

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962

IX - 1 JUNI 1962

Rectificatie: de vorige aflevering werd abusievelijk aangeduid als nr. VII i.p.v. VIII

INHOUD

Prof. Dr. O. Bottema: De stelling van Pompeiu . . .	273
Dr. P. G. J. Vredenduin: Nogmaals een Amerikaanse test	286
Dr. Joh. H. Wansink: De mechanica in het leerplan van de H.B.S.	288
De Econometrische studierichting te Amsterdam. . .	297
Boekbespreking	299
Recreatie	303

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

NIEUWE OPGAVEN

(Deel 21 nrs. 121—160).

De oplossingen der vraagstukken 121—160 kunnen tot 1 februari 1963 worden gezonden aan de redacteur Prof. N. G. de Bruijn, Technische Hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven. Publikatie der daartoe geschikte oplossingen zal plaatsvinden in „Wiskundige Opgaven met de Oplossingen”, 21 (4) 1963.

Beknoptheid der oplossingen wordt ten eerste op prijs gesteld. Het is niet nodig de oplossing te geven in de taal waarin de opgave is gesteld.

Men beschrijve het papier slechts aan één kant.

Nieuwe opgaven (met oplossingen) zijn steeds welkom.

No. 121. Let m and n be integers, $0 < n < m$. Let $v_1, \dots, v_m$ be an orthonormal set of vectors in real m -dimensional euclidean space. Show that there exists an n -dimensional sub-space S such that $v_1, \dots, v_m$ all have the same distance to S .

(P. J. van Albada).

No. 122. Van de driehoek $A_1A_2A_3$ zijn a_1, a_2, a_3 de zijden en r, r_1, r_2, r_3 de stralen van de in- en aangeschreven cirkels. Is P een punt in het vlak van de driehoek dan bestaat er tussen de afstanden $x_i = PA_i$ een betrekking van de vierde graad. Bewijs dat deze na invoering van de uitdrukkingen

$$X_1 = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - a_3x_3^2 + a_1a_2a_3,$$

$$X_2 = -a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 + a_1a_2a_3,$$

$$X_3 = -a_1x_1^2 - a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_1a_2a_3,$$

$$X_4 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_1a_2a_3$$

geschreven kan worden als $r_1X_1^2 + r_2X_2^2 + r_3X_3^2 - rX_4^2 = 0$.

(O. Bottema).

No. 123. Bepaal de grootste ondergrens van

$$J = \int_0^1 (yy')^2 dx$$

onder de conditie dat $y(x)$ in $0 \leq x \leq 1$ reëel en continu differentieerbaar is met $y(0) = a$, $y(1) = b$. Hierin zijn a en b gegeven reële getallen.

(O. Bottema).

No. 124. Men beschouwt de verzameling der viervlakken, waarvan twee zijvlakken het oppervlak O_1 hebben en de andere het oppervlak O_2 . Bepaal de ribben van het exemplaar met de grootste inhoud.

(O. Bottema).

No. 125. Bij welke bewegingen van een vlak V' ten opzichte van een ermee samenvallend vlak V zijn alle baankrommen convex?

(O. Bottema).

No. 126. Bij welke beweging van het vlak V' ten opzichte van het met V' samenvallende vlak V is het middelpunt van de buigcirkel een vast punt 1°) van V' , 2°) van V ?

(O. Bottema).

No. 127. Let φ denote Euler's totient function. Show that the equation $\varphi(x) = 2^n$ has exactly $n + 2$ solutions if $n < 32$ and less than $n + 2$ solutions if $n \geq 32$.

(C. J. Bouwkamp).

No. 128. Let $P(x)$ be a polynomial approximation of $\log(1 + x)$ satisfying

$$|P(x) - \log(1 + x)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1).$$

It is requested to derive from $P(x)$ a polynomial approximation $Q(x)$ of $(2x)^{-1} \log(1 + x)$ satisfying

$$|Q(x) - (2x)^{-1} \log(1 + x)| < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1).$$

(C. J. Bouwkamp).

No. 129. Bereken, als $k > 0$ en α reëel is,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^k} - \cos \alpha x \right) \frac{dx}{x} \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^k} - J_0(x) \right) \frac{dx}{x}.$$

(H. Bremekamp).

No. 130. Bereken

$$\int_a^b \frac{(a+b)x^3 + abx^2 + a^2b^2}{x(x+a)(x+b)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \quad (b > a > 0).$$

(H. Bremekamp).

No. 131. C is een gesloten dubbelpuntvrije continu differentieerbare kromme in het platte vlak, en F_1 en F_2 zijn punten in het binnengebied. Voor elk punt P op C beschouwen we de hoek ψ die de naar binnen gerichte normaal in P maakt met de bisectrix van de hoek F_1PF_2 . Bewijs dat

$$\int_C (r_1 r_2)^{-\frac{1}{2}} \cos \psi \, d\sigma = 2\pi,$$

waarin $r_1 = PF_1$, $r_2 = PF_2$, terwijl $d\sigma$ het lijnelement op C is.

(N. G. de Bruijn).

No. 132. Show by a counter-example that the following theorem is not true:

“Let $\| \cdot \|_1$ and $\| \cdot \|_2$ be different norms in a linear space M . If a sequence $x_1, x_2, \dots$ converges in both norms then the limits are equal”.

(N. G. de Bruijn and G. W. Veltkamp).

No. 133. If $P_n(x)$ and $P_n^{(1-\beta)}(x)$ are Legendre-functions of the first kind; $\alpha > 0$; $\operatorname{Re}(n + \beta) > 0$; $\operatorname{Re}(n + 1 - \beta) < 0$, show that

$$\int_1^\infty \frac{P_n(x)}{(x + \alpha)^\beta} dx = \frac{\Gamma(\beta + n)\Gamma(\beta - n - 1)}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{P_n^{(1-\beta)}(\alpha)}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{1}{2}(\beta-1)}}.$$

(P. J. de Doelder).

No. 134. Evaluate $\sum_{p=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty n^{-2} J_p^2(n\pi)$.

(P. J. de Doelder).

No. 135. Bereken $\int_0^\infty e^{-2x} \varphi^2(x) dx$ als

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-2xu} u^{-\frac{1}{2}} (1+u)^{-\frac{1}{2}} du.$$

(P. J. de Doelder).

No. 136. Let $A(n)$ denote the number of positive integers $\leq n$, all whose prime factors are $\leq \log n$. Show that

$$\frac{(\log A(n)) \log \log n}{\log n} \rightarrow \log 4 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(P. Erdős).

No. 137. Men speelt kruis en munt en wacht op het *eerste* verschijnen van „kruis, munt”; dus kruis in de $(n + 1)$ -de worp en munt in de $(n + 2)$ -de en geen vroeger optreden van „kruis, munt” in deze volgorde. Bereken de verwachtingswaarde van de stochastische variabele n .

(H. Freudenthal).

No. 138. Men speelt kruis en munt en wacht op het *eerste* verschijnen van „kruis, kruis”, dus kruis in de $(n + 1)$ -de en in de $(n + 2)$ -de worp en geen vroeger optreden van „kruis, kruis”. Bereken de verwachtingswaarde van de stochastische variabele n .

(H. Freudenthal).

No. 139. Stel voor natuurlijke n

$$a_n = n - \binom{n}{2}\sqrt{2} + \binom{n}{3}\sqrt{3} - \dots = -\sum p(-1)^p \binom{n}{p} \sqrt{p}.$$

Bewijs dat $a_n > 0$.

(H. Freudenthal).

No. 140. Bewijs dat voor de a_n van No. 139 geldt $\lim a_n = 0$.

(H. Freudenthal).

No. 141. Vorm met n reële getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de uitdrukking

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \sum_i |\alpha_i| - \sum_{i < j} |\alpha_i + \alpha_j| + \\ + \sum_{i < j < k} |\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k| - \dots = -\sum_{\delta} (-1)^{\sum \delta_i} |\sum_i \delta_i \alpha_i|,$$

waarbij de δ_i 's de waarden 0 en 1 kunnen aannemen, en δ alle systemen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ doorloopt.

Bij welke n geldt de eigenschap dat

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \geq 0$$

voor alle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$? Beantwoord dezelfde vraag voor het geval dat de α 's geen reële getallen zijn maar vectoren in een euclidische vectorruimte.

(H. Freudenthal).

No. 142. Let $X = (x_{ij})$ be an $n \times n$ real matrix and $f(X)$ a real valued differentiable function of the n variables x_{ij} , homogeneous of the same degree m in the elements of any row or column of X .

Put

$$E_{ij}(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Prove that if $f(X)$ attains at $X = A = (a_{ij})$ a greatest or least value or is stationary, subject to the conditions

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n); \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n); \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

then we have for each pair i, j ($i, j = 1, \dots, n$) that either $E_{ij}(A) = mf(A)$ or $x_{ij} = 0$.

(C. K. Hill).

No. 143. The n^2 real variables x_{ij} are subject to the conditions

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n); \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Show that in the closed convex set T determined by the further conditions

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

the permanent P of the matrix (x_{ij}) attains its maximum just at the "vertices" $x_{ij} = \delta_{ik_j}$ for the permutations $\{k_j\}$ of the sequences $\{j\}$, and has a strict local minimum at the "centre"

$$x_{ij} = n^{-1} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

(C. K. Hill and P. Stein).

No. 144. In the notation of problem No. 143 show that if P attains a least value in the interior of any open convex set O (such as the interior of T) subject to (1), then it does so only at the centre (n^{-1}).

(C. K. Hill).

No. 145. Zij $0 \leq a < b$. De functie $f(x)$ is Riemann-integreerbaar over (a, b) . De functie $k(x)$ is begrensd voor $0 \leq x < \infty$, en voor iedere $c > 0$ Riemann-integreerbaar over het interval $(0, c)$.

Verder is

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \int_0^\lambda k(x) dx = 0.$$

Bereken

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) k(\lambda x) dx.$$

(F. de Kok).

No. 146. Bepaal twee termen van de asymptotische ontwikkeling voor $n \rightarrow \infty$ van $\int_0^1 f(x)p(nx)dx$ (n geheel) als $f(x)$ een voldoende aantal keren differentieerbaar is, voor de volgende functies $p(x)$ met de periode 1.

a) $p(x) = 1$ ($0 \leq x < \frac{1}{2}$), $p(x) = -1$ ($\frac{1}{2} \leq x < 1$).

b) $p(x) = 1$ ($0 \leq x < \frac{1}{3}$), $p(x) = -2$ ($\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$), $p(x) = 1$ ($\frac{2}{3} \leq x < 1$).

c) $p(x) = x$ ($-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$).

(F. de Kok).

No. 147. De functie $f(x)$ is van begrensde variatie op $(0, 1)$. De functie $k(x)$ is voor iedere positieve a Riemann-integreerbaar over $(0, a)$, terwijl $\int_0^\infty x^{-1}k(x)dx$ convergent is.

Bepaal

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{-1}f(x)k(\lambda x)dx.$$

(F. de Kok).

No. 148. De functie $f(x)$ is van begrensde variatie op $(0, 1)$. De functie $k(x)$ is voor iedere positieve a Riemann-integreerbaar over $(0, a)$. Verder is voor constante $\alpha > 1$ $\int_0^\infty k(x)x^{\alpha-1}dx$ convergent.

Bepaal

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\alpha-1} \int_0^1 f(x)k(\lambda x^\alpha)dx.$$

(F. de Kok).

No. 149. Show that if $0 < \alpha \leq 1$, then the function f_α , defined by $f_\alpha(0) = 0$, $f_\alpha(x) = x^\alpha \sin(\pi x^{-1})$ ($0 < x \leq 1$), satisfies a Lipschitz condition of order $\frac{1}{2}\alpha$ (i.e. $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| \leq C_\alpha |x - y|^{\frac{1}{2}\alpha}$) but not of any order $\rho > \frac{1}{2}\alpha$.

(W. A. J. Luxemburg).

No. 150. Let $C(X)$ be the linear space of all real continuous functions defined on a topological space X . If I is a positive linear functional on $C(X)$ (i.e. $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ ($f, g \in C(X)$ and a, b real) and $I(f) \geq 0$ whenever $f \geq 0$) then for every decreasing sequence $\{f_n\}$ of elements of $C(X)$ which decreases to zero everywhere on X we have $I(f_n) \rightarrow 0$; i.e. every positive linear functional on $C(X)$ is an integral.

(W. A. J. Luxemburg).

No. 151. Let $f(z)$ be regular in $|z| = 1$, p a positive number and let us write

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}.$$

Show that if α is a point in the interior of the unit circle then

$$|f(\alpha)| \leq (1 - |\alpha|^2)^{-1/p} \cdot \|f\|_p, \quad (1)$$

with equality if and only if

$$f(z) = c(1 - \bar{\alpha}z)^{-2/p}.$$

(Ch. Pisot and I. J. Schoenberg).

No. 152. Let n be a given fixed integer exceeding 2 and let $P(z) = z^{a_1} + z^{a_2} + \dots + z^{a_n}$, where $a_1, \dots, a_n$ is an arbitrary increasing sequence of n integers. Show that the integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |P(z)|^4 |dz|$$

reaches its maximum value if and only if $a_1, \dots, a_n$ are in arithmetic progression.

(Ch. Pisot and I. J. Schoenberg).

No. 153. Let $\delta > 0$ and x_0 be a real number, $f(x)$ a real function defined for $|x - x_0| \leq \delta$, such that $|f(x_0)| \leq a\delta$ and $0 < a \leq |f'(x)| \leq b$ for $|x - x_0| \leq \delta$. Put $c = \frac{1}{2}(a + b)$; $x_{v+1} = x_v - c^{-1}f(x_v)$ for $v = 0, 1, \dots$. Prove that x_v tends to a number ξ , where $|\xi - x_0| \leq \delta$, and, for $v = 0, 1, \dots$,

$$|x_v - x_0| \leq \delta; \quad |x_v - \xi| \leq \delta \left(\frac{b-a}{b+a} \right)^v;$$

$$|f(x_v)| \leq a\delta \left(\frac{b-a}{b+a} \right)^v; \quad |x_v - \xi| \leq \frac{b+a}{2a} |x_{v+1} - x_v|.$$

Show also that $|f(x_n)| \leq |f(x_v)| \left(\frac{b-a}{b+a} \right)^{n-v}$ for $n \geq v$.

(R. Rado).

No. 154. In driehoek ABC is een kegelsnede γ beschreven. D is een vierde punt in het vlak van driehoek ABC . De lijnen AD , BD , CD snijden de overstaande zijden van driehoek ABC in A_0 , B_0 , C_0 .

Bewijs, dat de tweede raaklijnen, die men uit A_0 , B_0 , C_0 aan de kegelsnede γ kan trekken, de zijden B_0C_0 , C_0A_0 , A_0B_0 in drie punten op een rechte l snijden. Is γ een parabool dan zal de rechte l raken aan de in driehoek $A_0B_0C_0$ ingeschreven kegelsnede, die het punt D tot middelpunt heeft. (Neemt men in dit geval het hoogtepunt van driehoek ABC voor het punt D , dan zal de lijn l raken aan de incirkel van driehoek $A_0B_0C_0$).

(J. H. Tummers).

No. 155. De driehoek ABC is een pooldriehoek van de kegelsnede γ . Bewijs, dat de poollijnen van de middens A_0 , B_0 , C_0 van de zijden BC , CA , AB van de driehoek ABC t.o.v. kegelsnede γ de zijden BC , CA , AB snijden in drie punten op een rechte l , die de trilineaire poollijn van het middelpunt van de kegelsnede γ is.

(J. H. Tummers).

No. 156. In driehoek ABC zijn twee kegelsneden beschreven, welke toegevoegd zijn aan de punten P en Q (zie Wiskundige Opgaven 20 (3) 1957, No. 120). Als deze punten isotomisch verwant zijn, bewijs dan dat de reciproke transversaal van de lijn PQ de vierde gemeenschappelijke raaklijn is van de twee kegelsneden.

(J. H. Tummers).

No. 157. Let $d\rho(\theta)$ be a positive measure of mass one on $[0, 2\pi]$, and put, for $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\rho(\theta) \right| = \cos \theta_n$$

where $0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$. Prove that $\theta_{2n} \leq 2\theta_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

(H. S. Wilf).

No. 158. The *permanent* of an $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ is

$$\text{Per } A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

where the sum is taken over all permutations of $1, 2, \dots, n$. An incidence matrix of an n - k - λ configuration is a matrix of zeros and ones for which AA^T has k on the main diagonal and λ elsewhere. Show that the permanent of such a matrix satisfies

$$\text{Per } A \leq \{n! \lambda^n e^{-1+(k/\lambda)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

(H. S. Wilf).

No. 159. If $|a|$ is sufficiently small, and $x \neq 1, 2, 3, \dots$, show that

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax - b)^{n-1} e^{-ax}}{(n-1)!(n-x)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b - ax)^{n-1} e^{-b}}{(1-x)(2-x) \cdots (n-x)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an - b)^{n-1} e^{-an}}{(n-1)!(n-x)}. \end{aligned}$$

(J. van Yzeren).

No. 160. Laat A , B en C snijpunten zijn van drie in het vlak gelegen cirkels I_a , I_b en I_c . Spiegelning (inversie) t.o.v. deze cirkels doet een willekeurige cirkel P overgaan in P_a , P_b resp. P_c . Loodrecht op deze drie beelden staat een cirkel Q . Bewijs dat de drie cirkels $\perp Q$ uit de bundels (I_a, I_b) , (I_b, I_c) resp. (I_c, I_a) een concurrent drietal vormen dat isogonaal toegevoegd is aan het overeenkomstig drietal $\perp P$ (concurrent betekent in dit verband: behorend tot één bundel).

(J. van Yzeren).

DE STELLING VAN POMPEÏU ¹⁾

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

DELFT

1. De stelling van Pompeïu luidt als volgt: is P een willekeurig punt in het vlak van de *gelijkzijdige* driehoek ABC , dan zijn PA , PB en PC de zijden van een (eventueel ontaarde) driehoek. Deze eenvoudige stelling kwam in 1953 in de aandacht terug ²⁾, maar is al van oudere datum. In de laatste jaren zijn hier te lande aan haar en aan bepaalde generalisaties enige opstellen gewijd ³⁾.

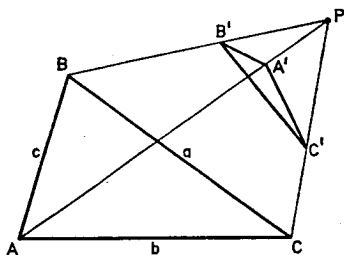


Fig. 1.

De stelling kan op velerlei wijs bewezen worden. Wij kiezen hier de volgende bewijsvoering.

Als door de inversie met P tot centrum en met macht $m = PA \cdot PB \cdot PC$ de hoekpunten A , B en C van de willekeurige driehoek ABC overgaan in A' , B' en C' , dan is $B'C' = a \cdot PA$,

¹⁾ Voordracht gehouden op de jaarvergadering van Wimecos op 28 december 1961 te Utrecht.

²⁾ D. Pompeïu, Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire, Bull. Math. Phys. Ecole polytechnique, Bucarest 6, 6–7 (1936). S. V. Pavlovic, Sur une démonstration géométrique d'un théorème de M. D. Pompeïu, El. der Math. 8, 13–15 (1953). J. P. Sydler, Autre démonstration du théorème de Pompeïu, El. der Math. 8, 15–16 (1953).

³⁾ G. R. Veldkamp, Een stelling uit de elementaire meetkunde van het platte vlak, N. T. v. W. 44 (1956–1957), 1–4; O. Bottema, De stelling van Pompeïu, id. 183–184; W. Boomstra, Nogmaals de stelling van Pompeïu, id. 285–288; G. R. Veldkamp, Nog een generalisatie van de stelling van Pompeïu, N. T. v. W. 45 (1957–1958), 197–204.

$C'A' = b \cdot PB$, $A'B' = c \cdot PC$. Voor $a = b = c$ zijn de zijden van driehoek $A'B'C'$ dus evenredig met PA , PB en PC en daarmee is de stelling aangetoond. De met de drie afstanden te construeren driehoek is ontaard als A' , B' en C' op één rechte liggen, dus als P een punt is van de omgeschreven cirkel van de gelijkzijdige driehoek.

2. Door Van der Spek¹⁾ is, in ander verband, de vraag gesteld en voor een deel beantwoord of ook in het vlak van een *gelijkbenige* driehoek punten P bestaan waarvoor de afstanden tot de hoekpunten aan de driehoeksongelijkheid voldoen. Wij willen hier een *willekeurige* driehoek ABC beschouwen; *gunstig* zullen wij een punt P noemen als met PA , PB en PC tot zijden een niet-ontaaarde driehoek kan worden geconstrueerd; een punt waarvoor één der drie afstanden gelijk is aan de som der beide andere zal een *grenspunt* heten; de overige punten P noemen wij *ongunstig*. Voor een gelijkzijdige driehoek zijn dus de punten van de omgeschreven cirkel grenspunten en alle andere zijn gunstig.

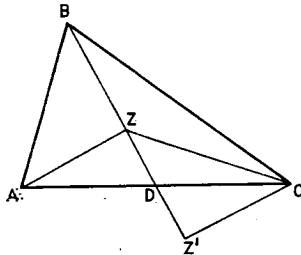


Fig. 2.

Een willekeurige driehoek heeft blijkbaar steeds wel gunstige punten: het middelpunt van de omgeschreven cirkel is een eenvoudig voorbeeld. Ook het zwaartepunt Z is altijd gunstig, zoals blijkt uit fig. 2, waar $DZ' = ZD$; de zijden van driehoek $ZZ'C$ zijn gelijk aan ZA , ZB en ZC . Daarmee is tevens aangetoond dat *binnen* de driehoek altijd wel gunstige punten liggen. Ook *buiten* de driehoek liggen altijd gunstige punten: een behoorlijk ver van de driehoek verwijderd punt P is zeker gunstig, omdat de onderlinge verhoudingen van de afstanden PA , PB en PC weinig van de eenheid verschillen.

Omgekeerd heeft een niet-gelijkzijdige driehoek ook altijd ongunstige punten. Als P in A ligt zijn PA , PB en PC resp. 0, c en b .

Het hoekpunt A is dus ongunstig als $b \neq c$ en een grenspunt als

¹⁾ W. A. van der Spek, Over de onderlinge afstanden van vier coplaire punten, N. T. v. W. 49 (1961–1962), 24–29.

$b = c$. Voor een driehoek met ongelijke zijden zijn dus alle hoekpunten ongunstig. Voor een gelijkbenige, niet gelijkzijdige driehoek is de top een grenspunt en de andere hoekpunten zijn ongunstig.

Veronderstellen wij eenvoudshalve dat de drie zijden onderling verschillend zijn, dan zal een weg die van Z via een hoekpunt naar ver buiten de driehoek gaat in het gunstige deel G van het vlak beginnen en eindigen en daarbij door het ongunstige gedeelte G' gaan. Zo'n weg zal dus minstens twee grenspunten passeren. De gedachte kan opkomen, dat G' de gedaante heeft van een ring (waarin de drie hoekpunten gelegen zijn) zodat de *grenskromme* K uit twee gesloten krommen zou bestaan, waarvan één binnen de andere ligt. Bij een bijna-gelijkzijdige driehoek zou de ring dan dun zijn en voor een gelijkzijdige tot de omschreven cirkel verschrallen.

Het blijkt al spoedig dat dit vermoeden onjuist is en de figuur van G , K en G' minder overzichtelijk. Immers er zijn drie mogelijkheden voor P om een ongunstig punt te zijn: G' is de som van drie verzamelingen G'_1 , G'_2 en G'_3 , waarvoor resp. geldt $PA > PB + PC$, $PB > PC + PA$ en $PC > PA + PB$. Voor een gemeenschappelijk punt van b.v. G'_1 en G'_2 zou moeten gelden $0 > 2PC$, wat ongerijmd is. Daaruit volgt dat G'_1 , G'_2 en G'_3 buiten elkaar liggende verzamelingen zijn. Een zelfde gedachtengang geldt voor K , die opgebouwd is uit K_1 , K_2 en K_3 , gedefinieerd door $PA = PB + PC$ etc. Een gemeenschappelijk punt van K_1 en K_2 zou moeten voldoen aan $PC = 0$ en dus met C samenvallen, maar C is voor een driehoek met ongelijke zijden geen grenspunt. De (voorlopige) conclusie is: G' valt uiteen in drie buiten elkaar gelegen delen G'_i , die zelfs niet aan elkaar grenzen.

Nader onderzoek leert dat onze gevolgtrekking toch geen steek houdt. Wij zullen n.l. aantonen dat één (en slechts één) der verzamelingen G'_i leeg is. Wij veronderstellen daarvoor $a > b > c$. Wij weten uit 1) dat steeds een driehoek mogelijk is met de zijden $a \cdot PA$, $b \cdot PB$ en $c \cdot PC$. Daaruit volgt

$$a \cdot PA \leq b \cdot PB + c \cdot PC$$

of wel

$$PA \leq \frac{b}{a} PB + \frac{c}{a} PC$$

en dat is, wegens $\frac{b}{a} < 1$, $\frac{c}{a} < 1$ strijdig met

$$PA > PB + PC$$

waaruit volgt dat G'_1 leeg is en hetzelfde geldt blijkbaar voor K_1 .

Voor het hoekpunt A geldt $PA = 0$, $PB = c$, $PC = b$ en dus $PC > PA + PB$; voor B zijn de afstanden resp. c , 0 en a , zodat eveneens $PC > PA + PB$; voor C tenslotte heeft men b , a en 0 en dus $PB > PC + PA$. Hieruit volgt dat G'_2 en G'_3 niet leeg zijn. De conclusie is: *G' bestaat uit twee buiten elkaar gelegen en ook niet aan elkaar grenzende delen G'_2 en G'_3 , waarvan het eerste het hoekpunt C en het andere de hoekpunten A en B bevat.* De grenskromme K bestaat uit twee buiten elkaar gelegen takken K_2 en K_3 .

Beschouwen wij thans nog de gelijkbenige driehoek, dan moeten twee gevallen worden onderscheiden. Is $a = b > c$ dan is ten duidelijkste behalve G'_1 en K_1 ook G'_2 leeg, terwijl K_2 alleen het punt C bevat. G' bestaat dan dus alleen uit de punten waarvoor $PC > PA + PB$; de grens van dit gebied, waartoe de punten A en B behoren, is K_3 ; voorts is er nog het geïsoleerde grenspunt C .

Is daarentegen $a > b = c$ dan bestaat G' uit twee t.o.v. de hoogtelijn uit A symmetrisch gelegen gebieden G'_2 en G'_3 die resp. het hoekpunt C en het hoekpunt B bevatten en aan elkaar grenzen in het hoekpunt A , dat zowel tot K_2 als tot K_3 behoort.

Voor $a = b = c$ zijn G'_2 en G'_3 leeg (dat is ten slotte de stelling van Pompeïu), maar wel treedt thans K_1 op; het is de boog BC van de omgeschreven cirkel, K_2 en K_3 zijn de bogen CA en AB .

3. Op de bovenstaande meer kwalitatieve beschouwingen laten wij nu een analytische behandeling van het vraagstuk volgen. Wij gaan er van uit dat met drie lijnstukken PA , PB en PC alleen dan een driehoek kan worden geconstrueerd als $(PA + PB + PC)(-PA + PB + PC)(PA - PB + PC)(PA + PB - PC) \geq 0$.

Stellen wij $PA^2 = p_1$, $PB^2 = p_2$, $PC^2 = p_3$ en

$$F(P) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2p_2p_3 - 2p_3p_1 - 2p_1p_2 \quad (1)$$

dan geldt dus: P is een ongunstig punt, een grenspunt of een gunstig punt al naar gelang $F(P)$ groter dan, gelijk aan of kleiner dan nul is. Wij voeren een rechthoekig coördinaten-stelsel OXY in en veronderstellen $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ en $P = (x, y)$. Men heeft dan

$$p_i = (x^2 + y^2) - 2x_i x - 2y_i y + (x_i^2 + y_i^2) \quad (2)$$

en wij vinden uit (1) en (2) voor de grenskromme K een vergelijking van de gedaante:

$$K(x, y) = l_0(x^2 + y^2)^2 + (l_1 x + l_2 y)(x^2 + y^2) + Q(x, y) = 0 \quad (3)$$

waarbij Q een kwadratische functie van x en y is. Zij stelt een kromme van de vierde graad voor, die zoals men gemakkelijk na-

gaat, de isotrope punten van het vlak tot dubbelpunten heeft. Wij vinden dus: *de grenskromme K is een bicirculaire kromme van de vierde graad.*

4. De bicirculaire krommen van de vierde graad zijn in de tweede helft der negentiende eeuw grondig onderzocht door Casey, Hart en Salmon; men vindt een uitvoerige behandeling in het klassieke werk over vlakke krommen van de laatst genoemde¹⁾.

Door een eenvoudige verschuiving van het assenstelsel kan men bereiken dat in (3) de termen van de derde graad wegvallen: $l_1 = l_2 = 0$. Snijdt men dan de kromme

$$(x^2 + y^2)^2 + Q(x, y) = 0 \quad (4)$$

met een willekeurige rechte door de oorsprong: $x = u \cos \varphi$, $y = u \sin \varphi$, dan ontbreekt in de door substitutie ontstaande vierdegraads-vergelijking voor u de term van de derde graad. De vier snijpunten van K met een rechte door O hebben derhalve de eigenschap dat de som hunner afstanden tot O gelijk aan nul is; O is dus het zwaartepunt dezer vier snijpunten of ook O is het midden van de middens van twee paar snijpunten²⁾. O wordt daarom wel het „centrum” van de kromme geheten.

In ons geval volgt uit (1) en (2):

$$l_0 = -3, l_1 = 4 \sum x_i, l_2 = 4 \sum y_i$$

waaruit wij aflezen dat de vergelijking van K de gedaante (4) verkrijgt als wij O zo kiezen dat $\sum x_i = \sum y_i = 0$. Hieruit volgt: *het centrum van de grenskromme K ligt in het zwaartepunt Z van de driehoek.*

5. Een bicirculaire kromme van de vierde graad kan altijd worden beschouwd als de omhullende van een stelsel cirkels, die loodrecht staan op een vaste cirkel en waarvan de middelpunten op een kegelsnede liggen. Wij zullen deze uitspraak voor onze kromme K bewijzen, en daarbij tevens zien hoe zij in dit bijzondere geval nader gespecificeerd kan worden.

Uit (1) volgt

$$F(P) = (p_1 - p_2 - p_3)^2 - 4 p_2 p_3 \quad (5)$$

¹⁾ Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven (2. Aufl. Leipzig, 1882), 316–328.

²⁾ G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I, (2. Aufl. Leipzig-Berlin, 1910), 118–119.

welke uitdrukking de *discriminant* is van de vierkantsvergelijking

$$C(\lambda) \equiv p_2\lambda^2 + (p_1 - p_2 - p_3)\lambda + p_3 = 0 \quad (6)$$

Denkt men zich hierin de uitdrukkingen (2) gesubstitueerd en beschouwt men λ als een parameter, dan wordt door (6) een verzameling van cirkels C_λ aangewezen, waarvan door elk punt van het vlak twee exemplaren gaan. De conclusie is: de grenskromme K is de meetkundige plaats der punten P zodanig, dat de beide door P gaande exemplaren van de kwadratische cirkelverzameling (6) samenvallen.

De coëfficiënt van $(x^2 + y^2)$ in $C(\lambda)$ is gelijk aan $\lambda^2 - \lambda + 1$ en dus positief voor reële λ . Een punt P ligt dus buiten (binnen) de cirkel C_λ als bij substitutie van zijn coördinaten in $C(\lambda)$ de uitkomst positief (negatief) is. Is nu P een punt dat buiten elk der cirkels C_λ ligt, dan is $C(\lambda)$ positief voor elke λ en de vierkantsvergelijking (6) heeft dus geen reële wortels. Hieruit volgt dat de discriminant (5) negatief is en daaruit weer dat P een *gunstig* punt is. Ligt daarentegen het punt P binnen enige cirkel C_λ , dan is er een waarde van λ waarvoor $C(\lambda)$ negatief is en daar voor de coëfficiënt van λ^2 geldt $p_2 \geq 0$ zijn er zeker waarden van λ waarvoor $C(\lambda)$ positief is. De vergelijking (6) heeft dus reële wortels, waaruit volgt dat $F(P)$ positief is en het punt P *ongunstig*.

Wij hebben derhalve: *de punten P die buiten alle cirkels van de verzameling (6) liggen vormen het gunstige gebied G ; de cirkels overdekken het ongunstige gebied G' ; de omhullende van de cirkelverzameling is de grenskromme K .*

6. Wij zullen thans de cirkelverzameling nader onderzoeken. Uit (6) lezen wij af dat alle cirkels lineair afhangen van de drie cirkels $p_i = 0$; zij behoren dus tot het door deze drie bepaalde net en daaruit volgt weer dat zij loodrecht staan op de cirkel die op deze drie basisexemplaren loodrecht staat.

Daar de cirkels $p_i = 0$ de nulcirkels zijn met A , B en C tot middelpunt gaat hun gemeenschappelijke orthogonale cirkel dóór deze punten. De gevolgtrekking is: *alle cirkels C_λ staan loodrecht op de omgeschreven cirkel H van driehoek ABC .*

Kiezen wij de oorsprong van het coördinatenstelsel in Z dan volgt uit (2) en (6):

$$C(\lambda) \equiv (\lambda^2 - \lambda + 1)(x^2 + y^2) - 2x(x_2\lambda^2 + 2x_1\lambda + x_3) - 2y(y_2\lambda^2 + 2y_1\lambda + y_3) + D = 0$$

zodat men in homogene coördinaten voor het middelpunt $Q(\lambda)$ vindt:

$$x = x_2\lambda^2 + 2x_1\lambda + x_3, y = y_2\lambda^2 + 2y_1\lambda + y_3, z = \lambda^2 - \lambda + 1 \quad (7)$$

De meetkundige plaats van $Q(\lambda)$ is dus een kegelsnede en wel, daar z definitief is, een ellips ε . Zij gaat, en wel voor $\lambda = 1$, $\lambda = \infty$ en $\lambda = 0$, door de hoekpunten A , B en C , die immers ook middelpunten zijn van (nul-)cirkels van de verzameling. Daar $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$ en $\frac{dz}{d\lambda}$

voor $\lambda = 0$ resp. zijn $2x_1$, $2y_1$ en -1 gaat de raaklijn aan ε in het punt C door het punt $(-2x_1, -2y_1)$, dat is het spiegelpunt van A t.o.v. het midden van BC . De raaklijn aan ε in C is dus evenwijdig met AB en daar het overeenkomstige geldt voor de andere hoekpunten is ε de ellips van Steiner van driehoek ABC .

De verzameling (6) bestaat dus uit de cirkels die hun middelpunt hebben op de ellips ε van Steiner en loodrecht staan op de omgeschreven cirkel H van de driehoek.

7. De ellips ε heeft met de cirkel H behalve de punten A , B en C nog een snijpunt S , het punt van Steiner. Voor $a > b > c$ ligt S steeds op de cirkelboog CA van H (fig. 3). Opdat een punt M middelpunt zij van een (reële) cirkel die H loodrecht snijdt moet M buiten of op H liggen. Wij zien dus dat alleen dan cirkels C_λ ontstaan als M ligt op de boog AB dan wel op de boog CS van ε . De cirkelverzameling valt dus in twee delen uiteen; tot het eerste behoren de nulcirkels in A en B , tot de tweede die in C en ook de vierde nulcirkel van de verzameling, namelijk die in S . De eerste verzameling bedekt het ongunstige gebied G'_3 , de andere bedekt G'_2 .

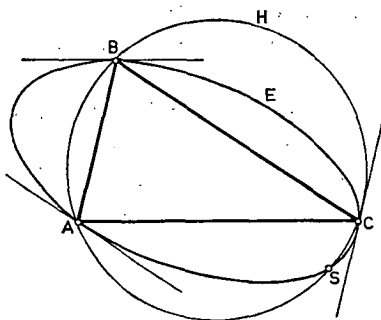


Fig. 3.

8. Een punt P ligt alleen dan op K als de beide door P gaande cirkels van de verzameling samenvallen. Alle cirkels door P , die op H loodrecht staan, gaan ook door het inverse punt P' van P t.o.v. H en hun middelpunten liggen op de middelloodlijn m van PP' . Het punt P is dus alleen dan een punt van K als m aan ε

raakt. Daar de relatie tussen P en P' involutorisch is, vinden wij: is P een punt van K , dan ligt ook P' op K . Of anders gezegd, K is een *anallagmatische kromme*: bij de inversie ten opzichte van de omgeschreven cirkel H gaat K in zichzelf over. Een gevolg is nog: de beide ongunstige gebieden G'_2 en G'_3 (en hun begrenzingsen K_2 en K_3) zijn elk afzonderlijk invariant bij inversie ten opzichte van H .

Wij zagen zojuist dat de middelloodlijn m aan ε moet raken, opdat P een punt van K zal zijn. De verbindingslijn PP' gaat door het middelpunt M van H . Men kan dus de punten van K als volgt construeren: neem een punt Q van ε en de raaklijn m aan ε in Q , beschrijf de cirkel met Q tot middelpunt en de lengte van de raaklijn r uit Q aan H tot straal en snij deze met de loodlijn uit M op m (fig. 4).

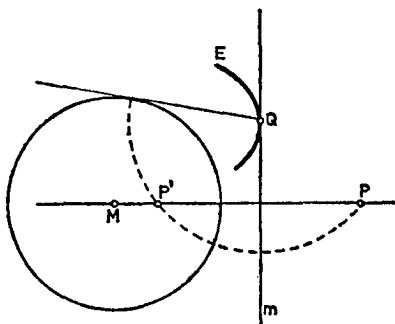


Fig. 4.

Men vindt dan P , gelijktijdig met P' . Daar ε door drie punten en de raaklijnen in die punten gegeven is kan men ten duidelijkste de gehele constructie met lineaal en passer uitvoeren. *De kromme K kan punt voor punt elementair geconstrueerd worden.*

Dit is meer dan de definitie van K kon doen verwachten, want de constructie van P met behulp van de primitieve voorwaarde $PB = PC + PA$ vergt de snijding van de cirkel $PB = d$ met de ellips $PC + PA = d$. Opdat men, uitgaande van Q op ε , inderdaad een punt P vindt is uiteraard allereerst nodig dat, zoals wij reeds zagen, Q buiten H ligt. Voorts moet de cirkel (Q, r) de loodlijn uit M op m snijden of wel, m moet als middelloodlijn van twee inverse punten buiten H liggen of in het grensgeval aan H raken. De conclusie is: alleen dan is een punt Q van ε actief, als zijn raaklijn aan ε de cirkel H niet snijdt. Van belang worden dus de *gemeenschappelijke raaklijnen van ε en H* . Uit de ligging van ε en H blijkt dat er altijd vier dergelijke lijnen zijn. Zij worden hier met $U_i V_i (i = 1, \dots, 4)$ aangeduid, waarbij U_i het raakpunt met ε en V_i dat met H is. (fig. 5)

Actief bij het ontstaan van de grenskromme K betrokken zijn dus die cirkels van de verzameling wier middelpunt op de bogen U_1U_2 en U_3U_4 (inclusief de uiteinden) van ε gelegen is.

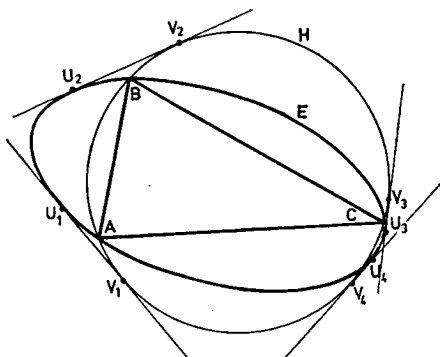


Fig. 5.

Elk dezer cirkels raakt K tweemaal. Alleen reeds deze cirkels bedekken het gehele ongunstige gebied G' . Cirkels van de verzameling die hun middelpunt op AU_1 , U_2B , CU_3 en U_4S hebben, zijn reëel maar hebben geen reële raakpunten met K , zij liggen geheel *binnen* G' . Tot deze K dubbelrakende cirkels behoren ook de nulcirkels in A , B , C en S ; daaruit volgt dat deze vier punten brandpunten van de kromme K zijn. De uiteinden U_i der bedoelde bogen zijn middelpunten van cirkels waarop de punten P en P' samenvallen en wel in V_i . Deze vier cirkels hebben dus vierpuntige aanraking met K , de punten U_i zijn toppen van K , V_i is het bij U_i behorende kromtemiddelpunt. K snijdt de omgeschreven cirkel H in de punten V_i en daar het aantal in het eindige gelegen snijpunten van K en H gelijk is aan $4 \times 2 - 2 \times 2 = 4$, zijn er geen andere dan de punten V_i . De snijding van K en H is blijkbaar in elk der punten loodrecht.

9. De punten V_i zijn reeds vroeger ontmoet door Veldkamp¹⁾, toen deze een onderzoek instelde naar de punten P op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC waarvoor één der afstanden PA , PB , PC gelijk is aan de som der andere. De door hem gevonden punten blijken dus de uiteinden op H te zijn van de gemeenschappelijke raaklijnen van H en de ellips van Steiner. Wij willen de ligging dezer punten nog iets nader onderzoeken.

Duiden wij algemeen PA , PB en PC met q_1 , q_2 en q_3 aan, dan geldt

¹⁾ G. R. Veldkamp, Vier merkwaardige punten op de omgeschreven cirkel van een driehoek, N. T. v. W. 32 (1944–1945), 1–12.

voor $V_1:q_3 = q_1+q_2$, terwijl uit de stelling van Ptolemeus blijkt $bq_2 = aq_1+cq_3$, zodat $q_1:q_2:q_3 = (b-c):(c+a):(a+b)$. Op analoge wijze vindt men voor de andere punten V :

$$\begin{aligned} V_2: (b+c) : (-c+a) : (a+b) \\ V_3: (b+c) : (c+a) : (a-b) \\ V_4: (b-c) : (-c+a) : (a-b) \end{aligned} \quad (8)$$

Voor het op de boog CA gelegen punt V_1 geldt dus $V_1C:V_1A = q_3:q_1 = (a+b):(b-c)$ of wel $\frac{q_3}{q_1} - 2 = \frac{a-b+2c}{b-c} > 0$, zodat $V_1C:V_1A > 2$ (welke ongelijkheid niet verscherpt kan worden: neem $c \rightarrow 0, b \rightarrow a$). Het punt V_1 ligt dus minstens tweemaal zover van C als van A , het nadert tot A als $c \rightarrow b$.

Voor het punt V_2 op de boog BC vinden wij overeenkomstig $V_2C:V_2B > 2$.

Het punt V_3 geeft een ander resultaat; men heeft $\frac{q_2}{q_3} = \frac{c+a}{a-b}$, dus $\frac{q_2}{q_3} - 3 = \frac{3b+c-2a}{a-b} = \frac{2(b+c-a)+(b-c)}{a-b} > 0$, zodat $V_3B:V_3C > 3$; de ongelijkheid kan niet worden verscherpt wegens $c \rightarrow b, a \rightarrow b+c$.

Voor V_4 geldt een dergelijke beschouwing niet, in q_1 en q_3 treden nu verschillen van zijden op, blijkbaar neemt $\frac{q_3}{q_1}$ elke positieve waarde aan bij geschikte keuze van a, b en c .

Men zou dus kunnen zeggen: V_1, V_2 en (in nog sterkere mate) V_3 liggen „betrekkelijk” dicht bij resp. A, B en C ; zij naderen tot deze punten als de driehoek nadert tot een gelijkzijdige. V_4 daarentegen beweegt zich langs de gehele boog CA en blijft dat doen als de driehoek „bijna” gelijkzijdig is; wel ligt V_4 uiteraard altijd tussen V_1 en S .

Men kan zich de vraag stellen of de toppen V_2 en V_4 op H diametraal tegenover elkaar kunnen liggen. Stel dat voor V_2 geldt $q_1 = t_1(b+c)$ enz. en voor V_4 $q_1 = t_2(b-c)$ enz. dan geeft de stelling van Ptolemeus, toegepast op de vierhoek AV_2CV_4 dat $V_2V_4 = 2(a-c)t_1t_2$. Als V_2V_4 een middellijn is dan zijn V_2V_4A, V_2V_4C rechthoekige driehoeken en wij vinden, als nog $u_1 = \frac{1}{4t_1^2}$,

$u_2 = \frac{1}{4t_2^2}$ wordt gesteld, de volgende vergelijkingen voor u_1 en u_2 :

$$\begin{aligned}
 (b-c)^2 u_1 + (b+c)^2 u_2 &= (a-c)^2 \\
 u_1 + u_2 &= 1 \\
 (a-b)^2 u_1 + (a+b)^2 u_2 &= (a-c)^2
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Daar $a \neq c$ hebben deze vergelijkingen alleen dan een oplossing als $b^2 = a^2 + c^2 - ac$; voor u_1 en u_2 vindt men positieve getallen. Wij hebben dus de fraaie, mij door G. R. Veldkamp medegedeelde stelling: *de toppen V_2 en V_4 van K liggen op H diametraal slechts dan als β gelijk is aan 60° .* De topaaklijnen in V_2 en V_4 vallen dan samen.

10. Uit het voorgaande is gebleken dat de grenskromme K uit twee ovalen bestaat, K_2 en K_3 ; de eerste omsluit C en S en gaat door V_3 en V_4 ; de andere omsluit A en B en gaat door V_1 en V_2 .

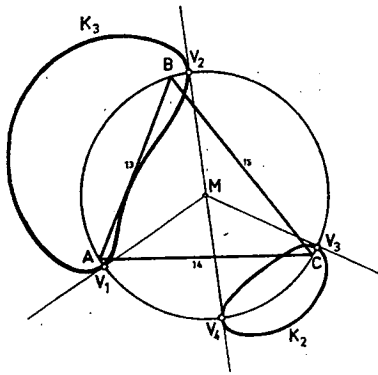


Fig. 6.

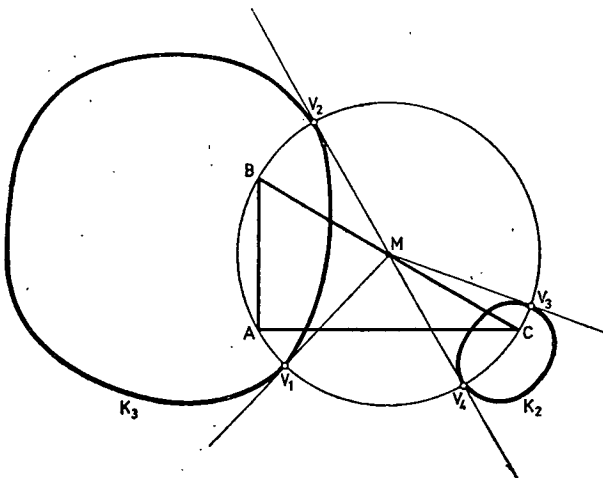


Fig. 7.

In de figuren 6 en 7 is K geschetst, resp. voor de driehoek $a : b : c = 15 : 14 : 13$ en voor een rechthoekige driehoek met hoeken van 60° en 30° .

K is een kromme met twee dubbelpunten, dat is één minder dan een niet ontaarde vierde-gradskromme maximaal kan dragen.

K heeft dus het geslacht één; om haar door een parameter-voorstelling weer te geven behoeft men elliptische functies. Zoals wij boven zagen treedt een bijzonder geval in als de driehoek gelijkbenig is; wij zullen analytisch bevestigen dat K dan een dubbelpunt heeft in de top van de driehoek. Kies daarvoor de oorsprong in de top en de Y -as langs de symmetrie-as; de andere hoekpunten zijn (s, h) en $(-s, h)$ (fig. 8). De vergelijking van K is nu

$$\sqrt{x^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-s)^2 + (y-h)^2} \pm \sqrt{(x+s)^2 + (y-h)^2} = 0$$

of wel

$$-3(x^2 + y^2) + 8hy(x^2 + y^2) + 4\{(3s^2 - h^2)x^2 - (s^2 + h^2)y^2\} = 0. \quad (10)$$

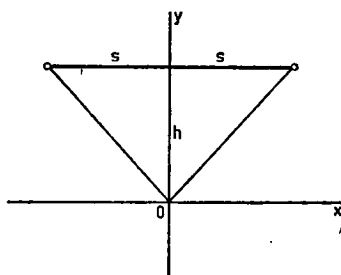


Fig. 8.

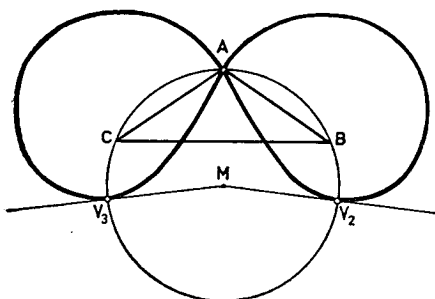


Fig. 9.

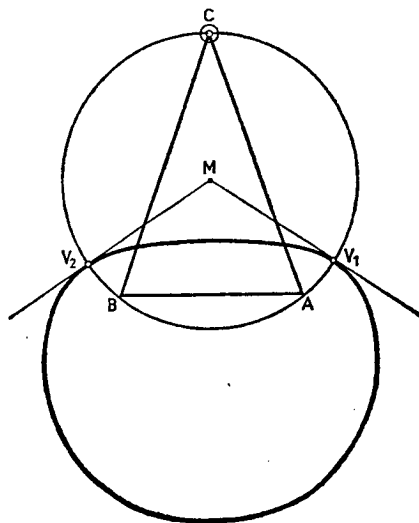


Fig. 10.

Hieruit lezen wij af dat K een dubbelpunt in O heeft, en wel resp. een *knooppunt* of een *geïsoleerd punt* al naar gelang $3s^2 - h^2$ positief of negatief, dus de tophoek groter of kleiner dan 60° is.

In de fig. 9 en 10 zijn deze beide gevallen geschetst. Deze krommen zijn rationaal.

We merken nog op dat ons vraagstuk zijn zin niet verliest als de driehoek ABC ontaard is, dus als A , B en C collineair zijn. In fig. 11 is het geval $a = b + c$, $b > c$ en in fig. 12 het geval $a = 2c$, $b = c$ getekend. Zeer eenvoudig wordt de opgave voor $a = b$, $c = 0$; A en B vallen dan samen (fig. 13), K is ontaard in de Apollonische cirkel $PC = 2 PA$ en de nulcirkel in C .

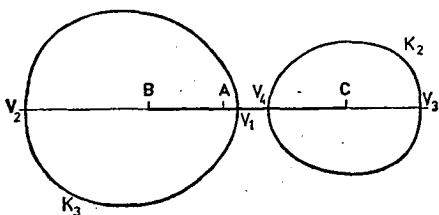


Fig. 11.

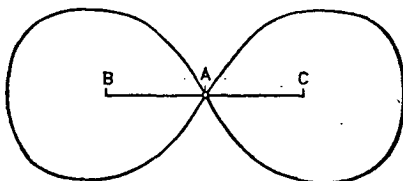


Fig. 12.

Merkwaardig zijn de gedragingen van K voor een driehoek met ongelijke zijden, die weinig van een gelijkzijdige verschilt. Wij weten dat dan V_1 , V_2 en V_3 dicht bij A , B en C liggen; K heeft de gedaante die in fig. 14 is geschetst, de ovaal K_3 omvat de cirkelboog AB en K_2 een (onbepaald) gedeelte van boog AC terwijl K zich geheel van boog BC distantieert. De overgang naar de omgeschreven cirkel, die volgens de stelling van Pompeïu grenskromme is van de gelijkzijdige driehoek, verloopt dus niet op continue wijze. De boog BC met name treedt zonder aankondiging in het licht, zij duikt plotseeling op vanuit het imaginaire domein van het vlak.

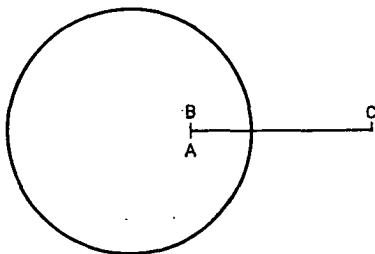


Fig. 13.

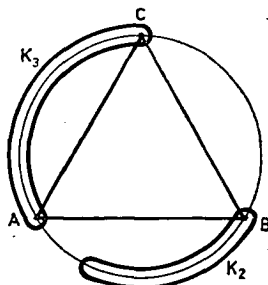


Fig. 14.

NOGMAALS EEN AMERIKAANSE TEST

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

OOSTERBEEK

In het nummer van 1 februari van deze jaargang vindt u de resultaten van een proef op kleine schaal in Nederland genomen met de twaalfde jaarlijkse test van The Mathematical Association of America en The Society of Actuaries. De dertiende test van deze verenigingen is op grotere schaal in ons land afgenomen. De resultaten vindt u hieronder.

In totaal deden mee 1325 leerlingen van 36 verschillende scholen. Deze leerlingen behoorden tot de 4e en 5e klassen van de h.b.s.-B en tot de 5e en 6e klassen van het gymnasium-B. De resultaten zijn voor deze verschillende klassen afzonderlijk samengevat in de volgende tabel.

klasse	aantal scholen	aantal leerlingen	gemiddelde score
h.b.s.-B 4	24	720	29,2
h.b.s.-B 5	15	291	40,1
gymnasium-B 5	19	174	27,5
gymnasium-B 6	19	140	46,2

Het aantal leerlingen, dat een score van meer dan 80 behaalde bedroeg 8, waarvan er zelfs 3 meer dan 90 punten behaalden (uit een maximum van 150). Door de vereniging Wimecos werden een eerste en een tweede prijs beschikbaar gesteld voor degenen, die de hoogste scores behaalden. De eerste prijs is toegekend aan: J. A. Hage, leerling van het Gymnasium Erasmianum te Rotterdam, 99,25 pt., de tweede prijs aan Jos. C. van Teunenbroek, leerling van het Comenius Lyceum te Amsterdam, 97 pt.

Om enig inzicht in de spreiding te krijgen, vermeld ik de laagste en hoogste gemiddelden behaald in de verschillende klassen. Daarbij zijn klassen van 5 of minder leerlingen buiten beschouwing gelaten.

klasse	laagste gemiddelde	hoogste gemiddelde
h.b.s.-B 4	14,2 (16)	41,3 (47)
h.b.s.-B 5	31,1 (20)	52,3 (27)
gymnasium-B 5	21,8 (6)	35,2 (11)
gymnasium-B 6	36,1 (13)	58,9 (17)

De getallen tussen haakjes zijn de aantallen leerlingen van de klassen, die dit laagste resp. hoogste gemiddelde behaald hebben.

Het meest interessante van het resultaat is m.i., dat er niet uit blijkt, dat de leerlingen van de B-afdeling van de h.b.s. minder intelligent zijn dan de leerlingen van de B-afdeling van het gymnasium, zoals meestal beweerd wordt. De h.b.s.-B 4 wint het van gymnasium-B 5, terwijl anderzijds h.b.s.-B 5 duidelijk achterstaat vergeleken bij gymnasium-B 6. Het is niet gemakkelijk hieruit een duidelijke conclusie te trekken. Het materiaal is daarvoor te weinig omvangrijk. Dit bleek mij vooral, doordat één school de resultaten zo laat inzond, dat ik reeds genoodzaakt was geweest de gemiddelden van de overige scholen vast te stellen, voordat ik dit laatste resultaat kon verwerken. Deze ene school gaf een correctie in de gemiddelde scores van resp. +0,9 (47), +1,2 (27), —0,4 (12), +0,1 (2), waarbij tussen haakjes weer de aantallen leerlingen staan. Deze correcties geven een indruk van de mate van onbetrouwbaarheid van het eindresultaat.

Ik zou het toejuichen, als de Pedagogische Centra eens een nader vergelijkend onderzoek zouden willen instellen naar de mathematische begaafdheid van leerlingen van de h.b.s.-B en van het gymnasium-B.

De inhoud van de test is in grote trekken analoog aan die van het vorige jaar. Ik wil daarom geen plaatsruimte ervoor in beslag nemen. Ik heb echter nog een tamelijk groot aantal exemplaren van de Engelse Tekst (niet meer van de Nederlandse). Indien u prijs stelt op toezending van één of enkele exemplaren, stuurt u mij dan een enveloppe, formaat minstens 18×22 cm, waarop geschreven uw adres en het aantal exemplaren dat u wenst, en verder voorzien van een postzegel van 4 cent. Ik wacht tot 20 juni met het toezenden van de exemplaren, waarbij ik, indien de aanvraag te groot is, het aantal exemplaren zal reduceren.

Omdat ik u geen exemplaar van de sleutel kan doen toekomen, volgt deze hier:

1—10	D	A	B	B	C	D	C	D	B	A
11—20	B	C	B	B	D	C	B	A	C	A
21—30	E	D	E	A	C	E	E	D	A	D
31—40	C	E	A	E	B	C	D	B	C	B

De in Amerika behaalde resultaten weet ik nog niet. Zodra ik ze toegezonden krijg, zal ik ze in Euclides doen opnemen.

DE MECHANICA IN HET LEERPLAN VAN DE H.B.S.
1863—1962

door

Dr. JOH. H. WANSINK

ARNHEM

Nu de mechanica in de lopende cursus voor de laatste maal als zelfstandig vak op de lesrooster van de h.b.s.-B prijkt, is er o.i. alle reden om aan de plaats die dit vak in het verleden op onze scholen heeft ingenomen en in de naaste toekomst zal innemen in Euclides enige aandacht te wijden.

Hoe is de overgang van de mechanica van zelfstandig vak tot onderdeel der natuurkunde tot stand gekomen?

Door een simpele wetswijziging. Op 22 oktober 1960 werd er bij de Tweede Kamer der Staten-Generaal een wetsontwerp ingediend tot wijziging van de middelbaar-onderwijswet en de hoger-onderwijswet, waarvan de hoofdinhoud was, dat in artikel 16 derde lid der m.o.-wet de woorden „de mechanica” en in art. 27 bis, regelende de te onderwijzen vakken, de woorden „en de mechanica” zouden komen te vervallen (wetsontwerp 6155).

Aan de memorie van toelichting ontleen we:

„De wijziging, die wordt voorgesteld in de artikelen 16 en 27 bis, komt reeds voor in het bij Koninklijke boodschap van 19 oktober 1957 ingediende ontwerp van wet tot het verlenen van grotere vrijheid aan inrichting van het onderwijs (nr. 4946), waarover door de Tweede Kamer inmiddels een voorlopig verslag is uitgebracht. Hierdoor zal het verschil in de leerprogramma's van de h.b.s.-B en het gymnasium-B voor de natuurwetenschappen, waarvoor geen aanwijsbare reden bestaat, worden opgeheven.

Vele leden der Kamer achten, volgens het bedoelde voorlopig verslag, deze gelijkmaking praktisch en gewenst. Wel merkten zij op, dat zij hierin noch een maatregel tegen overlading zagen, noch een, die het onderwijs grotere vrijheid geeft.

Ook de ondergetekende is van oordeel, dat dit wijzigingsvoorstel niet noodzakelijk behoeft te worden behandeld in een geheel van bepalingen, dat grotere vrijheid van inrichting van het onderwijs wil geven. Wat het punt van de overlading betreft, merkt hij evenwel op, dat een beperkte leerstof, als zelfstandig vak gegeven, steeds

het gevaar in zich bergt een te zwaar accent te krijgen - huiswerk, repetities, examendruk -; zwaarder dan wanneer het wordt onderwezen als onderdeel van een groter geheel. Samenvoeging van vakken zal z.i. dan ook in het algemeen de kans op overlading verminderen. Juist ten aanzien van de natuurkunde en de mechanica aan de hogereburgerschool B kan, naar het hem voorkomt, mede gezien de bestaande situatie aan het gymnasium B, de samenvoeging zonder bezwaar geschieden". Aldus de memorie van toelichting.

De voorgestelde wijzigingen zijn door de beide kamers der Staten-Generaal aangenomen (wet van 2 maart 1961, Staatsblad 68).

In verband met de inzake leerprogramma en eindexamenregeling noodzakelijk geworden wijzigingen is de inwerkingtreding van de wet van 2 maart 1961 bepaald op een nader door de Kroon vast te stellen tijdstip ¹⁾.

Tussen de tijd van indiening van het wetsontwerp 6155 en de totstandkoming van de wetswijziging verliepen er voor het v.h.m.o. enige spannende maanden. Immers, bij Koninklijk besluit 390 betreffende de eindexamens werd plotseling incidenteel tot samenvoeging der vakken natuurkunde en mechanica overgegaan. Bij ons protest tegen deze incidentele regeling, dat we op 15 november 1960 aan de Staatssecretaris zonden, waren we van de indiening van ontwerp 6155 nog niet op de hoogte. In dit adres (zie Euclides XXXVI, 122 e.v.) werden tegen de incidentele samenvoeging een aantal bezwaren naar voren gebracht. Principieel verzet tegen een weldoordachte samenvoeging bestond er bij het Bestuur van Wimecos echter niet, zoals in ons adres van 15 november tot uitdrukking kwam.

„Wij zijn van oordeel", aldus het adres, „dat de samenvoeging van de vakken mechanica en natuurkunde op verantwoorde wijze tot stand zal kunnen komen bij een herziening van de wet op het middelbaar onderwijs, eventueel bij de totstandkoming van de wet op het voortgezet onderwijs, d.w.z. bij een algemene reorganisatie van het betreffende onderwijs, waarbij door nieuwe leerplannen, nieuwe urentabellen, enz., een doeltreffend functioneren van deze samenvoeging kan worden verzekerd".

In aansluiting op deze overwegingen heeft het Bestuur van Wimecos, nadat Wetsontwerp 6155 door de Tweede Kamer was aangenomen, in zijn adres van 7 februari 1961 erop aangedrongen:

a. de integratie van de mechanica in de natuurkunde voor wat

¹⁾ Het tijdstip is bij K.B. van 6 sept. 1961 (Stb. 285) bepaald op 1 september 1961. Zie Aanhangsel Ia.

betreft het eindexamen niet vóór 1963 te doen ingaan;

b. de door de afschaffing van de mechanica als afzonderlijk leer-vak vrijkomende vier roosteruren een zodanige bestemming te geven, dat deze uren voor de wiskundige en natuurwetenschappelijke vorming behouden blijven.

Het was ons niet onbekend dat er gevaren zouden kunnen dreigen, dat deze laatste eis niet voor inwilliging vatbaar zou worden geacht, op grond van de overweging, dat er op het gymnasium maar 10 uur voor de natuurkunde met inbegrip van de mechanica zijn uitgetrokken, terwijl een toevoeging van alle mechanica-uren bij de natuurkunde het aantal uren voor dit vak op de h.b.s. tot 15 zou doen stijgen.

Nu is het steeds onze overtuiging geweest dat de urenverdeling op de h.b.s. dient te geschieden op grond van de doelstelling van dit schooltype zelf en op grond van de mogelijkheden die dit schooltype biedt. Indien, zoals in ons geval, een zeker aantal uren voor een bepaald schooltype, met name de h.b.s., wenselijk en mogelijk wordt geacht, is het niet toelaatbaar dit aantal uren te reduceren op grond van de overweging, dat er op een ander schooltype, met name het gymnasium, ook niet een zelfde aantal uren voor zou kunnen worden uitgetrokken.

Onze vrees dat er uren voor de exacte vorming verloren zouden gaan is gelukkig ongegrond gebleken en het zal duidelijk zijn dat we dan ook in dit opzicht met voldoening kennis genomen hebben van de inhoud van de circulaire van de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen van 7 juni 1961, waarin werd aangekondigd:

a. dat het in zijn bedoeling lag te bevorderen dat met ingang van 1 september 1961 het aantal uren voor natuurkunde voor de vierde klasse van de h.b.s.-B van 3 op 4 en het aantal uren voor wiskunde voor die klasse van 5 op 6 zou worden gebracht;

b. dat het in zijn bedoeling lag het aantal uren voor natuurkunde met ingang van het schooljaar 1962—1963 in de vijfde klasse van 3 op 5 te brengen;

c. dat in het jaar 1962 de mechanica voor het laatst als zelfstandig vak op het eindexamen van de h.b.s.-B zou worden geëxamineerd.

De regeling heeft zijn beslag gekregen door het Koninklijk Besluit van 13 oktober 1961 (Stb. 320) tot wijziging van het leerprogramma voor de natuurkunde in verband met de incorporatie der mechanica. Als aanhangsel tot dit artikel zullen we in dit verband opnemen

enkele artikelen uit dit Besluit ¹⁾ en de circulaire van de Inspectie van het V.H.M.O. van 15 september over de nieuwe groeppenindeling ²⁾ Zo mogelijk voegen we daar dan het nieuwe Koninklijk Besluit aan toe, indien dit inmiddels mocht verschijnen. Vooral de tijdige publicatie van de nieuwe groeppenindeling stellen we zeer op prijs.

We gaan nu voor de mechanica op de hogereburgerschool een nieuwe tijd tegemoet. De bezwaren tegen een te wiskundig georiënteerd mechanica-onderwijs die meer dan dertig jaren lang niet van de lucht waren, kunnen nu dra tot het verleden behoren. De weg is thans vrij voor een didactisch verantwoorde inductief-experimentele methode ook t.a.v. de leerstof der mechanica en voor de waarborg van een verantwoorde samenhang van de nieuwe leerstof met de overige gebieden der natuurkunde. De desbetreffende leerstof zal door de natuurkunde aanvankelijk op een lager niveau van abstractie kunnen worden onderwezen, zonder dat een lager eindniveau toelaatbaar behoeft te worden geacht. Vraagstukken die geen functionele rol in de overige leerstof spelen, die er waren om hun zelfs wil of louter ter wille van de eindexamentraining, zullen nu kunnen verdwijnen. Het stemt ten aanzien van de toekomst hoopvol, dat er reeds tal van leerboeken zijn, die er blijk van geven, dat de auteurs ernstig rekening hebben gehouden met de op handen zijnde en nu zijn beslag gekregen hebbende integratie.

Aan de examens van de naaste toekomst valt de taak toe voor de handhaving van normen ten aanzien van de in de groepen *A—F* omschreven leerstof te waken. Blijkens berichten bij de besturen van Wimecos en Velines binnengekomen zijn er leraren, die het op prijs stellen, als er gezorgd kan worden voor de uitgave van een verzameling vragen en opgaven over de in de genoemde groepen aangegeven leerstof analoog aan de „250 opgaven samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie” voor het vak wiskunde. Dit verzoek is bij de genoemde besturen in goede aarde gevallen en ik vertrouw, dat het gelukken zal op korte termijn een uitgave in bedoelde zin tot stand te brengen.

Aan de strijd om de mechanica is op een o.i. bevredigende wijze thans een einde gekomen. Over deze strijd heb ik voor wat betreft de periode tot 1952 in de 27e jaargang van Euclides (blz. 67—85) uitvoerige mededelingen gedaan. Ik kan voor de slotperiode van 1953—1963 volstaan door te wijzen op de volgende feiten.

¹⁾ Zie Aanhangsel I.

²⁾ Zie Aanhangsel II.

a. Op 30 december 1953 is er een adres gezonden aan de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen naar aanleiding van het gemeenschappelijke nieuwe programma voor de mechanica, door Velines en Wimecos aanvaard met een pleidooi namens Wimecos voor de handhaving van centraal schriftelijk werk voor mechanica op het eindexamen (Euclides XXIX, 213—217).

b. Wimecos heeft medegewerkt aan de totstandkoming van het rapport van de Eenheden-commissie-1955 van Velines inzake een onderzoek naar de wenselijkheid en de mogelijkheid om bij het onderwijs in de natuurkunde op de scholen voor v.h.m.o. het m.k.g.s.A.-stelsel in te voeren (Euclides XXXII, 72—78).

c. Op initiatief van Liwenagel is door Liwenagel en Velines een rapport over het mechanica-onderwijs op het gymnasium opgesteld, dat is opgenomen in de 35e jaargang van Euclides, blz. 83—91.

d. Op 15 november 1960 en op 7 februari 1961 werden adressen gezonden aan de Staatssecretaris en aan de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen over de plaats van de mechanica in het leerplan en in het eindexamen van de hogereburgerschool (Euclides XXXVI, 122—125 en 348—349).

e. De Nomenclatuurcommissie van Wimecos en Liwenagel heeft zich in haar rapport (blz. 16—18) uitgesproken voor een bindende terminologie inzake enige begrippen uit de mechanica (1959).

f. De wet van 2 maart 1961, staatsblad 68, maakt een einde aan de mechanica als zelfstandig vak op de hogereburgerschool.

Voor Wimecos betekent de 2e maart 1961 een mijlpaal in haar historie. De zorg voor de belangen van het mechanica-onderwijs wordt haar uit handen genomen. Nog slechts gedurende korte tijd, tot en met het eindexamen-1962, in welk jaar voor het laatst een schriftelijk eindexamen in de mechanica zal worden afgenomen, heeft Wimecos enige bemoeienis met dit vak. De ernst van de situatie wordt duidelijk als men bedenkt, dat de naam van Wimecos op het spel staat; de tweede lettergreep van Wi-me-cos verliest zijn zin.

Toch beschouwt Wimecos de 2e maart 1961 geenszins als een dies ater. Onze overtuiging is, dat de mechanica die zijn bijzondere plaats als zelfstandig vak bijna een eeuw lang heeft kunnen handhaven, deze plaats te danken heeft gehad aan de tijdgeest van de tweede helft der 19e eeuw, waarin de zich fabelachtig ontwikkelende techniek stimulerend werkte op het onderwijs in de wis- en natuurkunde op het nieuwe schooltype van die periode, de h.b.s. De eisen van die techniek schenen de verheffing van de mechanica tot afzonderlijk vak te rechtvaardigen. Kenschetsend voor de betekenis die men aanvankelijk aan het vak dat nu mechanica heet, toekende,

is de omschrijving in de middelbaar onderwijswet van 1863: „de beginselen van de theoretische en toegepaste mechanica, van de kennis der werktuigen en van de technologie”.

De drang tot integratie van de mechanica in de natuurkunde, hoewel door de inspecteur van het middelbaar onderwijs, Dr. Steyn Parvé reeds in 1875 verdedigd, heeft niet in een snel tempo tot succes geleid. Het verzet in de onderwijswereld had een complex van oorzaken; de vrees dat integratie van de mechanica bij de natuurkunde zou leiden tot een verzwakking van de natuurwetenschappelijke vorming doordat de integratie gepaard dreigde te gaan met een beknipteling op het totaal aantal uren voor de wis- en natuurkundige vorming uitgetrokken, is hierbij een factor van betekenis.

Het stemt tot voldoening, dat de garanties voor een verantwoorde integratie waarop dezerzijds steeds is aangedrongen, inderdaad tot stand zijn gekomen (men zie de nieuwe groepenindeling in aanhangsel II), terwijl de urenverdeling (drie uren naar de natuurkunde, één naar de wiskunde) hoewel van fysisch standpunt misschien niet ideaal, toch o.m. deze goede zijde heeft, dat er geen uren voor het geheel der exacte vorming verloren gaan.

Het stemt verder tot voldoening dat de belangrijke wijzigingen die in het simpele wetje van 2 maart 1961 hun beslag gekregen hebben, tot stand konden komen zonder dat de goede verstandhouding tussen Velines en Wimecos die in het verleden t.a.v. de mechanica zo vaak verschillende standpunten verdedigden er in de jongste tijd onder heeft geleden. De leden van beide verenigingen hebben gestaan, staan en zullen voortaan staan niet als rivalen tegenover elkaar, maar als pleitbezorgers voor een goede behartiging van de belangen van het onderwijs in de exacte vakken in ons v.h.m.o. naast elkaar.

AANHANGSEL

I. a. Bij Koninklijk besluit van 6 september 1961 Staatsblad 285, is het tijdstip van inwerkingtreding van enige bepalingen tot wijziging van de middelbaar-onderwijswet, betreffende het vervallen van de mechanica als verplicht vak van onderwijs voor de hogereburgerscholen B, vastgesteld op 1 september 1962.

In verband hiermede is bij Koninklijk besluit van 13 oktober 1961, Staatsblad 320, het algemeen leerplan voor de openbare hogereburgerscholen A en B gewijzigd, in die zin dat in de lessentabel de mechanica en het voor dat vak vermelde aantal wekelijkse lessen vervallen en de leerstof voor de mechanica bij de natuurkunde wordt geïncorporeerd. Per 1 september 1962 ook voor de vijfde klas.

b. We citeren uit K.B. 320 tot wijziging van het K.B. van 28 mei 1954 (Stb. 244):

Artikel I.

A. De lessentabel opgenomen in *artikel 1*, wordt, voor wat betreft de vakken wiskunde en natuurkunde, gelezen als volgt:

wiskunde	5	5	5	—	6	—	5	15	26
natuurkunde	—	2	3	—	4	—	5	5	14

De mechanica en de voor dat vak vermelde aantal lessen vervallen.

B. In *artikel 4* vervalt het bepaalde onder 11 en worden de nummers 12 tot en met 18 gewijzigd in 11 tot en met 17.

Het bepaalde in *artikel 4* onder 12 (oud), tweede alinea, wordt gelezen:

Voor de hogereburgerschool B:

Klassen IV en V.

Zo nodig uitbreiding van de leerstof van de klassen II en III in verband met de te behandelen stof.

Kinematica van puntmassa's: rechtlijnige beweging, cirkelbeweging, harmonische beweging en parabolische beweging. Golfbewegingen.

Dynamica: de wetten van Newton met inbegrip van de algemene gravitatiewet; arbeid en impuls van een kracht; energie; botsingswetten (voorzover nodig als grondslag voor de kinetische gastheorie en voor elementaire processen); conservatieve krachtvelden.

Starre lichamen: evenwicht onder invloed van in een vlak werkende krachten; translatie; rotatie om een vaste as; zwaartepunt; impulsmoment; traagheidsmoment.

Kinetische gastheorie: mechanische warmtetheorie.

Elektrische, magnetische en elektromagnetische velden.

Fysische optica; stralingsverschijnselen.

Ontlading in gassen.

Enige onderwerpen uit de atoom- en kernfysica.

Algemene herhaling.

Artikel II.

1. Dit besluit treedt in werking met ingang van 1 september 1962.

2. In het schooljaar 1961—1962 vervalt de mechanica als vak van onderwijs voor de vierde klasse van de hogereburgerschool B. In dat schooljaar wordt in elk der vakken wiskunde, mechanica en natuurkunde wekelijks onderwijs gegeven gedurende het aantal lessen, vermeld in de onderstaande tabel:

klassen	I	II	III	IV		V		Totaal	
				A	B	A	B	A	B
wiskunde	5	5	5	—	6	—	5	15	26
natuurkunde	—	—	—	—	—	—	2	—	2
mechanica	—	2	3	—	4	—	3	5	12

c. Voorts zijn bij Koninklijk besluit van 13 oktober 1961, Staatsblad 321, de subsidie-voorschriften voor het bijzonder middelbaar onderwijs gewijzigd, m.d.v. dat het vak mechanica en het daarvoor vermelde aantal wekelijkse lessen m.i.v. 1 september 1962 in de lessentabellen van de hogereburgerscholen B worden geschrapt en het minimum aantal lessen in de natuurkunde verhoogd i.v.m. de incorporatie van de mechanica in de natuurkunde. In het schooljaar 1961—1962 wordt het minimum aantal lessen in de mechanica voor de hogereburgerscholen B verminderd van 3 op 2.

II. *Circulaire van de Inspectie van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs, dd. 15 september 1961.*

In verband met de samenvoeging van de natuurkunde en de mechanica in het algemeen leerplan voor de h.b.s. en in het eindexamenprogramma voor de h.b.s.-B worden in de examenlijst-natuurkunde de volgende wijzigingen en aanvullingen aangebracht, die voor het eerst van toepassing zullen zijn voor het eindexamen h.b.s.-B in 1963.

In de bestaande groep I (Algemene begrippen) van de examenlijst moet de volgende wijziging aangebracht worden:

14. Stoot (impuls van een kracht); impuls van een lichaam (hoeveelheid beweging).

De bestaande groep 13 van de examenlijst wordt als volgt gewijzigd:

1. Trillingen; amplitudo; trillingstijd (periode); frequentie.
2. Harmonische trilling (enkelvoudige trilling; uitwijking, snelheid en versnelling als functie van de tijd; fase).
3. Verband tussen kracht en uitwijking bij een harmonische trilling (krachtsconstante); verband tussen trillingstijd, massa en krachtsconstante.
4. Mathematische slinger; $T = 2\pi\sqrt{l/g}$; bepaling van g .
5. Energie bij een harmonische trilling.
6. Eigen trillingen en gedwongen trillingen; resonantie.
7. Samenstellen van twee harmonische trillingen langs dezelfde lijn; zwingen.
8. Periodieke bewering als som van harmonische trillingen.
9. Samenstellen van twee harmonische trillingen met gelijke frequenties langs onderling loodrechte lijnen.
10. Lopende golven, transversaal en longitudinaal; $\lambda = vT$.
11. Terugkaatsing; interferentie.
12. Staande golven; ontstaan en eigenschappen.
13. Proef van Melde; proef van Kundt; proef van Quincke.
14. Beginnel van Huygens; golf front, voortplantingsrichting.
15. Afleiding van de wetten van terugkaatsing en breking.
16. Doppler-effect (ook kwantitatief); buiging.

Aan de examenlijst worden de volgende *nieuwe groepen* toegevoegd:

Groep A. Kinematica.

1. Plaats als functie van de tijd.
2. Eenparige beweging; snelheid bij een eenparige beweging.
3. Willekeurige beweging; gemiddelde snelheid en snelheid op een tijdstip.
4. Eenparig versnelde rechtlijnige beweging; versnelling bij een eenparig versnelde rechtlijnige beweging; valbeweging; valversnelling.
5. Willekeurige beweging; gemiddelde versnelling en versnelling op een tijdstip.
6. Scalaire grootheden en vectoren; optellen, aftrekken en ontbinden van vectoren; vermenigvuldigen van een scalaire grootheid en een vector.
7. Verplaatsings-, snelheids- en versnellingsvector.
8. Cirkelbeweging; hoeksnelheid en hoekversnelling; tangentiële en radiale component van de versnelling; versnelling bij de eenparige cirkelbeweging.
9. Samenstellen en ontbinden van de kinematische grootheden; horizontale en schuine worp (geen ingewikkelde vraagstukken, niet t.o.v. een hellend vlak).

Groep B. Dynamica.

1. Traagheidswet.
2. Meting van een kracht; verband tussen kracht, massa en versnelling; $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; mks-stelsel.
3. Massa en gewicht; verband tussen *newton* en *kgf*.
4. Actie en reactie.
5. Middelpuntzoekende kracht bij eenparige cirkelbeweging.
6. Samenstellen van krachten op een puntmassa.
7. Wrijving; wrijvingscoëfficiënt.
8. Hellend vlak.

Groep C. Arbeid en energie; stoot en impuls.

1. Arbeid door een constante en door een veranderlijke kracht.
2. Vermogen.
3. Kinetische energie; wet van arbeid en verandering van kinetische energie.
4. Potentiële energie (bij conservatieve krachten).
5. Wet van behoud van mechanische energie (bij conservatieve krachten).
6. Stoot (impuls van een kracht, $\int \vec{F} dt$); impuls van een lichaam (hoeveelheid beweging, $m\vec{v}$).
7. Wet van behoud van impuls (behoud van hoeveelheid beweging).
8. Volkomen onveerkrachtige centrale botsing; volkomen veerkrachtige centrale botsing.
9. Botsing tegen een stilstaande wand en tegen een bewegende wand (zuiger).
10. Tweedimensionale botsing (i.v.m. kernbotsingen en eventuele behandeling van het comptoneffect).

Groep D. Velden.

1. Gravitatiewet van Newton; bepaling van de gravitatieconstante; gewicht en gravitatiekracht.
2. Gravitatieveld; veldsterkte, arbeid en potentiaal in een gravitatieveld.
3. Potentiaal in een conservatief krachtveld.
4. Centrale beweging; wetten van Kepler (verband tussen de tweede wet van Kepler en de wet van behoud van impulsmoment; verband tussen de derde wet van Kepler en de gravitatiewet van Newton).
5. Berekening van de massa van de aarde en van de zon.

Groep E. Vaste lichamen - statica.

1. Samenstellen van in één vlak gelegen krachten, die op een star lichaam aangrijpen; koppel.
2. Hefboom; moment van een kracht ten opzichte van een punt; momentenwet.
3. Massamiddelpunt (zwaartepunt).
4. Beginselen van de statica (tweedimensionaal) van starre lichamen; gevallen van evenwicht (stabiel, labiel, indifferent).
5. Kracht bij elastische vervorming; wet van Hooke; elasticiteitsmodulus.

Groep F. Vaste lichamen - rotatie.

1. Draaiing om een vaste as; lineaire snelheid en versnelling; hoeksnelheid ($\vec{\omega}$) en hoekversnelling ($\vec{\alpha}$).
2. Kinetische energie van een roterend lichaam; traagheidsmoment (J).
3. Verband tussen moment van een kracht ($\vec{M}$), traagheidsmoment en hoekversnelling.
4. Stootmoment (impulsmoment van een kracht, $\int \vec{M} dt$); impulsmoment van een lichaam (hoeveelheid draaiing, $\int \vec{\omega}$).
5. Wet van behoud van impulsmoment (behoud van hoeveelheid draaiing).

Voor het eindexamen h.b.s.-B in 1963 worden naast de aangewezen groepen uit de examenlijst-natuurkunde (zie circulaire van 1 juli 1961) bovendien aangewezen de groepen A, B en C.

DE ECONOMETRISCHE STUDIERICHTING TE AMSTERDAM

In het april-nummer van EUCLIDES is een uitvoerig overzicht gegeven van de kwantitatief-economische studierichting aan de Nederlandse Economische Hogeschool te Rotterdam. Het is waarschijnlijk niet algemeen bekend dat in het afgelopen jaar een soortgelijke opleiding is ingesteld aan de Universiteit van Amsterdam. Het zou wat voorbarig zijn het studieprogramma van deze prille opleiding even gedetailleerd te beschrijven als dat voor de Rotterdamse studie is gebeurd, maar het is misschien toch wel interessant enkele bijzonderheden te vermelden, die een vergelijking van de twee opleidingen mogelijk maken.

Het doel is in beide gevallen nagenoeg hetzelfde, en na hetgeen daarover in het april-nummer is geschreven behoeft het hier niet opnieuw te worden geformuleerd. Maar de opbouw van het studieprogramma verschilt sterk. De econometrische studierichting is in Amsterdam ondergebracht in de Verenigde Faculteiten der Wiskunde en Natuurwetenschappen en der Economische Wetenschappen. Deze Verenigde Faculteiten, waar men slechts examen kan doen indien men over een eindexamen H.B.S.-B of Gymnasium- β beschikt, bestaan al langer; maar tot dusverre bevatten zij alleen de actuariële opleiding. Daar is dan nu — in oktober 1961 — de econometrische opleiding bij gekomen. Het instituut van Verenigde Faculteiten biedt de mogelijkheid gebruik te maken van de bestaande wiskundige opleiding, en dit is in ruime mate gedaan. Voor het kandidaatsexamen in de econometrie is het programma vrijwel ge-

heel samengesteld uit bestaande colleges van de beide betrokken faculteiten. Van specialisatie is dus voor het kandidaatsexamen nauwelijks sprake, maar de student krijgt een grondige basisopleiding in de wiskunde en de economie. Ondanks de bezwaren van deze opzet is zij bewust gekozen. De econometrie en de wiskundige economie en wat daar zo al bijhoort — operations research — zijn jonge vakken die zich voortdurend verder ontwikkelen. Wie die ontwikkeling later wil bijhouden zal over een gedegen en veelzijdige wiskundige achtergrond moeten beschikken. De eisen voor het kandidaatsexamen econometrie zijn dan ook, wat de wiskunde betreft, dezelfde als voor het kandidaatsexamen aw (wiskunde met natuurkunde en sterrekunde, hoofdrichting wiskunde); alleen is het vak Projectieve Meetkunde weggelaten, het vak Inleiding van de Mathematische Statistiek toegevoegd. Bij deze wiskundige opleiding komt dan een selectie uit de colleges van de Economische Faculteit, die — met enige verlichtingen — de voornaamste economische vakken omvat maar niet de bijvakken zoals Recht of Economische Aardrijkskunde.

De gespecialiseerde opleiding vindt pas na het kandidaatsexamen plaats. De hoofdvakken voor het doctoraal zijn Wiskundige Economie en Econometrie; uit de Wiskundige Faculteit worden de vakken Mathematische Statistiek, Waarschijnlijkheidsrekening en Numerieke Wiskunde overgenomen, met bovendien nog enkele voortgezette wiskunde-colleges, voornamelijk functietheorie, waarbij de student enige vrijheid van keuze behoudt. Voor de economische vakken geldt eveneens dat een keuze kan worden gemaakt uit verschillende doctoraalcolleges.

Het doctoraalexamen in de econometrie geeft promotierecht in beide betrokken faculteiten; met een kleine aanvulling van het programma kan aan de eisen van de onderwijsbevoegdheid Wiskunde worden voldaan.

Het bovenstaande is uiteraard slechts een schetsmatig overzicht van de opleiding zoals die nu is opgezet. Het ligt in de rede dat het programma in de komende jaren nog wel enkele wijzigingen zal ondergaan; in ieder geval zal er echter steeds een groot verschil met het Rotterdamse stelsel blijven bestaan door de bewuste keuze van een „klassieke” opleiding tot het kandidaats met eerst daarna specialisering. Ook in andere opzichten maakt men overigens in Amsterdam om te beginnen graag gebruik van het bestaande apparaat. Aan een instelling zoals het Econometrisch Instituut, dat te Rotterdam met zoveel succes is opgebouwd, zijn wij bijvoorbeeld in Amsterdam nog niet toe; veel van de activiteiten die in zo'n

instituut zouden thuishoren kunnen echter om te beginnen in het Mathematisch Centrum worden ondergebracht.

Nadere inlichtingen worden gaarne verstrekt door Prof. dr. J. S. Cramer, Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O.

BOEKBESPREKING

Niels Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, traduit par Edmond Bauer et Roland Omnes Gauthier - Villars et Cie, 1961. 55 Quai des Grands Augustins, 98 blz. f 12,75.

In het voorbericht van deze keurige uitgave prijst de schrijver zich gelukkig, dat de vertalers zijn ideeën zo juist hebben weergegeven. Deze voordrachten sluiten aan bij een soortgelijke serie, verzorgd door dezelfde uitgever: *Théorie atomique et description des phénomènes*, verschenen in 1932 (uitverkocht). Aan het schrijven van standaardwerken heeft Bohr zich nooit bezondigd, ook een leuze als „jeder Semester eine Arbeit” is hem vreemd: zijn betekenis openbaart zich vooral in kleine publikaties en discussies op congressen, zoals door dit boekje dan ook magistraal wordt gedemonstreerd. De hier vermelde artikels, behorend tot 3 verschillende groepen 1932—1938, 1949 en 1954—1959, heeft de schrijver gemeend tot één geheel te moeten samenvatten.

1932. *Lumière et vie* openingsrede voor een internationaal congres over photothérapie ter nagedachtenis van zijn stadgenoot Finsen (1860—1904).

1937. *Biologie et Physique atomique* openingsrede voor een internationaal congres te Bologna ter nagedachtenis van Galvani, waarin de schrijver in vogelvlucht op meeslepende wijze de evolutie van de natuurwetenschappen na Galvani weergeeft.

1938. *Le problème de la connaissance en physique et les cultures humaines*: met deze rede luidde hij het internationale congres over anthropologie en ethnographie te Kopenhagen in.

1949. *Discussion avec Einstein sur des problèmes épistémologiques de la physique atomique*. Na een eerste vruchtbare kennismaking met Einstein te Berlijn in 1920 had de tweede ontmoeting plaats te Brussel op de vijfde natuurwetenschappelijke conferentie, georganiseerd door het instituut Solvay in 1927, waar E. als 't ware het middelpunt vormde, evenzo in 1930. Op het congres gehouden in 1933, vooral gewijd aan de opbouw van de atoomkernen, miste men hem tengevolge van zijn benoeming aan het „institute for advanced studies” te Princeton, waar Bohr hem nog heeft opgezocht en „onderhouden” over een zeer alarmerend artikel geschreven met Podolsky en Rosen. Uit dit artikel blijkt ten duidelijkste, dat E. niet ten volle bevredigd was door de ontwikkeling van de quantenmechanica; misschien wordt hierdoor ook verklaard, waarom hij geen bijdrage heeft geleverd voor het gouden doctorsjubileum van Max Planck (1929).

Drie redevoeringen *Unité de la connaissance* uitgesproken in 1954 te New York ter herdenking van het 200-jarig bestaan van de „Columbia University”.

Atomes et connaissance, een rede uitgesproken in Kopenhagen in 1955.

La physique et le problème de la vie, rede uitgesproken in 1957 eveneens te Kopenhagen ter herdenking van Niels Steensen, een zeer groot landgenoot uit de 17de eeuw, besluiten dit rijke boekje, dat met uiterst veel zorg is samengesteld en nog dikwijls als naslagwerk dienst kan doen.

Okken

Richard Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York Toronto London, 1960 (XX, 328 pp.).

Deze inleiding tot de Matrix-Analyse is het eerste boek van een serie, te schrijven door diverse experts, die de theorie der matrices in al haar aspecten en toepassingen zal omvatten. Deze opzet brengt mee, dat in het onderhavige werk naast klassieke onderwerpen, zoals de theorie der symmetrische matrices en der kwadratische vormen (met nadruk op de diagonaliseringsprocessen) ook minder geijkte onderwerpen optreden, zoals bijv. in het hoofdstuk over positieve matrices en wiskundige economie. Ook brengt het inleidend karakter mede, dat sommige gebieden uitvoeriger ter sprake komen (zoals de genoemde) doch andere slechts in aanloop, of in het geheel niet (bijv. numerieke toepassingen, toepassingen op speltheorie etc.) omdat ze het onderwerp zullen vormen van afzonderlijke delen in de serie. Van de uitvoeriger hoofdstukken mogen nog worden genoemd die over de rol der matrices in de theorie der differentiaalvergelijkingen, over Markoff-matrices in de waarschijnlijkheidsrekening en over „dynamic programming”. Aan alle hoofdstukken, ook aan de zeer korte (bijv. een over stochastische matrices) zijn uitgebreide literatuurverwijzingen toegevoegd, terwijl een groot aantal vraagstukken (in alle graden van moeilijkheid) tussen de stof zijn geplaatst. De auteur heeft ernaar gestreefd, niet alleen de belangrijkste resultaten, uit de door hem besproken gebieden, af te leiden, maar ook verbanden en achtergronden te laten zien en vooral de fundamentele methoden te belichten. Vandaar dat dit helder geschreven boek zeer geschikt is voor zelfstudie.

J. F. Koksma

Prof. dr. I. J. Brugmans, e.a.; *Honderd vijftientig jaren arbeid op het onderwijs-terrein, 1836—1961*; J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij N.V.; Groningen, 1961.

Op waarlijk grootse wijze heeft de Groningse Uitgeversmaatschappij, wier naam ieder onderwijzer en leraar in Nederland kent, dit jaar haar 125-jarig bestaan herdacht. Tot de feestgaven die met royale hand over Nederland zijn verspreid, behoort het gedenkboek, dat we hierbij onder de aandacht van de lezers van Euclides brengen. Men zal het boek niet kunnen kopen; het is in mei in een oplage van meer dan 15 000 exemplaren gratis toegezonden o.a. aan alle hoofden van scholen, directeuren en rectoren van hogereburgerscholen, lycea en gymnasia. De initiatoren en de auteurs van het gedenkboek hebben hiermee aan ons onderwijs een grote dienst bewezen; het boek is uitermate boeiend, leerzaam en het stimuleert tot voortgezette wetenschappelijke arbeid.

De bedoeling van het gedenkboek is geweest een studie te geven, waarin gezocht werd naar het verband tussen de ontwikkeling van de pedagogiek, de didactiek en de methodiek en de praktische neerslag daarvan in de methodes die voor het onderwijs werden ontworpen. Tot dusver heeft in de geschiedenis van opvoeding en onderwijs de organisatie van dat onderwijs op de voorgrond gestaan. Wolters' gedenkboek zal ertoe bijdragen, dat in deze geschiedenis aan de ontwikkeling van methodiek en didactiek de plaats wordt gegeven die eraan toekomt.

Dat er in Nederland reeds belangrijke voorstudies gemaakt zijn, waarin van bepaalde vakken de ontwikkeling van methodiek en didactiek in de laatste 125 jaren worden beschreven, blijkt uit de doorwrochte bijdragen van dr. U. J. Boersma, die een benadering geeft van de geschiedenis van het leesonderwijs op de lagere school en van dr. W. Kuiper, die de ontwikkelingsgang schetst van het Hoogduits als leervak, bijdragen die ook de lezers van Euclides stellig zullen kunnen boeien.

Dat we op het terrein dat in dit gedenkboek wordt betreden te maken krijgen met nog grotendeels onontgonnen gebied, springt in het oog als we de lange reeksen onbeantwoorde vragen lezen die we aantreffen in de artikelen van Prof. dr. H. Nieuwenhuis en Prof. dr. H. W. F. Stellwag. In het artikel van Prof. Nieuwenhuis „Over en uit de geschiedenis van de didactiek en methodiek van het lager onderwijs in de laatste 125 jaar” wordt uitdrukkelijk geconstateerd, dat voor een algemene geschiedenis over deze materie de nodige voorstudies nog ontbreken. Maar over wat er wel is, licht de auteur ons in. Hij onderscheidt de „geschiedenis van hoe-het-zou-moeten-zijn” van de „geschiedenis-van-hoe-het-vroeger-was” en wijst op de benadering der problemen via economisch-technische, sociale- en politieke geschiedenis om te komen tot een concreet cultuurpatroon, tegen de achtergrond waarvan de geschiedenis van het onderwijs dient te worden geplaatst.

De bijdrage van Prof. Stellwag „Het probleem van de didactiek van het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs” geeft reliëf aan de noodzakelijke bezinning en stelt een werkprogramma op voor toekomstige onderzoekers. Wat moeten we onder didactiek eigenlijk verstaan?

Uitsluitend de leer der systematische kennisoverdracht? Ook de opstelling van richtsnoeren voor de praktijk? De leer of theorie op grond waarvan de practicus zijn onderwijs zal kunnen verbeteren is nog niet geschreven. Een algemeen aanvaarde doelstelling voor ons onderwijs bestaat niet. Als er geen algemeen aanvaard vormingsideaal is, bestaat er dan misschien zo iets als een Europees vormingsideaal?

Stellwag onderscheidt tussen onderwijspraktijk (didascalie) en de didactiek die deze richt (didaxis). Achter dit conglomeraat van opinies van zeer verschillende oorsprong en gehalte staat een theorie der didaxis (didaxologie), waarvan de eerste taak is het veld in kaart te brengen, d.w.z. inventariseren, beschrijven, ordenen, samenhangen opsporen, verklaren, terwijl over de laatste vragen die in elke didactiek geïmpliceerd zijn de filosofie der didaxis ons kan oriënteren.

De betekenis van het leerboek als directe bron voor de geschiedenis der didaxologie wordt in het licht gesteld. Dit te releveren past uitstekend in het kader van Wolters' jubileum. Van de overige bijdragen, waarin telkens ook rekenen en wiskunde uitdrukkelijk aan de orde komen, noem ik:

L. W. de Bree, Geloof in de letterkast;

Dr. E. J. Kuiper, De Latijnse school omstreeks 1836;

Prof. dr. Fr. de Jong EDZ, Vermenigvuldiging en deling; de groei van het Nederlandse Onderwijs.

We verwachten dat Wolters' gedenkboek vele lezers van Euclides zal stimuleren tot belangstelling voor de geschiedenis van de didactiek en ook enigen tot research-arbeid ten aanzien van in dit boek aangesneden problemen op het speciale terrein der wiskunde.

Joh. H. Wansink

Drs. D. K. F. Heyt, *Goniometrie voor het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs*; A onderbouw; veertiende druk van Wijdenes; Beknopte driehoeksmeting A; 48 blz.; ing. f 2.—; geb. f 2.75. P. Noordhoff N.V. Groningen; 1961.

Er is eigenlijk niet veel verschil meer in de wijze, waarop de meeste leerboeken tegenwoordig de goniometrie voor de onderbouw behandelen, indien althans niet met vectoren gewerkt wordt. Dit typografisch uitnemend verzorgd leerboek houdt zich nog aan de traditionele behandelingswijze; de goniometrische functies worden met behulp van coördinaten ingevoerd, waardoor meteen de overgang op hoeken groter dan 90 graden is verkregen. Hoeken groter dan 180 graden worden niet be-

handeld, wat de eenheid ten goede komt, omdat deze hoeken op dit ogenblik eigenlijk zinloos zijn.

Enige aardige illustraties van toegepaste driehoeksmeting geven het boek een smakelijk aanzien. Nu de meetkunde in de goniometrie in de bovenbouw verdwenen is, is het wel juist, dat de leerlingen tenminste in de onderbouw nog iets van de praktische toepassingen van het vak zien. Van harte aanbevolen!

P. Bronkhorst

Dr. L. Collatz, *Differentialgleichungen für Ingenieure*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart; 197 Seiten, 115 Bilder; 2. Auflage, 1960.

In deze volledig omgewerkte druk ligt het accent op de behandeling van de gewone differentiaalvergelijkingen, waaraan de beide eerste hoofdstukken, die ongeveer de helft van het boek beslaan, zijn gewijd. De schrijver behandelt daarbij existentie- en eenduidigheidsproblemen, besteedt ruime aandacht aan singuliere oplossingen en legt bij de oplossingsmethoden van simultane differentiaalvergelijkingen de nadruk op de matrixrekening. Hoofdstuk III handelt over randwaarde- en eigenwaardeproblemen. In hoofdstuk IV wordt uitgegaan van de potentiaalvergelijking en van de differentiaalvergelijking van een trillend membraan, teneinde tot de bolfuncties (speciaal de Legendre-polynomen) resp. de Bessel-functies te geraken. Het laatste hoofdstuk bevat nog enkele voorbeelden van partiële differentiaalvergelijkingen, een randwaardeprobleem in de potentiaaltheorie en enkele benaderingsmethoden ter oplossing van gewone differentiaalvergelijkingen.

De schrijver is erin geslaagd om strengheid van behandeling te combineren met een grote mate van overzichtelijkheid. De figuren, waarvan een belangrijk deel grafieken van oplossingen zijn, vullen de tekst uitstekend aan. Op plaatsen waar het slechts mogelijk was een theorie beknopt aan te duiden, zijn de wezenlijke elementen ervan aangegeven en is overigens naar uitvoeriger werken verwezen (bijv. de theorie over geïsoleerde singuliere punten; de matrixrekening in verband met simultane differentiaalvergelijkingen; eigenwaardeproblemen en orthonormale systemen).

Het boek is een goede inleiding geworden voor velen die bij hun werk met differentiaalvergelijkingen te maken krijgen en voor studenten die zich snel en niet te oppervlakkig in dit gebied willen oriënteren. Voor de laatste categorie speciaal zijn twee fraaie series opgaven opgenomen.

De afwerking van de tekst is uitstekend; het aantal drukfouten is gering. De typografische verzorging van het boek is goed.

Met belangstelling wordt naar de volgende delen van de serie Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, waarvan het boek van Collatz de eerste Band is, uitgezien.

W. J. Claas

Ir. C. A. Muller, *De microgolfttechniek in de Sterrenkunde*; Inaugurale rede Rijksuniversiteit te Leiden. Van Gorcum en Comp. N.V. — dr. H. J. Prakke en H. M. G. Prakke, Assen, 1961; 38 bladz.

In deze oratie bespreekt prof. Muller twee belangrijke problemen voor de radio-sterrenkundige, nl. de gevoeligheid van het ontvangersysteem en het scheidend vermogen van de radiotelescoop. Hij laat zien hoe door het gebruik van moderne versterkers als de maser van Bloembergen of de parametrische versterkers de ruis-energie van de ontvanger klein kan worden gemaakt, echter ten koste van de stabiliteit van het ontvangersysteem. Om weer een acceptabele stabiliteit te verkrijgen, moeten nieuwe isolatoren, circulatoren en hoogfrequenteschakelaars gebruikt

worden, die de ruisenergie weer doen toenemen. Een ideale ontvanger heeft men dus nog niet kunnen construeren.

Om het scheidend vermogen van de radiotelescoop te vergroten kan men steeds grotere telescopen bouwen of zijn toevlucht nemen tot instrumenten van beperkte afmetingen, maar met een grote nauwkeurigheid van vorm en oppervlakte. Voor het waarnemen op grotere golflengten gebruikt men systemen, bestaande uit twee of meer elementen, waarvan prof. Muller enkele typen bespreekt (interferometer-systemen; kruisantenne). Hij verwacht dat de ontwikkeling van instrumenten met een scheidend vermogen van de orde van één boogminuut in de komende tien jaren zal plaatsvinden. Na deze periode is het niet onwaarschijnlijk dat de eerste stormachtige ontwikkeling, die de toepassing van de microgolfttechniek in de sterrenkunde tot dusver heeft gekenmerkt, zal zijn afgesloten.

De rede van prof. Muller, van wie verwacht mag worden dat hij een waardevol aandeel in de komende ontwikkeling zal leveren, is een uitstekend overzicht van de huidige stand van zaken in de ontwikkeling van het instrumentarium van de radio-sterrenkundige. Hij wordt aanbevolen aan ieder die belangstelling voor dit onderwerp heeft en gaarne enkele hoofdlijnen op duidelijke wijze getrokken wil zien.

W. J. Claas

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

Van de heer B. Kootstra uit Roosendaal (NB) ontving ik weer een aantal opgaven, die de moeite van het opnemen waard zijn. Het door hem ingezonden aantal puzzels bedraagt nu reeds meer dan 20. Hij is niet alleen de inzender, maar ook de maker van de opgaven.

67. Hoeveel getallen van 10 cijfers, die geschreven worden met de cijfers 0, 1, ..., 9, zijn deelbaar door 99?

68. Rijstdraggers voorzien het front in de jungle van rijst. Ze lopen dezelfde weg heen en terug. Het front is 11 dagreizen ver weg. De dragers eten elk per dag 1 kg rijst. Er zijn 6 dragers, die elk 22 kg rijst kunnen dragen. Hoeveel rijst kunnen deze dragers aan het front brengen, als ze weer op hun punt van uitgang moeten terugkeren? En hoeveel rijst zullen ze meenemen, als ze geen overbodige hoeveelheden willen dragen? We nemen aan, dat gedurende een gehele dag steeds de toestand stationair blijft, dus dat b.v. niet halverwege een dag een drager terugkeert.

69. In een schaaktoernooi tussen acht spelers, die een halve competitie moeten spelen, is de wedstrijdleader de eerste twee dagen afwezig. Men besluit in de eerste ronde te spelen

1-2, 3-4, 5-6, 7-8,

en in de tweede

1-3, 2-4, 5-7, 6-8.

Kan de wedstrijdleader daarna het toernooi nog in vijf ronden doen beëindigen?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

65. Stel we hebben al 7 lichamen gerangschikt. We vergelijken het 8e lichaam met het middelste van de rij. We moeten het daarna nog rangschikken t.o.v.

het linker of rechter drietal. Daarbij vergelijken we het weer eerst met het middelste. Zo kunnen we met 3 wegingen volstaan. Deze methode gaat op, als er steeds een middelste lichaam is, d.w.z. als het aantal lichamen is:

$$3 \text{ of } 2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ of } 2 \cdot 7 + 1 = 15, \dots,$$

dus $2^1 - 1$, $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, ... Om het 8e lichaam in te ordenen hebben we dus 3 wegingen nodig en om het 16e lichaam in te ordenen 4 wegingen. Voor het 9e tot en met 15e lichaam weten we niet zeker of we 3 of 4 wegingen nodig zullen hebben.

Dat hangt ervan af, op welke plaats het ten slotte terecht komt. We kunnen wel zeggen, dat we met maximaal 4 wegingen in elk geval slagen.

Om 2^n lichamen te ordenen zijn dus nodig

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) 2^n + 1$$

wegingen. Voor tussengelegen waarden van het aantal lichamen is de uitkomst nu ook direct te vinden.

Kies nu $n = 5$ en onderzoek, of er een kortere methode is. Noem de dingen a , b , c , d en e . We vergelijken eerst a en b , daarna c en d . We vinden b.v. $a < b$ en $c < d$. Nu vergelijken we b en d met als resultaat $a < b < d$ of $c < d < b$. In dit drietal wordt door middel van 2 wegingen e ingeordend. Om dan nog de plaats van c resp. a te vinden zijn nog 2 wegingen nodig, omdat we al weten, dat $c < d$ resp. $a < b$. In totaal kunnen we dus met 7 wegingen volstaan, terwijl de vorige methode als uitkomst 8 opleverde.

Dat 7 inderdaad het minimum is, is als volgt in te zien. Er zijn $5! = 120$ rangschikkingen mogelijk: k wegingen kunnen k verschillende resultaten hebben.

Willen deze wegingen voldoende in aantal zijn om de rangschikking vast te leggen dan moet $2^k \geq 5!$, dus $k \geq 7$.

Men zou nu kunnen vragen, hoe groot het minimaal aantal wegingen, waarmee de rangschikking vastgelegd kan worden, in het algemeen is. Dit probleem is nog onopgelost. Zelfs voor een betrekkelijk klein aantal als $n = 12$ weet men het niet zeker. Hoewel $2^{10} > 12!$, vermoedt men, dat men minstens 30 wegingen nodig heeft.

$$66. 1^2 + 2^2 + \dots + 10^{2n} = \frac{1}{3} (2 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^{2n-1} + 10^{2n}).$$

Het getal tussen haakjes wordt geschreven:

$$\begin{array}{ccc} 2 & \underbrace{00\dots03}_{n \text{ cijfers}} & \underbrace{00\dots01}_{n \text{ cijfers}} \underbrace{00\dots00}_{n \text{ cijfers}} \end{array}$$

Delen we dit getal door 6, dan krijgen we:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{33\dots33}_{n \text{ cijfers}} & \underbrace{83\dots33}_{n \text{ cijfers}} & \underbrace{50\dots00}_{n \text{ cijfers}} \end{array}$$

Het aantal cijfers 3 is dus $2n-1$.

Ad 62a. Collega C.A.M. van der Linden uit Amsterdam merkt op, dat er een betere oplossing is. De eerste auto rijdt $\frac{1}{15}a$ km, vult uit zijn voorraad de tanks van de overige 7 bij en houdt nu nog $\frac{7}{15}a$ liter benzine over. Daarmee Wacht hij de terugkomst van de zes terugkomende auto's af. Deze kunnen nu met lege tank arriveren, omdat deze $\frac{7}{15}a$ liter juist voldoende is om zeven auto's op het uitgangspunt terug te brengen. Enz. De laatste auto kan dan in totaal afleggen $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{13} + \frac{1}{11} + \frac{1}{9} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) a$ km.

Deze oplossing werd ook gevonden door collega D. J. Veldman te Amsterdam.

Verschenen:

DR. L. KUIPERS

Leerboek der analyse - II

Een inleiding in de theorie der reële functies van meer dan één variabele, met inbegrip van enige theorie der gewone differentiaalvergelijkingen - xi + 195 blz., f 19,50, geb. f 21,50

M. M. POSTNIKOV

Fundamentals of Galois Theory

Uit het Russisch vertaald door L. F. Boron en R. A. Moore.
Een onconventionele uiteenzetting van de aan Galois' theorie ten grondslag liggende denkbeelden - 142 blz., f 8,—

PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN

Lectures on Tensor Calculus and Differential Geometry

Uit het voorwoord: "This book is designed to provide its readers with a reasonably self-contained introduction to the differential geometry of general manifolds There is a gradual transition from the simple arithmetic of vectors to the intricate formalism of tensor calculus which is the appropriate tool for investigating general manifolds," - xii + 204 blz., f 21,50, gebonden f 25,—



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL- REKENING door drs. J. C. Kok e.a.

voor het V.H.M.O.

ing. f 4,40

gec. f 4,90

INHOUD

- I. Getallen, functies en limieten
- II. Differentiaalrekening
- III. Integraalrekening
- IV. Enige toepassingen van de D- en I.-rekening
- V. De log. en exp. functies

P. Noordhoff N.V.
Groningen

UIT HET VOORWOORD:

Leidende gedachte is geweest de grootste moeilijkheden uiteen te rafelen. Zo hebben wij de behandeling van afgeleide functies gesplitst in differentie, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt, waarbij - door het opnemen van enige vraagstukken - de mogelijkheid gegeven wordt, met die tussenliggende begrippen ook enigszins te oefenen. Op dezelfde manier is de afleiding van de kettingregel over enige paragrafen verdeeld. Verder is de invoering van het differentiaalquotiënt volledig losgemaakt van de grafische voorstelling, om het begrip niet van het begin af te vervalsen.

„Een korte en prettige behandeling van de differentiaal- en integraalrekening met een serie toepassingen, welke in een afzonderlijk hoofdstuk opgenomen is. Grote aandacht is besteed aan de vraagstukken, die dan ook een aanzienlijk deel van het boek in beslag nemen.”

Economisch Beheer/Advies

Nu compleet leverbaar

DR. J. H. RAAT

natuurkunde - practicum

Deel I: algemeen gedeelte - vloeistoffen - gassen - warmte

Deel II: licht - geluid - magnetisme - elektriciteit

Deel III: mechanica - trillingsleer - speciale onderwerpen -
electronica. Prijs per deeltje: f 1.90

Verantwoording en toelichting voor docenten: f 1,25

De boekjes bevatten voor elk onderwerp een aantal geïllustreerde proeven, in totaal 70, die waar nodig voorzien zijn van een inleiding. Bij elke proef een opgave van benodigdheden, opdrachten en ruimte voor het invullen van meetresultaten.

„Tot mijn genoegen is dit een practicumboekje waar ik enthousiast over kan zijn . . . een uitgave om zelf te gaan gebruiken . . .”.

G. Boekhoff in het Weekblad v. d. A.V.M.O.

„Mij is geen boekje bekend, dat voor de kweekschool zo goed bruikbaar is als leidraad bij practicumlessen. Zeer hartelijk aanbevolen.”

J. d. B. in De Chr. Kweekschool



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

PROF. DR. P. H. VAN LAER:

VREEMDE WOORDEN IN DE NATUURKUNDE

EN NAMEN DER CHEM. ELEMENTEN *ingenaaid f 3.75, gebonden f 4.50*

„Dit boekje dient iedere leraar in de natuur- en scheikunde steeds bij de hand te hebben, één exemplaar thuis en één op school!” (Faraday)



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

De in dit nummer geadverteerde uitgaven zijn ook in de boekhandel verkrijgbaar.