometrie als Thema einer Arbeitsgemeinschaft;

G. Denger, Das O.E.E.C.-Seminar, Istanbul 1961.

6. *The Mathematical Gazette* (XLV, 353, October 1961).

D. T. Whiteside, Newton's discovery of the general binomial theorem;

F. M. Hall, Group theory in the sixth form;

R. Buckley, Mechanics in school and university;

P. B. Chapman, Square flexagons;

I. P. Gorton, Diagonal elements of doubly-stochastic matrices;

H. G. Forder, Some problems in combinatorics.

7. *School Science and Mathematics* (LXI, 8, 541; Nov. '61).

M. F. Willerding, Teaching-machines;

H. Winthrop, A mathematical problem with geographical constraints;

D. E. Newton, The problem-solving approach: fact or fancy?

R. V. Estes, A review of research dealing with current issues in mathematics education.

School Science and Mathematics (LXI, 9, 542, Dec. 1961).

John L. Spence, Periodic Absolute Value Functions;

S. M. Immaculate B.V.M., The language of Mathematics.

P. C. Burns, Research for the library minded mentally advanced arithmetic pupils.

C. H. Scott, Euler made easy.

8. *The mathematics Teacher* (LIV, 6; Oktober 1961 and 7; November 1961).

Uit nummer 6:

Myron F. Roszkopf, Geometric proof in the eighth grade;

B. W. Jones, Reflections and rotations;

J. A. Schumaker, Trends in the education of secondary-school mathematics teachers;

N. A. Court, The problem of Apollonius.

Uit nummer 7:

Truman Botts and L. Pikaart, Mathematics from the modern viewpoint;

E. Teller, The geometry of space and time;

G. Hendrix, The psychological appeal of deductive proof;

C. Gattegno, Formalization and sterilization;

H. E. Williams, Constructing logic puzzles;

N. D. Turner, A bibliography for careers in mathematics.

DE AMERIKAANSE TEST

door

DR. P. G. J. VREDENDUIN

OOSTERBEEK

In het juni-nummer zijn de resultaten weergegeven van een in Nederland gegeven Amerikaanse test. Ik beloofde U zo spoedig mogelijk ook de in Amerika behaalde resultaten mee te delen.

In de Verenigde Staten en Canada werd aan de test deelgenomen door 170.000 leerlingen van 5300 scholen. Voor de behaalde scores geldt:

eerste kwartiel	26
mediaan	38
derde kwartiel	53.

Natuurlijk wil men graag vergelijken met de resultaten in ons land. Welnu, de gemiddelde score bedroeg hier over 1325 leerlingen 33,2. Nu is het gemiddelde niet hetzelfde als de mediaan. En verder bleek, dat de gemiddelde scores sterk varieerden met de leerlingengroepen (van 27,5 bij gymnasium-B 5 tot 46,2 bij gymnasium-B 6), terwijl deze groepen in het totaal gemiddelde door sterk verschillende aantallen vertegenwoordigd zijn, en wel de groepen met lage score door belangrijk grotere aantallen dan de groepen met hoge score. Waaruit volgt, dat we zeer voorzichtig moeten zijn met het trekken van conclusies uit de gevonden bedragen.

In Amerika behaalden 569 leerlingen een score van minstens 80 (0,33 %), in ons land 8 (0,60 %). Van deze 569 behaalden ongeveer 100 een score van minstens 100 punten, terwijl 2 het extreem goede resultaat van 150 punten wist te bereiken.

In ons land was de maximale score 99,25. Alweer, ik geef deze resultaten, omdat men nu eenmaal vergelijken wil, maar als men er even over nadenkt, ziet men in, dat vergelijking vrijwel zinloos is.

BALANS VAN EEN JAAR „PYTHAGORAS”

Het is ongeveer een jaar geleden, dat in dit blad uw aandacht werd gevraagd voor een nieuwe verschijning in de Nederlandse Onderwijswereld: een wiskundetijdschrift voor jongeren. Dit tijdschrift „Pythagoras” werd een 'collega' van de buitenlandse, als het Amerikaanse „The Mathematics Student Journal”, het Engelse „The Mathematical Pie”, het Franse „Le Facteur X” en sinds zeer kort het Belgisch-Vlaamse „Wiskundepost”.

Vanzelfsprekend waren velen benieuwd of Pythagoras in Nederland wel een goede kans van slagen zou hebben. De initiatiefnemers (de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap) waren nogal optimistisch, maar de spanning bij redactie en administratie was desalniettemin groot.

Dank zij een verheugende medewerking van de wiskundedocenten kan Pythagoras op een succesvol jaar terugzien. Er gaven zich meer dan zesmaal zoveel abonnees op, dan gehoopt werd. Ook buiten Nederland (België, Nw.Guinea, de Nederlandse Antillen) bleek er belangstelling voor Pythagoras te bestaan.

Van verschillende zijden werden blijken van instemming en zelfs enthousiasme ontvangen.

Het gevolg van het grote aantal abonnees was, dat het tijdschrift een fleurig omslag kon krijgen en dat er een extra nummer gegeven kon worden. Dit extra nummer werd geheel gewijd aan de rekenliniaal.

Het aantal oplossingen van puzzels en problemen was tamelijk groot. De puzzelredacteur, die eerst bevreesd was voor enkele duizenden inzendingen, behoefde echter geen slapeloze nachten te krijgen. Blijkbaar voelen de meeste abonnees wel voor de puzzelrubriek, zoals bleek uit brieven, maar nemen ze niet steeds de moeite de oplossingen in te zenden. Ook mogen ze graag de oplossingen dadelijk achter in het tijdschrift vinden.

In het vijfde nummer heeft de redactie de lezers en de wiskundedocenten opgeroepen hun mening over de inhoud van de eerste jaargang kenbaar te maken. Het is nl. voor de redactie van een tijdschrift als Pythagoras van uitermate groot belang te weten, of ze niet te hoog of te laag gegrepen heeft. In het bijzonder zou het interessant zijn te vernemen, wat men op scholen, waar Pythagoras op de boekenlijst werd voorgeschreven, met het tijdschrift heeft kunnen doen, vooral in de lagere klassen.

Voor een merkwaardige moeilijkheid kwam de administratie van het tijdschrift te staan, doordat in november telkens nog groter aantallen opgaven voor abonneementen binnenkwamen. Daardoor was het niet mogelijk de grootte van de oplage van het eerste en het tweede nummer zo vast te stellen, dat er voldoende ruimte bleef voor latere aanmeldingen. De eerste twee nummers zijn tengevolge daarvan volledig uitverkocht. De administratie hoopt daarom de aanmeldingskaarten voor nieuwe abonneementen, die begin september aan de scholen zullen worden gezonden, nog in september terug te ontvangen, zodat direct met het eerste nummer de juiste oplage vastgesteld kan worden.

Het kan gezegd worden, dat Pythagoras de kinderziekten van het eerste jaar goed heeft doorstaan, zodat men mag verwachten, dat het in goede gezondheid de tweede jaargang zal beleven.

BUREAU VOOR INTERNATIONALE TECHNISCHE HULP

Het Bureau voor Internationale Technische Hulp vraagt ons te willen melden, dat de Vice-Chancellor van de Kwame Nkrumah University of Science and Technology, te Kumasi, Ghana, de bemiddeling van de Nederlandse regering heeft verzocht om ruchtbaarheid te geven aan enige vacatures in het Department of Science.

De voornoemde Vice-Chancellor schrijft:

"There are four vacant posts in Physics and two in Mathematics which require to be filled if courses in these two subjects are to be properly continued during the next academic year.

I give hereunder particulars of salaries and other conditions of service relevant to the posts:

1) *Salary scales**Lecturer* (Expatriate) £ 1,386 ($\times 66$) — £ 2,508.*Senior Lecturer* £ 2,310 ($\times 99$) — £ 2,904

(This is inclusive of 10% contract element)

2) *Children's Allowance* £ 50 per annum for each child resident in Ghana; £ 100 per annum for each child being educated overseas, up to a maximum of 5 children under the age of 21 years.3) Bungalow at rental basis of not more than $7\frac{1}{2}\%$ of salary.

4) Free medical services.

5) Advance for purchase of means of transport, with maintenance allowance.

6) Three leave passages to home from out of every four years.

7) The contracts will be for five years in the first instance.

Other particulars will be made available to interested applicants"

BOEKBESPREKING

Drs. P. E. Lepoeter, *Gids voor de algebra van de b-afdelingen van het V.H.M.O.*
 XI + 159 bladz., in geplasticeerde band f 5,50, J. M. Meulenhof, Amsterdam 1961.

De kandidaten, die het bovenstaande, fraai uitgevoerde werk hebben bestudeerd, zullen op het eindexamen maar zelden behoeven te zeggen: „hebben we nooit gehad”. Op zeer duidelijke wijze worden alle voorkomende algoritmen behandeld. Dit is meteen ook mijn bezwaar tegen de stijl van dit boek; hier en daar is het mij teveel de stijl van: „dat moet je zódoen”. Om even te citeren (blz. 82):

„Onthoud dus: Uit $\sqrt{x} > 3$ volgt $x > 9$ maar uit $\sqrt{x} < 3$ volgt $0 \leq x < 9$ ”
 Niettemin een uitstekend boek om in de hoogste klassen te gebruiken. Het heeft het voordeel, dat het ook voor de leerlingen goed leesbaar is, zodat het ook voor zelfstudie aanbevolen kan worden.

R. Troelstra

Wolters' Nieuwe Tafels van logaritmen en goniometrische functies. 30 blz. f 0,90,
 J. B. Wolters, Groningen 1961.

Op de van ouds bekende tafel van de $^{10}\log$ in vier decimalen volgt een tafel van goniometrische functies, waarbij het argument wordt uitgedrukt in duizendste delen van een gestrekte hoek. Deze laatste is door Dr. Vredenduin gepubliceerd in de 37e jaargang van *Euclides*, blz. 73—81. Verderop in deze jaargang kan men ook de m.i. terecht op deze tafel uitgeoefende kritiek vinden. Het is mij dan ook niet duidelijk, waarom de firma Wolters gemeend heeft, toch tot uitgave te moeten overgaan. Misschien ging het ook niet helemaal van harte; de uitvoering is tenminste minder fraai, dan we gewend zijn. De tafels lopen op nog al onbenullige wijze in elkaar over. Boven blz. 26 staat: „goniometrische functies” en boven blz. 27 „goniometrische verhoudingen.” Deze nuance geeft de overgang van milligestrekte-hoeken op graden aan. Dit gradientafeltje beslaat één bladzijde en vermeldt de goniometrische verhoudingen in twee decimalen als het argument een geheel aantal graden bedraagt. Een paar tafeltjes van vierkantswortels besluiten het boekje. Naar mijn mening een overbodige uitgave.

R. Troelstra

Dr. D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof, met medewerking van Dr. P. M. van Hiele en Dr. J. de Miranda, *Wiskunde voor de M.M.S.* Eerste deel, 136

blz., f 3,90; Tweede deel, 100 blz., f 2,75 met gestencilde toelichting voor de docent. J. B. Wolters, Groningen, resp. 1960 en 1961.

Een moedige poging, om bij het wiskunde-onderwijs aan de m.m.s. te komen tot een methode, waarbij niet het schijnresultaat, maar het werkelijke inzicht wordt nagestreefd. De achtergrond van dit boek wordt gevormd door ideeën, die in de Wiskunde Werkgroep der W.V.O. zijn ontwikkeld en, waaraan de helaas zo vroeg gestorven Dr. van Hiele-Geldof zo'n belangrijk aandeel heeft gehad.

De opzet van dit boek is zo nieuw, dat het niet goed mogelijk is binnen het bestek van deze korte bespreking een juiste indruk van de inhoud te geven. Ik ben trouwens van mening, dat alle wiskunde-docenten, niet alleen die van de m.m.s., er goed aan doen, van dit boek kennis te nemen. Het biedt voor ons allemaal tevens de gelegenheid om ons kritisch te bezinnen over onze eigen manier van lesgeven. Laat ik dus volstaan met te zeggen, dat ik dit boek didactisch een heel knap stuk werk vind. De uitvoering van het boek is zeer fraai.

Tenslotte moet ik nog mijn deernis uitspreken met de leerlingen van de m.m.s.-afdeling van een Lyceum. Zij hebben in de onderbouw al een groot deel van de hun toekomende wiskundelessen opgemaakt, en daarbij dit speciale m.m.s.-boek gemist. Hoe moet dat nu in 2-m.m.s.? Maar misschien staat het antwoord op deze vraag ons nog te wachten?

R. Troelstra

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof, *Werkboek der algebra*, deel 2, 5e druk, 123 blz., ing. f 4,25, J. Muusses, Purmerend, 1960.

Het verschijnen van deze door Dr. P. M. van Hiele geheel omgewerkte vijfde druk is aanleiding, om nog eens de aandacht op dit belangrijke werk te vestigen. Zoals de titel aangeeft is het een echt werkboek, geen leerboek in de traditionele zin. Het is dan ook in de eerste plaats geschreven voor scholen met individueel gericht onderwijs. Toch lijkt mij het boek ook voor klassikaal onderwijs goed te gebruiken. Bij een originele opzet, zoals we die hier aantreffen, vallen vele merkwaardige dingen op. Zo komt men de abc-formule het eerst tegen als formule voor de nulpunten van een kwadratische functie; de vierkantsvergelijkingen komen niet als een bijzonder belangrijk onderwerp voor, maar staan verderop met de vergelijkingen van hogere graad in één hoofdstuk. Uit vele details blijkt de zorg, waarmee dit werk is geschreven. Als voorbeeld noem ik het scherp onderscheiden van „en” en „of” bij ongelijkheden.

Een boek met bijzondere didactische kwaliteiten, dat behoorlijk hoge eisen stelt aan de leerling, maar ook aan de leraar.

R. Troelstra

The Concept and the role of the model in mathematical and natural and social sciences, Synthese Library, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1961, 194 blz., geb. f 21.—.

De ondertitel luidt: Proceedings of the Colloquium sponsored by the Division of Philosophy and Sciences of the International Union of History and Philosophy of Sciences organized at Utrecht, January 1960, by Hans Freudenthal.

De handelingen van dit congres bestaan uit zeventien artikelen. Hierin wordt het begrip „model” van velerlei kanten gezien. Of, beter gezegd: al datgene, wat men wel met de naam „model” pleegt aan te duiden, wordt onder de loep genomen. Dat „model” geen vaste betekenis heeft, wordt in een inleidend artikel door L. Apostel uitvoerig uiteengezet. Hij onderscheidt verschillende betekenissen, die

„model” in de natuurwetenschappen heeft. Daarnaast is voor de wiskundige van speciaal belang de rol van de modelvorming in de geformaliseerde wetenschappen. Modellen spelen een belangrijke rol bij het grondslagenonderzoek van de wiskunde. Een viertal artikelen heeft dit soort modelvorming als thema, t.w. een artikel van Feys over een interpretatie van de modale logica van Lewis (met vele en storende drukfouten), van Fraïssé over de algebraïsche logica, van Guillaume over het keuzeaxioma en van Grzegorzczuk over de eindige axiomatiseerbaarheid van een topologie, waarin het begrip „punt” geen rol speelt. Verwant met deze verhandelingen is het artikel van Beth over de semantiek van fysische theorieën. Deze artikelen hebben een sterk specialistisch karakter. Freudenthal bespreekt modellen in toe-paste waarschijnlijkheidsleer. Zoals reeds uit de titel blijkt, gaat het hier om natuur-wetenschappelijk modelvorming.

P. G. J. Vredenduin

Planimetrie voor V.H. en M.O. deel I. D. Leujes, Noordduyn, Gorinchem 1961, f 3.—.

Het nieuwe meetkundeboek van Leujes heeft zeker de verdienste, dat de uitgave sober is en de prijs redelijk. Het komt mij voor, dat daarnaar met nadruk is gestreefd. Zo is het voorbericht opgenomen bij de antwoordenlijst; d.i. terecht, omdat leerlingen meestal weinig belang stellen in voorberichten en van leraren dat wel kan worden verondersteld. Ook vond ik verscheiden eenvoudig te bewijzen stellingen zonder bewijs; dat bewijs werd dan bij de volgende opgaven aan de leerling gevraagd. Dat scheelt papier en dus geld; een argument, wat hout snijdt. Het boek heeft 96 pagina's en bevat de leerstof voor de eerste klasse.

Het boek heeft verder veel andere verdiensten; gestreefd is met succes naar een duidelijke formulering. De zinnen zijn kort en zijn voor de zeer jonge leerling ver-teerbaar. De tekst is overzichtelijk naast de figuren geplaatst. Het aantal opgaven is volgens de auteur niet groot; er zijn er echter zeker ruim voldoende; de opgaven zijn over het algemeen niet moeilijk; zij hebben vrijwel stuk voor stuk een functie in het geheel, bereiden de komende stof uitstekend voor en vormen een goede toe-passing van de voorafgaande leerstof.

Gestreefd is naar een geleidelijke overgang van de intuïtieve inleiding naar een systematische opbouw; zeker met resultaat. Bij zo'n inleiding dreigt altijd het gevaar, dat de leerlingen niet meer los komen van het „dat kun je zo wel zien”-principe. Leujes past dit principe alleen consequent toe, als het inderdaad wenselijk is en dat is niet veel; meestal is er wel een aanvaardbare plausibel-making of uitleg, zonder dat van een bewijs kan worden gesproken. Leerlingen zullen dus intuïtief aan gaan voelen, dat de macht der intuïtie zo vlug mogelijk moet worden beknot. Een enkele maal — b.v. bij de stelling over de gelijkheid van basishoeken in een gelijkbenige driehoek — volgt later een bewijs.

De volgorde is niet verrassend: Evenwijdige lijnen, driehoeken, het tekenen van driehoeken, congruentie, bijzondere veelhoeken, constructies (een sport met spelregels!). De constructies, waaronder een enkel voorbeeld met analyse, dus na de trapezia. Het hoofdstukje over het tekenen van driehoeken is kennelijk een voorbereiding tot de congruentie. Persoonlijk had ik wel graag meer aandacht be-steed willen zien aan de *vorm* van een definitie; wel wordt aan de bedoeling daarvan aandacht besteed en opgemerkt, dat de vorm zo sober mogelijk moet zijn.

In de beginhoofdstukken wordt in een aantal vragen de theorie teruggevraagd;

korte vragen met korte antwoorden; een goede oefening voor het spreken in volzinnen en een goede controle voor het „leren lezen” van een opgegeven stof.

Het zal wel duidelijk zijn, dat ik voor dit boek grote waardering heb; de auteur toont zich een ervaren docent, die veel voorkomende fouten heel goed kent. Hij weet, dat hoogtelijnen door beginners altijd verticaal worden getekend en bases „horizontaal” en vangt dit voortijdig op. Zo zijn er veel meer kleine trekjes, die het doorlezen van dit boek — zelfs in vakantiedagen — tot een wezenlijke vreugde maken.

Uit belangstelling waag ik één opmerking. Zou bij de definitie van de afstand van twee evenwijdige lijnen — de lengte van het stuk van een loodlijn op een van beide, dat tussen beide in ligt — niet opgemerkt kunnen worden, dat de plaats van de loodlijn niet essentieel is? Het op „één van beide” doet bovendien wat perfectionistisch aan. Ik dacht dat de intuïtieve oogjes voor deze opmerking al wel open stonden.

Prettig in dit boek vind ik bovendien de bescheidenheid, ook uiterlijk. Het wordt niet aangekondigd als wereld hervormende nieuwlichterij, maar het vormt een duidelijke bijdrage aan de vooruitgang van ons meetkundeonderwijs. Het zal in 3 delen verschijnen.

Groenman

Introduction to Matrices and Vectors by J. T. Schwartz, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1961 Londen, 160 blz., 43 s.

Nu allerwegen wordt gestreefd naar modernisering van het wiskunde programma op de middelbare scholen, is het zaak na te gaan welke onderwerpen met vrucht kunnen worden behandeld.

Of *Matrix algebra* een van deze onderwerpen zou kunnen zijn? Mijn antwoord zou volmondig neen geweest zijn, indien ik niet van dit boekje kennis had kunnen nemen.

De schrijver beschikt wel over bijzonder didactische kwaliteiten, dat hij deze stof zo boeiend kan brengen, dat men dit boekje „in een adem” uitleest. Met een gemak, dat ik voor onmogelijk had gehouden introduceert de schrijver een matrix algebra (beperkt tot $n \times n$ matrices), die elke leerling met enige wiskundige belangstelling zal boeien. Het lijkt wel, of de schrijver het levende beeld van een leerling voor zich had, toen hij de tekst opstelde. — All this is merely old material repeated, given new names, and written differently. In short, nothing much. But *be patient* —

Nadat de matrix is ingevoerd (de zin ervan wordt uit een praktisch voorbeeld gedemonstreerd) wordt een algebra opgebouwd, die de leerling zal fascineren, omdat hij nu objecten hanteert, die geen getallen zijn, waarop hij toch alle bekende rekenregels kan toepassen, waardoor hem tevens deze rekenregels bewuster worden. Telkens worden de „formalistische” bewijzen, in uitvoerig proza toegelicht, waarbij tevens de directheid en scherpte van een goede symboliek een bijzonder accent krijgen.

Men leert hem optellen en aftrekken, de commutative eigenschap blijft gehandhaafd.

Daarna komt de vermenigvuldiging aan bod, een produkt kan nul zijn, als beide factoren $\neq 0$ zijn (0 is natuurlijk een 0-matrix), de vermenigvuldiging is niet commutatief, de volgorde van de factoren mag dus niet veranderd worden. De deling wordt ook nu gedefinieerd m.b.v. de vergelijking: $AX = B$ (of $XA = B$).

Om deze vergelijkingen echter te kunnen oplossen, heeft men er behoefte aan,

de inverse matrix A^{-1} van A te definiëren en te leren berekenen. Daarom de stelling:

Als A een $n \times n$ matrix is, dan bestaat er een veelterm:

$A^k + c_k \cdot A^{k-1} + \dots + c_0 = 0$, waarbij $k \leq n$ en alle c_i „gewone” getallen zijn „Unfortunately, the proof of the above theorem is too complicated to be given in this book” (Het bewijs voor een 2×2 matrix was echter als ruggesteun niet onaardig geweest).

In de eerste drie hoofdstukken, wordt de theorie rustig ontwikkeld, na elk hoofdstuk volgen enkele eenvoudige opgaven, waarvan het aantal gemakkelijk te vermeerderen is.

Dan wordt de vektor als matrix ingevoerd, enkele eenvoudige geometrische problemen met vektoren behandeld, het inwendig produkt (circle produkt) en het vektorieel produkt (cap-produkt) gedefinieerd en toegelicht. De complexe getallen worden als 2×2 matrices en de quaternionen als 4×4 matrices gedefinieerd. Het blijft wel bij een korte kennismaking, maar men heeft dan toch kennigemaakt met „hypercomplexe” getallen.

Ook worden nog „het spoor” en de „eigenwaarde” van een matrix ter sprake gebracht, waarna besloten wordt met oneindig voortlopende machtreksen van matrices.

Enkele drukfouten:

Op blz. 68 moeten in de matrix A^2 : a_{21} en a_{23} beide -1 zijn, in de matrix A^3 moet $a_{21} = -3$ en $a_{23} = -3$ zijn.

Op blz. 69 moet in A^{-1} : $a_{32} = -1$ zijn.

Opgave 3 op blz. 77 bevat onder c) een foutje. In de linker factor van X moet $a_{22} = +1$ zijn.

Op blz. 96 wordt in het bewijs van „Principle B” tweemaal abusievelijk a i.p.v. s geschreven.

Op blz. 103 in theorema a) moet $v \rightarrow V$, terwijl in het bewijs op blz. 104 i.p.v. v de letter u werd gebruikt.

Op blz. 124 (opgave H) is een σ weggevalen.

Tenslotte zou het misschien prettig zijn geweest, als b.v. bij de 2×2 matrices gewezen was op het feit, dat deze transformaties kunnen voorstellen in het XOY vlak, waardoor de uitgevoerde bewerkingen een „praktische” zin hadden gekregen.

Al met al een boekje, dat ik gaarne van harte aanbeveel.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

73. In een gezelschap bevinden zich A en B. A beweert de toekomst te kunnen voorspellen. B trekt dit in twijfel. A beweert, dat de oorzaak van B's twijfel is, dat B deze gave totaal mist. A stelt het volgende experiment voor. Hij zal op een kaart een mededeling opschrijven. Deze mededeling houdt een voorspelling in, dat iets dezelfde middag voor zes uur zal gebeuren. B schrijft op een kaart, of A's voorspelling zal uitkomen of niet. A belooft, om B's onkunde te onderstrepen, een miljoen gulden, als B het juiste antwoord opschrijft, en eist van B tien cent te ontvangen, als B een onjuist antwoord opschrijft. Daarna gaat A heen om te voorkomen door zijn gedrag het eventuele gebeuren te beïnvloeden. Om zes uur worden de kaarten voorgelezen. B heeft verloren. Wat had A en wat had B opgeschreven?

74. Onderzoek of het mogelijk is een convexe veelhoek zo op te vullen met lijnstukken, dat in elk punt van samenkomst zes lijnstukken samenkomen.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

70. Stel de dikte van een schakel x en de diameter van een opening y cm. Een ketting van $n+100$ schakels is 10 keer zo lang als een ketting van n schakels, dus

$$10(2x+ny) = 2x + (n+100)y$$

of

$$18x = (100-9n)y.$$

Hieruit volgt, dat $n \leq 11$. Dus is

$$n = 11 \quad \text{en} \quad 18x = y$$

of

$$n = 10 \quad \text{en} \quad 18x = 10y, \text{ enz.}$$

Alleen het eerste geval voldoet aan de eis, dat de diameter van een schakel hoogstens 2 keer de diameter van een opening is.

In combinatie met

$$2x + 100y = 53$$

vinden we dan

$$2x + 32y = 17.$$

71. Noem het getal, dat door de vier stippen werd voorgesteld, a en het getal, dat door de vier kruisjes werd voorgesteld, b . Dan moet

$$10000a + b = a(a+b),$$

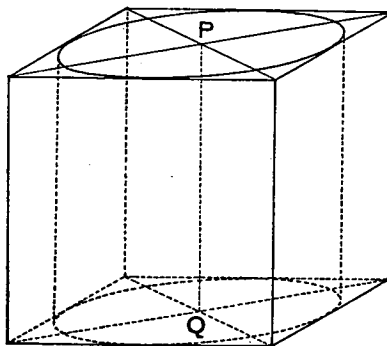
$$9999a = a(a+b) - (a+b),$$

$$9999 = a + b - \frac{a+b}{a}.$$

Hieruit volgt, dat b een veelvoud van a is. Dus kan $b = a$, $b = 2a$, ..., $b = 9a$.

We vinden zo in het geval $b = 2a$: $a = 3334$ en $b = 6668$, en in het geval $b = 8a$: $a = 1112$ en $b = 8896$.

72. Ga uit van een kubus. P en Q zijn de middens van twee overstaande zijvlakken. Beschrijf een cilindervlak met as PQ , die vier zijvlakken van de kubus raakt. Men kan drie dergelijke cilindervlakken aanbrengen. Deze drie cilindervlakken begrenzen een lichaam. Dit lichaam voldoet aan de vraag. De drie projectievlakken zijn b.v. drie zijvlakken van de kubus.





Gemeente Groningen

Aan de Academie Minerva, afd. hogere technische school,
wordt gevraagd

een leraar in wiskunde of wis- en natuurkunde of wiskunde en mechanica

Volledige betrekking of voor geringer aantal lessen per week.
Salaris volgens rijksregeling. Sollicitaties met uitvoerige inlichtingen binnen 10 dagen na het verschijnen van dit blad aan burg. en weth. Inlichtingen verstrekt de directeur (Petrus Driessenstraat 3, tel. 20515).

GEMEENTELIJK INSTITUUT

VOOR MIDDELBARE AKTEN IN DE EXACTE VAKKEN
te 's-Gravenhage

Nieuwe Duinweg 6-14, tel. 55.77.18

Avondcursussen voor de M.O.-akten:

WISKUNDE A

WISKUNDE B

NATUUR- en SCHEIKUNDE A

Aanmelding en/of inlichtingen bij de rector, Drs. H.J. Stammer, die daarvoor elke dinsdag van 19 tot 20 uur in het gebouw Nieuwe Duinweg 6-14 spreekuur houdt.

C. J. Alders

complete serie
WISKUNDE

P. Noordhoff

D.K.F. Heyt, Nieuweschoolalgebra van Wijdenes en Beth

Voor V.H.
en M.O.

I (22e druk) — f 4,25 IIIB (21e druk) — f 3,80

II (20e druk) — f 4,60 IV α * (2e druk) — f 3,60

IIB (21e druk) — f 3,60 IVB (14e druk) — f 5,90

antwoorden bij elk deel. Grafiekenschrift - f 0,75

* door P. Wijdenes en W. Nieuwenhuyse



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Wiskundeboeken voor het V.H.M.O.

Dr. H. Streefkerk

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M.O. EN V.H.O.

I (4e druk) f 3,25 - II (4e druk) f 3,50 - III (3e druk) f 3,75

„De boeken munten uit door strenge en tegelijk duidelijke behandeling van de theorie. In de aanhangsels wordt nog eens dieper op enkele moeilijke kwesties ingegaan.”

(Weekblad van het „Genootschap”)

Dr. D. J. E. Schrek

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

3e druk, met afzonderlijk antwoordenboekje f 3,90, geb. f 4,60

„Een uitstekend boek voor het V.H.M.O. in elk mogelijk opzicht!”

(Nieuw Tijdschr. voor Wiskunde)

Drs. J. C. Kok e.a.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

voor het V.H.M.O. - f 4,40, gekartonneerd f 4,90

„Een korte en prettige behandeling van de differentiaal- en integraalrekening met een serie toepassingen, welke in een afzonderlijk hoofdstuk opgenomen is. Grote aandacht is besteed aan de vraagstukken, die dan ook een aanzienlijk deel van het boek in beslag nemen.”

(Economisch Beheer/Advies)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

ALGEBRA VOOR M.M.S.

2e druk f 3,75

„Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van de verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen... van harte aanbevolen.”

(Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

Deel I (2e druk) - f 3,90

„Hoewel deze boeken niets bevatten, dat men spectaculair zou kunnen noemen, is zowel om hun inhoud als om hun uiterlijke vorm - ik denk ook aan de aardige omslag - een gelukwens voor de schrijvers en de uitgeefster wel op zijn plaats.”

(Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs)



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

De geadverteerde uitgaven zijn verkrijgbaar bij de uitgever en bij de boekhandel