

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962

VII - 1 MEI 1962

INHOUD

W. P. Thijssen en W. J. Brandenburg: Tweede vervol- makingscursus	241
P. Wijdenes: Als het maar wat kronkelt	252
Dr. J. Rekvelde: De exponentiële functie bij het natuurkunde- onderwijs	261
Uit de openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos	264
Nederlandse Onderwijsresearch voor wiskunde	268
Examencommissie Wiskunde M.O.	270
Recreatie	271
Kalender	272

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

TWEEDE VERVOLMAKINGSCURSUS

voor doctors en licentiaten in de wiskunde te Brussel

Verslag van

W. P. THIJSEN en W. J. BRANDENBURG

Deze cursus, welke van 24 tot 30 augustus 1961 te Brussel georganiseerd werd door het Belgische Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, werd gevolgd door 18 Zwitserse, 4 Luxemburgse, 12 Nederlandse en 83 Belgische wiskunde leraren. Zes Belgische, en Zwitserse en vier Nederlandse hoogleraren gaven ieder twee colleges.

De cursus kreeg de medewerking van de Europese Organisatie voor Economische Samenwerking en van het Bestuur van het Hoger Onderwijs en het Wetenschappelijk Onderzoek te België.

De voorzitter van deze internationale post-universitaire vervolmakingscursus was Dr. J. J. van Hereke, secretaris-generaal voor de Hervorming van het Secundair Onderwijs.

Prof. Dr. E. W. Beth (Amsterdam) sprak over: *De logica der Quantoren*.

Evenals bij het aanvangen van een studie van de deductieve structuur van een mathematische theorie T vergt men:

- (1) De verklaring van de specifieke principes (primitieve termen, axioma's) van de theorie T .
- (2) De beschrijving van een zeker logisch systeem L , met behulp waarvan men nieuwe theorema's door logische deductie kan bewijzen.

Naast zekere mathematische theorieën T , die in zekere zin de totaliteit van de klassieke wiskunde omvatten en die dus bestaan in een soort directe voortzetting van het logisch systeem L (het belang van dit soort theorie voor de unificatie van de zuivere wiskunde wordt door het werk van Bóurbaki sterk naar voren gebracht) bestaan er anderzijds axiomatisaties, in het bijzonder voor de rekenkunde, die in zekere zin in talrijke mathematische theorieën voortgezet worden.

De logische deductie kan men in de vorm van een *semantisch*

tableau noteren; het is bijvoorbeeld voldoende om het *tableau*

waar	onwaar
(1) $(x)(y)(z)[\{A(x, y) \& \& A(y, z)\} \rightarrow A(x, z)]$	(3) $(x)(y)[A(x, y) \rightarrow \overline{A(y, x)}]$
(2) $(x)\overline{A(x, x)}$	

te ontwikkelen om te constateren, dat de conclusie (3) een logische gevolgtrekking is van de premissen (1) en (2).

In het algemeen kan men zeggen, dat Z *afleidbaar* is van K , of dat K/Z geldig is, als de ontwikkeling van het semantisch *tableau*, bestaande links uit de premissen K en rechts uit de conclusie Z de oplossing voortbrengt. Dit wordt gerechtvaardigd door:

I. Als K/Z niet geldig is, dan betekent dit dat alle premissen K waar zijn, terwijl de conclusie Z onwaar is (volledigheidstheorema van Gödel)

II als K/X en $(K, X)/Y$ geldig zijn, dan is K/Y eveneens geldig (hoofdttheorema van Gentzen)

In de formalisering van de rekenkunde laat men als *termen* toe: (T_1) het symbool $/$, (T_2) de parameters van individu $a, b, c, \dots$, (T_3) de variabelen van individu $x, y, z, \dots$, (T_4) met t , ook $t/$, (T_{5-6}) met t en t' ook $t+t'$ en $t \cdot t'$. Door een complex $// \dots //$ (zijnde k symbolen $/$) noteert men het natuurlijke getal k en $a/$ betekent de opvolger van a .

Als formules, laat men alle atomen $t=t'$ toe als ook alle formules, die volgens de regels van de elementaire logica zijn samengesteld.

Voor de *gelijkheid* hebben wij de volgende axioma's:

- (A1) $(x)[x=x],$
 (A2) $(x)(y)[x=y \rightarrow y=x],$
 (A3) $(x)(y)(z)[\{x=y \& y=z\} \rightarrow x=z].$

Voor de opvolger worden de relaties vastgesteld door:

- (A4) $(x)(y)[x=y \rightarrow x/=y/].$
 (A5) $(x)[x/\neq/],$
 (A6) $(x)(y)[x/=y/ \rightarrow x=y],$
 (A7) $(x)[x=/ \vee (Ey)\{y/=x\}].$

Uitgaande van deze axioma's kan men numerieke formules bewijzen als:

- (1) $///=///,$
 (2) $///\neq////$

Het bewijs van de formule (2) volgt uit de ontwikkeling van het tableau:

waar	onwaar
(A2) $(x)(y)[x = y \rightarrow y = x]$	(2) $ = $
(A5) $(x)[x/ \neq /]$	
(A6) $(x)(y)[x/ = y/ \rightarrow x = y]$	

De *optelling* brengt de volgende axioma's mee:

$$(A8) \quad (x)(y)(x')(y')[\{x = x' \ \& \ y = y'\} \rightarrow x + y = x' + y'],$$

$$(A9) \quad (x)[x + / = /x],$$

$$(A10) \quad (x)(y)[x + y/ = (x + y)/],$$

die ons in staat stellen numerieke formules te bewijzen als:

$$(3) \quad ||| + || = ||||,$$

$$(4) \quad ||| + || \neq |||,$$

Hetgeen de uitspraak rechtvaardigt, dat *de axioma's* (A_{1-10}) *de numerieke beheersing voortbrengen van de optelling van de natuurlijke getallen*.

Als men hier enige axioma's aan toevoegt, die de vermenigvuldiging en de machtsverheffing op analoge wijze karakteriseren, verkrijgt men een axiomatisatie A , die tegelijkertijd de numerieke beheersing van de beide nieuwe bewerkingen voortbrengen. In dit geval kan men meer zeggen: de axiomatische A brengt de numerieke beheersing van elke effectieve operatie voort.

Aan de andere kant volgt het uit het werk van Gödel dat deze eigenschap van de axiomatisatie A noodzakelijk inhoudt, dat zij onvolledig is met betrekking tot zekere algemene theorema's.

Een soortgelijke situatie brengen de axioma's (A_{1-10}) reeds mee. Hoewel deze axioma's ons toelaten alle formules te bewijzen van het type:

$$(5) \quad ||| + |||| = |||| + |||,$$

veroorloven ze ons niet het algemene theorema te bewijzen:

$$(6) \quad (x)(y)[x + y = y + x]$$

De onafhankelijkheid van de bewering (6) is tot stand gekomen door de constructie van een model, dat naast de natuurlijke getallen

$\lambda, \parallel, \lll, \llll, \dots$ een oneindige rij van niet-natuurlijke getallen wettigde $a, \lceil a, \lll a, \llll a, \dots$

Als x niet natuurlijk is dan stelt men $x \lceil = x$. Als $x = \parallel \dots \parallel$ (natuurlijk), $y = \lceil \dots \lceil a$ (niet natuurlijk), dan geldt $x + y = \parallel \dots \lll \dots \lceil a$; als x niet-natuurlijk is dan is $x + y = x$.

Er bestaat evenwel tussen het geval van de axioma's (A_{1-10}) en dat van de axiomatisatie A een essentieel verschil. In het eerste geval konden wij door de toevoeging van enkele axioma's tot een volledige theorie komen van opvolger en optelling. In het tweede geval kon men in leemten voorzien zonder ooit tot een volledige theorie te komen.

Over *wetten en regels van de elementaire symbolische propositie- en predicaatenlogica* sprak Prof. Dr. Alfons Borgers (Leuven).

Dat de logica nuttig en belangrijk is kan men vermoeden op grond van de dikwijls uitgesproken mening dat de logica het gemeenschappelijk deel is van verschillende takken van wetenschappelijke bedrijvigheid. Een voor wiskundige doeleinden bevredigende wetenschappelijke logica werd opgesteld in de periode die omstreeks 1875 begint en rond 1915 eindigt. Ze omvat de propositie- en predicaatencalculus en een kleine paragraaf over de gelijkheid. De spreker doet een poging om voor ieder van die drie onderwerpen de specifieke notaties en terminologie vast te leggen. Hij geeft een beknopte lijst van logische wetten en redeneerregels die toelaten tamelijk snel alle andere wetten en regels te verkrijgen die nodig blijken bij het symboliseren van de bewijsmethoden die courant in de wiskunde gebezigd worden. Voor een stel van deze beginselen worden afleidingen gegeven voor zover dit in een klein bestek gedaan kan worden. Een paar kleine stellingen uit de rekenkunde van de natuurlijke getallen dienen om te illustreren hoe een wiskundig bewijs bestaat uit een reeks voorafgaande lemma's gecombineerd met een logische afleidingsregel, van zulk een aard dat de lemma's speciale gevallen zijn van de premissen terwijl de te bewijzen stelling de vorm heeft van de conclusie. Een wiskundig bewijs dient dus steeds aangevuld te worden met een afleiding van die redeneerregel.

In een volgende voordracht handelt dezelfde spreker over *het principe van de volledige inductie en enige equivalente rekenkundige proposities*.

Indien nul de eigenschap A heeft en indien, ieder keer dat x een A is ook $x+1$ een A is, dan bevat A alle natuurlijke getallen. Dit is het principe van de volledige inductie en de spreker gebruikt het om de eigenschap van trichotomie overigens zuiver logisch af te

leiden uit enige andere kleine stellingen aangaande de relatie „kleiner dan”. Het principe heeft dezelfde deductieve kracht als enige andere welbekende rekenkundige proposities. Het is er de spreker vooral om te doen te laten zien hoe de logische hulpmiddelen uit de voorgaande voordracht in feite de grootste rol spelen om die gelijkheid in deductieve sterkte aan te tonen. Onder de behandelde proposities is er het principe van het kleinste getal dat zegt dat een niet-ledige verzameling natuurlijke getallen een kleinste element bevat. Het afdalingsprincipe van Fermat — volgens hetwelk een verzameling natuurlijke getallen ledig is, indien ze bij elk element een kleiner element bevat — wordt geïllustreerd door een bewijs dat de vierkantswortel uit 2 geen breuk kan zijn.

Prof. van der Blij (Utrecht) sprak over *algebraïsche methoden in de getallentheorie*. Daarbij kwam in de eerste voordracht de reciprociteitswet uit de theorie van de kwadraatresten aan de orde. Vroeger werd deze reeds uitvoerig behandeld (zie Getallentheorie van P. Wijdenes of Hardy & Wright *The Theory of Numbers*) maar nu had de theorie een heel nieuw kleed door de groepentheorie; vooral het begrip nevenklasse en het aantal nevenklassen speelde hierbij een hoofdrol.

De moderne toepassingen eisen nog wel een klassieke achtergrond; bij vele problemen kan men de analyse te hulp roepen, maar ook meer algebraïsche zoals functies over de ring der gehele getallen, zelfs oppervlakken in de affiene ruimte en punten, die in verband kunnen gebracht worden met maximale idealen. De moderne onderzoekingen van W. Dwork werden uitvoeriger besproken. We zijn niet in staat daarvan een resumé te geven.

Prof. Dr. M. Teghem (Brussel) sprak, evenals verleden jaar, over een *onderwerp uit de statistiek*. Het onderwerp „*Ketens van Markow*” wordt ook in een uitgave van het Mathematisch Centrum besproken.

Processen zonder geheugen, zijn die waarbij de waarschijnlijkheid alleen afhangt van het laatste geval. De Markow ketens gaan over aftelbare gevallen (soms alleen eindige aantallen).

In een tweede voordracht kwam daarvan een toepassing op het begrip wachttijd. Deze is niet alleen van belang voor de organisatie in warenhuizen, maar ook voor liften enz. Achtereenvolgens werden nagegaan de invloed van:

a) het aantal cliënten en b) het aantal stations (vooral bij telefoonverbindingen van belang). Daarna c) de regelmaat van aankomst

en d) de waarschijnlijke duur van een dienst, al kan deze laatste constant zijn zoals bij een machine. Ook e) de mogelijke lengte van een file en f) de discipline spelen een rol; bij dit laatste vooral de voorrangsregels. De eigenschappen van Markowketens bleken zeer handig om dit alles voldoende in mathematische termen vast te leggen.

De colleges van Prof. Dr. van Albada (Eindhoven) droegen als titel: *Axiomatiek van de hyperbolische meetkunde*

De hyperbolische meetkunde, zoals deze door Saccheri, Lobatchevsky en Bolyai ontworpen is, wordt door vele wiskundigen gebruikt om een proeve van een bewijs van het parallellen axioma van de euclidische meetkunde te leveren. Door dit axioma door zijn negatie te vervangen probeert men een tegenspraak af te leiden. Langzamerhand heeft men zich echter bewustgemaakt, dat het systeem van theorema's een andere meetkunde voortbracht, die het zelfde recht heeft als de meetkunde bij uitnemendheid, de euclidische meetkunde. Toen men de nieuwe meetkunde als "niet-euclidische meetkunde" naast de andere ging toelaten, verzag men nog niet, dat een nieuwe ontwikkeling *tientallen* andere meetkunden zou voortbrengen. Het werk van Hilbert heeft veel bijgedragen tot dit moderne gezichtspunt.

Vergeleken met een axiomasysteem van de algebra van tegenwoordig is dat van Hilbert ingewikkeld genoeg. Er zijn vijf groepen van axioma's die verschillende concepties behandelen: elke keer als men een volgende groep introduceert, introduceert men ook de niet gedefinieerde nieuwe concepties: punt, lijn, vlak, bepalen, tussen, congruentie, hoek congruentie.

De euclidische en de hyperbolische meetkunde zijn fysische voorschriften.

Zij behoren tot de toegepaste wiskunde. In de mechanica van Galilei kan de optelling van snelheden in termen van de euclidische meetkunde beschreven worden. In de relativiteitstheorie kan deze optelling in termen van de hyperbolische meetkunde beschreven worden.

Voor Hilbert was er slechts één meetkunde. In zijn tijd bestond de relativiteitstheorie nog niet. Zijn axioma's moesten fysisch als voldoende plausibel beschouwd worden, nog niet als wiskundige axioma's om een zo eenvoudig mogelijk logisch systeem voort te brengen. Het revolutionaire van Hilbert is zijn methode geweest de onafhankelijkheid te bewijzen van zijn axioma's, die andere meetkunden voortbrachten. Tegenwoordig wordt de onafhankelijkheid van een axioma systeem beschouwd als iets, dat misschien de

schoonheid van dat systeem verhoogt; men beschouwt het niet meer als een strenge eis. Toch heeft het voorbeeld van Hilbert de wiskundigen aangemoedigd andere meetkunden te ontwerpen en naar lieve lust axioma's te postulieren.

Verder heeft de spreker twee aanleidingen behandeld om een axiomatisch systeem te ontwikkelen voor de hyperbolische meetkunde, dat eenvoudiger is dan het klassieke systeem, meer aangepast aan de speciale hoedanigheden van deze meetkunde en minder gebonden aan de euclidische.

De methode van Menger houdt zich bezig met incidentie-axioma's. Hierdoor wordt de hyperbolische meetkunde van die van Euclides en die van Riemann onderscheiden, maar zij verbindt haar met de projectieve-en de affine meetkunde.

De meetkunde van Bachmann geeft een meetkunde, die eigenlijk een algebra is van een familie van speciale transformatiegroepen.

De titel van de beide voordrachten van Prof. Dr. G. Hirsch (Brussel) was: *Enige problemen uit de Functie-analyse*.

De ontwikkeling van de functie-analyse heeft geleid tot twee onderscheiden richtingen: Enerzijds een drang tot generalisatie en abstractie, zoals we die reeds vanaf de 19e eeuw in de wiskunde zien (vergelijk b.v. de ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunden, de projectieve meetkunde en het Erlanger program van F. Klein) en die vooral de laatste decennia zo'n hoge vlucht heeft genomen.

Anderzijds hebben sommige problemen uit de analyse en de mathematische fysica een nieuwe weg aangegeven door ons te tonen dat functies zelf als variabelen beschouwd kunnen worden (Volterra, Fréchet) en dat het klassieke functiebegrip te eng was voor verschillende toepassingen b.v. in de variatierekening, bij integraalvergelijkingen en de delta-functie van Dirac.

In zijn eerste voordracht liet Prof. Hirsch zien dat het begrip *distributie* (of veralgemeende functie) tevoorschijn komt als een uitbreiding van het oude functiebegrip.

De uitbreiding werd vergeleken met de overgang van de gehele getallen naar de gebroken getallen, als ook met die van de reële naar de complexe. Daarbij wil men zekere composities of operaties uitvoerbaar maken, die dit niet waren binnen de beginverzameling echter voldeden dan niet meer *al* de elementen van de nieuwe verzameling aan *al* de eigenschappen van de oude: denk b.v. aan deelbaarheid en ordening. Men kon dan evenwel de verzameling waarvan men uitging, identificeren met een deelverzameling van de nieuw opgebouwde verzameling.

Om tot het begrip distributie te komen, wil men de eigenschap behouden, dat een functie f (van een reële variabele) voor elke functie φ behorend tot een zeker basislichaam (functies van de klasse C^∞ en nul op oneindig) een reëel getal bepaalt. Dit reële getal kan zijn de integraal van het produkt $f\varphi$, waarbij dus een *functionaal* aan iedere functie φ een numerieke waarde toevoegt.

Men kan verifiëren dat dit functionaal lineair is en continu en per definitie noemt men een *distributie* alle lineaire en continue functionalen gedefinieerd op de verzameling functies $\{\varphi\}$.

De functionalen die op de genoemde manier met een integraal kunnen worden voorgesteld heten regulier, die waarbij dit niet het geval is heten singulier. Tot deze laatste behoort de „delta-functie” van Dirac ($\delta(x) = 0$ voor $x \neq 0$ en $\delta(x) = \infty$ als $x = 0$), die wordt gedefinieerd als het functionaal die aan elke functie φ de waarde $\varphi(0)$ toevoegt. De correspondentie tussen de reguliere functionalen en de functies is één-éénduidig of nauwkeuriger gezegd: Deze functies zijn bepaald op een verzameling na van de maat nul, wat we ook reeds in de klassieke theorie ontmoeten zoals steeds bij functies gedefinieerd door Lebesgue-integralen.

Dit stelt ons in staat de „echte” functies te identificeren met een deelverzameling van de distributies n.l. met de reguliere functionalen en in deze zin kan men daarom de distributies als een uitbreiding van het functiebegrip zien.

De distributies hebben een groot aantal eigenschappen die hen tot een gemakkelijker hanteerbaar instrument maken bij vele problemen uit de analyse dan de functies. Zelfs indien de oplossing van zo'n probleem kan worden uitgedrukt in een „echte” functie, wordt vaak het onderzoek sterk vereenvoudigd door de methoden die men gebruikt bij de distributies. Men zou dit kunnen vergelijken met de oplossing van het algebraïsch probleem van de reële wortels van een vergelijking, wat veel eenvoudiger gaat als men de leer van de complexe getallen gebruikt.

Als een van de voorbeelden van eigenschappen, die de distributies vertonen werd aangetoond dat men een *afgeleide* aan elke distributie kan toevoegen, welke afgeleide in het algemeen weer een distributie is. Indien de distributie een differentieerbare functie is van de klasse c' zal de afgeleide —in de zin der distributies— ook een functie zijn en samenvallen met de gewone afgeleide.

In zijn tweede voordracht werd een bewijs gegeven van het klassieke probleem: de bestaanbaarheid en de eenduidigheid van de oplossing van de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$ met $y = b$ voor $x = a$. Dit is reeds lang bekend volgens de methode van de

successieve approximaties van Picard, waarbij f dan de voorwaarde van Lipschitz vervult. Hiertoe zullen we de constructie

$$\varphi_{i+1}(x) = b + \int_a^b f(x, \varphi_i(x)) dx$$

als een transformatie T die de ruimte der continue functies in zichzelf afbeeldt door de afspraak

$$T\varphi = b + \int_a^b f(x, \varphi) dx.$$

Hierbij werd aangetoond dat een *dekpunt* van T (d.w.z. een functie φ zodanig dat $T\varphi = \varphi$) een oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking.

Passen we deze transformatie T toe op de ruimte van de continue functies, waarin dan een metriek gedefinieerd is via uniforme convergentie, dan kan men met behulp van de conditie van Lipschitz bewijzen, dat de afbeelding T een samentrekking of contractie is.

Dit gebeurt door aan te tonen dat de afstand van $T\varphi$ en $T\psi$ kleiner is dan de afstand van φ en ψ , welke functies φ en ψ men ook kiest, mits φ en ψ verschillend; en vervolgens laat men naar een theorema van Banach zien dat zo'n contractie een vast punt heeft en slechts één.

Het bestaan en de eenduidigheid van de oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking komt nu als een speciaal geval van een meer algemene eigenschap: het bestaan (en eventueel de eenduidigheid) van dekpunten bij bepaalde transformaties van een ruimte in zichzelf. Het eerste theorema van dit soort is te danken aan L. E. J. Brouwer: het bestaan van een dekpunt bij elke transformatie van een n -dimensionale bol in zichzelf. Het hier aangegeven principe wordt gebruikt bij veel algemenere ruimten en vindt vele toepassingen in de functionale analyse.

Prof. Dr. Libois (Brussel) vervolgde zijn voordracht van verleden jaar. De titel was nu: *La géométrie de relativité restreinte*.

Duidelijk werd hoe men in de meetkunde van Minkowski de voortplanting van het licht en aanverwante verschijnselen duidelijk en zelfs eenvoudig kan formuleren.

Prof. Dr. J. Siebenthal (Lausanne) bleek ondanks zijn duits klinkende naam ook al franstalig te zijn. Zijn voordracht „*Géométrie descriptive renouvelée*” ging vooral over de vectormethoden in deze tak. Al leek het nut voor de uitvoering niet bijzonder groot, toch was de opbouw nu veel logischer en ook ontstond een meer

samenhangend geheel. De getoonde figuren —bruggen, gebouwen enz.— waren betrekkelijk eenvoudig terug te lezen.

Bijzonder actueel waren de beide voordrachten van Prof. Dr. van der Corput (Berkely) over *toepassingen van de neutrices rekening*. Dit onderwerp is zo nieuw en zo weinig bekend dat een kort verslag eigenlijk onleesbaar zou worden. Een neutrice is een verzameling functies die een groep vormen met de speciale eigenschap: Wanneer deze groep een constante bevat dan is deze gelijk aan nul.

Voor al bij het rekenen met divergente reeksen, waaraan we dan toch een zekere som toekennen binnen een zekere neutrice, blijkt dit onvoorstelbare mogelijkheden te geven, zowel voor het theoretisch onderzoek als voor de praktische berekeningen. Mogelijk zou later nog eens op dit begrip in Euclides kunnen worden teruggekomen. Prof. v. d. Corput is bezig een boek over dit onderwerp te schrijven.

Prof. Dr. A. Deprit uit Leuven besprak de *problemen rond de baanberekening van de kunstsatelliet Vanguard I*.

Deze problemen zijn slechts gedeeltelijk op te lossen. Men kan zich echter verder behelpen met benaderingen door middel van reeksontwikkelingen.

Bij de oplossing van de lineaire problemen in de hemelmechanica, als bijv. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ is gebruik gemaakt van de oplossingen van resonantieproblemen zoals Brown gepubliceerd heeft in „Resonance Theory” (1925).

Het volgende probleem is van de vorm

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ waarin}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$L = T - V$$

$$L(x, \dot{x})$$

Coördinatie transformatie $x = \xi(x, t)$ geeft

$$\tau = L(x(\xi, t); \dot{x}(\xi, \xi, t); t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = 0$$

Er wordt een systeem van differentiaal vergelijkingen van de

tweede orde gevormd. Normaal schrijft men deze in de vorm

$$f_1(x, t)\ddot{x}_1 + f_2(x, t)\ddot{x}_2 + \dots + \varphi_1(x, t)\dot{x}_1^2 + \dots = 0$$

Lagrange-transformaties en Hamilton-transformaties bepalen weer een nieuwe functie etc.

Ook van het werk van Jacobi, neergelegd in „Vorlegungen über Dynamik” heeft Prof. Dr. Déprit gebruik gemaakt.

Prof. Dr. Papy (Brussel) hield twee lezingen over *de elementaire theorie van vectorruimten*, waarbij vooral de plaats, die dit begrip in het schoolonderwijs kan innemen aan de orde kwam. Ook in het lager onderwijs vond Prof. Papy vele voorbeelden die aanleiding gaven tot beschouwingen uit de lineaire algebra.

Het meest toepasselijke ging over de aankopen in een warenhuis. De „som” van twee aankopen is weer een aankoop, ook het gehele veelvoud heeft hier betekenis en als men terugbrengen ook als een aankoop ziet, is er ook een nulvector en een tegengestelde vector. Bij het middelbaar onderwijs komen vele vectorruimten aan de orde: de verzameling van veeltermen in één respectievelijk meer veranderlijken, de verzameling lineaire vergelijkingen. Natuurlijk ook de pijlen in een vlak, ook de pijlen vanuit een vast punt O.

Dit laatste kan men ook representeren door alleen op de eindpunten te letten, wat aanleiding kan geven tot belangrijke meetkundige toepassingen.

Ook het begrip onderlinge afhankelijkheid en lineair afhankelijk stelsel komt reeds in onze lagere klassen voor.

Door in een warenhuis alle aankopen uit de slagerij te verwaarlozen krijgt men een afbeelding van alle aankopen op een deelverzameling. Ook kan men de restklassen vorming toelichten door alle aankopen, die alleen in de slagersafdelingen verschillen, te identificeren. Dit kan meetkundig goed geïllustreerd worden door van één component af te zien.

In de theorie van de steekproeven vond Prof. Papy een nieuwe aanleiding om lineaire algebra op de middelbare school toe te passen, en de toevoeging van artikel en prijs werd een begin van duale vectorruimte. Zelfs het inbedden van een vectorruimte in een omvattende ruimte meende de spreker op school te kunnen gebruiken.

Het officiële verslag van de cursus 1960 is verschenen (Frans, Duits en Nederlands). Voor 1962 is het weer de bedoeling zo'n cursus te organiseren. Waarschijnlijk kunnen ook enige leraren deelnemen, die de vorige cursussen niet mee maakten.

ALS HET MAAR WAT KRONKELT

door

P. WIJDENES

AMSTERDAM

1. Mij werd een schoolboek over goniometrie voorgelegd en gevraagd, wat ik wel dacht van de grafieken daarin.

De betreffende figuren deden mij zonderling aan; geen van de acht bleek goed om de eenvoudige reden, dat men voor π zo maar wat genomen had. Als men de lengteëenheid van de y -as deelt op het lijnstuk, dat op de x -as met π overeenkomt, dan vindt men op rij af deze getallen:

3,32 3,32 3,32 2,46 2,84 2,61 1,83 2,82;

zelfs 1,83 in plaats van de bekende zeer goede benadering $3\frac{1}{7}$ (de betrekkelijke fout is nl. slechts $\frac{1}{2600}$).

Wat in het boek *grafieken* heten, zijn in feite *diagrammen*¹⁾; het onderscheid hiertussen zal de lezer bekend zijn: bij een grafiek meet men de coördinaten met dezelfde eenheid bij een diagram is de verhouding van de eenheden op de horizontale en de verticale as geheel willekeurig (zoals bv. de jaren op de horizontale as en de uitgaven voor O. K. en W. verticaal).

Ik geef hier de figuur uit het bedoelde boek, die de functie $y = \sin^2 x + \sin x$ in beeld brengt.

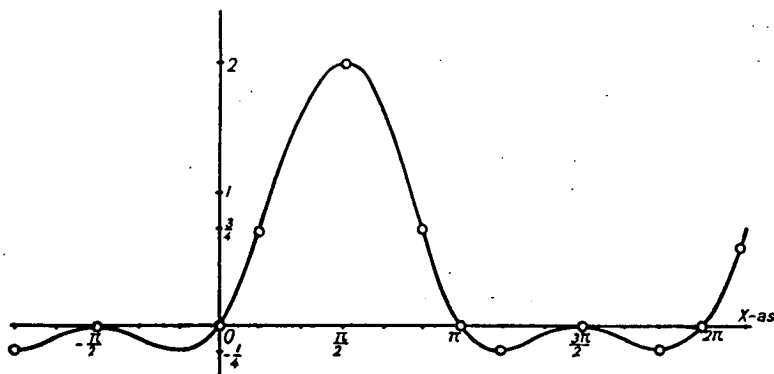


Fig. 1.

¹⁾ Ik heb er mij ook wel aan bezondigd in vroegere jaren, toen er nog geen analyse werd onderwezen.

Laten we de indeling op de assen buiten beschouwing (bij *grafieken* kan dat, bij *diagrammen* niet), dan kunnen we de kromme met enige moeite herkennen als de grafiek van $y = \frac{12}{7} (\sin^2 x + \sin x)$; als *grafiek* kan die kromme lijn niets anders betekenen. Wie er een andere betekenis aan wil hechten, stempelt daarmee de figuur tot een *diagram*. Dus aan de opdracht „teken de grafiek van $y = \sin^2 x + \sin x$ ” is in geen van beide gevallen voldaan ¹⁾.

Hoe willen de schrijvers zo'n grafiek getekend zien? Ze zeggen: „Op de bekende manier tekenen we nu de grafiek. We geven aan x enige waarden. In de figuur zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$ gekozen. Dan is $\sin^2 x + \sin x = \frac{3}{4}$ ”. Ziezo, nu weten de leerlingen het! Ze zullen het ermee moeten doen althans. Blijkbaar wordt bij hen bekend verondersteld, dat zij „op de bekende manier” moeten uitleggen als: „neem voor π maar, wat je invult, $1\frac{1}{2}$ of 7, het hindert niet, hoor!”

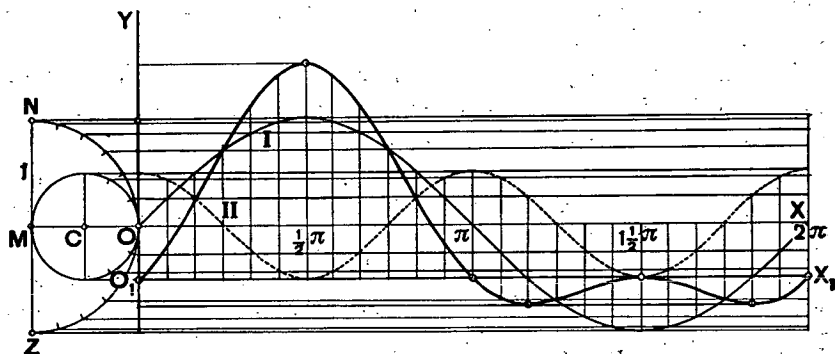


Fig. 2.

Op figuur 2 ziet u, hoe de goede grafiek er uitziet en hoe men die zonder moeite, zonder gerekend en wiskundig zuiver kan tekenen.

$$y = \sin^2 x + \sin x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \sin x = \sin x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$$

Eerst de grafiek I van $y = \sin x$ op het stelsel $O(X, Y)$; het aanstippen van de 25 punten en het trekken van de kromme kost 3 minuten tijd.

Voor de grafiek II van $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ gebruiken we de cirkel $(C, \frac{1}{2})$; de factor $\frac{1}{2}$ bepaalt de straal van de hulpcirkel; weer 25 punten, dus nog eens 3 minuten.

¹⁾ We gaan maar voorbij aan het feit, dat de loodlijn in het punt (0) op de x -as in het boek geen naam heeft en dat een functie daarin wordt beschouwd als iets anders dan een afhankelijkheidsbetrekking, een relatie, tussen twee veranderlijken.

Van de 25 ordinaten van I trekken we nu (met de passer) de overeenkomstige ordinaten van II af. Door de zo verkregen 25 punten trekken we de grafiek van $y = \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x$. We laten dan de x -as $\frac{1}{2}$ zakken; op het nieuwe assenstelsel $O_1(X_1, Y)$ hebben we de gevraagde grafiek in ongeveer tien minuten *zuiver* geconstrueerd¹⁾.

Welke docent valt de keuze tussen fig. 1 en fig. 2 moeilijk? Ik denk zo, dat de leerlingen met groter genoegen een exacte figuur tekenen dan een slordige schets.

2. Het komt voor, dat men in een voorbeeld of in een vraagstuk verschillende eenheden op de coördinaatassen aanneemt (men dient dat aan te geven), dus een diagram tekent in plaats van een grafiek, omdat in de laatste bepaalde eigenaardigheden van de afgebeelde kromme niet voldoende tot hun recht zouden komen. Onze vraagstukjes, ook die van de eindexamens, zijn evenwel zó gesteld, dat de grafiek goed van verhoudingen is (d.w.z. niet te langgerekt of afgeplat); men kan dit immers door geschikte keuze van de coëfficiënten alleen al bereiken.

Daarom kon ik mijn ogen haast niet geloven, toen ik, hetgeen ik in het bedoelde schoolboek over goniometrie als slordigheid beschouwde, *tot systeem zag geworden* in de bijlage van het dagblad HET VADERLAND van 27 mei 1961. Deze bijlage bevat ten grieve van de lezers de volledige uitwerkingen van de schriftelijke eindexamens H.B.S. A en B en gymnasium A en B.

Voor de wiskunde werd in 1961 in vier gevallen een grafiek gevraagd; de medewerker van HET VADERLAND, die de uitwerkingen dit jaar verzorgde, heeft in alle vier gevallen (geheel onnodig, zoals blijken zal) een *diagram* geleverd (zie fig. 3, 5, 7 en 9). Ik geef van de betreffende vraagstukjes hieronder een korte bespreking en laat daarbij zien, hoe de figuren dienen te worden getekend (zie fig. 4, 6, 8 en 10).

3. Gymnasium B. Algebra nr. 3.

Schets op één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \text{en} \quad g(x) = 2x^2 + 2,$$

beide voor $-2 \leq x \leq 3$. Bereken de oppervlakte van de beide gesloten vlakdelen, die door de grafieken worden begrensd.

Fig. 3 is toch niet gemakkelijker dan fig. 4? En fig. 3 laat toch geen enkele bijzonderheid van de grafiek uitkomen, die op fig. 4 niet

¹⁾ De bij P. Noordhoff, N.V. te Groningen verschenen „Grafiekenbladen voor de Goniometrie” geven het „geraamte” voor dit soort grafieken.

even duidelijk is? Wat mag dan toch wel de reden zijn, dat op de x -as de eenheid viermaal zo groot is als op de y -as?

De afgebeelde krommen hebben de gedaante van de grafieken van $y = \frac{1}{4}(x^3 - 3x + 2)$ en van $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$; dit betekent, dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in elk punt $\frac{1}{4}$ is van wat hij moet zijn. Zie op fig. 4 de raaklijn aan de kromme $y = x^3 - 3x + 2$ in het snijpunt met de y -as; $y' = 3x^2 - 3$ krijgt voor $x = 0$ de waarde $-3 = \text{tg } -71^\circ 34'$; op fig. 3 zou dezelfde raaklijn een hoek $\arctg(-\frac{3}{4}) = -36^\circ 52'$ met de x -as maken.

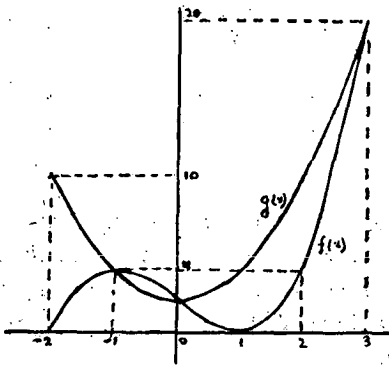


Fig. 3; uit de krant.

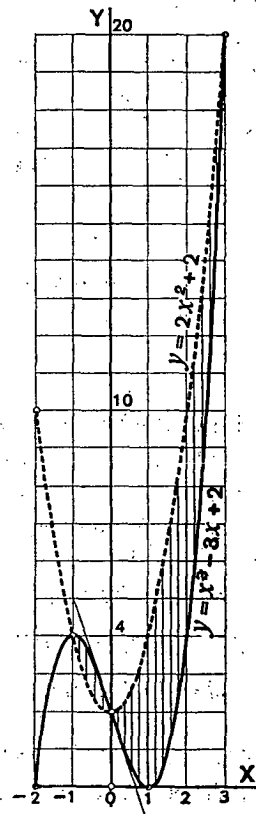


Fig. 4.

Men vindt voor de oppervlakte van beide vlakdelen, die door de grafieken worden begrensd, $\frac{1}{12}$ en $11\frac{1}{4}$. Welke betekenis kent de samensteller van de oplossingen daaraan nu toe? Zijn het vierkante eenheden van de x -as of van de y -as?

4. H.B.S. Algebra nr. 1.

Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = |x^2 - 4x| - 5 \quad \text{en} \quad g(x) = -x - 1.$$

beide voor $-2 < x < 6$.

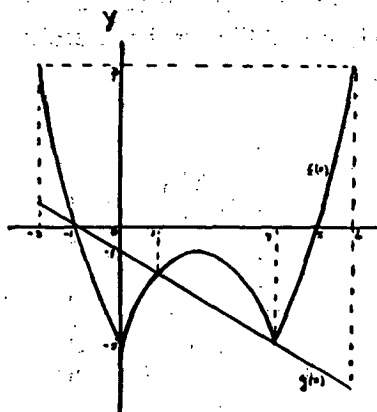


Fig. 5; uit de krant.

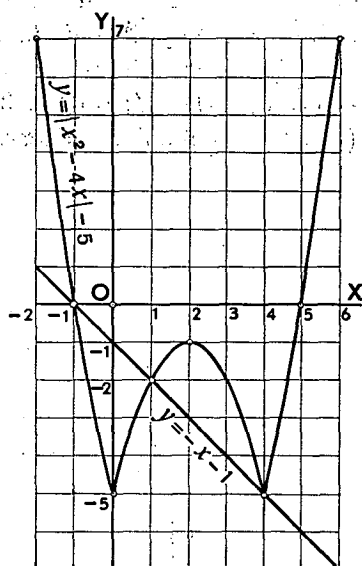


Fig. 6.

De eenheden op de x -as en de y -as verhouden zich op fig. 5 ongeveer als 12 en 7. De examenkandidaten weten al 3 jaar, dat de grafiek van $y = -x - 1$ de x -as snijdt onder een hoek van -45° ; op fig. 5 is die hoek ongeveer -30° . (Heeft degeen, die de figuur maakte, de verkeerde tekendriehoek gebruikt?)

De juiste figuur, fig. 6, eist niet meer werk; waarom dan prutsen?

5. H.B.S. B. Differentiaal- en integraalrekening nr. 3.

Teken in één figuur de grafieken van de functies

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \quad \text{en} \quad g(u) = 3 - x,$$

beide voor $-1\frac{1}{2} < x < 3\frac{1}{2}$. Bereken de oppervlakten van de beide gesloten vlakdelen, die door de grafieken worden begrensd.

Op fig. 7 zijn de eenheden op de x -as weer viermaal zo groot als die op de y -as (zie 3); de hoek van -45° , die de lijn $y = 3 - x$ met de x -as maakt, is hier vertekend tot ongeveer -15° (zie onder 4; op fig. 5 is dezelfde hoek tweemaal zo groot!).

Is de juiste figuur, fig. 8, bewerkelijker of minder overzichtelijk? Zo niet, wat is dan de reden om een diagram te tekenen in plaats van een grafiek?

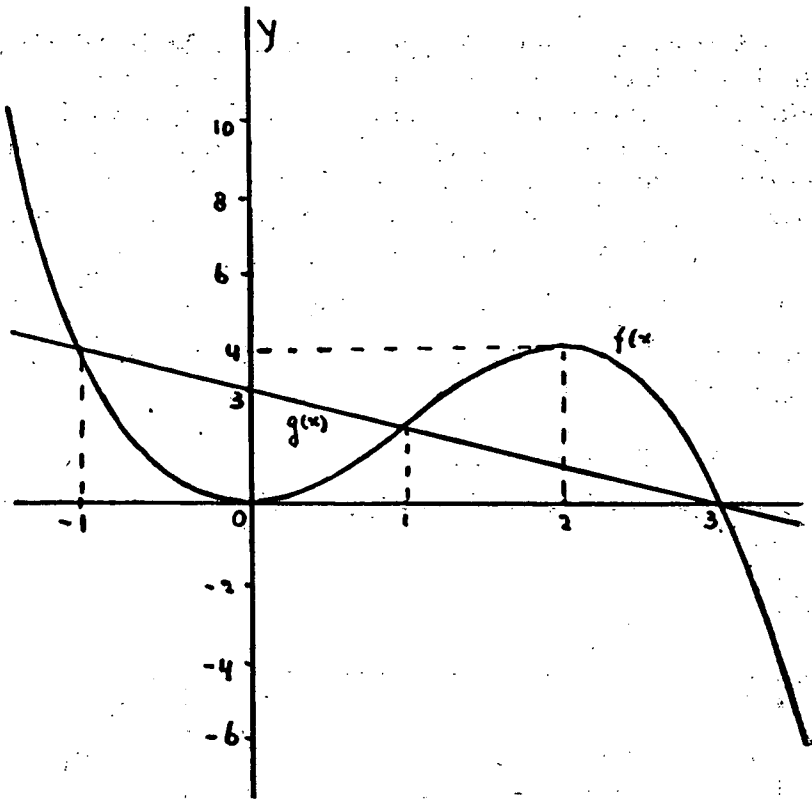


Fig. 7; uit de krant.

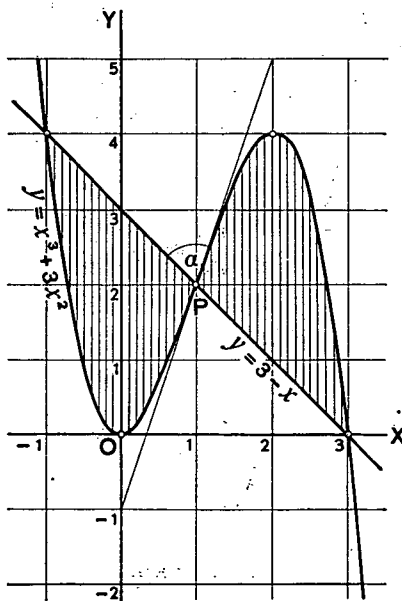


Fig. 8.

In de oplossing lezen we: de oppervlakten van de beide vlakdelen, die door de grafieken worden begrensd, is 4. Wederom: wat is 4? Vierkanten van de eenheden op de x -as of van die op de y -as?

Op fig. 8 ziet men, dat de oppervlakte van elk deel (de delen zijn elkaars gespiegelden in P) ongeveer 4 vierkante eenheden moet zijn.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van de kromme $y = -x^3 + 3x^2$ is $y' = -3x^2 + 6x$; voor P(1; 2) wordt dit 3; de hoek

α , waaronder de grafieken elkaar in P snijden, is $\alpha = \arctg \left| \frac{3+1}{1-3} \right| = \arctg 2$; α is dus $63^\circ 26'$. De overeenkomstige hoek op fig. 7 is ongeveer het dubbele!

6. H.B.S. B. Goniometrie nr. 2.

Teken de grafiek van de functie $f(x) = 4 \sin^2 x + 4 \cos x - 1$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

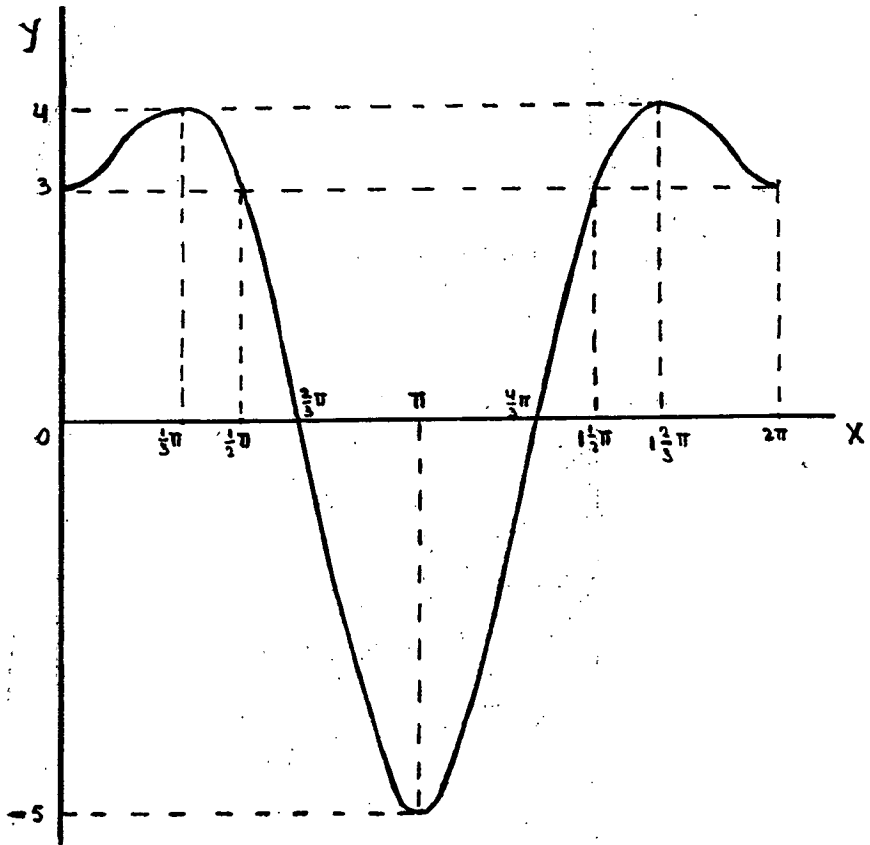


Fig. 9; uit de krant.

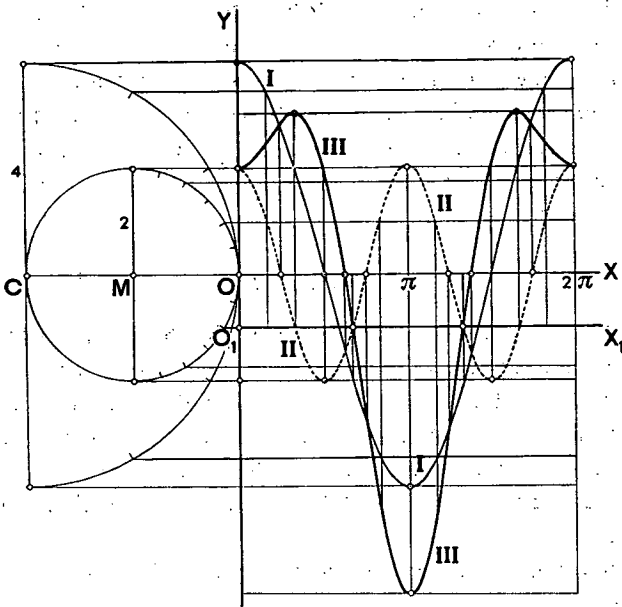


Fig. 10.

Op fig. 9 hebben 9 eenheden op de y -as dezelfde lengte als 2π op de x -as; men heeft dus voor π genomen $4\frac{1}{2}$! Kan het nog fraaier? De kromme heeft ongeveer de gedaante van de grafiek van

$$y = 0,7 (4 \sin^2 x + 4 \cos x - 1).$$

Van de raaklijnen en van de oppervlakten klopt natuurlijk niets. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van de kromme is $y' = 8 \sin x \cos x - 4 \sin x$; voor $x = \frac{1}{6}\pi$ wordt dit $2\sqrt{3} - 2 = 1,46410 = \operatorname{tg} 55^\circ 40'$; op fig. 9 maakt de raaklijn in dat punt een hoek $\operatorname{arctg} 0,7 \times 1,46410 = \operatorname{arctg} 1,02487 = 45^\circ 42'$ met de x -as.

Voor de wiskundig zuivere constructie van fig. 10 herleiden we de functie tot $y = 4 \cos x - 2 \cos 2x + 1$.

De kromme I met vergelijking $y = 4 \cos x$ (maak 'm rood) tekenen we met behulp van de cirkel (C, 4); de kromme II (maak 'm blauw) met vergelijking $y = 2 \cos 2x$ met behulp van de cirkel (M, 2).

Door aftrekking van de ordinaten van II van de overeenkomstige van I vinden we een aantal punten, waardoorheen wij de kromme III leggen. Nu laten we de x -as 1 zakken; t.o. van $O_1(X_1Y)$ heeft III de gegeven vergelijking.

Beschikt men over grafiekenbladen, waarop de assen en de horizontale en verticale lijntjes reeds staan, dan vergt een figuur als nr 10 op zijn hoogst 10 minuten.

7. Wat ik wilde bepleiten is dit: léér de leerlingen het verschil tussen diagrammen en grafieken en laat ze in het wiskunde-uur uitsluitend *grafieken* tekenen. Figuren als de oneven genummerde hierboven hebben geen aanwijsbaar nut en de onverschilligheid ten aanzien van de verhouding van de eenheden op de beide assen leidt tot slordigheid, waarmee niemand is gediend en waarvan de leerling de wrange vruchten plukt.

Naschrift

In de 14e jaargang van Euclides (1937/'38), dus nu 25 jaar geleden, verscheen er van mijn hand een artikel onder de titel: „Diagram of grafiek?” (zie blz. 180—184). Uit schoolboeken nam ik figuren over om te laten zien, hoe het niet moet. Men ziet er een sinuslijn, die oploopt van 0 af onder een hoek van 30° , een uit een ander boek onder 67° , een derde onder ruim 77° ; natuurlijk klopt de zaak in geen enkel punt.

Er is maar één lijn met vergelijking $y = \sin x$; evenals er maar één cirkel is, één parabool, één orthogonale hyperbool, één spiraal van Archimedes.

Neem voor de straal van de eenheidscirkel een veelvoud van 7 mm; neem $\pi = \frac{22}{7}$ (de fout is, zoals al gezegd is, kleiner dan $\frac{1}{2600}$; immers $3,1428 - 3,1416 = 12 \times 10^{-4}$; gaat op 31428×10^{-4} iets meer dan 2600 maal).

Als men loslaat, dat de eenheid op beide assen dezelfde moet zijn, dan kunnen de leerlingen de leraar, die dat zelf voordoet, zeggen, dat fig. 11 een vierkant is met zijn ingeschreven cirkel; nonsens, maar bij de goniometrie wordt dat geleerd!

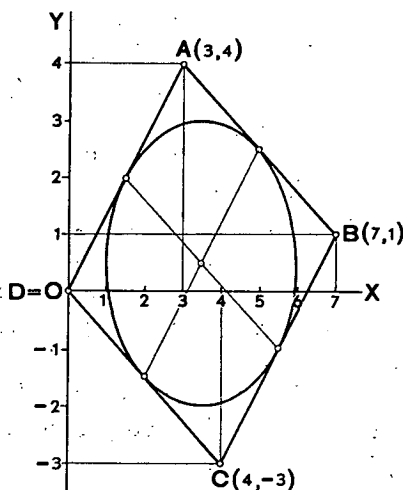


Fig. 11.

DE EXPONENTIËLE FUNCTIE BIJ HET NATUURKUNDE-ONDERWIJS ¹⁾

door

DR. J. REKVELD

OVERVEEN

De exponentiële functie speelt een rol bij een aantal verschijnselen, die wij tijdens de fysica-lessen op de middelbare school behandelen. In zulke gevallen illustreren wij dikwijls het exponentiële verband met behulp van een grafiek.

Onlangs verscheen een interessant artikel ²⁾ over een nieuwe proef om de exponentiële functie kwantitatief te demonstreren, nl. met behulp van de uitstroming van een vloeistof door een capillair filter. Dergelijke proeven zijn voor ons onderwijs uiteraard wenselijk en nuttig. Daarnaast zou echter een algemene discussie over het optreden en de voornaamste eigenschappen van de exponentiële functie, voorzover wij die in de natuurkunde op dit niveau nodig hebben, alleszins op zijn plaats zijn. Hierdoor kunnen wij het inzicht der leerlingen, dat, ook in dergelijke gevallen, de wiskunde een noodzakelijk correlaat voor de natuurkunde is, veruimen en verdiepen.

Voor degenen die iets voor dit standpunt voelen volgt hier een schets van een mogelijke behandeling, waarbij vooropgesteld worde, dat de methode geen enkele wiskundige pretentie heeft, maar wel rechtstreeks gericht is op het essentiële. Uiteraard is deze inleiding voor de bovenbouw bedoeld.

Wij onderstellen, dat een grootheid x met verloop van tijd afneemt en wel op de volgende wijze: gedurende een klein tijdvak (Δt) is de vermindering van x evenredig met de waarde van x en met de duur van het tijdvak, zodat geldt:

$$\Delta x = -\lambda x \Delta t, \quad (1)$$

waarin λ een constante is.

Bij constante waarde van Δt , bijv. 1 microseconde, is de relatieve

¹⁾ Dit artikel werd met enkele kleine wijzigingen overgenomen uit „Faraday”, 30e jaargang, febr. 1961.

²⁾ K. HECHT, Versuche zum exponentiellen Abfall; MNU, Bd. XII, 344—352.

of procentuele vermindering van x , nl. $\Delta x/x$, dus constant, ongeacht de grootte van x .

In een tijdvak Δt neemt x af tot $x - \lambda x \Delta t = x(1 - \lambda \Delta t)$, m.a.w. de waarde van x wordt vermenigvuldigd met de factor $f = 1 - \lambda \Delta t$. In 2 gelijke tijdvakken Δt neemt x dan af tot $f \times x f = x f^2$ en in n gelijke tijdvakken Δt tot

$$x_t = x_0 f^n \quad (2)$$

waarin x_0 en x_t de waarde van x in het begin resp. na $t = n \Delta t$ voorstellen.

Onder de halveringstijd (T) verstaan wij het tijdvak $T = h \Delta t$, waarin x_0 tot op de helft verminderd is. Deze halveringstijd volgt uit de voorwaarde

$$\frac{1}{2} x_0 = x_0 f^h \text{ of } f^h = \frac{1}{2},$$

waaruit wij berekenen

$$h = \log \frac{1}{2} / \log f$$

Voor de waarde van x_t kunnen wij nu ook schrijven

$$x_t = x_0 f^n = x_0 (f^h)^{n/h} = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n \Delta t / h \Delta t} \text{ of}$$

$$\boxed{x_t = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}} \quad (4)$$

Als wij hiermee de waarde van x_t berekenen voor $t = T, 2T, 3T$, enz. vinden wij achtereenvolgens $\frac{1}{2} x_0, \frac{1}{4} x_0, \frac{1}{8} x_0$, enz. De grafiek van x_t als functie van t is nu gemakkelijk te construeren. Bovendien kan worden opgemerkt, dat de grafiek van $\log x_t$ tegen t een rechte lijn wordt.

Het verband tussen T en λ kan als volgt gevonden worden:

$$T = h \Delta t = \log \frac{1}{2} \times \Delta t / \log f = -0,301 \Delta t / \log (1 - \lambda \Delta t)$$

De grafiek van $\log (1+k)$ als functie van k kan voor kleine positieve of negatieve waarden van k door een rechte lijn door de oorsprong benaderd worden, zodat voor deze waarden in benadering geldt:

$$\log (1+k) = \text{const.} \times k.$$

Voor $k = 0,002$ levert de log. tafel (in 5 dec.) voor $\log (1+k)$, de waarde $0,00087 = 0,435 \times 0,002$. De constante in de vorige formule is dus in benadering gelijk aan 0,435, zodat

$$\log (1 - \lambda \Delta t) = -0,435 \times \lambda \Delta t.$$

Hiermee berekenen wij voor de halveringstijd

$$T = -0,301 \Delta t / -0,435 \lambda \Delta t \text{ of } \boxed{T = 0,69 / \lambda} \quad (5)$$

Toepassing van deze formules en grafieken kunnen wij geven bij de afkoelingswet van Newton, het afnemen van de amplitude bij een gedempte trilling, de ontlading van een condensator door een weerstand, de zelfinductie bij in- en uitschakelen van een stroom en de radioactiviteit.

Ter illustratie berekenen wij de halveringstijd bij de ontlading van een condensator door een weerstand. Het potentiaalverschil aan de condensator (V) is op ieder moment gelijk aan het produkt van stroomsterkte (I) en weerstand (R). Bovendien is $V = Q/C$ en $I = -\Delta Q/\Delta t$, zodat $Q/C = -\Delta Q R/\Delta t$ of

$$\Delta Q = -Q \Delta t / RC \quad (6)$$

Hier is dus de λ uit formule (1) gelijk aan $1/RC$. Stellen wij, dat $C = 20 \mu\text{F}$ en $R = 0,25 \text{ M}\Omega$, dan berekenen wij voor de halveringstijd, d.w.z. de tijd waarin de condensator „half leeg” loopt,

$$T = 0,69/\lambda = 0,69 RC = 0,69 \times 0,25 \times 10^6 \Omega \times 20 \times 10^{-6} \text{ F} = 3,5 \text{ s.}$$

De hier bedoelde proef is gemakkelijk uitvoerbaar.

In plaats van de tijd kan ook een lengte als variabele optreden, bijv. bij het verband tussen luchtdruk en hoogte in de atmosfeer en bij de vermindering van de intensiteit van straling (bijv. licht) als functie van de doorlopen laagdikte van de absorberende stof.

Als voorbeeld berekenen wij de hoogte waarop de luchtdruk tot op de halvé waarde van de luchtdruk bij het oppervlak van de aarde is afgenomen (halveringshoogte, H).

Wij beschouwen een horizontaal luchtlaagje, oppervlak A en dikte Δh . Het gewicht hiervan, nl. $A \Delta h \rho g$ (ρ = soortelijke massa van de lucht) wordt in evenwicht gehouden door het drukverschil ($-\Delta p$) op het boven- en ondervlak van het luchtlaagje, zodat

$$-A \Delta p = A \rho g \Delta h \text{ of } \Delta p = -\rho g \Delta h \quad (7)$$

Wij nemen aan, dat de atmosfeer isotherm is en dat we dus de wet van Boyle mogen toepassen, die wij schrijven als $p/p = p_0/p_0$, waarin p_0 en p_0 resp. s.m. en luchtdruk bij het aardoppervlak aanduiden. In plaats van (7) kunnen wij dan schrijven

$$\Delta p = -\rho_0 p g \Delta h / p_0 \quad (8)$$

In dit geval is λ uit formule (1) dus gelijk aan $\rho_0 g / p_0$. De halveringshoogte is dus

$$H = 0,69/\lambda = 0,69 p_0 / \rho_0 g = (0,69 \times 10^5 \text{ N/m}^2) / (1,3 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2) = 5,4 \times 10^3 \text{ m} = 5,4 \text{ km.}$$

De geschetste behandeling vergt niet meer dan één lesuur, een tijd die goed besteed mag heten gezien de vele problemen, welke kwantitatieve behandeling nu voor de leerlingen toegankelijk is geworden.

UIT DE OPENINGSTOESPRAAK VAN DE VOORZITTER
VAN WIMECOS TOT DE ALGEMENE VERGADERING VAN
28 DECEMBER 1961

In mijn openingswoord op de vorige algemene vergadering van Wimecos heb ik reeds kunnen wijzen op de beslissing die er in de Tweede Kamer gevallen was t.a.v. de opheffing van de mechanica als zelfstandig leervak op de h.b.s. Een nabeschuiving over deze materie zult u aantreffen in een der volgende nummers van Euclides.

In aansluiting op de overwegingen in ons adres aan de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen (Euclides XXXVI, 122 e.v.) hebben we ons op 7 februari 1961 opnieuw tot de Staatssecretaris gewend (Euclides XXXVI, 348/49) met een adres waarin we erop aandrongen:

- a. de integratie van de mechanica in de natuurkunde voor wat betreft het eindexamen niet vóór 1963 te doen ingaan;
- b. de door de afschaffing van de mechanica als afzonderlijk leervak vrijkomende vier roosteruren een zodanige bestemming te geven, dat deze uren in ieder geval voor de wis- en natuurkundige vorming behouden zouden blijven.

We meenden goede gronden te hebben voor de vrees, dat de laatste eis niet voor inwilliging vatbaar zou worden geacht op grond van de overweging dat er op het gymnasium voor de natuurkunde met inbegrip van de mechanica slechts 10 uren beschikbaar zijn, terwijl een toevoeging van alle mechanica-uren bij de natuurkunde het aantal uren voor dit vak op de h.b.s. tot 15 zou doen stijgen.

Nu is het steeds onze overtuiging geweest dat de urenverdeling op de h.b.s. dient te geschieden op grond van de doelstelling van dit schooltype zelf. Indien zoals in ons geval een zeker aantal uren voor de h.b.s. wenselijk en mogelijk blijkt, is het niet toelaatbaar dit aantal uren te reduceren op grond van de overweging dat er een ander schooltype met name het gymnasium is, waar hetzelfde aantal uren niet beschikbaar blijkt.

Onze vrees is gelukkig ongegrond gebleken en het zal duidelijk zijn dat we met voldoening kennis hebben genomen van de circulaire van de Staatssecretaris van 7 juni 1961, waaruit bleek dat met ingang van 1 september 1961 het aantal uren voor de wiskunde in de vierde klasse met ingang van 1 september 1961 met 1 zou worden verhoogd en dat voor natuurkunde in de vierde en vijfde

klasse-opvolgend in 1961 en in 1962 met 1 en met 2; totaal met 3. Voorts werd er bepaald dat er in 1962 voor het laatst in de mechanica als zelfstandig vak examen zou worden afgenomen.

Het stemt tot voldoening, dat de garanties voor een verantwoorde integratie van de mechanica in de natuurkunde, waarop van de zijde van Wimecos steeds werd aangedrongen inderdaad tot stand zijn gekomen, terwijl de urenverdeling, hoewel van fysisch standpunt niet ideaal, toch de goede zijde heeft dat er voor de exacte vorming geen uren verloren zijn gegaan.

Voorts stemt het tot voldoening dat de belangrijke wijzigingen die in het simpele wetje van 2 maart 1961 hun beslag kregen tot stand konden komen zonder dat de goede verstandhouding tussen de zusterverenigingen Velines en Wimecos daardoor werd bedorven.

De leden van Velines en Wimecos hebben gestaan, staan en zullen staan, naar mijn vaste vertrouwen, niet als rivalen maar als pleitbezorgers voor een goede behartiging van de belangen van het onderwijs in het geheel der exacte vakken in ons v.h.m.o.

Het vorige jaar wees ik er in mijn openingswoord op, dat in onze naam „Wi-me-cos” de tweede lettergreep weldra zinloos dreigde te worden. Thans constateren we dat ook de derde lettergreep in gevaar geraakt.

Twee artikelen in de lopende jaargang van Euclides stellen dit gevaar in het licht. Een noodkreet van Prof. Minnaert en een adres van het Bestuur van Wimecos aan de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen (Euclides XXXVII, 120).

We hebben er in ons adres op gewezen dat de kosmografie of sterrenkunde grote waarde heeft voor de algemene vorming van de leerlingen en dat het niet verantwoord is de positie van de desbetreffende leerstof op onze scholen te verzwakken. Deze leerstof zou het best tot zijn recht kunnen komen als het vak „Sterrenkunde” op de rooster gehandhaafd blijft, wat geenszins impliceert dat er van een koppeling van wiskunde-uren en kosmografie-uren sprake behoeft te zijn.

Beschouwen we nu de drie fronten waarop Wimecos sinds 1925 heeft gestreden, dan constateren we dat we op het punt staan de mechanica-linie te verlaten en dat de situatie op de kosmo-linie precair wordt.

Dit maakt ons echter niet pessimistisch of mismoedig. Het hoofdfront is en blijft toch voor onze vereniging dat der wiskunde. En hier is de situatie gezond. De samenwerking tussen alle wiskundeleraren wordt steeds nauwer. Dank zij de reglementswijziging van 1956 kunnen we in Wimecos dat toegankelijk is voor de leraren van

het gymnasium evenzeer als voor die van de h.b.s. de belangen van allé wiskunde-onderwijs behartigen.

Het jaar 1961 is voor het wiskunde-onderwijs in Nederland een belangrijk jaar geworden door de instelling van de Staatscommissie modernisering leerplan wiskunde, welke commissie onder voorzitterschap van Prof. Leeman en die haar arbeid reeds in de zomer van 1961 is begonnen.

Door het werk van deze commissie zijn naar mijn mening op den duur zeer belangrijke veranderingen te verwachten in de leerprogramma's of in sommige leerprogramma's van ons v.h.m.o., veranderingen die echter niet tot stand zullen worden gebracht dan nadat experimenteel de onderwijsmogelijkheid is gebleken voor nieuwe leerstof waarvan de wenselijkheid uit anderen hoofde apert is.

De veranderingen waarop ik doel zullen die van de jongste programmaherziening verre overtreffen. Ik verwacht niet, dat ze op efficiënte wijze tot stand zullen kunnen komen vóór de wet tot reorganisatie van het voortgezet onderwijs tot stand gekomen zal zijn.

Het programma van 1958 streefde geen modernisering na maar consolidering en uniformisering.

Consolidering: voorkomen werd dat onderwerpen als differentiaal- en integraalrekening die reeds sinds 1921 op het gymnasium en sinds 1937 op de h.b.s. op het programma stonden in de onderwijspraktijk een dode letter zouden kunnen blijven;

Uniformisering: de programma's voor de B-leerlingen van h.b.s. en gymnasium werden gelijkgetrokken.

Voor de h.b.s. was het meest schokkende dat het enige stuk leerstof dat niet op een ouderdom van meer dan twee eeuwen kon bogen, de b.m., werd prijsgegeven.

Maar door de algemeen aanvaarde herziening, tot stand gekomen in de vijftiger jaren, wordt de weg geëffend voor een effectieve modernisering in de zestiger jaren. Een modernisering waardoor Nederland internationaal gezien niet te ver bij andere landen zal behoeven achter te blijven.

De combinatie van aanpassing aan de eisen van een technologisch tijdperk en handhaving van humanistische opvoedingsidealen stelt ons in Nederland echter voor een zware taak.

Als de Commissie-Leeman straks een beroep op u zal doen bij de uitvoering van nodig geachte didactische experimenten, vertrouw ik dat velen uwer die medewerking gaarne zullen willen verlenen.

In de opdracht verstrekt aan de Commissie modernisering leerplan wiskunde lees ik als derde punt:

Het dienen van advies inzake het probleem of en zo ja op welke wijze een programma zou moeten worden samengesteld voor het wiskunde-onderwijs, te geven aan die leerlingen die beschikken over een bijzondere aanleg voor wiskunde en voor wie specialisatie in deze richting wenselijk is, mede met het oog op de internationale positie van Nederland.

Dit probleem, het wiskunde-onderwijs voor de wiskundig-begaafden is in de Nederlandse didactiek nog ternauwernood aangesneden.

Ik stel er prijs op u hier te wijzen op een paar activiteiten van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde die met het zo juist genoemde in een weliswaar slechts verwijderd verband staan, twee activiteiten waarbij op uw aller medewerking echter een beroep is gedaan of gedaan zal worden.

We verheugen ons over de wijze waarop het wiskundig tijdschrift voor jongeren „Pythagoras” in de scholen is ontvangen. Er zijn thans een veelvoud van het aantal abonnees dat nodig is om de bestaanszekerheid van het tijdschrift te verzekeren. Van deze plaats breng ik graag hulde aan de twee enthousiaste redacteurs, de heer Krooshof en Br. Erich.

Dan wijs ik er u op dat er in het jaar 1962 voor de eerste maal een Wiskundige Olympiade voor jongeren zal worden gehouden, die zonder uw medewerking niet zal kunnen slagen. U zult hierover in februari nadere mededelingen ontvangen nadat de pers erover in het laatst van januari globaal zal zijn ingelicht. Ik doe van deze plaats een beroep op u allen om deze poging van de Nederlandse Onderwijscommissie om de belangstelling voor de wiskunde te stimuleren te doen slagen.

Wimecos werkt met zijn zusterverenigingen samen o.a. in het Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen. Het veertiende congres dat gehouden zal worden op donderdag 19 april te Utrecht heeft tot thema: „Ruimte en tijd”. Ik beveel dit congres in uw aller belangstelling aan.

Als laatste didactische activiteit die niet buiten Wimecos omgaat noem ik de vakantiecursussen van het M.C.

De grote belangstelling die de vakantiecursussen van het M. C. de laatste jaren ondervinden zijn een bewijs voor de stelling dat vele leraren in functie de geboden gelegenheid zich ten aanzien van moderne problemen te oriënteren gaarne aangrijpen.

Met de wens dat 1962 voor ons v.h.m.o. in het algemeen en voor het wiskunde-onderwijs in dat v.h.m.o. in het bijzonder een gunstig jaar zal zijn, verklaar ik deze algemene vergadering voor geopend.

NEDERLANDSE ONDERWIJSRESEARCH VOOR WISKUNDE ¹⁾

door

JOH. H. WANSINK

ARNHEM

In het verslag van de conferentie betreffende research ten behoeve van opvoeding en onderwijs op 14 maart 1960 te Amsterdam gehouden, komt een overzicht voor van de „verrichte en lopende onderzoeken op het gebied van het v.h.m.o. aan het Pedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht” van de hand van Prof. Dr. M. J. Langeveld, die tot 1 januari 1958 belast was „met de onderzoeken waarvan thans verslag wordt uitgebracht”.²⁾

Om het gevaar te verminderen dat geschiedschrijvers door een te groot vertrouwen in de weergave van de feiten waarvan dit verslag gewaagt, een onjuist beeld zullen geven van de werkelijke toedracht van het gebeurde, geef ik hier enige kritische kanttekingen en aanvullingen bij Langeveld's betoog. Ik beperk me daarbij tot dat wat medegedeeld is over het wiskunde-onderwijs, en wel in hoofdzaak tot het werk door Dr. L. H. N. Bunt op dit terrein verricht.

De rapporten „The teaching of mathematics to students between 16 and 21 years of age in the Netherlands” (1955) en „The teaching of arithmetic and mathematics to students between 6 and 15 years in the Netherlands” (1958) zijn tot stand gekomen op initiatief van de Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde (N.O.C.), subcommissie van de Commission internationale de l'enseignement mathématique (C.I.E.M.) De C.I.E.M. besloot op haar bijeenkomst van september 1952, dat er door de aangesloten landen rapporten over het eerstgenoemde onderwerp zouden worden uitgebracht. Dr. Bunt trad op verzoek van de N.O.C. op als rapporteur over deze materie; het rapport was bestemd om op het Internationaal Mathematisch Congres te Amsterdam (1954) te worden besproken. In 1955 trad Dr. Bunt, wederom op verzoek van de N.O.C., op als rapporteur van het tweede rapport, dat bestemd was voor het Internationaal Mathematisch Congres te Edinburgh (1958). Voor-

¹⁾ Overgenomen uit Paedagogische Studiën, 39,1.

²⁾ Dit verslag werd ook opgenomen in Paedagogische Studien 1960, pag. 154.

zitter van de N.O.C. was tot eind 1954 Prof. Dr. E. W. Beth en daarna Prof. Dr. H. Freudenthal.

Ons bezwaar tegen het verslag van Langeveld is dat het niet vermeldt dat deze beide rapporten ontstaan zijn en uitgegeven zijn op initiatief van de N.O.C. Deze gaf haar toestemming om de beide rapporten tevens te doen opnemen in de serie *Acta Paedagogica Ultrajectina*, opvolgend in 1954 en 1958. Ze achtte hiervoor voldoende termen aanwezig, doordat Dr. Bunt bij de samenstelling der rapporten ruimschoots gebruik had kunnen maken van de materiële en personele hulpmiddelen van het Pedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht. De ontstaanswijze van de rapporten wordt overigens door de auteur in de desbetreffende voorberichten volledig uiteengezet. Voorts moeten wij bezwaar maken tegen het volgende citaat (blz. 13): „Uit al deze onderzoekingen resulteerde niet alleen een aantal boeken en voor een aantal leraren een verrijking van de praktijk, maar ook ontstond

- a. het rapport van de Commissie Wimecos ter herziening van het programma, en
- b. een werkgroep voor het opstellen van redelijke eindexamenvraagstukken, die de uitgave „250 opgaven voor het wiskunde-eindexamen” bewerkstelligde”.

In werkelijkheid is het rapport van de „leerplan-commissie-1954 van Wimecos inzake het opstellen van een ontwerp-leerplan en een ontwerp-eindexamen-programma voor wiskunde voor de H.B.S.-B” samengesteld door een commissie waarin Dr. Bunt op uitnodiging van het Bestuur van Wimecos zitting nam.

De instelling der Commissie had plaats na goedkeuring der desbetreffende plannen op de jaarvergadering van Wimecos, dat was reeds in 1954.

Ook de mededeling over de „250 opgaven” zou aanleiding tot misverstand kunnen geven. De juiste titel van het bedoelde boekje is: „250 opgaven samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie door C. J. Alders, Dr. L. N. H. Bunt, A. Holwerda, Dr. P. G. J. Vredenduïn en Dr. Joh. H. Wansink”. In het voorwoord spreken de auteurs, die de inhoud van het boekje geheel voor hun persoonlijke verantwoording nemen, hun dank uit aan de leiding van het Pedagogisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht voor de gelegenheid in het Instituut bijeen te komen en voor de verleende administratieve en financiële hulp en voorts aan de vereniging Wimecos die de vijf leden van de leerplan-commissie tot het schrijven van het boekje had gestimuleerd en materieel had bijgestaan.

Als voorzitter van Wimecos en als secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde acht ik me verplicht het verslag van Langeveld met bovenstaande opmerkingen aan te vullen, teneinde het initiatief en de verantwoordelijkheid van het Pedagogisch Instituut ten aanzien van de vier hierbovengenoemde publikaties tot de juiste proporties terug te brengen.

EXAMENCOMMISSIE WISKUNDE M.O.

Zolang het uitgewerkte programma, bedoeld in art. 8 van het K.B. van 21 juli 1958, Stb. 362 (Examenregeling bewijs van pedagogische en didactische voorbereiding voor het geven van middelbaar onderwijs) ten aanzien van de examens ter verkrijging van het bewijs van pedagogische en didactische voorbereiding behorende bij de akte wiskunde m.o. A resp. de akte wiskunde m.o. B nog niet is vastgesteld, zal als voorlopige regeling van deze examens voor 1963 en volgende jaren tot nadere aankondiging het volgende gelden.

Het examen zal betrekking hebben op:

- a. algemene problemen van het wiskunde-onderwijs;
 - b. speciale problemen van het algebra-onderwijs;
 - c. speciale problemen van het meetkunde-onderwijs.
- Specificatie.

A.

Voor het bewijs van pedagogische en didactische voorbereiding, behorende bij de akte wiskunde m.o. A.

- a. 1. Organisatie van het Nederlandse onderwijs, in het bijzonder in verband met de plaats, die de wiskunde op de onderscheiden schooltypen inneemt.
- 2. Doel van het wiskunde-onderwijs; criteria voor de keuze van de wiskundeleerstof; coördinatie van de wiskunde met de overige schoolvakken; het programma voor de algebra en voor de meetkunde in het v.h.m.o.
- 3. De functie van de leraar; methoden van lesgeven.
- 4. De functie van het schoolboek; andere hulpmiddelen bij het wiskunde-onderwijs: platen, modellen, tabellen en overzichten, rekenliniaal, filmstrips en films; leerlingenbibliotheken.
- b. 1. Het inleidend algebra-onderwijs.
- 2. De uitbreiding van het getalbegrip.
- 3. Het functiebegrip; de begrippen vergelijking en ongelijkheid; wijze van behandeling van de tot de leerstof van het v.h.m.o. behorende functies, vergelijkingen en ongelijkheden.
- c. 1. Inductieve inleidingen in de meetkunde; overgang naar de systemen met deductief karakter.
- 2. Invoering van een metriek: lengten, hoekmaten, oppervlakten en inhouden.

Van de kandidaten wordt verlangd een kritische bestudering van een schoolboek voor algebra en van een schoolboek voor meetkunde. Bij het examen over de in het bovenstaande genoemde onderwerpen zal hiervan worden uitgegaan.

Betreffende het hospiteren zij verwezen naar de artikelen 4 en 18, lid 2, van het in de aanhef genoemde K.B.

B.

Voor het bewijs van pedagogische en didactische voorbereiding, behorende bij de akte wiskunde m.o. B.

- a. 1, 2, 3, 4 eensluitend met dezelfde nummers vermeld onder A, met dien verstande, dat het laatste onder a 2 genoemde onderwerp hier moet luiden: het vigerende wiskunde-programma voor het v.h.m.o.
5. De taal der wiskunde; formalisering van de omgangstaal; rol der figuren in het wiskunde-onderwijs; nomenclatuur en normalisatie ten aanzien van wiskundige termen en symbolen.
6. Het probleem van de motivering van de wiskundige leerstof; stadia in het leerproces; de rol van parate kennis en het verwerven van inzicht.
7. Toetsingsproblemen; de waardering van de onderwijs- en de leerresultaten (huiswerk; overhoren van lessen; proefwerken; toelatingsexamens en eind-examens); het probleem der normen.
- b. 1, 2 en 3 eensluitend met dezelfde nummers vermeld onder A.
4. Ontwikkeling van het limietbegrip.
5. Elementaire behandeling van de beginselen der differentiaal- en integraal-rekening.
- c. 1 en 2 eensluitend met dezelfde nummers vermeld onder A.
3. Toepassing van de algebra op de meetkunde.
4. Het gebruik van het begrip vector in de meetkunde.
5. Transformaties in de meetkunde.

Van de kandidaten wordt verlangd een kritische bestudering van een schoolboek voor elk der onderdelen van het vigerende wiskunde-programma voor het v.h.m.o. Bij het examen over de in het bovenstaande genoemde onderwerpen zal hiervan worden uitgegaan.

Betreffende het hospiteren zij verwezen naar de artikelen 4 en 18, lid 2, van het in de aanhef genoemde K.B.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

We beginnen ditmaal met een boekbespreking.

R. Sprague, *Unterhaltsame Mathematik*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961, 51 blz., D.M. 6.80.

Het boekje bevat dertig bijzonder fraaie, pittige opgaven, benevens de oplossingen. Gaarne zou ik ze alle dertig in deze rubriek opnemen. Dit zou echter niet behoorlijk zijn. Om de inhoud van het boek te demonstreren, meen ik echter goed te doen hieronder één opgave te publiceren. De lezer zal dan wel nieuwsgierig worden naar de overige. Als enige aanmerking wil ik vermelden, dat in sommige opgaven (19 en 20) wordt gevraagd een kleinste aantal te vinden, terwijl in het antwoord niet be- wezen is, dat de gevonden waarde inderdaad deze minimumeigenschap heeft.

65. Gegeven zijn n lichamen van verschillend gewicht. Deze moeten gerangschikt worden naar hun gewicht. Men beschikt over een balans zonder gewichten, waardoor men telkens door één weging kan uitmaken, welk van twee lichamen het zwaarste is, maar geen informatie krijgt over de grootte van het verschil. Men gaat als volgt te werk. Als men k lichamen reeds gerangschikt heeft, bepaalt men door het $k+1^e$ met deze lichamen te vergelijken, welke plaats dit tussen de andere in- neemt. Hoeveel wegingen heeft men in totaal maximaal nodig, als men dit aantal zo laag mogelijk wil houden?

Bestaat er een methode om met minder wegingen te volstaan? Kies, om dit te onderzoeken, $n = 5$.

66. Hoeveel cijfers 3 bevat het getal, dat gelijk is aan de som van de kwadraten van 1 tot en met 10^n ?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

63. Stel de roltrap heeft n treden (d.w.z. het deel, dat afgelegd moet worden, in stilstaande toestand). Stel verder, dat de snelheid van de trap x treden per sec is en de snelheid van A to.v. de trap y treden per sec. De trap beweegt zich, gezien de gegevens, in omlaaggaande richting. Nu is

$$\frac{n}{y-x} y = \frac{n}{2y-x} 2y + 35$$

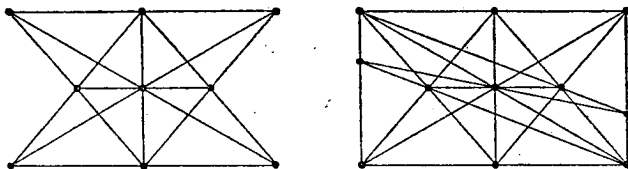
$$\frac{n}{y+x} y = \frac{n}{2y+x} 2y - 10.$$

Dit zijn twee vergelijkingen met onbekenden n en $\frac{x}{y}$. Men vindt $n = 84$ en $\frac{x}{y} = 5$

of $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$. Alleen het laatste antwoord heeft zin, want in het eerste geval komt A de trap nooit op. Het aantal treden, dat A omhooggaand aflegt, wordt voorgesteld door het linker lid van de eerste vergelijking. Dit aantal is dus 140.

64. In de rechter figuur ziet men, dat 15 rijen mogelijk zijn. Duidelijk is verder, dat elke boom slechts van 5 rijen deel kan uitmaken en dat er dus beslist niet meer dan 18 rijen kunnen ontstaan. Met de inzender ben ik ervan overtuigd, dat meer dan 15 rijen niet mogelijk is. Maar ik kan het niet bewijzen. Ziet iemand er kans toe?

In de linker figuur zijn 9 bomen op 10 rijen van 3 geplaatst. De linker configuratie is een deel van de rechter.



KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, De Houtmanstraat 37, Hoogezaand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht” in het M. C., 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 9 mei 1962:

Prof. Dr. W. Peremans. Onderwerp nog onbekend. Aanvang 20,00 uur.

Ter overname gevraagd:

Cantor's Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, vier delen. Brieven met opgave van druk en prijs aan:

Dr. A. J. E. M. Smeur, Groen van Prinsterersingel 14, Gouda (tel. 01820—6760)

POLYA

Mathematik und plausibles Schliessen

Band I: Induktion und Analogie in der Mathematik

Von Prof. Dr. GEORG POLYA, Professor der Mathematik an der Universität Stanford, USA.

Aus dem Englischen übersetzt von Prof. Dr. LULU BECHTOLSHEIM

Professor der Mathematik an der Universität Redlands, USA

1962, ca. 400 Seiten mit 64 Figuren. Preis gebunden ca. Fr. 40.— (ca. DM 40.—)

Sammlung „Wissenschaft und Kultur“, Band 14

Inhalt: Dieses Buch, wohl einzig in seiner Art, zeigt nicht die fertige, zu formalen Beweisen erstarrte Mathematik, sondern gewährt Einblick in die im Entstehen Begriffene: In die Denkprozesse, welche zur Auffindung des Beweises und zur Lösung der Aufgabe führen. Lebhaft und überzeugend dargestellte, meist elementare Beispiele aus Mathematik und Physik zeigen die Rolle des Vermutens, Erratens, Induktion und Analogie. Zahlreiche originelle, nicht schablonenhafte Aufgaben (mit Lösungen) sollen den Leser zum Selbstdenken anregen und können als Grundlage zu Seminarübungen dienen.

Band II: Typen und Strukturen plausibler Folgerung, erscheint voraussichtlich Ende 1962.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung - Obtainable from your bookseller

Commandes à votre libraire.

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Bij de Technische Hogeschool te Eindhoven kunnen worden geplaatst

INGENIEURS c.q. DOCTORANDI

in de natuurkunde, werktuigbouwkunde, scheikunde, elektrotechniek en wiskunde voor het opbouwen van studiecollecties en het toegankelijk maken van literatuur.

Zij zullen hun werk bij de afdelingen verrichten ten dienste van onderwijs en onderzoek, onder leiding van de bibliothecaris.

Ervaring op bibliotheek- en documentatiegebied strekt tot aanbeveling doch is niet noodzakelijk. Aanstelling zal geschieden in het wetenschappelijk ambtenaren rangenstelsel.

Schriftelijke sollicitaties, onder vermelding van nr. V866, te richten aan het hoofd van de centrale personeelsdienst van de technische hogeschool, Insulindelaan 2, Eindhoven.

Inlichtingen kunnen worden verkregen bij de bibliothecaris, tel. 04900—68000, toestel 223.

Antlitze grosser Schöpfer

Neuerscheinung

Geplant und eingeleitet von Bettina Holzapfel,
fortgesetzt und herausgegeben von Heinz
Balmer

Mit Beiträgen von Adolf Portmann und Ernst
Bohnenblust

Sammlung
Wissenschaft und Kultur
Band 13

524 Seiten, 54 Kunstdrucktafeln, 28 Unterschriften. Einzelne Handschriftproben und Figuren – Ganzleinen Fr./DM 20.–.

Inhalt

30 Biographien

Kolumbus · Kopernikus · Kepler · Galilei ·
Newton · Pascal · Lagrange · Herschel · Laplace ·
A. v. Humboldt · Ørsted · Faraday · S. Carnot ·
Bunsen · Rob. Mayer · Lamarck · Darwin ·
Joh. Müller · J.-H. Fabre · Dante · Spinoza ·
Mantegna · Leonardo · Michelangelo · Rembrandt · Will. Turner · Bach · Händel · Mozart ·
Beethoven

Literaturhinweise – Besprechung der Bildnisse –
Bildniswerke – Zu den Unterschriften – Personenverzeichnis – Sachverzeichnis.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung
Commandes à votre libraire
Obtainable from your bookseller

Birkhäuser Verlag
Basel und Stuttgart