

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962

X - 15 JULI 1962

INHOUD

In Memoriam Dr. D. J. E. Schrek	305
H. G. Brinkman: Welke verwachtingen en desiderata zijn praktisch voor verwezenlijking vatbaar?	306
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	325
Uniforme Symbolen	332
LIWENAGEL	333
Boekbespreking	334
Recreatie	334
Kalender	336

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05000/34906;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

IN MEMORIAM

Dr. D. J. E. SCHREK

Op 25 mei 1962 overleed op 77-jarige leeftijd Dr. D. J. E. Schrek, een van de oprichters van Liwenagel, die tot voor kort er zich op kon beroemen alle vergaderingen te hebben bijgewoond en die bij het 30-jarig bestaan van Liwenagel in december 1950 tot erelid werd benoemd.

Velen zullen de naam Schrek het eerst in hun leven zijn tegengekomen, toen zij zich gingen bezighouden met de analytische meetkunde; zeker geldt dit voor vele generaties B-gymnasiasten, want de „Beginselen der Analytische Meetkunde door Dr. D. J. E. Schrek, leraar aan het stedelijk gymnasium te Utrecht”, waarvan in 1918 de eerste druk verscheen en dat menig maal vrijwel ongewijzigd werd herdrukt, is jarenlang het boek voor de analytische meetkunde op het gymnasium geweest. Het feit, dat er zolang geen andere boeken over deze materie verschenen, is uniek in Nederland en spreekt voor zichzelf.

Dat Dr. Schrek grote belangstelling had voor de didactiek van de wiskunde, zal voor de kenners van zijn boek begrijpelijk zijn. Op de bijeenkomsten belegd door de Wiskunde-commissie van Liwenagel in het najaar van 1921 ter bestudering van het leerplan was Dr. Schrek dan ook niet alleen aanwezig, maar hij was bij de opstelling van het minimumprogramma de secretaris. Inmiddels was Dr. Schrek bestuurslid van Liwenagel geworden, wat hij tot september 1927 is gebleven.

De artikelen, die Dr. Schrek in Euclides publiceerde, getuigden van een andere interesse: de historie van de wiskunde. Zijn eerste artikel verscheen in de eerste jaargang en was getiteld: Het cultuur-historisch element in het wiskunde-onderwijs. Het is nog steeds actueel en de moeite van het lezen waard. Ook zijn latere artikelen gaan meestal over historische onderwerpen en daarvan kan hetzelfde gezegd worden.

Nog zou gewezen kunnen worden op zijn werk op internationaal terrein, en zijn uitgebreide kennis van de onderwijstoestanden in het buitenland.

Maar voor de leden van Liwenagel zal hij blijven de trouwe, bijzonder hoffelijke en vriendelijke en tegelijk van grote eruditie getuigende persoonlijkheid, die wij node zullen missen.

D. Leujes

HET WISKUNDEONDERWIJS IN HET V.H.M.O. VAN MORGEN ¹⁾

WELKE VERWACHTINGEN EN DESIDERATA ZIJN PRAKTISCH VOOR
VERWEZENLIJKE VATBAAR?

door

H. G. BRINKMAN

GRONINGEN

Sedert jaren kennen we een beweging, genaamd de beweging voor onderwijsvernieuwing, die tot doel heeft de methoden in ons gehele onderwijs meer te laten voldoen aan de eisen, die men meent te moeten stellen op grond van nieuwe inzichten, verkregen door studie van de psychologie, de didactiek en de pedagogie. Een belangrijke rol speelt hierbij de Werkgroep voor Wiskunde van de W. V. O., de Werkgemeenschap voor vernieuwing van opvoeding en onderwijs. Ook de Pedagogische Studiecentra zijn actief.

Een poging tot vernieuwing van het wiskundeonderwijs bij het V.H.M.O. werd ingeluid met het verschijnen van het rapport van de Leerplan-Commissie-1954 van Wimecos. Zij kreeg haar beslag met de invoering van een nieuw leerplan in 1958. Het betrof hier, naast wijzigingen in de leerstof, didactische verbeteringen.

De veranderingen, waar we nu over spreken, hebben zowel betrekking op de didactiek als op de methodiek en de omvang van de leerstof.

Een der eersten in ons land, die heeft gewezen op de wenselijkheid van een nieuwe oriëntering van het onderwijs in de wiskunde, was Prof. van Dantzig, in zijn rapport voor het Internationaal Congres van Wiskundigen in september 1954 te Amsterdam.

De titel van het rapport luidde: The function of mathematics in modern society and its consequences for teaching mathematics [9].

Hij wees op de sterke groei van het gebied waar wiskunde toegepast wordt, vooral in de laatste twintig jaar, en de daarmee gepaard gaande grote vraag naar wiskundigen en naar mensen, die in staat zijn bepaalde soorten wiskunde toe te passen in vakken buiten de wiskunde. Als belemmering bij het voldoen aan deze vraag noemde hij het niet aangepast zijn van ons leerplan aan de ontwikkeling van de wiskunde in de laatste decennia. Als belemmering bij het

¹⁾ Voordracht gehouden op de vakantiecursus 1960 van het Mathematisch Centrum.

wegnemen van dit defect noemde hij de neiging tot perfectionisme bij veel leraren en de onjuiste opvatting van wat men onder zuivere wiskunde verstaat. Deze laatste komt voort uit de miskennen van het feit dat grote stukken van wat we nu zuivere wiskunde noemen, vroeger toegepaste wiskunde was.

Iemand, die zeer duidelijk heeft gezien waar de drang tot veranderingen in het leerplan hun oorsprong vinden, is Prof. Gerretsen [14].

Hij zegt in een artikel in *Euclides* van 1958:

„We leven nog sterk in een traditie, we belijden nog het ideaal van een humanistische vorming, terwijl zich twee formidabele machten ontwikkelen, waar enerzijds de nadruk wordt gelegd op industrialisering ter verhoging van de materiële levensstandaard, anderzijds alle krachten worden geconcentreerd ter verhoging van macht: Wij staan thans voor de dwingende opgaaf ons grondig te bezinnen op een volkomen nieuwe didactiek, waarbij men niet moet terugschrikken voor zeer progressieve veranderingen in het programma”.

In de Verenigde Staten is in opdracht van de „College Entrance Examination Board” werkzaam de „Commission on Mathematics.”

De voorzitter van deze commissie is Prof. Tucker een hoogleraar van de Universiteit van Princeton, die zich bezig houdt met speltheorie en lineaire programmering, dus met toepassingen van de wiskunde in de economie. Deze Commissie heeft in 1959 een rapport [18] gepubliceerd getiteld: *Program for College preparatory mathematics*.

De Commissie Tucker meent, dat de leerstof voor de wiskunde bepaald dient te worden door de eisen van de wiskunde zelf, door die van de natuur- en scheikunde, door de sociale en economische wetenschappen, door de biologische wetenschappen, door de technologische wetenschappen, door de ingenieursstudie en door de industrie.

Misschien zult u denken: de Amerikanen zijn geschrokken van de Russische successen bij de ruimtevaart en nu slaan ze door van het ene uiterste in het andere. Het was immers bekend dat het onderwijs in de wiskunde aan de meeste highschools op een laag peil stond.

De Commissie Tucker is zich bewust van deze opvatting. Zij vindt het daarom nodig duidelijk te vermelden, dat zij haar werk begon in augustus 1955 en dat de eerste spoetnik gelanceerd werd ruim twee jaar later (13 november 1957). De opwindiing, die dit veroorzaakte heeft er toe bijgedragen, dat het publiek beter is gaan inzien, dat er veranderingen in het onderwijs noodzakelijk zijn.

Ik weet niet of het u gegaan is zoals mij, toen ik in *Euclides* las: *Verslag van het Seminarium „New Thinking in School Mathematics” van de O.E.E.S.* [17]. Het verslag vond ik zeer interessant, maar het

verband tussen de O.E.E.S. en een seminarium over wiskunde-onderwijs was mij niet duidelijk. Toevallig kreeg ik een foldertje in handen over de O.E.E.C., the Organisation for European Economic Co-operation, de Engelse naam voor de O.E.E.S. Tot haar doelstellingen behoort „Scientific Training”. Er wordt over gezegd „To keep her leading position, Europe must have large numbers of highly trained scientists and technicians. O.E.E.C. has set up a special Office to ensure that Europe's needs in this skilled personnel are met both in quantity and in quality”. De samenhang was nu wel duidelijk.

De bedoeling van deze lange inleiding was om u aan te tonen, dat het invoeren van een nieuw leerplan een zaak is, die ver uitgaat boven de belangen van de school alleen.

Welke veranderingen moeten aangebracht worden?

Gisteren en vandaag hebt u verschillende wensen daaromtrent kunnen horen. Ook bij andere gelegenheden zijn bepaalde verlangens geuit. Ik verwijs daarvoor naar de literatuurlijst, [7], [9], [11], [14], [16], [17], [21], [23], [25].

Eigenlijk is de voorlichting, die het Mathematisch Centrum u op deze vakantie cursus geeft, wat eenzijdig. De wensen van het hoger onderwijs zijn toegelicht door Prof. Peremans, Prof. Kuiper en Prof. Duparc. De heren zijn weliswaar alle drie werkzaam aan hogescholen, maar ik heb niet de indruk gekregen, dat zij alleen de belangen van het wiskundeonderwijs aan deze instellingen op het oog hadden. Integendeel, de voordracht van Prof. Peremans had een fenomenologisch tintje, Prof. Kuiper hield, wat we van een geometer konden verwachten, een beeldrijk betoog, dat het ook goed gedaan zou hebben als gastcollege over de didactiek van de wiskunde aan een seminarie voor leraren en de wensen van Prof. Duparc zijn bepaald matig te noemen, zodat we deze keer niet kunnen zeggen: „Delft zit er weer achter”.

De verlangens van de zijde van de wiskundeleraren zijn bij andere gelegenheden al eens kenbaar gemaakt door de Heren Streefkerk en Van Hiele [21], [16]. Wie zijn dan nog niet gehoord?

De vertegenwoordigers van de biologische, de sociale en de economische wetenschappen, waarbij ik bij de laatste vooral denk aan de econometrie, en de vertegenwoordiger van de industrie.

Voor het verkrijgen van een goed overzicht lijkt het mij gewenst een verdeling in drieën te maken.

A veranderingen, die in hoofdzaak betrekking hebben op de didactiek in engere zin en de methode,

B uitbreiding van de leerstof in de breedte,

C uitbreiding van de leerstof in de diepte.

Het is niet mogelijk om steeds een scherpe scheiding te maken.

Wilt u daar rekening mee houden bij de beoordeling van de volgende schets?

A 1 aanpassing van de notatie aan die van de moderne wiskunde

Invariantentheorie, differentiaalmeetkunde en tensorrekening bewijzen, dat de wiskundigen in het bedenken van notaties zeer geraffineerd zijn. Wie een tijd lang deze vakken heeft bestudeerd, krijgt een zekere vlotheid in het gebruik van de notatie, hij voelt er zich prettig bij. Waarom? Omdat het gebruik van zo'n notatie voert tot automatisch opereren, zoals Prof. Peremans al heeft besproken. Het leven van de wiskundige wordt er gemakkelijker door.

Met behulp van een goede notatie kunnen de bereikte resultaten overzichtelijk worden opgestapeld en kunnen nieuwe problemen doeltreffend worden benaderd.

Twee voordelen: het verkregene wordt geordend en hetgeen onderzocht moet worden wordt beter toegankelijk.

Voor een volwassene zijn deze voordelen belangrijk genoeg om zich de moeite te geven een nieuwe notatie eigen te maken, d.w.z. zich onderwerpen aan een systematische denkdwang van buiten.

Hoe staat een leerling tegenover het gebruik van symbolen? Welwillend, als ze maar niet te groot worden. De beide voordelen wegen voor hem niet zwaar, vooral niet in de lagere klassen. De leraar zorgt er wel voor, dat het gevoel van denkdwang ver weg blijft uit zijn bewustzijn. Er is een zeer aantrekkelijke kant aan het gebruik van symbolen: het spelelement.

A 2 verbetering van de nomenclatuur.

Hierover kan ik kort zijn. We hebben onze nomenclatuur-commissies. Hun rapporten zijn onlangs gepubliceerd. Hun taak is nog niet geëindigd.

A 3 verbetering van de discipline bij het gebruik van de moedertaal in de wiskunde.

Als we de moedertaal gebruiken in de wiskunde moeten we direct zijn en overbodige effecten vermijden. „Grote schoonmaak houden”, zegt Prof. Kuiper. Als ik hem goed begrepen heb bedoelt hij daar vooral mee opruimen. Nu moet je met opruimen altijd erg voorzichtig zijn. Daar komt vaak ruzie van. Luistert u maar, het rommelt al.

In Euclides 1940, jrg. 16, no. 4, schreef de geometer Prof. Gerretsen, dat de uitdrukkingen „op den duur” en „voldoend dicht bij” bijzonder geschikt waren om te gebruiken bij de behande-

ling van limieten.

In Euclides 1940, jrg. 17, no. 2, noemde de geometer Prof. Heyting, de vondst van Prof. Gerretsen een voorbeeld van goede didactiek.

Nu wil de geometer Prof. Kuiper deze uitdrukkingen krachtadig uit de wereld helpen. Schoonmaakprobleem!

Men zou kunnen vragen, waarom zijn het allemaal geometers, die zich in deze zaak mengen? Misschien is er in de meetkunde veel op te ruimen? A bas Euclide!

Persoonlijk voel ik in dit geval het meest voor opruimen, maar dan in het bijzijn van de leerlingen en wel in de volgende vorm. Eerst wordt een definitie van limiet gegeven, waarbij op neutrale wijze gebruik wordt gemaakt van de moedertaal, b.v. de ε - δ definitie. Let wel definitie, niet ε - δ techniek. Dan, na enige lessen, wordt aangetoond hoe men de uitdrukkingen „willekeurig weinig” en „voldoend dicht” met behulp van deze definitie een precieze betekenis kan geven. De bedoeling hiervan is natuurlijk om te laten zien, dat het suggestieve element in de taal met behulp van de wiskunde, als het nodig is, onschadelijk gemaakt kan worden.

Een ander voorbeeld hiervan, in de mechanica, is het laten tekenen van de baan van een vrij vallend massapunt, waarop „plotseling” een horizontale kracht gaat werken.

In hoeverre is het aan te bevelen een suggestief gebruik te maken van de moedertaal in de wiskunde als daarmee een didactisch doel wordt beoogd?

Mijn ervaring is, dat wanneer ik het wel doe de resultaten, voorzover direct meetbaar, beter zijn, dan wanneer ik het niet doe. Toch lijkt mij hetgeen Prof. Kuiper wil aan te bevelen. Waarom? Omdat er een doel mee wordt beoogd, dat verder reikt dan de wiskunde, n.l. dat met een modewoord genoemd wordt, de bevordering van het zindelijk denken.

Misschien zal Prof. Freudenthal, nu in de rol van vierde geometer, sceptisch staan tegenover de mogelijkheid van verbetering. Hij zegt immers, weliswaar zonder nadere toelichting, dat de wiskundeleraren, als zij meetkunde onderwijzen, graag beunhazen op moedertaalkundig terrein. Of moeten we deze bewering van een van onze beste pamflettisten [12] alleen maar opvatten als een middel om te chargeren?

A 4 het centraal stellen van de begrippen verzameling, variable, functie en relatie en het zichtbaar maken van structuren.

Het meeste van wat u hier gehoord hebt ging over deze kwestie.

De leraren in Nederland zijn daar al tientallen van jaren mee bezig. De moeilijkheid zit hier in het grote verschil in aanleg, de mate van rijpheid en de belangstelling van onze leerlingen. De resultaten liggen tussen de grenzen het lukt niet helemaal en het lukt helemaal niet. De term centraal stellen is te vaag. We moeten nauwkeuriger aangeven hoe ver we willen gaan. Gisteren en vandaag zijn over deze kwestie gedetailleerde wensen kenbaar gemaakt. Het zal blijken, dat we met de ene groep leerlingen veel verder kunnen gaan, dan met een andere groep. Hieruit volgt, dat het nodig is, het onderwijs in de wiskunde, in de hoogste klassen te differentiëren. En dit is nu iets dat men in ons land niet inzielt of niet wil inzien.

Zolang men niet gaat differentiëren kan men van een progressieve verandering niet spreken. De heer Streefkerk heeft er in 1958 [21] nadrukkelijk op gewezen. Prof. van der Blij heeft op het Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen in april 1960 op de noodzakelijkheid van differentiatie gewezen.

Ik heb er in 1950, in een verslag over een internationale conferentie over het wiskundeonderwijs te Baarn al eens op gewezen. Maar men klopt hier aan dovemansoren. Hoe ik mij die differentiatie denk zult u verderop horen.

Ook leent het centraal stellen van deze begrippen zich uitstekend voor selectie van de leerlingen, zelfs in de lagere klassen.

A 5 het meer beklemtonen van de deductieve methode

Over dit punt denken lang niet allen gelijk.

Natuurlijk moet elke leerling een goed inzicht hebben in de methode. Hij moet ze in een groot aantal gevallen hebben leren toepassen. Maar het is niet juist, als de leraar dit op de spits drijft. Het is ook niet juist te denken, dat de leerlingen met de beste aanleg voor wiskunde een onlesbare dorst hebben naar het gebruik van de deductieve methode. Het weten van de uitkomst is voor hen vaak veel belangrijker. Er zijn leraren, die bij elk vraagstuk over de extreme waarden van de kwadratische vorm ax^2+bx+c willen horen hoe men aan de uitkomst komt. Dat is geen neiging tot perfectionisme meer, dat is perfectionisme.

A 6 het gebruik maken van formele logica

Dit punt sluit aan bij A 4.

We moeten bij het gebruik van de moedertaal in de wiskunde direct zijn en we moeten overbodige effecten vermijden. Hoe weten we of we aan deze eisen voldoen? Hoe ziet het model eruit, dat hier-

bij past en waar is de automaat?

„In der Mathematik würde es heute als eine Utopie gelten, wollte man beim Aufbau einer mathematischen Disziplin sich nur der gewöhnlichen Sprache bedienen. Die groszen Fortschritte, die in der Mathematik, z.B. in der Algebra, seit der Antike gemacht worden sind, sind zum wesentlichen Teil mit dadurch bedingt, dass es gelang, *einen brauchbaren und leistungsfähigen Formalismus zu finden*. Was durch die Formelsprache in der Mathematik erreicht wird, das soll auch in der theoretischen Logik durch diese erzielt werden, nämlich eine exakte, wissenschaftliche Behandlung ihres Gegenstandes. Die logischen Sachverhalte, die zwischen Urteilen, Begriffen, usw. bestehen, finden ihre Darstellung durch Formeln, deren Interpretation *frei ist von den Unklarheiten, die beim sprachlichen Ausdruck leicht auftreten können*. Der Übergang zu logischen Folgerungen, wie er durch das Schlieszen geschieht, wird in *seine letzten Elemente zerlegt* und erscheint als formale Umgestaltung der Ausgangsformeln nach gewissen Regeln, die den Rechenregeln in der Algebra Analog sind; das logische Denken findet sein Abbild in einem Logikkalkül“.

U hebt gehoord een stuk uit de inleiding van de Grundzüge der theoretischen Logik van Hilbert-Ackermann.

U weet waarom het gaat. Prof. Freudenthal heeft het duidelijk uiteengezet in zijn artikel „Logica als methode en als onderwerp” [11].

Het is nodig, dat de leraren de theoretische logica bestuderen en dat de logische symboliek op school systematisch wordt toegepast.

Het hoogste ideaal van het V.H.M.O., wordt er mee beoogd: diepte geven aan de algemene vorming.

Het is nodig, dat de leraren de logische vorm kennen van de vakken, die zij onderwijzen. Dan kunnen zij zich een goed gefundeerd oordeel vormen over de graad van moeilijkheid, het niveau, van het vak. Meestal gebeurt dat langs empirische weg, maar het is niet zeker of de proeven, die men neemt, wel goed gericht zijn, zolang men de logische vorm van het vak niet weet.

De didactiek van de wiskunde heeft als theoretisch basis de formele logica.

Prof. Freudenthal is erg pessimistisch ten aanzien van de kans op vervulling van zijn wens. Hij beklagt er zich over, dat zijn voorstel om bij de M.O.examens symbolische logica te vragen, in de prullemand is gegaan.

Ik deel zijn pessimisme niet geheel. Het lijkt mij niet uitgesloten, dat op een goede dag zijn voorstel toch wordt overgenomen. Bij het

voorschrijven van een leerboek voor projectieve meetkunde voor de M.O.-A studie is men immers van het ene uiterste in het andere vervallen. De Commissie schrikt dus niet terug voor ingrijpende veranderingen. Of ze zich daarbij wel voldoende rekenschap geeft van het feit, dat ze de mogelijkheid tot efficiënt werken van opleiders en cursisten ernstig in gevaar brengt, meen ik te moeten betwijfelen.

Er zijn cursussen in ons land, waar aan de cursisten wordt aangeraden te lezen de Einführung in die mathematische Logik van Tarski, in 1937 te Weenen verschenen [22]. Het boek is door Prof. Beth vertaald en bewerkt. Het niveau is niet dat van Hilbert-Ackermann, maar als inleiding lijkt het mij zeer geschikt. Er staan ook vraagstukken in. Het zou op een seminarium voor leraren tot de verplichte lectuur moeten behoren ¹⁾.

A 7 aandacht schenken aan de vraag, waarom wiskunde toepasbaar is.

Prof. Peremans heeft daar uitvoerig over gesproken.

Aan de vragen van leerlingen, wat is wiskunde en waarom moeten we wiskunde leren, wordt vaak te weinig aandacht besteed.

A 8 verbetering van de voorbereiding op een zelfstandige studie aan universiteit of hogeschool.

Men hoort ernstige klachten:

Het V.H.M.O. houdt het publiek een façade voor, waarachter zeker vijf ernstige tekortkomingen in zijn resultaten verborgen worden

- a) het intellect van de gemiddelde abiturient is waarschijnlijk niet minder dan vroeger, maar het is onvoldoende geoefend,
- b) het vermogen om door te zetten, wat het bereiken van intellectuele prestaties betreft, is slecht ontwikkeld; van de kant van het V.H.M.O. wordt veel te weinig gedaan om dat vermogen te ontwikkelen,
- c) het vermogen om zich goed uit te drukken is er niet bij de gemiddelde abiturient, de behoefte eraan ontbreekt meestal ook,
- d) er wordt de leerlingen geen efficiënte wijze van werken geleerd,
- e) er wordt de leerlingen niet geleerd zelfstandig te werken.

Het zou mij te ver voeren op deze klachten in te gaan. Ze betreffen niet alleen het onderwijs in de wiskunde, maar het gehele V.H.M.O.

Wat de wiskunde aangaat is geen verbetering te verwachten, zolang men het systeem van de fictief homogene klassen handhaaft.

¹⁾ verwezen zij verder naar [13].

De verschillen in aard, aanleg, doel, mate van rijpheid en belangstelling van de leerlingen zijn even reëel als de niveauverschillen in de leerstof.

De klachten over een onvoldoende voorbereiding op een zelfstandige studie hebben al ernstige gevolgen gehad. De universiteiten en vooral de hogescholen hebben getracht de gevolgen van dit euvel weg te nemen door ervaren leraren in te schakelen bij de propaedeutische.

B 1 *het behandelen van vectoren.*

Er zijn leraren, die dit al twintig jaar doen, er zijn scholen waar er niets aan gedaan wordt. Alle sprekers hier waren ervoor. Hoever moeten we ermee gaan?

Inproduct, uitproduct en blokproduct wel of niet behandelen?

Ik zou wat verder willen gaan dan Prof. Kuiper en kom dan in het straatje van Prof. Peremans en Prof. Duparc, aangenomen, dat ze in dezelfde straat wonen. Ik weet ook niet of ik welkom ben.

Prof. Duparc beklagt er zich over, dat elk jaar bij de stereometrie de vragen gekoppeld worden aan bekende eenvoudige lichamen. Hij heeft er bezwaar tegen, dat de berekeningen, die dit meebrengt altijd van dezelfde soort zijn. Dus vraagstukken in de trant van:

gegeven een kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$ met een ribbe van 4 cm

bereken de afstand van AC en DE.

Waarschijnlijk zou hij de vraag algemeen gesteld willen zien in de gedaante

$$l: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad \text{en} \quad m: \vec{x} = \vec{c} + \mu \vec{d},$$

dus l heeft tot steunvector $\vec{a}$ en tot richtingsvector $\vec{b}$

en m heeft tot steunvector $\vec{c}$ en tot richtingsvector $\vec{d}$,

(een prachtige vondst van de Heren Bijl, Kijne en Salet, die namen steunvector en richtingsvector!),

bereken de afstand van l en m .

Voor het antwoord stelle men de automaat $\left| \frac{(\vec{a}-\vec{c}, \vec{b}, \vec{d})}{|\vec{b} \times \vec{d}|} \right|$ in werking,

een functie gedefinieerd op de verzameling van alle lijnenparen in de ruimte.

Wat is er gebeurd. Ik heb wiskunde toegepast in de wiskunde.

Bij een steeds weer terugkerend verschijnsel in de vraagstukkenverzamelingen over stéreometrie is een model geconstrueerd. Dus uitprodukt en blokprodukt erbij, om meer armslag te krijgen.

Ook omdat het uitprodukt in de natuurkunde wordt gebruikt moeten we het wel behandelen. Trouwens er is nog een andere reden. Het is een aanschouwelijk voorbeeld van een niet-commutatieve vermenigvuldiging.

B 2 *complexe getallen*

B 3 *determinanten* Alleen maar van de tweede en derde graad.

B 4 *foutentheorie*

B 5 *grafisch oplossen van vergelijkingen*

B 6 *gebruik van rekenlineaal en logaritmisch papier, e.d.*

B 7 *differentierekening voor de sommatie van rijen en de behandeling van interpolatiemethoden*

Over deze punten is hier nog niet gesproken. Het is een wens o.a. uit de hoek van de economie.

B 8 *combinatoriek*

Een onderwerp, dat vroeger wel eens behandeld werd. In verband met de vermindering van het aantal lesuren voor de wiskunde in de loop van de jaren, wordt er weinig meer aan gedaan.

B 9 *statistiek*

Zoals u ziet, behoudens B 1 en B 2 allemaal onderwerpen behorende tot de numerieke wiskunde.

C *uitbreiding van de leerstof in de diepte*

C 1 *moderne algebra*

C 2 *axiomatiek*

C 3 *topologie*

U moet daarbij niet denken, dat gevraagd wordt de behandeling van een hoofdstuk uit Van der Waerden of uit Alexandroff-Hopf.

Bij de veranderingen onder A is ter sprake gekomen de wenselijkheid van het gebruik van symbolen uit de topologie en de behandeling van de algebra op een wijze, waarbij de structuren zichtbaar werden. Dit zou dan moeten gebeuren, zonder een aparte behandeling van de moderne algebra en de topologie.

Dit is niet bevredigend voor de goede leerlingen.

Natuurlijk is het niet mogelijk om deze vakken op de school werkelijk te behandelen, zij horen thuis bij het hoger onderwijs.

Maar wel is mogelijk te zorgen voor een eerste kennismaking.

Er verschijnen de laatste tijd in enkele landen elementaire inleidingen in de moderne algebra en de topologie en andere onderwerpen uit de moderne wiskunde [6], [10], [19], [24], geschikt voor de goede leerlingen in onze hoogste klassen.

Zo'n kennismaking heeft het grote nut dat de leerling een beeld krijgt van wat hem te wachten staat als hij verder wil studeren in een richting met de wiskunde als een van de voornaamste studievakken. Het bestuderen van dergelijke inleidingen in groepsverband leent er zich uitstekend toe A 8, de voorbereiding op een zelfstandige studie aan universiteit of hogeschool tot haar recht te laten komen. Bij voorkeur een van de inleidingen in een vreemde taal.

Wat de axiomatick betreft, u weet hoe de toestand op het ogenblik is uit de talrijke verhandelingen, die daarover in Euclides zijn verschenen.

Men wil o.a. trachten de defecten uit de axioma's van de meetkunde van Euclides weg te werken op een zodanige manier dat er een logisch zuiver stelsel ontstaat, dat binnen het bevattingsvermogen van onze leerlingen ligt.

Over andere axioma-stelsels, die binnen het bevattingsvermogen van de leerlingen liggen horen we nog niet veel.

Van welke veranderingen uit groep A weten we, uit ervaring, iets over hun uitvoerbaarheid?

A 1 en A 2 zijn uitvoerbaar voor alle leerlingen, A 3, A 4 en A 5 geven moeilijkheden in onze fictief homogene klassen, met A 6 en A 7 hebben we geen ervaring, A 8 is onder de huidige omstandigheden niet uitvoerbaar op een bevredigende wijze.

Van de veranderingen van groep B mogen we verwachten, dat ze uitvoerbaar zijn, zelfs bij middelmatige leerlingen. Wij hebben weliswaar geen of weinig ervaring hiermee bij het V.H.M.O., maar bij andere soorten onderwijs is gebleken, dat deze verwachting gegrond is.

Met de veranderingen van groep C hebben we geen ervaring.

Vanaf de eerste klas moet met de gehele groep A rekening gehouden worden. De veranderingen van groep B en C hebben betrekking op het onderwijs in de beide hoogste klassen.

Aangezien het hier gaat om diep ingrijpende veranderingen, is het nodig dat er eerst experimenten worden genomen.

In de eerste plaats houde men bij het opstellen van deze experimenten in het oog, dat zij tot doel hebben, het verkrijgen van een duidelijk beeld van een leerplan, dat wat didactiek en methode betreft, ideaal is. Pas in een volgend stadium komt de vraag aan de orde hoe zo'n leerplan organisatorisch is te realiseren.

Factoren, waarmee men rekening moet houden bij het aanbrengen van veranderingen.

1 aard, aanleg, doel, mate van rijpheid en belangstelling van de leerling,

2 niveau van de leerstof

Zoals ik al enige malen heb gezegd ben ik van mening dat rekening houden met deze factoren betekent differentiatie van het wiskunde onderwijs in de beide hoogste klassen.

Differentiatie in drie afdelingen zou gewenst zijn.

Afdeling B W 1, met een leerplan, waarin alle veranderingen onder A, B, en C zijn aangebracht,

Afdeling B W 2, met een leerplan waarin alle veranderingen onder A en B zijn aangebracht,

Afdeling B W 3, met een leerplan waarin alle veranderingen onder A en B 9 zijn aangebracht.

Er is van de veronderstelling uitgegaan dat we met een B-afdeling van het V.W.O. te maken hebben.

De indeling komt in grote trekken overeen, met die van Prof. van der Blij [7].

Let men op het doel van de leerlingen dan zou men kunnen zeggen

B W 1 voor leerlingen, die wiskunde, natuurkunde of astronomie gaan studeren,

B W 2 voor a.s. studenten in de scheikunde, de technologische wetenschappen of de technische wetenschappen, de economie (kwantitatieve richting) en de landbouwwetenschappen (natuurkundige richting),

B W 3 voor alle anderen.

3 de beschikbare tijd

Hoeveel tijd zal nodig zijn?

Om aan de eisen A, B en C te voldoen, zal nodig zijn een vermeerdering van 30 % van het totaal aantal uren, dat nu voor de wiskunde beschikbaar is, bij het V.H.M.O. dus.

Dit is het percentage, waartoe de betrokken vakgroepen van leraren gekomen zijn. Om alleen aan de eisen onder A te voldoen, zal mits differentiatie in I, II en III wordt doorgevoerd, met het bestaande aantal uren kunnen worden volstaan. In het wetsontwerp V.O. is aan alle V.W.O.scholen een zesjarige cursus gegeven. Enkele jaren geleden zijn er binnen de leraarsverenigingen uitvoerige discussies geweest over de duur van de cursus. Het scheen alsof de

meerderheid der leraren voor een zesjarige cursus voor alle schooltypen was en dat zij die voor een vijfjarige cursus waren zich hadden neergelegd bij de mening van de meerderheid, die in besluiten, bestaande uit het aannemen van rapporten, was vastgelegd.

Uit recente berichten blijkt dat dit laatste niet juist is. In het rapport van de Commissie voor de Eindexamens van de Raad van Leraren wordt opgemerkt, dat zolang 25 % van de leerlingen het eindexamen in de daarvoor bestemde tijd weet af te leggen, niet van overlading gesproken kan worden en een verlenging van de cursusduur van vijf tot zes jaar op grond hiervan niet geboden is. Uit het Voorlopig Verslag over het wetsontwerp V.O. blijkt, dat aan verschillende zijden in de Kamer bezwaren bestaan tegen een zesjarige cursusduur voor alle typen van V.W.O.scholen. Of de gestelde eisen dus voor verwezenlijking vatbaar zijn zal in hoge mate afhangen van de beslissingen, die de Kamer neemt over dit wetsontwerp. Van belang is ook, dat we ons goed op de hoogte houden van de toestand in naburige landen. Zoals u weet wordt via de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde contact onderhouden.

4 het aantal beschikbare leraren.

Zijn er voldoende leraren beschikbaar om dit verzwaarde leerplan uit te voeren?

Momenteel waarschijnlijk niet.

Al jaren lang gaan leraren met veel ervaring, die het leerplan zouden kunnen uitvoeren, van het V.H.M.O. over naar het H.O.

Ik heb al gewezen op een van de oorzaken daarvan. De aanvulling van het V.H.M.O. met jonge academisch gevormde leraren is gering. De industrie en de instituten voor wetenschappelijk onderzoek zijn de zware concurrenten. Ongunstig werkt ook, en dit geldt vooral voor de wiskunde, dat vele jonge academici het gevoel hebben, dat ze bij het V.H.M.O. hun wetenschap niet aan de man kunnen brengen. Hun wijzen op de grote gebieden van de didactiek, die nog niet ontgonnen zijn, heeft weinig verbetering als gevolg. Misschien zou een flinke dosis numerieke wiskunde op het leerplan een attractie vormen.

De aanvulling van het V.H.M.O. met leraren met middelbare akten is ook onvoldoende.

Ook hier zijn de industrie en de instituten voor wetenschappelijk onderzoek de zware concurrenten.

Bezitters van een diploma wiskunde M.O.-A kunnen, op voor hen aantrekkelijke voorwaarden, buiten het onderwijs een betrek-

king vinden. Afgezien van de moeilijkheden, die dit meebrengt voor de bemanning van het V.H.M.O. met wiskundeleraren, is de vergrote mobiliteit van mensen met wiskundekennis zeer toe te juichen. De afstand tussen school en maatschappij wordt er kleiner door.

Voor de meeste leraren in functie geldt dat op het programma van de verplichte vakken voor hun opleiding de moderne algebra, de topologie en de formele logica niet voorkwamen.

Gelukkig worden er van verschillende kanten pogingen gedaan om daarin verbetering te brengen. Bijvoorbeeld:

de voordrachtenserie „Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht” georganiseerd door het Mathematisch Centrum, de Oriënterende cursus „Wiskundige Statistiek” eveneens van het Mathematisch Centrum,

de vakantiecursussen van het Mathematisch Centrum, avondcolleges voor leraren aan enkele universiteiten, regelmatige bijeenkomsten van studiegroepen, voordrachten op jaarvergaderingen van vakgroepen, talrijke artikelen over moderne wiskunde in de tijdschriften.

U ziet aan initiatieven ontbreekt het niet.

Toch blijven er nog wel enige wensen te vervullen.

De geografische spreiding van de cursussen van het M.C. zou wel wat gelijkmatiger kunnen zijn.

De gegeven stof is te fragmentarisch.

Zeer welkom is daarom de verschijning van twee volledige handboeken voor leraren, die op de hoogte van de tijd geacht mogen worden, [2], [4], [5].

De meeste vakkennis zal wel moeten worden opgedaan door individuele studie thuis.

Er is behoefte aan een programma voor voortgezette studie. De bibliografie in de tijdschriften zou aanwijzingen kunnen bevatten over de wijze, waarop de gerecenseerde boeken het best bestudeerd kunnen worden.

Er is behoefte aan een handboek voor de didactiek van het wiskundeonderwijs in Nederland.

Vermoedelijk zal het samenstellen daarvan op onoverkomelijke praktische bezwaren stuiten.

Als gedeeltelijk substituut daarvoor zij verwezen naar de boeken van Behnke [3] en Drenckhahn [8].

5 het verkrijgen van geschikte leerboeken.

U hebt kunnen lezen, dat in Royaumont een resolutie is aange-

nomen, waarin de O.E.E.S. wordt verzocht een commissie samen te stellen om voorlichting te geven bij het schrijven van leerboeken. De commissie moet binnen drie jaar met haar werk klaar zijn.

Dit behoeft niemand ervan te weerhouden leerboeken in nieuwe stijl te schrijven. Het is verblijdend, dat er in ons land al enige verschenen zijn ¹⁾).

6 het bestaan van een leraarsopleiding

De grootste barrière op de weg naar de instelling van een zelfstandige leraarsopleiding is geweest het rapport van de Staatscommissie tot Reorganisatie van het Hoger Onderwijs van 1949.

De onbekookte voorstellen van de meerderheid van deze Commissie om de leraarsopleiding te koppelen aan een z.g. leraarsdoctoraal hebben geleid tot heftige reacties van de kant van de leraren, die in gesloten formatie harde klappen gingen uitdelen. Hierbij werd door geen der partijen meer gedacht aan het welzijn van het tere plantje, de leraarsopleiding, waarvan beide partijen beweerden, dat het hun na aan het hart lag. De strijd heeft jaren geduurd. Een zelfstandige leraarsopleiding hebben we nog steeds niet. Dit is een ernstig gemis in een tijd, waarin we op grote schaal experimenten zullen moeten nemen om te weten te komen of de verlangde veranderingen uitvoerbaar zijn.

De belangrijke rol, die een zelfstandige leraarsopleiding hierbij zou moeten spelen, moet nu overgenomen worden door anderen. Ik denk daarbij aan experimenteergroepen, te vormen op basis van vrijwilligheid, door leraren over het gehele land. De medewerking van bestaande universitaire instituten voor pedagogie en didactiek, zou daarbij zeer welkom zijn.

7 de wensen van belanghebbenden buiten de school en de wiskunde

We hebben gehoord, tijdens deze vakantiecursus en ook al eerder welke wensen het hoger onderwijs heeft, zowel van de kant van de zuivere wiskunde als van de kant van de toegepaste wiskunde.

De wensen van enkele vertegenwoordigers van het middelbaar onderwijs kennen we ook.

Het valt op dat de vertegenwoordigers van beide groepen bij hun wensen de bestaande grenzen tussen de leerstof van het hoger en het middelbaar onderwijs nauwkeurig in acht nemen.

Of belanghebbenden buiten de school en de wiskunde overtuigd

¹⁾ voor goede ideeën voor het schrijven van een leerboek zij verwezen naar [15].

zijn van het nut van het handhaven van die grenzen lijkt mij helemaal niet zeker.

Ik heb al eerder gezegd, dat ik hier de vertegenwoordiger van het bedrijfsleven mis.

Op een studiedag voor automatisering, georganiseerd door het C.B.O. (Contactcentrum Bedrijfsleven-Onderwijs) gaf de Heer Euwe een raming van het aantal programmeurs, dat in de komende jaren nodig zou zijn.

In verband met de opleiding van programmeurs uitte hij enige verlangens o.a. behandeling van het binaire stelsel, veel werken met symbolen, letters en indices, bijzondere aandacht voor ingeklede vergelijkingen en voor ingeklede vraagstukken in het algemeen.

Deze bescheiden verlangens zouden binnen het bestaande programma verwezenlijkt kunnen worden.

Het bedrijfsleven zal ongetwijfeld verder gaande verlangens hebben. In Nederland zijn deze, voorzover mij bekend, nog niet geformuleerd. We moeten dus kijken naar het buitenland.

Het is niet duidelijk of de verlangens van het bedrijfsleven alleen maar die uit groep B bevatten, of dat ze algemener zijn. In het eerste geval zou ook aan die verlangens tegemoetgekomen kunnen worden, door aan de bestaande scholen, een topklas toe te voegen, met een up to date programma voor numerieke wiskunde.

Een dergelijke opleiding zou ook geïncorporeerd kunnen worden bij de bestaande M.O.-cursussen.

Het is dus allereerst zaak dat de behoeften van het bedrijfsleven aan wiskundig geschoolden nader geanalyseerd worden.

Men zou kunnen zeggen, een topklas voor de numerieke wiskunde hoort niet thuis bij het V.W.O. Dit heeft immers het karakter van algemeen vormend onderwijs en een dergelijke topklas zou thuishoren bij het vakonderwijs.

Iemand die zo redeneert, begrijpt niet wat de term een progressieve verandering betekent.

8 het inpassen van een nieuw leerplan in de wetgeving.

Als basis neem ik hier weer het ontwerp van wet tot regeling van het V(oortgezet) O(nderwijs).

In de memorie van toelichting op dit ontwerp zegt Minister Cals, dat binnen de richtingen gymnasium α en β en h.b.s. A en B „niet veel ruimte voor verdere differentiatie zal bestaan”.

In dezelfde memorie komt deze passage voor: „— de eind-examens, die niet voor alle leerlingen van een school dezelfde vakken behoeven te omvatten, —”.

Weer ergens anders lezen we:

„Het ligt namelijk in het voornemen van de ondergetekende bij de regeling der eindexamens uit te gaan van een kennisniveau, dat van een grotere verdieping in de leerstof blijkt geeft, dan bij het huidige eindexamen het geval is”.

Als we nu aannemen, dat de Minister met de derde passage o.a. de moderne algebra, de formele logica en de topologie op het oog heeft gehad, dat hij bij de tweede passage aan de gevolgen van splitsing van de B-scholen in drie afdelingen heeft gedacht, dan moet de term differentiatie uit de eerste passage bij hem een andere betekenis hebben, als bij ons. Een andere mogelijkheid is natuurlijk, dat de eerste passage beschouwd moet worden als een invitatie tot het indienen van een van de honderd amendementen, waarop de Minister hoopt. Als we hierover zekerheid hebben, in bevestigende zin, dan is het niet te verwachten, dat er onoverkomelijke moeilijkheden zullen optreden bij het inpassen van een nieuw leerplan in de wetgeving, zelfs als dat leerplan zeer progressief zou zijn. Wat meer duidelijkheid over de mogelijkheden van differentiatie in dit verband is dus wel gewenst.

9 de publieke opinie.

De invoering van het nieuwe leerplan in 1958 heeft, behoudens de meningsverschillen over de wenselijkheid van de statistiek als leervak, weinig beroering gebracht.

Te verwachten is, dat pogingen tot invoering van een leerplan als het hier geschetste wel beroering zullen veroorzaken.

Van de leerlingen en van de leraren zal meer inspanning worden gevraagd. In ons land, met een afwijzingspercentage bij het V.H.M.O. van 30 % soms 40 %, zijn de ouders vervallen in passiviteit ten opzichte van het onderwijs. Een wat zwaardere belasting van de leerlingen zal daarom, behoudens de traditionele felle ingezonden stukken weinig deining geven en zeker niet als het afwijzingspercentage door invoering van differentiatie terug zou lopen.

Prof. Leeman en de Heren Bunt en Vredenduin zeggen in hun verslag over het seminarium van de O.E.E.S.:

„Als laatste vermelden we nog, zij het met enige tegenzin, een resolutie die inhield, dat leraren behoorlijk gesalarieerd moeten worden en onder gunstige omstandigheden hun werk moeten kunnen verrichten.” Die tegenzin is niet algemeen. Sommige vinden dit een misplaatste uiting van bescheidenheid. Zij zeggen: de maatschappij heeft ontdekt, dat kennis van de wiskunde een waardevol

economisch goed is geworden, de leraren moeten dit beter beseffen en bij onderhandelingen over hun beloning een zakelijk standpunt innemen. Dit kan wel beroering brengen.

De grote vraag naar mensen met kennis van wiskunde heeft hun mobiliteit sterk vergroot. Dit geldt nu nog vooral voor jonge mensen. Bij een volgende generatie zal het algemeen gelden.

De schroom van onderwijzers en leraren om het onderwijs te verlaten, kon dan wel eens verdwenen zijn. De erkenning van het feit dat kennis van de wiskunde een waardevol economisch goed is geworden, ook door de overheid, kan alleen maar verhelderend werken. Het zou voorbarig zijn, hier iets te zeggen over de consequenties daarvan. Als elk economisch goed heeft ook dit zijn marktwaarde en deze is bijzonder zuiver omdat het goed niet onderworpen is aan invoerrechten.

De pogingen tot creatie van een V.W.O. school met verzwaard leerplan voor de wiskunde zullen om een heel andere reden ook deiningen veroorzaken. Een dergelijke creatie opent de mogelijkheid tot de vorming van een nieuwe elite. Iedere vorming van een elite wekt weerstanden op. In welke mate hangt er van af op welk standpunt men staat:

wil men naar verdere gelijkheid voor allen,
wil men gelijkheid van kansen voor ieder of
wil men de beste kansen voor ieder.

Ik beschouw het niet als mijn taak daar op deze plaats nader op in te gaan.

Voor het invoeren van een werkelijk progressief nieuw leerplan, zal het deze keer zeker nodig zijn de publieke opinie rijp te maken.

Hoe dit kan geschieden kunt u zien in [1] en [20].

Gezien het feit, dat bij de drang naar vernieuwing verschillende processen moeilijk zijn te controleren, zal ik mij van het geven van een prognose onthouden.

Literatuurlijst.

- [1] Advisory Committee, The President's: Education for the age of science, The White House, Washington, D.C., 1959.
- [2] Alexandroff, P. S., A. I. Markuschewitsch, A. J. Chintschin: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I Arithmetik, Berlin 1954; Band II Algebra, Berlin, 1956; Band III Analysis, Berlin, 1958.
Dit werk zal uit zeven delen bestaan.
- [3] Behnke, H.: Der mathematische Unterricht für die sechzehn-bis einund-zwanzigjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland, Göttingen, 1954.
- [4] Behnke, H., W. Süß, K. Fladt: Grundzüge der Mathematik, Band I, Grundlagen der Mathematik, Arithmetik und Algebra, Göttingen, 1958.

- [5] Behnke, H., F. Bachmann, F. Kladt, W. Süß: Grundzüge der Mathematik, Band II, Geometrie, Göttingen, 1960.
De serie, waartoe [4] en [5] behoren, zal uit vier delen bestaan.
- [6] Beihefte für den mathematischen Unterricht, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- [7] Blij, F. van der: De ontwikkeling van de schoolwiskunde in de komende vijftig jaar, Verslag van het Congres van Leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen, 1960.
- [8] Drenckhahn, F. : Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehn-jährige Jugend in der Bundesrepublik, Göttingen, 1958.
- [9] Dantzig, D. van: The function of mathematics in modern society and its consequences of teaching mathematics, Euclides 1955/56; ook verschenen als monografie, Groningen 1956.
- [10] Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, Kleine: Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [11] Freudenthal, H.: Logica als methode en als onderwerp, Euclides, 1959/60.
- [12] Freudenthal, H.: „In schandblok klemmen – geen overschrijding der normen”, Universiteit en Hogeschool, 1959.
- [13] Freudenthal, H.: Exacte Logica, Haarlem, 1961.
- [14] Gerretsen, J.C.H.: Doelstelling van het wiskundeonderwijs, Euclides, 1958/59.
- [15] Halmos, P.R.: Naive Set Theory, New York – London, 1960.
- [16] Hiele, P.M. van: Nieuwe onderwerpen in de wiskunde, mogelijkheden en criteria, Euclides, 1959/60.
- [17] Leeman, H.T.M., L.N.H. Bunt, P.G.J. Vredenduin: Verslag van het Seminarium „New Thinking in School Mathematics” van de O.E.E.S., Euclides, 1959/60; ook verschenen als monografie, Parijs, 1961.
- [18] Report of the Commission on Mathematics: Program for college preparatory mathematics, College Entrance Examination Board, New York, 1959.
- [19] Schriftenreihe zur Mathematik, Salle Verlag, Frankfurt.
- [20] Soviet schools still closer to life, Bringing, Soviet Booklet no. 44, London, 1958.
- [21] Streefkerk, H.: De toekomst van ons wiskundeonderwijs, Euclides, 1958/59.
- [22] Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik, Wien, 1937. In Nederlandse bewerking van E.W. Beth, Amsterdam, 1953.
- [23] Thijssen, W.J., J.H. Wansink: Het internationale mathematische congres, Euclides, 1958/59.
- [24] Adler, I.: The New Mathematics, New York, 1960.
- [25] School Mathematics Study Group, Yale University, New Haven..

VERSCHEIDENHEDEN

door

PROF. DR. O. BOTTEMA

DELFT

LI. Over het zijbalkon en over Regiomontanus.

In een rechthoekige zaal zijn de plaatsen langs de lange wand weinig aantrekkelijk. Omdat de natuurlijke blikrichting loodrecht staat op de as van het theater, gevoelt de toeschouwer zich blijvend in scheve positie. Als men er, om welke reden dan ook, toch een plaats moet zoeken dan bestaat, zoals uit eenvoudige waarneming blijkt, de neiging uitersten te vermijden, omdat in beide richtingen de nadelen, zij het van verschillende aard, nog schijnen toe te nemen. Wie behoefte heeft op objectieve wijze zijn keus te treffen en voorts de drang bezit om van alles een mathematisch vraagstuk te maken, kan tot de volgende gedachtengang komen. Het geheel spele zich in een plat vlak af en de scène zij gelineariseerd tot een lijnsegment. De vraag is dan uit welk punt P van de zijlijn l het stuk AB relatief het best wordt gezien (fig. 1). Daarbij zijn $MA=MB=a$ en $MC=b$ gegeven. Het lijkt redelijk als gunstigste plaats dat punt P te beschouwen waarvoor de hoek APB maximaal is. Deze opgave is een bijzonder geval van die waaraan Groenman¹⁾

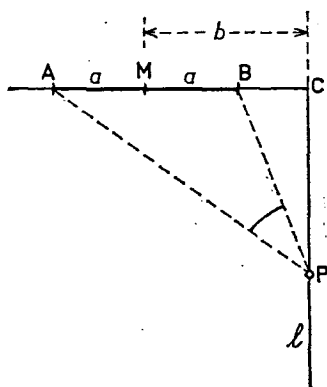


Fig. 1.

¹⁾ J. T. Groenman, Bij een „Verscheidenheid”. Euclides, 37, 1961, 60—64.

in dit tijdschrift een beschouwing heeft gewijd: op de gegeven lijn l het punt P bepalen waarvoor de hoek APB zo groot mogelijk is als A en B gegeven zijn op een lijn m , die met l een willekeurige hoek α maakt. Deze beschouwing was zelf de generalisatie van het uit een vraagstuk der beschrijvende meetkunde voortgekomen bijzonder geval waarbij de hoek α recht is. Dit laatste is klaarblijkelijk identiek met de vraag naar de minst slechte plaats op het zijbalkon. Het kan langs analytische of meetkundige weg worden opgelost. Het antwoord luidt: men neme $CP^2 = b^2 - a^2$; de cirkel door A, B en P moet aan l raken.

Wij komen hier op het vraagstuk terug om enkele opmerkingen te maken over zijn geschiedenis. Het probleem is niet van vandaag of gisteren; het werd bijna vijfhonderd jaar geleden gesteld; om precies te zijn: op 4 juli van het jaar 1471 en wel door Regiomontanus, onder omstandigheden, die nader zullen blijken. Het probleem zelf is van beperkt belang, maar het krijgt historische betekenis omdat voor zover men heeft kunnen nagaan in genoemd jaar voor het eerst na vele eeuwen een wiskundige zich een vraag stelde naar de extreme waarde van een veranderlijke grootheid. Wij delen dit mede op gezag van Cantor, die vermeldt dat het genoemde vraagstuk de eerste maximum opgave is, die men in de geschiedenis der wiskunde is tegengekomen na Apollonius en Zenodorus, dat is dus sinds meer dan zestien eeuwen ¹⁾.

Regiomontanus staat niet alleen naar levensperiode, maar ook naar gesteldheid op de overgang van de late middeleeuwen naar de nieuwe tijd, tussen scholastiek en renaissance. Hij staat kritisch ten opzichte van gangbare methodes, opent nieuwe gebieden, rekent na, verifieert, beoefent toepasbare wiskunde; hij heeft belangstelling voor fundamentele vragen van meetkunde ²⁾, ontwikkelt daarnaast de vlakke en sferische trigonometrie, vooral ook ten behoeve van de sterrenkunde die zijn voorkeur had, en werkt mee aan het maken en verspreiden van tafels.

Daartegenover staat dat hij niet alleen nog leefde in het voor-copernicaanse tijdperk (hij voltooide op verzoek van kardinaal Bessarion een commentaar op de *Almagest*), maar evenzeer astroloog als astronoom was. Als wichelaar werd zijn voorlichting ingeroepen door vorstelijke personen, onder anderen bij de geboorte in

¹⁾ M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bnd. II, 2. Auflage (Leipzig, 1900); S. 283.

²⁾ Zie b.v. D. J. Struik, Het probleem „De impletione loci”, Nieuw Arch. v. W., 2, 15 (1925), 127—128.

1459 van de in onze geschiedenis bekende Maximiliaan, later gehuwd met Maria van Bourgondië en grootvader van Karel V. Andere tegenstelling in zijn betrekkelijk korte leven: terwijl hij in zijn jonge jaren veel tijd gaf aan het copiëren van mathematische geschriften, stichtte hij later in Neurenberg een der eerste drukkerijen, die zich op het uitgeven van wiskundige werken toeleiden.

Wij bezitten een uitvoerige en geleerde levensbeschrijving van Regiomontanus van de hand van Zinner ¹⁾, die met grondigheid en kritische zin alles heeft nagespeurd, zou men zeggen, wat van het onderwerp bekend kan zijn. Het werk berust op rechtstreekse bronnenstudie en legt getuigenis af van onverdroten navorserswerk als ook van een onmiskenbaar medeleven met de uitgebeelde figuur. Toch is het geen voorbeeld van een goede wetenschappelijke biografie; daarvoor is het teveel een opsomming van feitelijkheden en wordt te dikwijls door onbelangrijke uitweidingen de aandacht verzwakt. Een zo door en door betrouwbaar boek werkt uiteraard de-romantiserend: terwijl Cantor als feiten vermeldt dat Regiomontanus tijdens zijn verblijf in Rome tot bisschop benoemd, door een wetenschappelijke tegenstander vergiftigd en in het Pantheon begraven werd, bewijst Zinner dat deze drie mededelingen onjuist zijn of ongegrond.

Johannes Müller werd in 1436 in het stadje Königsberg in Beieren geboren en ontleende aan deze plaats zijn Latijnse naam. Reeds op elfjarige leeftijd werd hij student aan de universiteit van Leipzig en hij bleek daar reeds in staat correcties aan te brengen op de eerste (in 1448) gedrukte astronomische kalender. Twee jaar later trok hij naar Wenen, waar de basis voor zijn grote en veelzijdige kennis is gelegd. Daarna volgden *Wanderjahre* in Italië, waar hij aan verscheidene universiteiten studeert en doceert. In 1467 wordt hij in Hongarije verbonden aan de pas opgerichte universiteit van Pressburg. Vandaar vertrekt hij naar Neurenberg met de opdracht daar een centrum te stichten van astronomisch onderzoek. Deze korte opsomming geeft enige indruk van de niet aan landsgrenzen gebonden werkzaamheid van een geleerde in die dagen. Modern doet de mededeling aan waarbij Regiomontanus verklaart voor zijn werk in Neurenberg de bijstand te behoeven van anderen, alsmede ook van elders gevestigde bibliotheken. Zijn gedachten gaan uit naar de hem persoonlijk niet bekende Christiaan

¹⁴⁾ E. Zinner, *Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg, genannt Regiomontanus*. Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte. Bnd. 31. (München, 1938), XIII + 294 pg.

Roder, rector van de universiteit van Erfurt en als zodanig ook beheerder van een daaraan verbonden boekerij. Karakteristiek is nu de wijze waarop Regiomontanus zijn collega benadert: bij zijn voorstel tot samenwerking sluit hij een lange rij van wiskundige opgaven in, de geadresseerde uitdagend deze op te lossen. Klaarblijkelijk wil hij zijn eventuele teamgenoot toetsen en een indruk krijgen omtrent de waarde van diens medewerking. De brief aan Roder is bewaard gebleven en werd in 1786 gepubliceerd door C. Th. de Murr in een collectie merkwaardige stukken uit de bibliotheek van Neurenberg¹⁾. Ruim een eeuw later heeft M. Curtze met een ernstige kritiek op de onzorgvuldigheid dezer uitgave, opnieuw het Latijnse origineel gepubliceerd samen met andere brieven van en aan Regiomontanus²⁾ en haar daardoor gemakkelijk toegankelijk gemaakt. Er komen 35 opgaven in voor, van zeer uiteenlopende aard. Voor ons van belang is het 24e vraagstuk, dat als volgt luidt:

„Een tien voet lange staaf is in loodrechte stand opgehangen, zodat het onderste uiteinde zich 4 voet boven de grond bevindt. Men vraagt het punt op de grond van waaruit de staaf onder de grootste hoek gezien wordt, of wel, daar er oneindig veel van zulke punten zijn, die op een cirkel liggen, vraagt men de straal van deze cirkel”.

Het is duidelijk dat dit een numeriek voorbeeld is van het probleem, dat ons uitgangspunt was.

Roder heeft op de brief nimmer geantwoord en het is ook niet bekend geworden hoe Regiomontanus het probleem heeft opgelost. Cantor vermoedt, gezien de van de steller bekende gedachtengangen, dat hij de meetkundige oplossing met de door A en B gaande aan l rakende cirkel zal hebben gevonden.

Wij merken nog op dat in de bewuste brief, onmiddellijk op de genoemde opgave een ander maximum-vraagstuk volgt: „in een gegeven driehoek het grootste vierkant te beschrijven”. Bij Cantor wordt het niet genoemd, vermoedelijk omdat deze tweede vraag in de editie de Murr niet was opgenomen.

Van een samenwerking met Roder is niets gekomen. Regiomontanus bracht enige zeer vruchtdragende jaren in Neurenberg door, vertrok om onbekende redenen in 1475 naar Rome en overleed daar het volgende jaar.

¹⁾ M. Cantor, t.a.p. p. 289.

²⁾ M. Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. (Abhandl. zur Gesch. der Math. Wiss. 12. Heft, Leipzig (1902)), II. Der Briefwechsel Regiomontanus's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder. pg. 185—336. Voor de brief aan Roder zie pg. 324—336.

NED. MIJ. v. NIJVERHEID EN HANDEL

KON. INSTITUUT VAN INGENIEURS

HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLAND (HCNN)

Dit blad zal N 1267 vervangen

SECRETARIAAT: CENTRAAL NORMALISATIEBUREAU (CNB), GRAVENHAGE LANGE KOUDESTRAAT 13*, TELEFOON 181808

1	ALGEMEEN		1.27	(is) element van; voorbeeld: $a \in V$	$\in$ ¹³⁾
1.1	(is) gelijk aan	$=$	1.28	(is) bevat in, (is) deelverzameling van voorbeeld: $A \subset B$	$\subset$ ¹³⁾
1.2	(is) niet gelijk aan	$\neq$	1.29	bevat voorbeeld: $B \supset A$	$\supset$ ¹³⁾
1.3	(is) identiek met	$\equiv$	1.30	doorsnede van twee verzamelingen voorbeeld: $A \cap B$	$\cap$
1.4	(is) ongeveer gelijk aan	$\approx$	1.31	vereniging van twee verzamelingen voorbeeld: $A \cup B$	$\cup$
1.5	(is) evenredig met	$::$			
1.6	komt overeen met	$\hat{=}$ ¹⁾	2	MEETKUNDE	
1.7	(is) kleiner, groter dan	$<, >$	2.1	(staat) loodrecht op	$\perp$
1.8	(is) veel kleiner, veel groter dan	$\ll, \gg$	2.2	(is) evenwijdig met	$\parallel$
1.9	(is) kleiner dan of gelijk aan	$\leq$	2.3	(is) evenwijdig met en gelijk aan	$\neq$
1.10	(is) groter dan of gelijk aan	$\geq$	2.4	(is) gelijkvormig met	$\sim$
1.11	nadert tot	$\rightarrow$	2.5	(is) congruent met (gelijk aan en gelijkvormig met)	$\cong$
1.12	definiërend gelijkheidsteken voorbeeld: $n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)\dots 1$	$\stackrel{\text{def}}{=}$ ²⁾	2.6	driehoek	Δ
1.13	a (is) congruent met b modulo x ($a = b + kx$, waarin k geheel) voorbeeld: $a \equiv 2 \pmod{5}$ en $a \equiv \frac{3}{2} \pi \pmod{\pi}$	$a \equiv b \pmod{x}$ ³⁾	2.7	hoek	$\angle$
1.14	somteken (plus)	$+$	3	VECTOR- EN MATRIXREKENING	
1.15	verschil- of minteken (min)	$-$	3.1	vector p	p ¹⁴⁾
1.16	som- of verschiltteken (plus of min)	$\pm$ ⁴⁾	3.2	scalair product	$p \cdot q$ ¹⁵⁾
1.17	vermenigvuldigingsteken (maal)	$\times$ of $\cdot$ ⁵⁾	3.3	vectorieel product	$p \times q$ ¹⁶⁾
1.18	deeltteken (gedeeld door)	--- of / ⁶⁾	3.4	gradiënt	∇ ¹⁷⁾
1.19	verhoudingsteken	$:$	3.5	gradiënt van φ	$\nabla \varphi$ of $\text{grad } \varphi$
1.20	decimaalteken	$,$ ⁷⁾	3.6	divergentie van p	$\nabla \cdot p$ of $\text{div } p$
1.21	tot en met	$\dots$ ⁸⁾	3.7	rotatie van p	$\nabla \times p$ of $\text{rot } p$
1.22	hieruit volgt	$\therefore$	3.8	lengte van p	$ p $ of p
1.23	faculteit van n (n faculteit) $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$	$n!$ ⁹⁾	3.9	element in de i ° rij en de j ° kolom van matrix A	A_{ij} ¹⁸⁾
1.24	binomiaalcoëfficiënt (n boven p) $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}$	$\binom{n}{p}$ ¹⁰⁾	3.10	matrix $\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$	A of (A_{ij}) ¹⁹⁾
1.25	som, voor i lopende van 1 tot en met n	$\sum_{i=1}^n$ of $\Sigma_{i=1}^n$ ¹¹⁾	3.11	determinant $\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}$	$\det A$ ¹⁸⁾ of $\det (A_{ij})$
1.26	gedurig product, voor i lopende van 1 tot en met n	$\prod_{i=1}^n$ of $\Pi_{i=1}^n$ ¹¹⁾	3.12	determinant van matrix A	$\det A$ of $\det (A_{ij})$

¹⁾ ... ¹³⁾: zie toelichtingen blz. 3.ONTWERP
Om critiek wordt verzochtSYMBOLEN VOOR DE WISKUNDE
VOOR GEBRUIK IN DRUKWERK

V 972

DECEMBER 1952

AUTEURSRECHTEN VOORBEHOUDEN HCNN

UDC:003.62:51

TOELICHTINGEN

- 1 Voorbeeld (van een schaal voor een grafiek): 1 mm komt overeen met 1 millivolt : 1 mm $\underline{=}$ 1 mV
- 2 Bij voorkeur het linker lid door het rechter doen definiëren.
- 3 Ter afkorting schrijft men vaak in de plaats hiervan $a \equiv b(x)$
- 4 Niet gebruiken voor „(is) ongeveer gelijk aan”. Indien het voor het aanduiden van een correspondentie noodzakelijk blijkt, voor een aantal opeenvolgende plaatsen alle bovenste tekens met elkaar overeen te doen komen, kan op de desbetreffende plaatsen ook $\approx$ worden geschreven.
- 5 De punt als vermenigvuldigingsteken, boven de lijn plaatsen, op halve hoogte van de stokloze letter. Tussen letters onderling en tussen een in cijfers uitgedrukt getal en een daaropvolgende letter kan het vermenigvuldigingsteken worden weggelaten. Bij vermenigvuldiging van in cijfers uitgedrukte getallen wordt aanbevolen het teken $\times$ te gebruiken. Voorbeeld: $3,6 \times 10^{10}$
Het gebruik van een punt juist boven of op de lijn, zoals in de Angelsaksische landen gebruikelijk, wordt niet aanbevolen.
- 6 Zonodig kan ook het verhoudingsteken als deelteken worden gebruikt.
- 7 Na elke groep van drie cijfers, in speciale gevallen soms ook een ander aantal cijfers, gerekend van het decimaalteken af, wordt een tussenruimte (spatie) opengelaten.
Voorbeelden: 42 900 000 en 0,601 118 0
78 56783 15836 en 0,58214 79185 63
In plaats van een spatie worde geen punt geschreven. Onmiddellijk achter de als decimaalteken gebruikte komma, wordt geen spatie opengelaten.
- 8 In opsommingen, optellingen, vermenigvuldigingen e.d. worden de komma of de kommapunt onderscheidenlijk het somteken onderscheidenlijk het vermenigvuldigingsteken na het symbool voor „tot en met” herhaald. Voorbeelden: $a_1, \dots, a_n; a_1 + \dots + a_n; a_1 \cdot \dots \cdot a_n$.
- 9 Ook kan het symbool $I(n+1)$ worden gebruikt.
- 10 Dit symbool is ook gedefinieerd als n niet een natuurlijk getal is.
Voorbeeld: $\left(-\frac{1}{2}\right)_p$
- 11 De grenzen, i. c. 1 en n , kunnen worden weggelaten als deze uit de context bekend zijn. — Als deze moeten worden vermeld, kan ter ruimtebesparing, zo nodig ook $\sum_{i=1}^n$ onderscheidenlijk $\prod_{i=1}^n$ worden gedrukt.
- 12 Spreek uit „esti”.
- 13 $A \supset B$ is equivalent met $B \subset A$
- 14 Het aanduiden van een vector door een letter met daarboven een horizontale pijl is niet algemeen in gebruik gekomen.
- 15 Bij voorkeur niet pq
- 16 Spreek uit: „p vectorisch q”
- 17 Spreek uit: „nabla”
- 18 Waar geen misverstand te verwachten is, kan de komma tussen twee opeenvolgende indices worden weggelaten.
- 19 Aanbevolen wordt, het argument achter het functiesymbool tussen haken te zetten en hierbij de volgorde: „machtsverheffen, vermenigvuldigen, delen, optellen en aftrekken aan te houden. — Haken zullen bovendien te gebruiken zijn, waar zulks voor de duidelijkheid nodig blijkt. Tevens wordt aanbevolen van de gewoonte om het argument in het functiesymbool tussen haken te zetten, slechts dan af te wijken, indien het argument een éénterm is.
- 20 Waar het grondtal bekend is of in het midden wordt gelaten, kan zowel voor „ln” als voor $^{10}\log$ en voor „log”: „log” worden geschreven.
- 21 De hoek wordt bij de goniometrische functies geacht in radialen te zijn uitgedrukt, indien niet aangegeven is, dat graden dan wel decimale graden zijn bedoeld.
Voorbeeld: $\sin 1 = 0,8145$, $\sin 1^\circ = 0,0175$, $\sin 1^g = 0,0157$
- 22 Symbolen voor de overige cyclometrische en inverse hyperbolische functies worden op overeenkomstige wijze gevormd.
- 23 Voor $\arcsin x$ worde niet geschreven $\sin^{-1} x$
- 24 Bij uitzondering j
- 25 Analooog worden aangegeven een links gesloten, rechts open interval en een aan twee zijden gesloten interval, alsmede de gevallen, waarbij een van de grenzen oneindig is.
- 26 Het symbool $\square$ kan ook gebruikt worden voor de operator van Lorentz $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ of voor andere generalisaties van de operator van d'Alembert.
- 27 De notaties $f(x) \Big|_a^b$ en $\Big|_a^b f(x)$ zijn vaak dubbelzinnig en dus niet aan te bevelen.

UNIFORME SYMBOLEN

Bijna 20 jaar geleden verscheen het normblad N 1267, dat voor een bescheiden aantal wiskundige symbolen een uniforme schrijfwijze vaststelde.

Zonder tekort te willen doen aan de verdienste van deze stap naar de opheffing van de verscheidenheid van wiskundige symbolen is het toch zeker zo, dat N 1267 reeds spoedig na het verschijnen niet meer in de behoefte voorzag. De behoefte aan méér genormde symbolen kan goeddeels worden verklaard uit de ontwikkeling van de wiskunde in de naoorlogse jaren. Grote waardering hebben wij dan ook voor de bedoeling van de Hoofdkommissie voor de Normalisatie in Nederland, die leidde tot de publikatie (in december 1952 reeds) van het ontwerp-normblad V 972, dat – al behield het gedurende acht jaar zijn voorlopig karakter – een vrij algemeen aanvaard richtsnoer vormde en daardoor het ontstaan van verwarring in ons tekenschrift tegenging.

Naar wij vernemen zal de *definitieve* vaststelling van het voorlopige normblad V 972 nog enige tijd op zich laten wachten en met name niet plaatshebben vóór de afkondiging van de normen voor de wiskundige symbolen, waarop de I.S.O. (Organisation internationale de Normalisation) zich thans beraadt; terecht wenst men te vermijden, dat de definitieve Nederlandse normen zouden afwijken van de eerlang te verwachten internationale voorschriften. Anderzijds menen wij te weten, dat dit een bijkans overbodige voorzorg is, aangezien de I.S.O. van haar waardering voor het eerder genoemde initiatief van de H.C.N.N. reeds op verheugende wijze heeft doen blijken door de voornaamste in het voorlopige Nederlandse normblad V 972 aanbevolen symbolen over te nemen in haar „projet de recommandation no 287”, dat in september 1960 in tweede lezing verscheen; redelijkerwijs kan dan ook worden verwacht, dat V 972 t.z.t. vrijwel ongewijzigd zal worden gelaten.¹⁾

¹⁾ Naar alle waarschijnlijkheid zullen door de aanpassing aan het internationale gebruik slechts twee symbolen de definitieve vaststelling niet overleven:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1.5 (is) evenredig met :: | (voorstel I.S.O. $\sim$) |
| 4.2 logaritme voor grondtal a $^a\log$ | (voorstel I.S.O. $\log_a$). |

Bij verandering van het symbool 1.5 in de zin van de I.S.O.-aanbeveling zal het uiterlijk gelijke symbool 5.38 wel verdrongen worden door het (ook door de I.S.O. verkieslijker geachte) teken $\simeq$.

Wat de door de I.S.O. aanbevolen schrijfwijze van het symbool 4.2 betreft, willen

Op grond van het voorgaande menen wij onze lezers een dienst te bewijzen door op de voorgaande bladzijden het meer genoemde ontwerp-normblad *in afwachting van zijn definitieve vaststelling* in zijn geheel af te drukken (zie blz. 256–258); het overnemen van deze normen geschiedt met toestemming van het Nederlands Normalisatie Instituut ²⁾. Al betreft het normblad symbolen voor gebruik *in drukwerk*, de lezer, die het meest te doen heeft met hun gebruik *in handschrift*, zal niettemin in deze publikatie aanwijzingen vinden, die hij zich gemakkelijk ten nutte maakt; een getrouwe opvolging van deze aanwijzingen kan b.v. de leesbaarheid van schriftelijk examenwerk alleen maar ten goede komen.

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op donderdag 30 augustus 1962
om 14.30 uur in het Centrum „Hydepark” te
Driebergen.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 7 van 13 oktober 1961 en in Euclides nr. VII van 1 april 1962).
3. Bestuursverkiezing wegens het aftreden van Dr. R. L. Krans.
Het bestuur stelt kandidaat: Dr. C. P. Koene, Heemstede.
Namen van tegenkandidaten kunnen tot 1 augustus a.s. worden ingediend bij de secretaris.
4. Voordracht door de heer Dr. W. J. Claas, Leiderdorp, over:
„Welke onderwerpen uit de sterrenkunde zijn voor het gymnasium van belang”.
5. Pauze.
6. Voordracht door de heer Dr. J. Rekvelde, Overveen, over:
„Relativiteitstheorie bij het V.H.M.O.”.
7. Rondvraag.
8. Sluiting.

Thorbeckestraat 47,
Delft

De secretaris,
D. Leujes

wij niet verhehlen het te zullen betreuren, indien deze notatie de in Nederland gebruikelijke gaat verdringen; de laatste verdient o.i. verre de voorkeur ook al omdat de kans, dat de basis in die notatie voor de exponent van een cofactor wordt aangezien, bij goed zetwerk gering is; de eerste leidt tot verwarrende opstellingen als $\log \frac{3}{2} 3^2 = 31,853$. Bovendien is $\log_2 3$ reeds een gebruikelijke afkorting voor $\log \log 3$ (zie bv. P. WIJDENES, *Lagere Algebra I*, 8e druk, blz. 218).

²⁾ Het normblad V 972 – ná de definitieve vaststelling: NEN 972 – is verkrijgbaar bij genoemd instituut, Postbus 70 te 's-Gravenhage.

BOEKBESPREKING

J. L. Destouches, *La mécanique élémentaire*. Presses universitaires de France (collection „Que sais-je?“ no. 906), Paris, 1961, 128 pag. Prijs niet vermeld (wsch. NF 2.—).

Dit boekje geeft een beknopt en helder inzicht in de beginselen van de theoretische mechanica. De behandelde stof is niet veel meer dan (tot dusver!) gebruikelijk op onze h.b.s.-B, doch de studie er van vereist zeker meer kennis van en vaardigheid in de wiskunde dan van onze h.b.s.-leerlingen kan worden verwacht.

Graag beveel ik dit handige en goedkope werkje aan voor wie les geeft of gaat geven in de mechanica en er voor zichzelf de behoefte aan voelt de te doceren stof nog eens wat meer exact te bezien en te overzien dan waartoe onze meer elementair opgezette schoolleerboeken ons in staat stellen.

H. W. Lenstra

D. Leujes, *Hoe getallen geschreven werden I*, kleurenfilmstrook S 19 van de Stichting Technisch Filmcentrum te 's-Gravenhage, met toelichting, f 25.— (voor begunstigers T.F.C. f 15.—).

Deze eerste van een reeks filmstroken over het genoemde onderwerp bevat 26 beelden, die een goede indruk geven van enige vroege stadia in de ontwikkeling van de getallensystemen. Een apart boekje bevat de toelichtingen.

Ik vind de filmstrook zeer geslaagd en zou het gebruik willen aanbevelen in een α -klas, waar een en ander bij het keuze-onderwerp onder b4 ter sprake is gekomen. De lichtbeelden zullen hier een welkome aanvulling zijn op de illustraties in het leerboek en zo „verhelderend“ werken. Misschien zou voor deze leerlingen een exemplaar van de toelichting met een afdruk van de plaatjes nuttig kunnen zijn, zodat ze het nog eens op hun gemak kunnen bekijken, een opmerking die ik overigens over vrijwel alle bij het onderwijs gebruikte filmstroken wil maken.

Ook andere klassen zullen er interesse voor hebben, maar dan als toegift, b.v. in de bekende „laatste les“.

Met belangstelling zie ik uit naar de volgende stroken in deze serie.

H. W. Lenstra

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

70. Van twee kettingen met gelijke schakels is de grootste 10 maal zo lang als de kleinste en telt deze 100 schakels meer dan de kleinste. Een ketting van 100 van deze schakels is 53 cm lang. Hoe lang is een ketting van 32 van deze schakels? We leggen vast, wat we onder een ketting verstaan door aan te nemen, dat de diameter van een schakel hoogstens gelijk is aan 2 maal de diameter van een opening.

71.

$$48 = 4 (4+8)$$

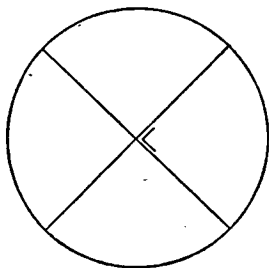
$$3468 = 34 (34+68)$$

$$112896 = 112 (112+896)$$

$$\dots \times \times \times \times = \dots (\dots + \times \times \times \times)$$

Welke getallen komen op de laatste rij te staan? (Er zijn voor het vinden van de getallen geen lange berekeningen nodig.)

72. Van welk lichaam staat in onderstaande figuur zowel de horizontale, de verticale en de derde projectie. (Met derde projectie is bedoeld de projectie op een vlak, dat loodrecht staat op de beide andere projectievlakken.)



OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

67. We behoeven alleen te zorgen voor deelbaarheid door 11. Omdat de som van de cijfers gelijk is aan 45, zijn de sommen van de cijfers op de even en de oneven plaatsen 17 en 28. Som 17 levert de volgende mogelijkheden:

0 1 2 5 9	0 1 3 6 7	0 2 4 5 6
0 1 2 6 8	0 1 4 5 7	1 2 3 4 7
0 1 3 4 9	0 2 3 4 8	1 2 3 5 6
0 1 3 5 8	0 2 3 5 7	

Het totaal aantal mogelijkheden bedraagt dan:

$$\frac{9}{10} \cdot 2 \cdot 5! \cdot 5! \cdot 11 = 285120.$$

De factor $\frac{9}{10}$ is toegevoegd, omdat de 0 niet op de eerste plaats mag komen.

68. De eerste dag eten de dragers 6 kg rijst. Aan het einde van de dag maken ze een depot voor de terugweg, dat eveneens 6 kg rijst bevat. Aan het einde van de tweede dag hebben ze weer 6 kg rijst gegeten. Ze maken nu een depot van 5 kg en sturen 1 drager met een mondvoorraad van 1 kg terug. Op soortgelijke wijze vervolgen de volgende 2 dagen 5 dragers hun weg en de daaropvolgende 3 dagen 4 dragers. Er blijven nu dus nog 3 dragers over met 64 kg rijst. Deze vervolgen hun weg 3 dagen. Men kan dan naar believen 1 drager terugzenden met 3 kg mondvoorraad (dus 2 kg te veel) of alle 3 dragers naar het front laten doorlopen. In beide gevallen brengen ze 40 kg rijst aan het front. Hieruit volgt, dat ze kunnen volstaan met 2 kg minder rijst mee te nemen dan de hoeveelheid, die ze kunnen dragen.

69. Ja. B.v. als volgt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	×	1	2	3	4	5	6	7
2		×	3	2	7	4	5	6
3			×	1	6	7	4	5
4				×	5	6	7	4
5					×	1	2	3
6						×	3	2
7							×	1
8								×

In de eerste rij en de eerste kolom staan de nummers van de spelers; de overige cijfers zijn de nummers van de ronden.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, De Houtmanstraat 37, Hoogezand.

VAKANTIECURSUS 1962

uitgaande van het Mathematisch Centrum,
georganiseerd voor leraren in de wiskunde en andere belangstellenden.

Op vrijdag 31 augustus en zaterdagmorgen 1 september 1962 zal in het Geologisch Instituut, Nieuwe Prinsengracht 130 te Amsterdam de Vakantiecursus 1962 plaatsvinden. Het centrale onderwerp is:

„Rondom de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs bij het V. H. M. O.”

PROGRAMMA:

Vrijdag 31 augustus.

Bij aankomst koffie.

10.30 uur

Opening

Prof. dr. H. Freudenthal: „Axiomatiek van het wiskunde-onderwijs bij het V. H. M. O.”

± 12.30—14.15 uur

Lunchpauze

14.15—16.00 uur

Prof. dr. N. H. Kuiper: „Lofzang op de Meetkunde”.

Theepauze om 15.00 uur.

Zaterdag 1 september

9.15—10.45 uur

Prof. dr. F. van der Blij:

„Problemen bij het onderwijs in de Analyse”.

Koffiepauze

11.15—12.45 uur

Prof. dr. E. W. Beth: „Logische en denkpsychologische aspecten van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs”.
Sluiting.

De deelnemerskosten bedragen f 2.50, inclusief syllabus.

Op vrijdagmiddag zal er gelegenheid zijn tot deelname aan een gezamenlijke lunch, waarvan de kosten waarschijnlijk weer f 2,25 p.p. zullen bedragen.

Aan deze cursus zal een tentoonstelling van wiskundige leer- en studieboeken worden verbonden.

Aanmelding voor de cursus bij voorkeur vóór 15 augustus a. s., bij de
Administratie van het Mathematisch Centrum,
2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O

NOORDHOFF

biedt een

complete

ALDERS

wiskunde-

leergang

voor het

V.H.M.O.



- algebra (3 delen)
- planimetrie
- stereometrie
- goniometrie
- driehoeksmeting
- Inleiding tot de analytische meetkunde

11e-50e drukken
prijs per deeltje gem. f 2,50

„Beknopt, helder, degelijk!
Voorzien van
overvloedig oefenmateriaal, met alle
ballast overboord”,
aldus beoordeelde de heer
J. Koksma in „Chr. Gymn. en M.O.”
de Alders-serie in haar totaal



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Bij de groep mechanica van de onderafdeling der wiskunde be-
taat plaatsingsmogelijkheid voor een

Wetenschappelijk ambtenaar (Instructeur)

wiens primaire taak zal zijn het geven van onderwijs in de me-
chanica, i.h.b. de verzorging van instructies.

Daarnaast wordt gelegenheid geboden deel te nemen aan het
wetenschappelijk onderzoek in de groep.

Academische graad vereist.

Aanstelling zal geschieden in het wetenschappelijk ambtenaren
rangstelsel. Inlichtingen kunnen worden verkregen bij prof.
dr. J. B. Alblas (tel. 04900-68000 toestel 220 of 04900-63228).

Schriftelijke sollicitaties onder vermelding van nr. V946 te richten
aan het hoofd van de centrale personeelsdienst v.d. Technische
Hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven.

Wiskundeboeken voor het V.H.M.O.

Dr. H. Streefkerk

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M.O. EN V.H.O.

I (4e druk) f 3,25 - II (4e druk) f 3,50 - III (3e druk) f 3,75

„De boeken munten uit door strenge en tegelijk duidelijke behandeling van de theorie. In de aanhangsels wordt nog eens dieper op enkele moeilijke kwesties ingegaan.”

(Weekblad van het „Genootschap”)

Dr. D. J. E. Schrek

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

3e druk, met afzonderlijk antwoordenboekje f 3,90, geb. f 4,60

„Een uitstekend boek voor het V.H.M.O. in elk mogelijk opzicht!”

(Nieuw Tijdschr. voor Wiskunde)

Drs. J. C. Kok e.a.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

voor het V.H.M.O. - f 4,40, gekartonneerd f 4,90

„Een korte en prettige behandeling van de differentiaal- en integraalrekening met een serie toepassingen, welke in een afzonderlijk hoofdstuk opgenomen is. Grote aandacht is besteed aan de vraagstukken, die dan ook een aanzienlijk deel van het boek in beslag nemen.”

(Economisch Beheer/Advies)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

ALGEBRA VOOR M.M.S.

2e druk f 3,75

„Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van de verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen... van harte aanbevolen.”

(Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs)

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

MEETKUNDE VOOR M.M.S.

Deel I f 3,75 - deel II f 4,50

„Hoewel deze boeken niets bevatten, dat men spectaculair zou kunnen noemen, is zowel om hun inhoud als om hun uiterlijke vorm - ik denk ook aan de aardige omslag - een gelukwens voor de schrijvers en de uitgeefster wel op zijn plaats.”

(Christ. Gymn. en Midd. Onderwijs)



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN