

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962

VI - 1 MAART 1962

INHOUD

Prof. Dr. S. C. van Veen: Gauss en zijn omgeving . . .	161
B. L. van der Waerden: Over logische en verzamelings- theoretische symbolen	183
P. Woestenenk: Het vak rekenen op de kweekschool. Een oriëntatie	187
Uit het verslag van de commissie voor het staatsexamen gymnasium in 1960	198
Uit het verslag van de commissie voor de staatsexamens h.b.s. in 1960	199
Didactische literatuur	201
Dr. H. Turkstra: Over documentatie van leermiddelen bij het wiskunde-onderwijs	202
Boekbespreking	204
Recreatie	207

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

GAUSS EN ZIJN OMGEVING ¹⁾

door

Prof. Dr. S. C. VAN VEEN

DELFT

Inleiding.

Het is voor mij een bijzonder genoegen, hedenmorgen wederom voor uw vereniging het woord te mogen voeren. Ik ben hiervoor het bestuur zeer erkentelijk, in het bijzonder daarvoor, dat zij mij de volledige vrijheid heeft willen schenken in de keuze van het onderwerp.

Hoe zou ik van deze vrijheid beter gebruik hebben kunnen maken dan door tot onderwerp van deze voordracht te kiezen de grote figuur, wiens magistraal werk, maar ook wiens boeiend leven gedurende de afgelopen ruim veertig jaren van mijn leven het onderwerp van mijn meest intense studie heeft uitgemaakt. Uit de aard der zaak bedoel ik de figuur van Carl Friedrich Gauss (1777—1855).

Het ligt echt ditmaal niet in mijn bedoeling om in de eerste plaats te spreken over het baanbrekende wetenschappelijke werk van deze heros der wetenschap. Ik heb dat in het verleden reeds bij herhaling mogen doen, en ik meen ook in uw midden reeds bepaalde aspecten van dit veelomvattende werk naar voren te hebben gebracht.

Vandaag wilde ik veeleer trachten de *mens* Gauss in relatie tot zijn omgeving naar voren te brengen. Aan dit uiterst belangrijke onderwerp, waarbij wij in de gelegenheid worden gesteld, Gauss in zijn menselijke eigenschappen, soms ook in zijn zwakheden, een enkele maal in zijn fouten nader te leren kennen, is in het buitenland naar verhouding weinig aandacht geschonken, en hier te lande, naar ik meen, vrijwel in 't geheel geen aandacht. Hoewel de korte tijd, die mij hiertoe ter beschikking is gesteld, niet voldoende is om mij de gelegenheid te geven op deze boeiende aspecten in zijn leven in detail in te gaan, toch hoop ik, dat het mij vergund moge zijn, zij het ook op oppervlakkige wijze, enkele woorden te wijden aan:

- a) Gauss en zijn vrienden.
- b) Gauss en zijn wetenschappelijke tijdgenoten en medewerkers.
- c) en dit komt mij voor als het meest belangrijke, juist voor deze samenkomst: Gauss als academisch docent, en zijn relaties tot zijn leerlingen.

¹⁾ Voordracht Algemene Vergadering van Wimecos, Utrecht, 28 december 1960.

Ik moet bij voorbaat aannemen, dat daarmede de beschikbare tijd volledig uitgeput zal zijn, want anders zou het nog van belang kunnen zijn te spreken over Gauss en zijn huisgezin.

A. Gauss en zijn vrienden.

Laat mij beginnen met voorop te stellen, dat Gauss bij eerste kennismaking zeker niet vrij was van schuchterheid en bevangenheid, een zekere gereserveerdheid, waardoor hij vaak (volkomen ten onrechte) de indruk maakte van weinig toegankelijk te zijn. Wij zullen in het vervolg zien, dat deze houding door enkelen werd geïnterpreteerd als een zekere trotsheid, ja minachting ten aanzien van de personen waarmede hij in kennis kwam. Niets is echter minder waar dan dat. Deze reserve, wellicht reeds een aangeboren eigenschap, is zeker in niet onbelangrijke mate in de loop van zijn wetenschappelijke ontwikkeling versterkt door het feit, dat hij slechts zelden in direct contact kwam met figuren die in staat waren zijn hoge gedachtenvlucht en diepzinnige ontwikkelingen naar hun volle waarde te schatten, zodat hij zelfs bij zijn naaste vrienden vaak nog de juiste klankbodem miste, waarop zijn verheven gedachten konden resoneren. Gauss was in zijn gesprekken met zijn vele vrienden een man van weinig woorden.

Zijn grote jeugdvriend, de Hongaar Wolfgang von Bolyai (1775—1856), waarmede Gauss in 1796 aan de universiteit van Göttingen als student kennis maakte, schreef veel later (1840) over hem: *„Hij was zeer bescheiden en stelde zich nooit op de voorgrond; niet drie dagen, zoals met Plato, maar jaren lang kon men met hem samenzijn, zonder tot de erkenning van zijn ware grootheid te komen. Ik betreur het ernstig, dat ik toen niet in staat was, dat zwijgzame boek zonder titel te openen en te lezen. Ik wist niet hoeveel hij wist, en toen hij mij beter had leren kennen, hield hij veel van mij, zonder te weten, hoe weinig ik was.*

Wij waren innig verbonden door de ware (niet oppervlakkige) hartstocht voor de wiskunde en onze zedelijke overeenstemming, zodat wij dikwijls, terwijl wij met elkaar wandelden, urenlang geen woord spraken, terwijl wij door onze eigen gedachten in beslag genomen waren”.

Wij maken hier voor het eerst kennis met de belangrijke figuur van Wolfgang von Bolyai, telg van oude verarmde Hongaarse adellijke familie, die van 1796—1799 in Göttingen studeerde. Ten huize van prof. Seyffer, hoogleraar in de astronomie, ontmoette hij de twee jaar jongere Gauss, die reeds een jaar vroeger was ingeschreven. Bolyai uitte zich daarbij op een erg vrijmoedige en besliste wijze

over de lichtvaardigheid, waarmede de grondslagen der wiskunde vaak werden behandeld.

Enige dagen na deze kennismaking ontmoette hij Gauss bij een wandeling over de wallen der oude universiteitsstad. Samen wandelden zij verder, terwijl Bolyai onder meer sprak over de grondslagen van de meetkunde en de eventuele bewijspogingen van het parallellenaxioma van Euclides. De zwijgzame Gauss brak daarop plotseling in grote vervoering uit met de woorden: „*Jij bent een genie! Jij zult mijn vriend zijn*”, waarop onmiddellijk de band der broederschap onder het vaandel der waarheid werd gesloten. Deze innige vriendschap heeft stand gehouden gedurende het gehele verdere leven van Gauss, zij het op grote afstand. Het directe contact kwam reeds vrij spoedig tot een eind door het vertrek van Gauss en Bolyai. Gauss ging terug naar zijn vaderstad Braunschweig in de herfst van 1798, en in de zomer van 1799 ging Bolyai voor goed naar zijn vaderland terug, echter niet voordat hij met Gauss nog éénmaal voor afscheid in Klausthal in de Harz was samengekomen op 24 mei 1799.

Na het vertrek van Bolyai, heeft Gauss hem nimmer weergezien. Het contact is echter gedurende het gehele leven van Gauss voortgezet door een drukke briefwisseling. Na het overlijden van Gauss heeft Bolyai nog uitvoerig over zijn contact met Gauss geschreven aan de latere vriend van Gauss, Sartorius von Waltershausen.

Een merkwaardige episode uit een brief van 13 juli 1856 willen wij niet onvermeld laten. Bolyai schrijft:

„Gauss rustte van zijn aanhoudende stille werk meestal bij mij uit. Hij sprak nooit over zijn plannen, en zelfs als hij iets klaar had, zweeg hij; slechts éénmaal heb ik hem op een matige manier verheugd gezien, toen hij de kleine lei, waarop hij de 17-hoek (D.A. p. 662) had berekend, aan mij als aandenken schonk . . .

Wij gingen samen te voet naar zijn ouders in Braunschweig: toen Gauss even de kamer had verlaten, vroeg zijn moeder mij, of er van haar zoon nog wat zou terechtkomen? Toen ik daarop antwoordde „de grootste mathematicus van Europa” brak ze in tranen uit.”

Alvorens het verhaal van de innige vriendschap van Gauss en Bolyai te besluiten, willen wij vermelden, dat Wolfgang von Bolyai in 1802 de vader werd van Johann Bolyai, die samen met Lobatschefsky tot de grondleggers der niet-Euclidische meetkunde moet worden gerekend.

Wanneer ook terecht mag worden beweerd, dat de zwijgzame, weinig toegankelijke Gauss zich in *gesprekken* ook met zijn naaste vrienden en verwanten zelden liet gaan, en zodoende weinig uiting

gaf aan de vele innerlijke roerselen van zijn ziel, des te openhartiger toonde hij zich in de talloze *brieven* die hij aan deze vrienden schreef. De wetenschap mag zich gelukkig prijzen door het feit, dat de brieven geschreven door Gauss en gericht aan Gauss voor het merendeel met grote piëteit zijn bewaard, verzameld en uitgegeven. Deze uitgegeven briefwisselingen vormen voor ons de beste bron om een nader inzicht te krijgen in het gecompliceerde karakter en de menselijke eigenschappen van Gauss. Van deze briefwisselingen zal daarom in het vervolg ruimschoots gebruik worden gemaakt. Van deze briefwisselingen dienen in de eerste plaats te worden vermeld die met Wilhelm Olbers (twee delen), met Heinrich Christian Schumacher (zes delen!), met Friedrich Wilhelm Bessel. Verder kunnen nog worden vermeld de briefwisselingen met Gerling en Alexander von Humboldt. Als men in aanmerking neemt, dat met de eerstgenoemde vrienden gedurende een tijdvak van omstreeks veertig jaren (tot aan hun dood) schier wekelijks uitvoerige brieven werden gewisseld, is het onbegrijpelijk, waar Gauss naast zijn veelomvattend wetenschappelijk werk de daartoe benodigde tijd heeft weten te vinden. Leest men deze brieven, dan blijkt het duidelijk, dat vele ervan voor Gauss een alleszins gewenste adem-pauze vormden in zijn ingespannen werk, en dat ze vaak dienden tot „abreagieren” van zijn vele innerlijke spanningen. Enige nadere kennismaking met deze vrienden is noodzakelijk.

Wilhelm Olbers (1758—1840) was van huis uit een medicus, die een drukke huisartspraktijk in Bremen had. Daarnaast was hij een enthousiast astronoom, wiens kennis op dit gebied ver uitreikte boven het amateursniveau. Hij had een particuliere, uitstekend ingerichte sterrenwacht, en offerde zijn nachtrust grotendeels op aan astronomische waarnemingen. Er wordt van hem verteld, dat hij nimmer meer dan vier uur 's nachts heeft geslapen. Ook op theoretisch gebied heeft Olbers zijn sporen verdiend. Hij heeft een zeer eenvoudige efficiënte methode opgesteld voor de baanbepaling van een komeet uit drie waarnemingen. Deze methode wordt nog steeds toegepast.

Gauss kwam met Olbers in correspondentie in 1802 in verband met de herontdekking van de asteroïde Ceres door Olbers. Gauss had de baan berekend van deze kleine planeet volgens een nieuwe buitengewoon geniale methode, waardoor hij Olbers in staat stelde, op 1 jan. 1802 het verloren gewaande hemellichaam precies op de door Gauss voorspelde plaats terug te vinden.

Hiermede was het tweede grote tijdvak, dat der astronomie, in het leven van Gauss geopend.

Heinrich Christian Schumacher (1780—1850) had eerst de rechtsgeleerde studie voltooid, waarna hij grote roeping gevoelde voor de studie van de astronomie. Hij begon deze studie in 1808 aan de universiteit van Göttingen onder leiding van de pas benoemde Gauss, wat steeds zijn ideaal was geweest. Zijn eerste schrijven aan Gauss op 20 sept. 1808 eindigde met de zinsnede *„Als ik eens de titel „leerling van Gauss” zal mogen voeren, dan verlang ik nooit een andere”*.

Hoewel Schumacher mathematisch op een veel lager niveau als Gauss stond, en vaak tot enige ergernis van Gauss, niet in staat was in de mathematische finesses van zijn leermeester door te dringen, toch heeft zich een levenslange innige vriendschap tussen die twee figuren ontwikkeld, die bijzonder vruchtdragend was, omdat de twee zeer verschillende karakters elkaar op zo gelukkige wijze aanvulden. Immers Schumacher was de gladde diplomaat, de society-man, met een aangeboren gave om zich in alle kringen te bewegen, en contacten aan te knopen met autoriteiten, allemaal eigenschappen, die de meer hoekige, in zich zelf gekeerde, welt-fremde Gauss ten enenmale miste, en welke eigenschappen voor Gauss van veel nut waren bij de onderhandelingen in verband met de graadmetingen. Wij moeten het bijzonder in Schumacher prijzen, dat hij in bijna alle brieven erop aandringt, dat Gauss de vele resultaten, waarover hij beschikt, zal publiceren, ook al zijn ze nog niet in alle details uitgewerkt.

Van deze brieven citeer ik alleen de volgende: (2 dec. 1826)

„Het zou beter zijn als u uit de onuitputtelijke schat van uw uitvindingen en ideeën slechts zoveel mogelijk publiceert, zonder u te bekommeren over de voleinding der vorm, en zonder uw kostbare tijd te verknoeien met de meest volkomen uitwerking van uw ontdekkingen. Ik geloof, dat u dat „uitvijlen” gerust aan anderen kunt overlaten, hoewel ik mij daarin kan vergissen. Waarin ik mij echter niet vergist heb, is de bewering, dat u het uitvinden niet aan anderen kunt overdragen. Ieder jaar van uw leven vermeerdert de aanduidingen van de nieuwe ideeën, die slechts voor u begrijpelijk zijn”.

Al deze beden hebben niet het minste succes. Gauss antwoordt b.v., dat hij er niets voor voelt om metselstenen in plaats van een volledig afgewerkt gebouw te leveren.

Van wetenschappelijk standpunt bezien is de derde van het bovengenoemde drietal de belangrijkste. Reeds in de eerste jaren van zijn correspondentie vestigde Olbers de aandacht van Gauss op een jonge geniale geleerde, Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846) die zich van koopmansleerling door eigen kracht zowel theoretisch

als praktisch heeft opgewerkt tot een van de grootste astronomen van zijn tijd. Toen Gauss spoedig daarop met Bessel kennis kon maken, maakte Gauss een diepe indruk op hem, en na dat ogenblik heeft Bessel steeds tegen Gauss opgezien als zijn grote leermeester. En omgekeerd had Gauss een onbegrensde waardering en hoogachting voor het genie van Bessel, waarvan hij zeide:

„Niemand heeft de natuur van de hemel zozeer tot zijn geestelijk eigendom gemaakt als Bessel deed, niemand toonde zoveel virtuositeit in het observeren en in het praktisch gebruik der instrumenten; Olbers heeft grote, zeer grote diensten voor de astronomie als geheel verricht, maar zijn grootste dienst is gelegen in het feit, dat hij Bessel's talent voor de astronomie op de juiste waarde heeft geschat van het aller-eerste moment af, en dat hij dat talent heeft gewonnen en opgekweekt in het belang van de wetenschap.”

Op 9 jan. 1841 schreef hij nog aan Schumacher: *„Als ik het op enig punt met Bessel niet eens ben, ben ik eerst nog lange tijd wantrouwig omtrent mijn oordeel”*.

Ook Bessel hamerde geregeld op het zelfde aanbeeld als Schumacher, met even weinig succes. Op 28 mei 1837 schreef Bessel: *„U hebt nooit de verplichting erkend, door tijdige mededeling van een belangrijk deel van uw onderzoekingen de tegenwoordige stand van de kennis omtrent die onderwerpen te bevorderen; u leeft voor de toekomst!..*

Waar zouden de mathematische wetenschappen, niet alleen in uw woning, maar in geheel Europa nu zijn, als u alles had uitgesproken, wat u had kunnen uitspreken? Het is niet nodig, dit onderwerp verder te vervolgen; ook vrees ik, slechts te herhalen, wat u al honderd malen gezegd is”. Uit het uitvoerige antwoord van Gauss haal ik alleen het volgende aan: *„Het zijn twee verschillende dingen, om met een onderwerp voor zich zelf volkomen klaar te zijn, en dit voor de publikatie uitgewerkt te hebben. Voor het laatste heb ik, daar ik nu eenmaal niet anders als langzaam kan werken, tijd, veel tijd, veel meer tijd nodig als u zich wel kunt voorstellen. En mijn tijd is veelal beperkt, zeer beperkt. Ik heb verder daarvoor nodig (voor het uitwerken in deze zin veel meer als voor het eerste opzoeken) opgewektheid van geest, en deze is helaas slechts al te zeer en te veelvuldig getemperd. Ik moet daarom verzoeken, vriendelijker over mij te oordelen”*.

Naast deze vrienden op een afstand ontbrak het Gauss echter niet aan huisvrienden, waarmede hij dagelijks verkeerde. Tot zijn beste vrienden moet zeker gerekend worden de jonge fysicus Wilhelm Weber (1804—1891). Gauss had hem leren kennen op een congres in Berlijn in 1828. Hij wist gedaan te krijgen, dat Weber in 1831 als hoogleraar in de natuurkunde in Göttingen werd be-

noemd. En vanaf dat moment begint een langdurige vriendschap en innige samenwerking, de vierde wetenschappelijke periode in het leven van Gauss, n.l. de natuurkundige periode (de derde periode was de geodetische periode). Voor de eerste en de enige maal in zijn leven is Gauss er tussen 1831 en 1843 toe gekomen om geregeld met een ander samen te werken. Weber was weliswaar geen theoreticus, maar een uitmuntend practicus, wiens waarnemingen natuurlijk op briljante wijze werden aangevuld door de daarbij behorende theoretische onderzoekingen van Gauss.

In dat tijdperk is o.a. de theorie van het aardmagnetisme in alle details uitgewerkt. Hierbij vindt het C.G.S.-stelsel en het consequente gebruik daarvan haar ontstaan. Tenslotte is als klein technisch bijproduct in 1833 de eerste elektromagnetische telegraaf door Gauss en Weber tussen de sterrenwacht en het fysisch laboratorium aangelegd. Ieder, die het voorrecht zal hebben genoten, kortere of langere tijd in Göttingen door te brengen, zal zeker van die gelegenheid hebben gebruik gemaakt, om het prachtige Gauss-Weber Denkmal te bewonderen, dat in de nabijheid van de Universiteit is opgericht. Er zijn meerdere schone gedenktekens van Gauss in verschillende plaatsen in Duitsland te bewonderen. Dit onsterfelijk meesterwerk van de beeldhouwer Hartzel, opgericht in 1899, geldt echter als de schoonste van alle. In dit gedenkteken heeft de kunstenaar op zeer gelukkige wijze de samenwerking van beide grote geleerden gesymboliseerd, door hen af te beelden op het moment, dat ze bezig zijn te discussiëren over de elektromagnetische telegraaf. De strenge historisch geschoolde criticus zal bij het aanschouwen van het monument wellicht enig bezwaar maken tegen een chronologische fout, door de kunstenaar gepleegd. Deze heeft n.l. twee geleerden, in volle actie afgebeeld, *van ongeveer gelijke leeftijd*, zo tussen de vijftig à zestig jaar, terwijl Weber 27 jaar jonger was als Gauss, maar op dergelijke kleinigheden dient niet te worden gelet. Dat de samenwerking van Gauss en Weber in 1843 een ontijdig einde nam, werd veroorzaakt door politieke agitatie, die tengevolge had, dat in 1837 zeven hoogleraren, werden afgezet. Hieronder was Weber (de „Göttinger Sieben“). Hij heeft nog, financieel gesteund door vrienden en collega's, gedurende 6 jaar zijn samenwerking met Gauss voortgezet, totdat hij in 1843 in Leipzig werd benoemd. Weliswaar is hij in 1849 naar Göttingen teruggeroepen, en hij heeft de vriendschapsbanden met Gauss weer aangeknoopt, maar voor praktisch fysisch werk voelde Gauss zich toen te oud, zodat er van samenwerken niet meer is gekomen.

In zijn laatste levensjaren heeft Gauss veel vriendschap genoten

van zijn vroegere leerling en latere collega Wolfgang Freiherr Sartorius von Waltershausen (1809—1876). Hij was geen mathematicus, maar hoogleraar in de geologie. Toch was hij bijzonder goed op de hoogte van het werk van Gauss, en was meelevend in alle huiselijke omstandigheden. Hij kende het leven en de levensomstandigheden van Gauss beter dan iemand anders. Daarom was hij, naast de schoonzoon en collega van Gauss de aangewezen persoon om bij de begrafenis van Gauss een schone herdenkingsrede te houden. De eerste, zij het ook korte, maar desondanks inhoudrijke biografie, die na het overlijden van Gauss in 1856 is verschenen, was van zijn hand.

(Sartorius von Waltershausen; Gauss zum Gedächtnis. Leipzig 1856)

B. Gauss en zijn wetenschappelijke tijdgenoten.

Bijzonder interessant is de verhouding van Gauss tot de belangrijkste figuren op wiskundig gebied in zijn tijd. Waren er tussen 1800 en 1820 maar weinig geleerden in Duitsland of daarbuiten, die wetenschappelijk capabel waren om Gauss volledig naar waarde te beoordelen, tussen 1820 en 1830 kwamen enige jongere geleerden van zeer grote kwaliteiten naar voren. In de allereerste plaats moeten wij hiervan noemen:

de jonggestorven geniale Noorse mathematicus *Niels Henrik Abel* (1802—1829), en de beide grote Duitse mathematici *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804—1851) en *Peter Gustav Lejeune-Dirichlet* (1805—1859). Alle drie figuren gelden als exponenten van de wiskundige wetenschap in de eerste helft van de 19e eeuw. Het terrein van hun werkzaamheden stond in zeer nauw verband met het werk van Gauss, en daarom is het schier onvermijdelijk, dat ze in direct persoonlijk contact met Gauss zouden moeten geraken. Wij zullen eerst spreken over de merkwaardige verhouding tussen Abel en Gauss, die sedert 1830 zo vele pennen in beroering heeft gebracht.

De jonge Abel had onder grote financiële moeilijkheden zijn studie te Christiania voltooid, en had in 1824 reeds enige kapitale ontdekkingen op zijn naam staan. Als de voornaamste ontdekking op dat tijdstip kan aangemerkt worden het bewijs van de stelling, *dat een algebraïsche vergelijking van een graad hoger dan vier in het algemeen niet algebraïsch oplosbaar is*.

Nadat hij op zo treffende wijze de aandacht van zijn leermeesters op zijn genie had gevestigd, kreeg hij een reisbeurs, welke hem in staat zou stellen om gedurende twee jaren in het buitenland te vertoeven en in contact te treden met de grote geleerden in

Duitsland en Frankrijk. Als hoogste ideaal zweefde hem toen voor de geest om kennis te maken met de grote Gauss in Göttingen.

Als inleiding voor deze kennismaking had Abel in 1824 *op zijn eigen kosten* een uiterst summiere, zeer incomplete schets van het bewijs van zijn stelling laten drukken, en hij had hiervan exemplaren aan verschillende geleerden toegezonden. In het bijzonder had hij bij een bezoek aan Hamburg persoonlijk een exemplaar van zijn stukje aan *Schumacher* ter hand gesteld, met het dringend verzoek, dit stukje aan Gauss door te geven. Schumacher heeft zich inderdaad spoedig van deze taak gekweten, maar het spijt ons bijzonder te moeten vermelden, dat de kennisneming van Gauss met het artikel van Abel allerminst tot het zo vurig door Abel verlangde contact heeft gevoerd. Volgens de door Schumacher overgeleverde traditie heeft Gauss het door zijn overdreven kortheid ja *onvolledigheid* totaal onleesbare artikel na een vluchtig doornemen teleurgesteld op de tafel neergegooid met de opmerking: „*Het is een gruwel, om zoiets bij elkaar te schrijven*”. Het is zeer te betreuren, dat deze reactie, die Abel eerst bij geruchte vernam, en die later persoonlijk door Schumacher niet kon worden ontkend, geleid heeft tot een antipathie van Abel tegen Gauss. De eerst hemelhoogvereerde Gauss heeft bij Abel nimmer meer iets goed kunnen doen. Bij zijn spoedig daaropvolgende reis naar Duitsland heeft Abel een langdurig bezoek gebracht aan Berlijn en de daar gevestigde wiskundigen, daarna vertrok hij in de richting van Parijs. Aan zijn vriend Holmboe schrijft hij: „*In februari of maart hoop ik via Leipzig of Halle naar Göttingen te gaan; niet omdat Gauss daar zit, want die moet met een onuitstaanbare hoogmoed bezield zijn, maar omdat daar zo'n uitmuntende bibliotheek moet zijn*”. Even daarna schrijft hij: „*Göttingen heeft zeker een buitengewone bibliotheek, maar dat is ook alles, wat daar te vinden is; want Gauss de enige man in die stad, die wat weet, is ten enenmale ontoegankelijk. En toch moet ik naar Göttingen, dat spreekt van zelf*”. En nog iets later schrijft hij aan Keilhau, één van zijn reisgenoten: „*In Göttingen zal ik maar kort vertoeven, want daar is niets bijzonders te beleven. Gauss is ongenaakbaar, en de bibliotheek kan moeilijk beter zijn dan die in Parijs*”. Het is zowel voor Abel als Gauss, als voor de ontwikkeling van de wiskundige wetenschap diep te betreuren, dat er zo'n ernstig misverstand tussen deze grote genieën is gerezen, een misverstand, dat de oorzaak is geworden, dat er nimmer een zo gewenst persoonlijk contact heeft plaatsgevonden.

En hoewel Gauss in deze kwestie allerminst van schuld vrij te pleiten, er zijn zoveel verzachtende omstandigheden aan te voeren,

dat daardoor deze onverkwikkelijke affaire in een geheel ander daglicht kan worden gezien, waaruit zal kunnen blijken, dat het harde oordeel van Abel over Gauss niet gemotiveerd was, terwijl Abel in deze affaire ook niet vrijuit ging. Van wie kan een beter oordeel worden verwacht dan van Bjerknæs, de grote biograaf en landgenoot van Abel, een man, die Abel met hart en ziel toegedaan was, maar die op een volkomen objectieve wijze met ruime blik dit misverstand tracht te verklaren?

Op het ogenblik, dat Gauss kennis kon maken met het artikel van Abel, zat hij tot over de oren in het moeizame werk van de graadmeting van het koninkrijk Hannover. Vooral de vele bijkomstige beslommingen van allerlei soort hadden de uiterst nauwgezette Gauss, die vrijwel totaal was ontbloot van enigszins geschikte betrouwbare deskundige assistenten, dermate overbelast, dat hij in het tijdperk 1824—1825 als in ernstige mate overspannen moet worden aangemerkt. Voegen wij dan hieraan toe, dat de vorm, waarin de oorspronkelijke verhandeling van Abel was verschenen, *alles* te wensen had overgelaten. Reeds de titel was min of meer misleidend. Verder was ter besparing van de drukkosten, de uitwerking zo ernstig bekort, dat het geheel voor iedere mathematicus, zelfs voor een übermensch als Gauss *totaal onleesbaar* was geworden. Abel had zelfs de bewijzen van verschillende zeer belangrijke hulpstellingen volledig weggelaten, terwijl het overblijvende gedeelte nog enkele serieuze foutieve redeneringen bevatte.

Een en ander blijkt duidelijk uit de omvang van dit artikel, dat 5 blz. bedroeg. Toen Abel enige jaren later in Berlijn op dringend verzoek van Crelle deze onleesbare verhandeling in een betere, volledig uitgewerkte vorm had omgegoten, ter publikatie als eerste artikel in het eerste nummer van het juiste door Crelle gestichte Journal der reine und angewandte Mathematik, was dit artikel reeds aangegroeid tot een lengte van 32 pagina's, en bij die uitwerking was het nog niet volledig, en allerm minst feilloos. Abel zag zich zelfs nog genoodzaakt tijdens zijn verblijf te Parijs een uitvoering commentaar met verdere uitwerkingen van ± 12 pags. eraan toe te voegen. Is het nu zo onverklaarbaar, dat de oorspronkelijke versie zelfs voor een Gauss als volkomen onverteerbaar moest gelden?

Voor mij persoonlijk is en blijft het een raadsel, dat Abel, die er toch zo brandend naar verlangde, om met Gauss in kennis te komen, zich niet de extra moeite heeft willen getroosten, om voor zijn toenmaals nog aangebeden idool een *volledig uitgewerkt artikel* in orde te maken, desnoods als manuscript. Op grond van hetgeen

nog verder zal worden besproken, kan met zekerheid worden voorspeld, dat *dit* by Gauss op een gunstig onthaal had kunnen rekenen, en als Abel tot verdere mondelinge toelichting zijn schreden naar Göttingen had gericht, zou hij zeker bij Gauss met open armen zijn ontvangen, en het is niet onmogelijk, dat de levensloop van Abel dan een andere, meer gunstige richting zou hebben genomen.

Wij komen op de hiermede samenhangende kwesties nog terug als wij spreken over de verhouding van Gauss tot zijn tijdgenoot, de beroemde joodse mathematicus Jacobi. Jacobi, een briljante figuur, een meeslepend docent, werd in 1827 hoogleraar in Koningsberg, waar hij 17 jaar lang met bijzonder veel succes werkzaam was. Tijdens zijn werkzaamheden in deze stad schiep hij tegelijk met, en onafhankelijk van de reeds besproken Abel de theorie der elliptische functies. Het was voor beide auteurs een bittere teleurstelling, reeds spoedig daarop te vernemen, dat Gauss reeds geruime tijd, meer dan 25 jaar, in het bezit was van de belangrijkste ontdekkingen en resultaten, door hen beiden tot stand gebracht. Zij konden dit niet weten, omdat Gauss, zoals dikwijls het geval was, nog niets van zijn ontdekkingen had gepubliceerd.

Het is te begrijpen, dat ook dit feit er niet toe bijdroeg om de verhouding van Abel en Gauss te verbeteren. Hoewel er van sommige zijden (i.h.b. door Legendre) geïnsinueerd werd, dat Gauss de euvele moed had getoond, om deze jonge geleerden te beroven van de eer van de door hen gedane ontdekkingen, is veel later, na de dood van Gauss, bij het onderzoek van zijn wetenschappelijke nalatenschap, duidelijk gebleken, dat Gauss bij zijn mededelingen zich allermint aan overdrijving had schuldig gemaakt.

Hoewel Jacobi, die inderdaad een geleerde van groot formaat was gedurende zijn gehele leven gewerkt heeft in gebieden, welke Gauss na aan het hart lagen, hoewel hij steeds een buitengewone verering voor Gauss heeft gekoesterd, en hoewel hij vaak aan Gauss brieven schreef, waar de vleierij duimendik afdroop, toch is er nimmer een zozeer door Jacobi geambieerde meer innige betrekking tussen deze twee grote, wetenschappelijk nauw verwante geesten ontstaan. De arrogante, zelfbewuste mentaliteit van Jacobi lag Gauss in 't geheel niet. Jacobi was ongetwijfeld van zeer groot formaat als mathematicus, maar niemand was daarvan beter overtuigd dan Jacobi zelf. Zo vleierend als hij zich uitliet tegenover Gauss, zo stekelig en hekelend liet hij zich uit tegen al zijn andere collega's (met uitzondering van Dirichlet), omdat hij het niet onder stoelen of banken stak, dat hij die allen veel minder achtte dan zichzelf. Toen hij in 1844 zijn professoraat in Koningsberg ver-

wisselde voor dat in de rijkshoofdstad Berlijn, schreef *Alexander von Humboldt* aan Schumacher: „*Jacobi is gelukkig weer hersteld. Ik geloof, dat hij nu hier (in Berlijn) blijft . . . Hij is weer vrolijk en „miles gloriosus” (de snoevende krijgsman) die naast zichzelf in het driemanschap slechts twee anderen erkent, Gauss en Cauchy, de rest is voor hem afval . . .*”

Het allermeest voelde Jacobi zich gekrenkt door het feit, dat Gauss zo weinig ophef maakte van zijn (d.w.z. Jacobi's) grote wetenschappelijke prestaties. Ik kan mij levendig indenken, dat Gauss zich tot de figuur van Jacobi niet bepaald aangetrokken heeft gevoeld. Daarentegen vind ik het onverklaarbaar, dat Gauss betrekkelijk weinig contact heeft gehad met Lejeune-Dirichlet. Deze fijnbesnaarde geest miste alle scherpe kanten, waardoor het karakter van Jacobi was ontsierd. Nooit is er een geleerde geweest, die zo diep in het werk van Gauss is doorgedrongen als Dirichlet. Zijn gehele leven is aan deze studie gewijd geweest. Sartorius von Waltershausen deelt ons mede, dat Dirichlet op al zijn reizen vergezeld was van een oud versleten, uit de band gevallen exemplaar van de „*Disquisitiones Arithmeticae*”, dat door hem op alle mogelijke momenten geraadpleegd werd, zoals een geestelijke zijn gebedenboek gebruikt. Sedert 1831 was Dirichlet hoogleraar in Berlijn. Als mathematicus was hij zeker niet de mindere van Jacobi, als karakter stond hij mijlenver boven zijn latere collega en vriend Jacobi. Door zijn grote kennis en zijn geniale capaciteiten is het aan Dirichlet mogen gelukken, meerdere kernproblemen uit de getallentheorie, door Gauss onvoltooid gelaten, tot een volledige oplossing te brengen. Wij denken hierbij in de eerste plaats aan de bepaling van het aantal klassen van de kwadratische vormen. Maar Dirichlet heeft veel meer gedaan op bescheidener niveau. Door zijn briljante, drukbezochte colleges over getallentheorie heeft hij er voor gezorgd, dat de moeilijk toegankelijke inhoud van de D.A. binnen het bereik werd gebracht van de jongere mathematici. Als er ooit iemand geleefd heeft, die van nature voorbeschikt was om met Gauss samen te werken op getallentheoretisch gebied, dan is het wel Lejeune-Dirichlet geweest. En hoewel de verhouding van Dirichlet tot zijn geestelijke leermeester steeds uitstekend is geweest, zodat ze vrij geregeld in schriftelijk en persoonlijk contact verkeerden, toch is er nimmer sprake geweest van zulk een samenwerking, een feit, waarvan het mij onmogelijk is na grondig onderzoek een logische verklaring te geven. Dirichlet had een buitengewone verering voor Gauss en voor diens werk. Dit wordt ook nog geïllustreerd door de volgende merkwaardige gebeurtenis, die ik

eerst voor korte tijd heb vernomen.

Tot een van de hoogtepunten in het leven van Gauss moet worden gerekend de plechtige luisterrijke viering van diens gouden doctorsjubileum op 16 juli 1849. Tot de vele genodigden op dit door de universiteit van Göttingen georganiseerde feest behoorden ook Jacobi en Dirichlet. Enige nadere bijzonderheden vernemen wij uit het volgende schrijven van Jacobi aan zijn broeder op 21 september 1849: „*Je weet waarschijnlijk dat ik met Dirichlet aanwezig was bij het jubileum van Gauss. Ik had de eereplaats naast hem, en ik heb een grote speech gehouden. Je weet, dat hij in de afgelopen 20 jaar nog nimmer mij noch Dirichlet heeft geciteerd: ditmaal echter was hij na meerdere glazen zoete wijn zover weg, dat hij zeide tot Dirichlet, die zich tegenover hem erop beroemde, zijn werk meer te hebben bestudeerd dan iemand anders, dat hij zijn werk niet slechts had bestudeerd, maar dat hij veel verder daarmee gegaan was . . .*”

Maar het mooiste moment kwam na afloop van het diner. In de zaal, waar het diner werd gehouden, blijkt ook het manuscript van de D.A. ter kennismaking uitgesteld te zijn. En toen Gauss zijn pijp wilde aansteken, scheurde hij bij gebrek aan beter materiaal tot de doodschrik van Dirichlet een blad uit het manuscript van de D.A. Dirichlet, die zulk een heiligschennis niet kon dulden, vloog op en redde het papier uit de handen van Gauss. Hij heeft dit blad gedurende zijn verdere leven als een grote schat bewaard. Na zijn dood is dit blad bij zijn papieren teruggevonden.

Na het overlijden van Gauss in 1855 was men in Göttingen zo gelukkig om Dirichlet bereid te vinden, Berlijn met Göttingen te verwisselen en de opvolger te worden van zijn grote geestelijke leermeester.

Helaas duurden zijn werkzaamheden te Göttingen, hoe succesvol ook, slechts kort. Hij overleed reeds in 1859, en werd opgevolgd door de leerling van Gauss, Bernhard Riemann.

C. Gauss en zijn leerlingen.

Ofschoon Gauss van 1808 tot aan zijn dood aan de universiteit van Göttingen gedoceerd heeft, en daarbij uit de aard der zaak talrijke studenten onder zijn gehoor heeft gehad (al werden zijn colleges slechts door weinigen bezocht; daarover straks nader) toch kan er niet bepaald worden gezegd, dat hij een „school” gevormd heeft, althans niet op *wiskundig* gebied. In de tijd van Gauss kan men wel degelijk spreken over de school van Jacobi, en over de leerlingen van Dirichlet, maar Gauss was er de man niet voor, om een uitgelezen schare discipelen om zich heen te vergaren, om met hen de

grote problemen en topics op wiskundig gebied in onderlinge samenwerking te bestuderen. Gauss was bovendien van mening, dat wiskunde beter kon worden bestudeerd uit boeken dan onder leiding van een docent, en des te ouder hij werd, des te meer was hij deze mening toegedaan. De inhoud van zijn colleges was van dien aard, dat zij van de studenten een behoorlijke wetenschappelijke voorbereiding vereisten, en daaraan ontbrak het in die dagen nogal in ernstige mate.

Dientengevolge was hij gewend, slechts voor een handjevol studenten college te geven, terwijl zijn collega Thibaut (1775—1832) een paar huizen verder voor honderd à tweehonderd studenten college gaf over elementaire onderwerpen en de allereerste beginselen der analyse. Gauss, die ook directeur van de sterrenwacht was, gaf vrijwel uitsluitend college over astronomische onderwerpen, gedurende de eerste twintig jaren dikwijls over theoretische astronomie, later ook veel over praktische astronomie, en de laatste twintig jaren bij voorkeur, en met weinig variatie over het weinig spectaculaire onderwerp: „*de methode der kleinste kwadraten*”.

Door zijn grote reputatie op dit gebied trok hij talrijke leerlingen uit binnen- en buitenland, zodat er wel met recht van „een school van Gauss” op het gebied der *astronomie* mag worden gesproken. Tal van astronomen van grote betekenis hebben kortere of langere tijd onder de persoonlijke leiding van Gauss gewerkt. Als de eerste uit deze school noemen wij de ons reeds bekende Schumacher. Verder hebben beroemde astronomen als Encke, Gerling, Möbius, Nicolai, Winnecke, Klinkerfues, Brünnow, Goldschmidt, d’Arrest e.a. onder leiding van Gauss hun astronomische studiën voltooid.

Ook tal van buitenlandse astronomen van grote betekenis vertoefden voor langere of kortere tijd te Göttingen onder de beproefde leiding van Gauss, zoals o.a. B. A. Gould en G. Bond. (U.S.)

Vanzelfsprekend heeft Gauss ook vele vooraanstaande *wiskundigen* onder zijn gehoor gehad. Wij noemden reeds Möbius, die ook als mathematicus een grote roem heeft verworven (barycentrische coördinaten). Verder dient vermeld te worden K. G. C. von Staudt, (projectieve meetkunde), Stern, Schering, Enneper. In de laatste jaren van zijn werkzaamheid als hoogleraar heeft Gauss het voorrecht mogen genieten, enige bijzonder grote figuren onder zijn leerlingen te tellen, n.l. *Bernhardt Riemann* en *Richard Dedekind*. Ik zou hier ook de tijdgenoot van Dedekind bij moeten noemen: Moritz Cantor (n.b. niet de latere verzamelingstheoreticus, maar de historicus).

Hoewel Gauss altijd een sterke persoonlijke belangstelling heeft getoond voor het wel en wee van zijn leerlingen, heeft dit toch vrijwel nimmer tot een meer intieme betrekking met hen geleid. Hierbij is echter één merkwaardige uitzondering te signaleren. In 1844 kwam in Göttingen een briljante leerling van Jacobi, de jonge Ferdinand Gotthold Maximilian Eisenstein (1823—1852). En wat nooit gebeurd was, geschiedde nu. Gauss was letterlijk weg van hem. De uitbundige waardering van Gauss voor zijn nieuwe leerling blijkt uit een uitspraak van Gauss, die ons door Cantor is overgeleverd, n.l.: „*Er zijn maar drie baanbrekende wiskundigen geweest: Archimedes, Newton en Eisenstein*”. Inderdaad toonde Eisenstein zich als een mathematicus van buitengewone capaciteiten, die reeds in Berlijn onder de bezielende leiding van Dirichlet en Jacobi grote successen had geboekt. Hij stond toen nog op zeer goede voet met zijn leermeester Jacobi. In 1843 begon hij met een rij van indrukwekkende publikaties. Zoals ieder wel bekend zal zijn, is hij de geschiedenis van de wiskunde binnengetrepen met een prachtig veel omvattend criterium voor de onherleidbaarheid van een bepaalde klasse van algebraïsche vergelijkingen, hoewel hij de roem van deze ontdekking met één van zijn tijdgenoten, Schönemann moet delen.

Tijdens zijn studietijd in Göttingen kwamen zijn grootste schepingen tot stand, o.a. het bewijs van de reciprociteitsstelling voor kubische- en bikwadratische resten. En door deze publikatie ontstond een hooglopende ruzie met zijn oorspronkelijk aangebeden leermeester Jacobi, want deze beweerde, *en lang niet ten onrechte*, dat Eisenstein deze bewijzen, die door Gauss buitengewoon geroemd werden, op zijn colleges had leren kennen. De diepere grond van de woede van Jacobi was echter, dat Eisenstein iets was gelukt, wat hem ondanks de meest hardnekkige pogingen mislukt was, n.l. de waardering van de Princeps Mathematicorum Gauss voor zijn werk te winnen.

Wat nimmer gebeurd was, geschiedde in 1847, toen Eisenstein een verzameling van zijn verhandelingen publiceerde. *Gauss schreef hier voorin in hooggestemde bewoordingen een voorwoord.*

Eisenstein was, ondanks zijn ongetwijfeld buitengewone capaciteiten, een bijzonder onevenwichtig mens. Hij stierf helaas reeds zeer jong, in 1852, diep betreurd door Gauss. In zijn Berlijnse tijd was hij een bijzonder toegewijde leerling van Dirichlet en Jacobi. In 1845 schreef hij aan zijn vriend Stern in Göttingen over „*Prof. Jacobi (de grote) en Prof. Dirichlet (de beminnelijke)*”.

Voor Gauss had hij uit de aard der zaak de diepste verering.

Zo schreef hij aan Stern in 1844 toen hij deze verzocht enige groeten aan vrienden en bekenden over te brengen:

„Aan Gauss behoef ik wel geen groet over te laten brengen, want tot de lieve God kan men slechts in aanbidding en bewondering de blik omhoogwerpen”.

Enig inzicht in de karaktereigenschappen van Eisenstein verkrijgt men ook uit een schrijven van de grote Alexander von Humboldt, die zich in 1847 bereid verklaard had om bemiddelend op te treden bij de pogingen om Eisenstein een professoraat in Heidelberg te verschaffen. Bij die gelegenheid heeft Eisenstein von Humboldt in hoge mate ontstemd door het feit, dat uit dit schrijven blijkt. Von Humboldt schrijft:

„Uw brief eindigt met de woorden, die mij niet kunnen bevalen, als u ze niet in scherts heb gezegd: „Ik hoop natuurlijk door de eigenschappen, die ik bij deze formules heb ontdekt, een tweede Newton te worden”. Zoiets zegt men toch nooit van zichzelf. Gelukkig staat het in een brief aan mij gericht. Ik zal zeker morgen naar Karlsruhe schrijven, maar ik zal u niet een Newton noemen, omdat dat zeker de indruk van mijn hele brief zou vernietigen”.

Het is voor de vrienden en tijdgenoten van Gauss, en ook voor ons nog heden ten dage een volkomen raadsel gebleven, waarom Gauss zich in zo overdreven mate tot Eisenstein heeft aangetrokken gevoeld. Ondanks de ongetwijfeld grote capaciteiten van Eisenstein zou naar onze bescheiden mening deze waardering veel beter zijn besteed aan de fijnbesnaarde beminnelijke figuur van een Lejeune-Dirichlet, wiens capaciteiten zeker belangrijk hoger, en wiens karaktereigenschappen oneindig hoger mogen worden aangeslagen, maar de feiten liggen nu eenmaal, zoals ze zijn.

Nu kom ik aan het slotgedeelte van mijn beschouwing. Gauss als academisch docent.

D. Gauss als academisch docent.

Ik twijfel er niet aan, of dit onderwerp zal in deze kringen de meeste belangstelling wekken. Het is niet zonder enige schroom, dat ik tot de nadere bespreking van dit netelige onderwerp wil overgaan, omdat ik daarbij in de noodzakelijkheid zal verkeren, om verschillende tegenstrijdige meningen te trachten te verenigen.

Als uitgangspunt moge dienen de uitspraak, die men meermalen kan beluisteren en lezen, in woord en geschrift: *„Gauss was een slecht docent”*. Voor ieder, die het *werk* van Gauss aan den lijve bestudeerd heeft, is echter zulk een hard oordeel ten enenmale onaanvaardbaar. Immers, hoe diep de beschouwingen van Gauss

ook mogen gaan, en welke hoge vlucht zijn gedachten daarbij ook nemen, de uiteenzetting op schrift is steeds van een klassieke klaarheid, en de moeite die het ook vaak moge kosten, om de grote schrijver in zijn gedachtengang te volgen, vindt immer zijn volledige beloning.

Hij voert ons daarbij over de hoogste bergtoppen, langs een vaak moeizame weg, maar deze is overal uitstekend geplaveid, en volkomen begaanbaar, in tegenstelling tot Abel, die ons vaak voor diepe kloven en onoverbrugbare afgronden stelt.

Daarom is het oordeel, dat Abel over Gauss heeft geuit na het vroeger behandelde conflict:

„Alles, wat Gauss schrijft, is een gruwel, want het is zo duister, dat het bijna onmogelijk is, daarvan iets te begrijpen”,

volkomen uit de lucht gegrepen, en het heeft bij mij steeds de twijfel gewekt, of Abel ooit b.v. ernstig de D. A. heeft trachten te bestuderen, zoals hij heeft gezegd. Het is duidelijk, dat deze harde uitspraak volkomen is ingegeven door het vroeger vermelde misverstand.

Abel zelf heeft het nooit tot academisch docent kunnen brengen. Zijn vroege dood heeft dit helaas verhinderd, op het supreme moment, dat hij op 't punt stond als hoogleraar te Berlijn te worden benoemd. Maar als later het oordeel had geluid, dat Abel een slecht docent was geweest, dan zou ik dat oordeel beter aanvaardbaar hebben geacht.

Toch is het voor mij volkomen duidelijk, op welke gronden dit harde oordeel gebaseerd is. Gauss heeft zich dit zelf op de hals gehaald, en toch, naar ik hoop aan te tonen, volkomen ten onrechte.

Gauss had n.l. van het begin af een uitgesproken *tegenzin* in het doceren, en hij steekt dit nimmer onder stoelen of banken.

Wij zullen hem daarom zelf aan het woord laten. Op 26 okt. 1802, lang voor zijn professoraat, schrijft hij aan zijn vriend Olbers:

„Tegen het doceren heb ik nu eenmaal een ware tegenzin, het eeuwigdurende geploeter van een professor in de wiskunde is toch in de grond der zaak alleen, het ABC van de wetenschap te doceren; uit de weinige leerlingen, die een stapje verder komen, en gewoonlijk, om in deze omschrijving te blijven, bij de samenlezing overblijven, worden de meeste slechts halfwetters; want de meer zeldzame begaafden zullen zich niet laten vormen door colleges, maar zij vormen zichzelf. En met dit ondankbare werk verliest de professor zijn kostbare tijd . . . Ik ken geen professor, die werkelijk veel voor de wetenschap heeft gedaan, behalve de grote Tobias Mayer, en deze ging in zijn tijd door voor een slechte professor . . .”

Toen hij juist benoemd was als hoogleraar in Göttingen, schreef hij aan zijn vriend Bessel (4 dec. 1808):

„Tot de meest verbrokkelende bezigheden behoren in het bijzonder mijn colleges, die ik in deze winter voor de eerste maal geef, en die mij daarom veel meer tijd kosten als mij lief is. Ik hoop intussen, dat de tweede keer dit tijdverlies veel kleiner zal zijn, want anders zou ik mijzelf daarmede nooit kunnen verzoenen. Zelfs praktisch (astronomisch) werk moet toch veel meer voldoening schenken als wanneer men een paar middelmatige geesten dichter bij B brengt, die anders bij A waren blijven staan”.

Wederom aan Bessel (7 jan. 1810):

„Ik geef deze winter twee colleges voor drie toehoorders, waarvan één slechts middelmatig, één ternauwernood middelmatig is voorbereid, en de derde zowel de nodige voorbereiding als de geschiktheid ontbreekt. Dat zijn nu eenmaal de schaduwzijden van een mathematische professie”.

Aan Bessel (21 nov. 1811):

„Deze winter heb ik helaas één college met een zeer beperkte leerling”.
Ja, waarde toehoorders, het verhaal begint eentonig te worden, al komen er ook iets meer optimistische klanken tussen.

Aan Schumacher (op 6 januari 1811):

„Ik heb deze winter twee colleges te geven en ik heb een paar geschikte jongelui als toehoorders.”

Aan Bessel (op 27 januari 1816):

„Het college gegeven aan studenten, die niet uitmunten, is een zeer lastig, ondankbaar werk”.

Zal de situatie misschien verbeteren in de loop van de jaren, bij meerdere ervaring? Helaas de klanken blijven in mineur.

Aan Bessel (24 maart 1824):

„Ik moet mijn tijd verdelen tussen college geven (waarvoor ik steeds grote tegenzin heb gekoesterd, die zo ook niet ontstaan, toch aanmerkelijk vergroot is door het gevoel, dat ik niet kwijt kan raken, dat ik daarbij mijn tijd nutteloos vergooi) en praktische astronomische werkzaamheden”.

Tenslotte aan Bessel (op 12 maart 1826):

„Als ik mijn hoofd vol heb met theoretische onderzoekingen, word ik steeds bij het nader komen van de uren, waarin ik college moet geven, op de pijnbank geworpen, en het wegspringen van de ideeën maakt mij dan soms de op zichzelf meest onbenullige dingen onbeschrijfelijk moeilijk en irriterend. Ik heb in mijn leven veel schoons

gevonden, maar daar tussenin lang vergeefs op een probleem gezwogd."

Tot zover Gauss persoonlijk. Ik zou deze boutades uit zijn brieven met tientallen niet minder sterke staaltjes kunnen vermeerderen, maar ik wil hiermede volstaan. Ik neem aan, dat deze aanhalingen voldoende zullen zijn, om de mening, dat Gauss inderdaad een slecht docent, met weinig gevoel voor zijn studenten was, een behoorlijke basis te verschaffen. Inderdaad kan niet worden gezegd, dat Gauss behoorde tot het type van de begenadigde meeslepende docenten als Dirichlet en Jacobi, die wel degelijk in staat bleken te zijn, om door hun grote geestdrift voor de wetenschap een aanmerkelijk aantal van hun discipelen heel wat verder dan de letter B van het alfabet te brengen, al mag daarbij niet uit het oog worden verloren, dat zij bij de grote voorraad van studerenden steeds over een ruimer contingent van werkelijk begaafden hebben mogen beschikken.

Maar we hebben tot nu toe alleen de éne partij, de docent aan het woord gelaten. Wij moeten nu ook de andere partij, de discipel aan het woord laten. Inderdaad beschikken wij over talrijke mededelingen van zijn leerlingen over de aard en inhoud van zijn colleges, en over zijn wijze van doceren. In al deze mededelingen zijn de auteurs het erover eens, dat de colleges van Gauss uitmuntend waren, van vorm zowel als van inhoud. Zijn wijze van doceren wordt door allen éénstemmig in de hoogst gestemde bewoordingen genoemd.

De verleiding bekruipt mij, om hier melding te maken van vele berichten hierover, maar de tijd dringt mij ertoe, om mij slechts te beperken tot het verslag van één enkele leerling, en wie zou ik hiertoe beter kunnen kiezen, dan de grote *Dedekind*, u allen bekend, en die tussen 1850 en 1855 tot de laatste leerlingen van Gauss heeft behoord? In 1901 heeft hij bij de gelegenheid van het 150-jarig bestaan van het Koninkl. genootschap der Wetenschappen te Göttingen zijn herinneringen aan zijn laatste college bij Gauss als volgt weergegeven. Dus nu komt Richard Dedekind aan het woord over:

Gauss in zijn college over de methode der kleinste kwadraten.

Als geboren Brunswijker heb ik reeds vroeg over Gauss horen spreken, en ik geloofde graag aan zijn grootheid, zonder precies te weten, waarin deze bestond. Des te diepere indruk maakte op mij de eerste kennismaking met zijn meetkundige voorstelling van de imaginaire grootheden, of, zoals men toen ter tijde wel zeide „de onmogelijke grootheden”. Ik was toen als student aan het „Collegium Carolinum”

(de huidige techn. hogeschool) een beetje ingeleid in de hogere wiskunde, en spoedig daarop, toen Gauss in juli 1849 zijn 50-jarig doctors-jubiläum vierde, zond ons instituut een door de talentvolle philoloog Petri opgestelde gelukwens aan hem, waarin mij de zinsnede, dat hij het onmogelijke mogelijk had gemaakt, buitengewoon beviel. Met pasen 1850 kwam ik naar Göttingen, en hier nam mijn kennis weer een beetje toe, toen ik in het seminarium door een kort, bijzonder interessant college van Stern werd ingeleid in de beginselen der getallentheorie, en daarbij kennis mocht maken met de reciprociteitsstelling. Op mijn weg naar of van de sterrenwacht, waar ik een college over populaire astronomie van de voortreffelijke prof. Goldschmidt volgde, ontmoette ik soms Gauss, en ik verheugde mij in het aanschouwen van zijn deftige eerbiedwaardige verschijning, en zeer dikwijls zag ik hem nog dichterbij op zijn vaste plaats in de leeszaal, die hij regelmatig bezocht om de couranten te lezen.

Bij het begin van het volgende wintersemester achtte ik mijzelf ver genoeg gevorderd om zijn college over de methode der kleinste kwadraten te kunnen volgen, en zo betrad ik, gewapend met het collegeboek, niet zonder heftige hartkloppingen, voor de eerste maal zijn woonkamer, waar hij aan zijn schrijftafel was gezeten. Mijn mededeling scheen hem weinig te verheugen; ik had ook wel vernomen, dat hij vaak met tegenzin ertoe overging, college te geven. Nadat hij zijn naam in het boek opgetekend had, zeide hij na een korte spanne van zwijgen „U weet misschien wel, dat het steeds zeer twijfelachtig is, of mijn colleges door zullen gaan? Waar woont U? Bij de barbier Vogel? Nu, dat treft bijzonder gelukkig, want hij is ook mijn barbier; door hem zal ik u wel een boodschap laten sturen.”

Enige dagen later trad Vogel, een persoon die in de gehele stad bekend was, duidelijk ten hoogste ingenomen met de belangrijkheid van zijn zending, bij mij binnen, om mij mede te delen, dat zich nog meerdere toehoorders hadden aangemeld, en dat Herr Geheimer Hofrat Gauss het college zou geven.

Wij waren met 9 studenten, van wie ik A. Ritter (later hoogleraar in de mechanica in Hannover en Aken) en Moritz Cantor (later hoogleraar in Heidelberg) in de loop van het college nader heb leren kennen; wij kwamen alle zeer geregeld; er heeft slechts zelden iemand van ons ontbroken, ofschoon de weg naar de sterrenwacht in de winter soms allesbehalve aangenaam was. Het auditorium was door een voorkamer van de werkkamer van Gauss gescheiden en tamelijk klein. Wij zaten aan een tafel, waarbij in de lengte voor drie, maar niet voor vier personen gemakkelijk plaats was. Aan het bovineinde, tegenover de deur zat Gauss, op korte afstand van de tafel, en als wij voltallig waren,

moesten twee van ons, die het laatst binnengekomen waren, dicht bij hem gaan zitten, en hun cahier op hun schoot nemen. Gauss droeg een licht zwart kalotje, een tamelijk lange bruine jas en een grijze broek; hij zat meestal in een gemakkelijke houding, licht voorovergebogen naar beneden kijkend, de handen gevouwen over de buik. Hij sprak volkomen vrij, zeer duidelijk, eenvoudig en onopgesmukt; wanneer hij echter een nieuw gezichtspunt naar voren wilde brengen, waarbij hij een bijzonder karakteristiek woord gebruikte, dan verhief hij plotseling zijn hoofd, wendde zich tot een van zijn burens en keek deze gedurende de nadrukkelijke rede ernstig met zijn mooie blauwe doordringende ogen aan. Zulk een moment was onvergetelijk! Zijn taal was geheel vrij van dialect, slechts enkele malen kwamen klanken van onze stad-Brunswijkse tongval te voorschijn; bij het tellen b.v., waarbij hij het gebruik van de vingers niet versmaadde, zeide hij niet eins, zwei, drei, maar eine, zweie, dreie, enz. Ging hij over van een principiële behandeling naar de afleiding van mathematische formules, dan ging hij staan, en in deftige kaarsrechte houding schreef hij op een bord, dat naast hem stond met zijn karakteristieke mooie handschrift, waarbij het hem steeds door spaarzaamheid en doelmatige verdeling gelukte, met de tamelijk kleine ruimte toe te komen. Voor de getallenvoorbeelden, waarbij hij bijzondere waarde hechtte aan een nauwkeurige uitvoering, bracht hij de vereiste gegevens op kleine papiertjes mede."

(Vervolgens geeft Dedekind een beschrijving van de inhoud van het college, dat drie uur per week plaatsvond en uit drie gedeelten zou moeten bestaan. Deze details wil ik u besparen).

Dedekind besluit als volgt:

„Met deze uitwerking besloot Gauss op 24 januari 1851 het eerste gedeelte van zijn college, waarin hij ons met de essentiële inhoud van de methode der kleinste kwadraten volkomen vertrouwd had gemaakt. Nu volgde nog een buitengewoon duidelijke, door oorspronkelijke voorbeelden geïllustreerde ontwikkeling van de grondbeginselen en hoofdstellingen van de waarschijnlijkheidsrekening, welke als inleiding tot de tweede en derde manier van afleiding van de methode diende, waarop ik hier niet verder kan ingaan. Ik kan alleen zeggen, dat wij deze uitmuntende colleges, waarin ook meerdere voorbeelden uit de theorie van de bepaalde integralen werden behandeld, met steeds stijgende belangstelling hebben gevolgd. Maar het kwam ons ook voor alsof Gauss zelf, die eerst weinig neiging had getoond, om het college te geven, in de loop van deze colleges toch steeds meer plezier in zijn werk kreeg. Zo kwam op 13 maart het einde. Gauss stond op van zijn zetel, en wij allen met hem. Hij liet ons uit met de vriendelijke

afscheidswaarden: „Nu blijft voor mij nog over om u allen dank te zeggen voor de bijzondere regelmaat en aandacht, waarmede gij mijn, toch wel echt droog te noemen colleges hebt gevolgd.”

Sedert die datum is nu een halve eeuw verstreken, maar dit zogenaamd „droge” college is onvergetelijk in mijn herinnering gebleven als een der schoonste, die ik ooit heb gehoord.”

Voor de volledige afsluiting lijkt het mij nog goed, te vermelden, dat de hoogbejaarde Gauss het nog heeft mogen beleven, dat een jaar later, in 1852 Dedekind op zeer jeugdige leeftijd (21 jaar) bij hem zou promoveren, op een dissertatie, die overigens niet in de schaduw kan staan van de latere meesterwerken van deze beroemde auteur, de grondlegger van de theorie der algebraïsche getallen, aan wie o.a. de begrippen ideaal; ring en snede te danken zijn. Desalniettemin was het oordeel van Gauss over dit werk bijzonder gunstig. Dit luidde:

„De door de Heer Dedekind ingeleverde verhandeling houdt zich bezig met een onderzoek uit de integraalrekening, welke in geen geval tot de alledaagse behoort. De auteur legt daarin niet alleen zeer goede kennis van het betreffende gebied aan den dag, maar ook een zodanige zelfstandigheid, dat deze gunstige verwachtingen ten aanzien van zijn toekomstige prestaties rechtvaardigt.”

Nog enige maanden voor zijn dood in 1916 wist Dedekind aan Landau met grote vitaliteit de vragen te noemen, die Gauss hem bij zijn doctorsexamen had gesteld. Nadat hij na zijn promotie gedurende twee jaar nog tal van lacunes in zijn wetenschappelijke vorming had aangevuld, werd hij privaattoecent aan de Universiteit van Göttingen. Een jaar daarna, op 23 februari 1855 overleed Gauss hoogbejaard.

Toen op de koude winterdag van 26 februari 1855 het stoffelijk overschot van de titan der wetenschap ten grave werd gedragen onder de machtige tonen van het koraalgezing van de Luther-hymne

Ein fester Burg ist unser Gott

werd de lijkst getorst door 12 van zijn leerlingen. Onder deze 12 dragers was ook Dedekind.

LITTERATUUR.

C. A. F. Peters. Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. 6 delen. Altona. Gustav Esch, 1860—1865.

K. Bruhns. Briefe zwischen A. von Humboldt und Gauss. Leipzig. Engelmann. 1877.

Auwers. Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Leipzig. Engelmann. 1880.

- C. Schilling. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. 2 delen. Berlin. Julius Springer. 1900—1909.
- Cl. Schaefer. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und C. L. Gerling. Berlin. 1927.
- F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger. Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Vols I—VIII, Leipzig. B. G. Teubner. 1911—1920.
- Ludwig Bieberbach. Carl Friedrich Gauss. Ein deutsches Gelehrtenleben. Berlin. Keil-Verlag. 1938.
- Gedenkband anlässlich des 100 Todestages C. F. Gauss am 23 Februar 1955. B. G. Teubner. Leipzig. 1957.
- Erich Worbs. Carl Friedrich Gauss. Ein Lebensbild. Leipzig. Koehler und Amelung. 1955.
- G. W. Dunnington. Carl Friedrich Gauss. Titan of Science. A Study of his life and work. Exposition-Press. New York 1955.
- Leo Koenigsberger. Carl Gustav Jacob Jacobi. Leipzig. B. G. Teubner. 1904.
- K. R. Biermann. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken. Akademie-Verlag. Berlin. 1959.
-

OVER LOGISCHE EN VERZAMELINGSTHEORETISCHE SYMBOLLEN

door

B. L. VAN DER WAERDEN

Zürich

In het Euclides-nummer van 1 mei 1961 (36e jaargang, p. 257) heeft N. H. Kuiper een aantal belangrijke gezichtspunten naar voren gebracht en voorstellen voor modernisering van het wiskunde-onderwijs gedaan, waarmee ik het grotendeels eens ben. Maar er is één punt, waar ik heel anders over denk.

Kuiper voorspelt, dat de volgende symbolen in het Middelbaar Onderwijs zullen worden ingevoerd:

$$\epsilon, \subset, \cap, \cup, \{x | \dots\}, \emptyset.$$

Hij beveelt verder het gebruik van de logische symbolen $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ aan en hij meent dat $\forall$ en $\exists$ ook nuttig kunnen zijn.

In deel II „Praktijk” stelt Kuiper voor, deze symbolen ook in de meetkunde te gebruiken. In plaats van „ p en q snijden elkaar in S ” wordt de korte formule $p \cap q = S$ aanbevolen. In plaats van „Twee cirkels c_1 en c_2 hebben geen punt gemeen” wordt voorgesteld $c_1 \cap c_2 = \emptyset$. Voor „De meetkundige plaats van de punten, die op afstand r van P liggen” wordt geschreven

$$\{X | \text{afst } XP = r\}.$$

Ten slotte wordt voorgesteld, het oude symbool $\therefore$ te vervangen door $\Rightarrow$.

Om met het laatste te beginnen: dit lijkt mij fout. Met $P \Rightarrow Q$ is bedoeld: Als P , dan Q . Met $P \therefore Q$ is bedoeld: P en dus Q . Dit is iets anders. Als men $P \Rightarrow Q$ opschrijft, dan laat men in 't midden of de bewering P juist is of niet. Schrijft men $P \therefore Q$, dan bedoelt men: P is juist en uit P volgt Q , dus geldt Q .

Belangrijker is de algemene vraag: Is de tegenwoordige neiging om aldoor meer logische symbolen in wiskundige uiteenzettingen te gebruiken, goed of niet? Moeten we in het wiskundeonderwijs aan deze neiging toegeven?

Laat ik twee dingen vooropstellen. Ten eerste: in de mathematische logica, waarin de wiskundige bewijsmethoden gecodificeerd en onderzocht worden, is de invoering van logische symbolen geboden.

Ten tweede: Ter afkorting, wanneer de gemakkelijke leesbaarheid van een wiskundig bewijs er niet onder lijdt, kan men gerust eens $a \in B$ schrijven in plaats van „ a is element van B ”. Ik ben zelf een van de eersten geweest, die deze en dergelijke gewoonten in de algebra hebben ingevoerd. Later, toen ik zag, hoeveel misbruik er van logische symbolen werd gemaakt, ben ik er spaarzamer mee geworden.

Vergelijken we de gewone formulering

(1) c_1 en c_2 hebben geen punt gemeen
met de nieuwe

(2) $c_1 \cap c_2 = \emptyset$

dan is het duidelijk, dat (2) korter is. Men spaart dus een beetje papier. Aan de andere kant is het tippen en zetten van (2) veel omslachtiger dan van (1), omdat de nieuwe symbolen niet op de machine staan. Het voordeel van de korthed wordt daardoor meestal weer opgeheven.

Maar nu het denkwerk, dat van de lezer (of scholier) gevergd wordt. Laten we, om het geval voor de these van Kuiper zo gunstig mogelijk te maken, aannemen dat de lezer volkomen vertrouwd is met de betekenis van de symbolen $\cap$ en $\emptyset$. Hij ontcijfert het telegram (2) dus onmiddellijk als volgt:

„De doorsnee van c_1 en c_2 is de lege verzameling”.

Nu denkt hij even na en roept dan uit: Aha, de cirkels mogen geen punt gemeen hebben. Nu weet hij wat met de formule (2) bedoeld is en kan doorgaan met het bewijs te lezen, waarin deze formule voorkomt.

Veel omslachtiger is het ontcijferingswerk bij een ander voorbeeld, dat Kuiper geeft:

$$(3) \quad \{X|Xp \cong Xq \text{ èn } X \in \alpha\} = m \cap \alpha.$$

Hier komt eerst de vraag, welk van de tekens $|$, $\cong$, èn , sterker bindt of sterker scheidt. Zet men bv. $(X|Xp)$ of $(Xq \text{ èn } X \in \alpha)$ tussen haakjes, dan komt men er nooit uit. Een intelligente lezer weet, dat hij alles wat na $|$ komt totdat de accolade gesloten wordt tussen haakjes moet zetten. Hij weet verder, dat het teken $\cong$ twee meetkundige figuren met elkaar verbindt, en het teken èn twee beweringen. Omdat Xq geen bewering is, moet het linkerlid van (3) dus zo gelezen worden:

$$\{X|[(Xp \cong Xq) \text{ èn } (X \in \alpha)]\}.$$

Nu kunnen we ontcijferen: De verzameling van alle X (waarschijnlijk zijn punten X bedoeld, want hoofdletters betekenen gewoonlijk punten) waarvoor geldt: ' Xp is congruent met Xq en X is een element van α ' is gelijk aan de doorsnede van m en α .

Nu gaat het denkwerk verder: Het produkt Xp heeft geen zin, de verbindingslijn Xp ook niet, want p is geen punt. Dus zal met Xp wel de figuur bedoeld zijn, die uit het punt X en de lijn p bestaat. Als dit waar is, dan betekent $Xp \cong Xq$ eenvoudig, dat X even ver van p als van q ligt. Nu moeten we nog aan de definitie van α denken en zien dan, dat $X \in \alpha$ betekent: X ligt binnen of op de hoek BAC . Zo komen we er langzamerhand achter, wat met formule (3) bedoeld is. Aan het bewijs van (3) kunnen we nu pas beginnen.

Hoeveel gemakkelijker is het niet voor de lezer of leerling, als alles in woorden wordt gezegd. De aanschouwelijke voorstelling van een hoek met bissectrice en het meetkundige denkwerk, waar het op aan komt, blijven precies eender, maar de hele onnodige ontcijfering van formule (3) valt weg.

In een stuk over Cohomologietheorie in Math. Annalen 130, p. 88 heb ik geschreven: „Spanier verwendet eine komprimierte Begriffsschrift; um seine Beweise zu verstehen, muss man fast jeden Satz mühsam dechiffrieren. Wir wollen dem Leser dieses Dechiffrieren nach Möglichkeit ersparen, brauchen dafür allerdings etwas mehr Druckseiten”.

In het algemeen is het voordeel van een algebraïsche formule zoals

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

niet zozeer, dat de formule korter is dan een stelling in woorden; dit is maar bijkomstig. Belangrijker is, dat de formule overzichtelijker is, en nog belangrijker, dat men met de formule kan rekenen zonder aan de betekenis van de daarin voorkomende symbolen te denken. Bij logische formules zoals (2) en (3) vallen deze voordelen weg. Wil iemand met (3) verder werken, dan moet hij de formule eerst in gewone woorden of meetkundige voorstellingen omzetten. Zijn gedachten worden dus van de meetkundige vraag, waar het eigenlijk om gaat, op een onbelangrijk en hinderlijk ontcijferprobleem afgeleid. Pas als hij dit heeft opgelost kan hij het bewijs verder volgen.

In geval (2) was de ontcijfering gemakkelijk, in geval (3) vrij ingewikkeld. Maar in allebei de gevallen is de ontcijfering onnodig: we kunnen net zo goed de bewering in onmiddellijk verstaanbare taal geven.

Ik heb er niets op tegen, tussen twee beweringen, die op het bord staan, het teken $\Rightarrow$ of $\Leftrightarrow$ te zetten. Dit verhoogt de overzichtelijkheid en is dus goed.

Beschouw nu de tekens $\forall$ en $\exists$. Kuiper noemt $\forall$ en $\exists$ symbolen voor „voor alle” en „er bestaat”. Maar zo eenvoudig is het niet. Men zegt niet „ $\exists$ een punt dat even ver verwijderd is van de hoekpunten van een driehoek” of „ $\forall$ rechthoekige driehoeken geldt de Stelling van Pythagoras”. Wil men $\exists$ of $\forall$ invoeren, dan moet men elke zin, waarin „er bestaat” of „alle” voorkomt, eerst zo omvormen, dat de uitdrukkingen „er bestaat een x zodanig dat” of „voor alle x geldt” er in voorkomen. Deze uitdrukkingen kan men dan door $(\exists x)$ of $(\forall x)$ vervangen, bv.:

„ $(\exists x)$ x is een punt en x is even ver verwijderd van de drie hoekpunten van een driehoek.”

In deze krampachtige formulering zie ik voor de school geen enkel voordeel.

HET VAK REKENEN OP DE KWEEKSCHOOL.

EEN ORIENTATIE

door

P. WOESTENENK

Nijmegen

Dat het niet goed zit met het vak rekenen, is één van die overtuigingen, die op een gegeven moment zó algemeen blijken te zijn, dat een bewijs overbodig wordt geacht. Dat de oorzaak van die malaise in de scholen gezocht moet worden, dat het „dus” zit in de mensen die daar leiding geven, en dat er „dus” iets scheef moet zitten in de opleiding die deze lieden genoten hebben — wel, dat is een gedachtengang die aanspreekt.

Er zit ook ongetwijfeld iets in. Dat nog andere factoren meespelen, dat de vermelde reeks van gevolgen en oorzaken bij voortzetting een circulus vitiosus blijkt te zijn — dat zal ons nu niet bezighouden. De kweekschool heeft een taak ten aanzien van het volksonderwijs en behoort die taak zo goed mogelijk te vervullen. In dit artikel zullen we ons afvragen, hoe de huidige situatie is gegroeid en welke principes ten grondslag liggen aan de wijze, waarop de kweekschool-van-nu haar taak opvat.

Het eerste deel van onze doelstelling brengt ons dus op historisch terrein, al zal ik mij, als leek op dit gebied, niet verder van het heden verwijderen dan noodzakelijk zal blijken. We moeten dan echter het enigszins onthutsende feit constateren, dat nog in 1951 een K.B. over onze materie verscheen, dat gebaseerd was op artikelen uit de wet van . . . 1878.

I.

In L.S.-kringen van de oude stempel spreekt men nog graag van 77-a en 77-b om resp. de hulp- en de hoofdakte aan te duiden (die terminologie is intussen trouwens ook al weer verouderd). De schoolwet van 1878 vermeldde nl. deze beide mogelijke bevoegdheden in artikel 77, onder a en b. Als programma voor „77-a” vermeldt diezelfde wet o.a.:

„het rekenen, zoowel met geheele getallen als met gewone en tiendeelige breuken en kennis van de leer der evenredigheden en van het Nederlandsche stelsel van maten en gewichten.”

Nadere omschrijving van dit programma bracht het K. B. van 17-12-'90, Stbl. No. 183, waar te lezen staat „. kennis

van de gronden der hoofdbewerkingen in de rekenkunst, zoowel met gewone en tiendeelige breuken als met geheele getallen; de evenredigheden; het Nederlandsche stelsel van maten en gewichten; de berekening van de grootte en de vormverandering van eenvoudige vlakke figuren; en de berekening van de inhouden der eenvoudigste lichamen.

Vaardigheid in het oplossen zoowel uit het hoofd als schriftelijk van eenvoudige rekenkundige vraagstukken."

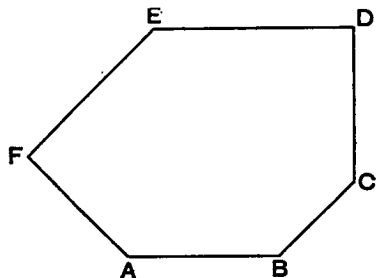
Het komt er nu maar op aan, welke interpretatie de praktijk hieraan gaf. Om hiervan een beeld te geven, zij een schriftelijk examen 77-a vermeld uit 1921, toen dit program nog ongewijzigd van kracht was.

Najaar 1921. Tijd $1\frac{1}{2}$ uur

1. P en Q verdienen samen aan een werk f 202,50. P werkt er eerst 18 dagen aan en Q 15 dagen. Er blijft nu nog $\frac{1}{6}$ van het werk over, dat door hen beiden samen in $3\frac{1}{3}$ dag voltooid wordt. Hoeveel komt ieder van het loon toe?

2. Bereken x uit: $0,035 : 0,8076923 \times \frac{323}{100} = x : \frac{215441}{130065}$

3. Twee kapitalen zijn samen f 13000 groot. Het eerste staat 14 maanden uit à $4\frac{1}{2}$ pct. per jaar, het andere 10 maanden en 24 dagen à 5 pct. Hoe groot zijn beide kapitalen, als ze evenveel interest opbrengen? (Een maand = 30 dagen.)



4. Van een kolenbak hebben de twee zijwanden, die loodrecht op het *rechthoekige* grondvlak staan, nevenstaande vorm. $AB = 24$ c.M. de punten C, D en F liggen respectievelijk 12, 36 en 16 c.M. boven het grondvlak. De hoeken A, B en C zijn 135° , terwijl de hoeken D en F 90° zijn. De bak is 44 c.M. breed. Bepaal den inhoud in Liters.

5. Een koopman verkoopt van een partij suiker de helft tegen 80 cts. per K.G. en $\frac{1}{3}$ gedeelte tegen 75 cts. per K.G. De rest moet hij tegen inkoopprijs van de hand doen. In het geheel ontvangt hij f 225 en wint 25 pct. Hoe groot was de geheele partij?

Het examen in z'n geheel bleek een test van de juiste zwaarte te zijn: ongeveer 76 % slaagde. Bezien we nu de opgaven eens wat nader.

ad opg. 1. U meent wellicht dat „ $\frac{1}{6}$ van het werk” een overbodig gegeven is: P werkt $21\frac{1}{3}$ dag en Q $18\frac{1}{3}$ dag, daarmee is het vraagstuk in principe opgelost. U bekeert zich wel van deze dwaling, als u nu gaat cijferen. P en Q worden beloond naar prestatie, niet naar werktijden. Dat staat er niet bij, en dus is het vraagstuk onbepaald (dus ongeschikt) wegens gebrek aan gegevens. Intussen heeft niemand daar anno 1921 last van gehad: het was een bekend type, met een standaardoplossing. De opgave werd dan ook over 't geheel redelijk „opgelost”.

ad opg. 2. Wat een gecijfer. Wat een listige opstelling van die x voor lieden die nooit vergelijkingen leerden oplossen. Het ging ook niet best, zeggen de examenverslagen. Konden ze toen óók al niet cijferen?

ad opg. 3. Wie niet weet, dat men in die kringen een maand op 30 dagen stelt, weet ook niet dat een jaar voor 12×30 dagen geldt. Maar dat heeft niemand dwars gezeten. De opgave kreeg een over het algemeen „bevredigende” oplossing.

ad opg. 4. Opmerkelijk is het laatste gegeven over de hoeken: $\angle F$ is 90° . Aan die som is natuurlijk „niks an”, als je de rechthoek voltooit o.a. door een rechte door F en evenwijdig aan CD . Maar daarop is moeilijk te drillen en. wiskundige scholing krijgen deze kandidaten niet. De uitslag was dan ook slecht.

ad opg. 5. Ik geef hem iedere ingenieur te doen. Geen x erbij, asjeblijft, dat is „algebra”, dus verboden. Maar wie meent dat deze puzzel toch wel wat al te bar is voor een examen, vergist zich deernlijk. De opgave behoorde tot de gemakkelijke sommen, met „bevredigende” resultaten. Opg. 2 en 4 waren véél moeilijker

Samenvattende meen ik te mogen vaststellen:

1°. De samenstellers van dit werk schoten te kort in duidelijke formulering; bovendien zijn er nu eens gegevens te veel, dan weer te weinig.

2°. Met minimale eisen betreffende de kennis van getallenleer en planimetrie worden sommetjes op kinderlijke wijze in elkaar geschroefd om het toch maar moeilijk te maken.

3°. Meer dan de helft der opgaven doet een beroep op het reproduceren van standaardoplossingen.

4°. De resultaten tonen aan, dat de „redeneersommen” het best beheerst worden, dat cijferen een zwak punt was en meetkundig inzicht bijna afwezig. (In 's-Hertogenbosch had slechts 30 % van de kandidaten het tot een voldoende weten te brengen bij de opgaven 2 en 4.)

Bestudering van de examens van andere jaren verandert dit beeld niet wezenlijk. Wat moet er in die jaren gedrild zijn op de redeneersommen, wat is er geprutst met karikaturen van reken- en wiskunde, terwijl veelal vergeefs is getracht (ik neem die goede intentie zonder aarzelen aan), handigheid en zekerheid aan te brengen in het omspringen met getallen of in het onderkennen van relaties van meetkundige aard.

De mondelinge examens zijn nu slechts nog te reconstrueren uit de verslagen der examencommissies. Maar ook die lectuur

levert geen nieuwe gezichtspunten op. Zelfs rekening houdend met de neiging, opstellers van examenverslagen eigen, de feilen nogal veel accent te geven, is de toon toch over het geheel wel erg uitgesproken droefgeestig, zo niet: geërgerd. Telkens dezelfde litanie: inzicht en vaardigheid laten te wensen over, de theorie is verwaarloosd, hoofdrekenen en metriek stelsel zijn beneden peil, een bewijs of zelfs maar een veraanschouwelijking van een gebruikte formule is niet mogelijk, men kent de eigenschappen uit het hoofd maar kan ze niet toepassen, slordigheid in het formuleren; in 1923 constateerde Roermond dat vele kandidaten opgaven voor klas V en VI van de L.S. niet vlot konden oplossen, en in 1924 poneerde 's-Hertogenbosch dat de kennis van de theorie der rekenkunde achteruit ging. Over de resultaten van het schr. ex. in 1925 rapporteert:

Venlo: 42 % onvoldoende,

's-Gravenhage: 50 % niet voldoende,

Rotterdam: meer dan de helft onvoldoende,

Amsterdam, Zwolle en Groningen waren tevreden,

Arnhem klaagde over de vele taalfouten in de uitwerkingen.

Het is goed zich te realiseren dat de klachten over „die onderwijzers die niet meer kunnen rekenen” niet van onze tijd alleen zijn. En onze vaders begrepen ook: er moet iets gebeuren. Twijfel over de testwaarde van „redeneersommen” voor iemands bedrevenheid en inzicht in „rekenen”, een groeiend gevoel van onbehagen over de quasi-reken- en wiskunde en over de levensvreemdheid van dit hele examengedoe, de overtuiging dat het intellectueel niveau van de onderwijzers opgetrokken diende te worden — dit alles vond zijn neerslag in de L.O.-wet 1920 en de daarbij in uitzicht gestelde K.B.'s.

II.

Zoals bekend zal zijn, is het opleidingsplan van Minister De Visser nooit werkelijkheid geworden. De nieuwe bevoegdheden waarover de Wet-1920 sprak, zijn nooit door iemand behaald, geen kweekschool heeft er ooit voor opgeleid. Wat ervan te redden was leert het K.B. van 10-9-'23 (Stbl. No. 433 en 434).

De oude benamingen 77-a en 77-b bleven „voorlopig” nog in gebruik, maar deze vlaggen dekten van toen af toch wel enigszins andere ladingen. Voor het ons hier interesserende gebied lezen we nu, dat schriftelijk en mondeling rekenkunde en wiskunde zal worden geëxamineerd, en wel volgens dit programma:

„Rekenkunde: a) *Bekendheid met de hoofdzaken der rekenkunde,*

te weten: de hoofdbewerkingen met geheele en gebroken getallen; kleinste gemeene veelvoud en grootste gemeene deeler; de meetkunstige evenredigheden; vierkantsworteltrekking.

b) Enige bekendheid met de hoofdzaken van het handelsrekenen.

Wiskunde: a) Algebra: Eenige bekendheid met de hoofdzaken uit de algebra tot en met de vergelijkingen van den tweeden graad met een onbekende.

b) Meetkunde: Eenige bekendheid met de hoofdzaken uit de vlakke meetkunde en uit de meetkunde in de ruimte."

De tendens is duidelijk. De redeneersommen krijgen de bons (het toelatingsexamen voor het V.H.M.O. heeft ze zorgvuldiger bewaard) en op de opgevallen plaats zetelen de nobele wetenschappen der rekenkunde en wiskunde, alsmede het meer prozaïsche, uitermate praktisch geachte handelsrekenen. Een adelaarsvlucht neemt het examen weliswaar niet, maar het dilettantische, karikaturale is nu toch wel geëlimineerd.

In dit verband is het vermeldenswaard, welke rekeneisen gesteld werden voor de toelating tot de eerste klas van een kweekschool. Een K.B. van 11-9-'23 vermeldt, als het de eerste klas van een 4-jarige opleiding betreft (ja, het wordt ingewikkeld):

„Rekenen. a) vlug en nauwkeurig cijferen met geheele en gebroken getallen.

b) Procentrekening, kennis van het metrieke stelsel, bekendheid met eenvoudige oppervlakte- en inhoudsberekeningen; blijkende uit de oplossing van practische vraagstukjes" (er wordt niet bij vermeld wat daaronder is te verstaan).

Voor de eerste klas van de 3-jarige opleiding, waartoe men een peil bereikt moet hebben dat gelijk staat met 3 jaren H.B.S. of daaromtrent, wordt gevraagd:

„Rekenen. a) (als boven).

b) kennis van het metrieke stelsel.

c) eenige kennis van de voornaamste buitenlandsche munten, procentberekening, effectenrekening, bekendheid met oppervlakte- en inhoudsberekeningen, blijkend uit de oplossing van practische vraagstukjes.

d) eenige hoofdzaken uit de theorie der rekenkunde; met name practisch bruikbare kenmerken van deelbaarheid, grootste gemeene deeler, kleinste gemeene veelvoud en evenredigheden."

Alleen de „practische vraagstukjes" laten nog iets van de oude

zuurdesem vermoeden, voor het overige kan men slechts respect hebben voor wat in het eerste jaar van de 4-jarige opleiding kennelijk al bereikt werd (het verschil der beide geciteerde programma's), terwijl de laatste twee jaren der kweekschool echt niet overladen mogen heten, wat rekenen en wiskunde betreft.

Maar wenden we ons weer tot de praktijk. Welke interpretatie geven de opstellers van examenopgaven aan het programma van 1923? We nemen als willekeurig voorbeeld het examen van 1937.

1937. Tijd $1\frac{1}{2}$ uur.

1. Van een gedurige meetkundige evenredigheid is de tweede term 154 groter dan de eerste, terwijl de betrekkingwijzer van de termen der tweede reden (2,1,1,3) is. Welke is die evenredigheid?
2. De G.G.D. van a en b is 120. Vermenigvuldigt men a met 3, dan wordt de G.G.D. 360, en vermenigvuldigt men b met 4, dan wordt de G.G.D. 480. Als het product van a en b 1.036.800 is, bepaal dan a en b.
3. Iemand koopt op een publieke veiling een huis voor f 8400,— en moet nog $7\frac{1}{2}$ % onkosten betalen. Hij sluit hierop een hypotheek van f 5600,— De onkosten hiervan bedragen $1\frac{1}{2}$ %. Om het resterende bedrag te kunnen betalen, verdisconteert hij op 16 juli een wissel van f 3460,—, die op 4 September vervalt, met $4\frac{1}{2}$ % disconto. Hoeveel moet hij in contanten bijpassen?
4. A. Haan te Amsterdam koopt door bemiddeling van een commissionair in Engeland 300 ton steenkolen à £ —. 8. 10 per ton met 1 % korting voor contante betaling. De commissionair brengt £ 13.18.2 onkosten en 2 % commissie in rekening. Haan moet in Amsterdam aan diverse onkosten nog f 167,80 getalen en kan zijn schuld voldoen tegen de koers 8,96. Wat kosten hem die steenkolen?

Veel is hierbij niet op te merken. Men moet inderdaad vrij goed in de beginstof van de rekenkunde thuis zijn, om van de eerste twee opgaven (vooral de tweede) iets goeds te maken. De handelsrekenopgaven doen meer een beroep op het kennen van usanties en op nauwkeurig cijferen. De verslagen der examencommissies (het vermag ons niet in verbazing te brengen) wijzen dan ook op matige resultaten: ongeveer 66 % voldoende. Daarbij heeft het handelsrekenen de situatie nog enigermate gered. Over het mondeling examen wordt de oude litanie herhaald: onbegrepen uit het hoofd leren, het bewijzen van eigenschappen is slecht, geen inzicht, slordige formuleringen, gebrekkige kennis van het metriek stelsel („treurig”, zei Groningen), enz.

In de grond der zaak is er dus weinig veranderd: de kandidaten blijken opnieuw vatbaar voor training op routinewerk (of dat nu redeneer- of handelssommen zijn) en laten verstek gaan waar het aankomt op begrip, op inzicht.

Nog in 1951 werden deze exameneisen ongewijzigd vastgesteld.

Vermelden we nog, dat in 1947 een éénjarige cursus voor de onderwijzersbevoegdheid werd georganiseerd, wegens het nijpend tekort aan leerkrachten. Rekenen kwam op het programma niet voor, wiskunde evenmin.

III.

De Kweekschoolwet 1952 (23-6-'52, Stbl. No. 755).

Voor het eerst wordt nu de opleiding der onderwijzers in een afzonderlijke wet geregeld. De kweekschool telt nu 5 leerjaren, verdeeld over 3 leerkringen van respectievelijk 2, 2 en 1 leerjaar (-jaren).

De 1e leerkring (leerjaar 1 en 2) heeft het karakter van een vóór-opleiding, een algemene scholing vóór de eigenlijke vakopleiding in de 2e leerkring. Het eindexamen van deze 2e leerkring geeft reeds de bevoegdheid, een betrekking bij het L.O. te aanvaarden. De 3e leerkring rondt die vakopleiding af, zodat men met enig recht kan stellen dat de eindexamens van de 2e en 3e leerkring de plaatsen innemen van de aloude 77-a en 77-b.

Art. 7 van de wet handelt over de omvang van het onderwijs in de drie leerkringen. Onder 1a wordt daar voor de 1e leerkring wel wiskunde genoemd, géén rekenen of rekenkunde. Dit zou echter tot een foutieve opvatting van de zaak kunnen leiden; we haasten ons dan ook, het Kweekschoolbesluit (9-12-'53, Stbl. No 546) te citeren, waarin de stof nader wordt omschreven. We lezen daar in art. 9, onder A 1, 7°:

„Wiskunde:

Algebra:

Behandeling van de functies $y = ax + b$ en $y = ax^2 + bx + c$, met grafische toelichting; van de vierkantsvergelijkingen, de rekenkundige reeks en de meetkundige reeks met eindig aantal termen. Behandeling van eenvoudige eigenschappen der logaritmen.

Goniometrie:

Behandeling van enkele goniometrische verhoudingen en formules.

Planimetrie:

Behandeling van de eenvoudige eigenschappen van de cirkel en regelmatige veelhoeken.

Stereometrie:

Behandeling van enige hoofdzaken uit de stereometrie.

Rekenkunde:

Behandeling van enige belangrijke onderwerpen uit de rekenkunde.”

De rekenkunde is dus niet vergeten. Ze zal voor de leerlingen een nieuw vak zijn, immers, de toelatingseisen voor de 1e leerkring zijn:

MULO-diploma A of B (het meest gangbare entreebewijs) of 3 jaren M. of V.H.O. „met goed gevolg”. Men kan van mening verschillen over de vraag, of er enige zekerheid bestaat, dat deze leerlingen voldoende bedreven zijn in hoofdrekenen, metriek stelsel, enz.; de wetgever is kennelijk uitgegaan van de veronderstelling dat dit inderdaad zo is. In ieder geval: in de 1e leerkring komen deze zaken niet aan de orde.

Hoe staat het in de 2e leerkring?

De wet vermeldt in art. 7 onder 1b de omvang van de leerstof voor deze beide leerjaren (3 en 4); we lezen daar onder 5°: *„de speciale didactiek in haar toepassing op het lager onderwijs van de vakken Nederlandse taal, geschiedenis, aardrijkskunde, kennis der natuur en rekenen, waarbij zodanige leerstof uit die vakken wordt behandeld als voor de beoefening van die didactiek is vereist;”*

Het Kweekschoolbesluit werkt dit als volgt uit (art. 10, onder A. 1, 12°):

„*Rekenen:*

Behandeling van een moderne methode voor het onderwijs in het rekenen. Didactiek van het onderwijs in het rekenen op de lagere school. Behandeling van die onderwerpen uit de rekenkunde, waarvan kennis voor het lesgeven in de lagere school in het bijzonder nodig is. Oefening in het hoofdrekenen.”

Over de 3e leerkring kunnen we kort zijn: noch wiskunde, noch rekenkunde of rekenen zijn daar examenvakken, ze worden niet meer genoemd.

Het is dus de 2e leerkring, die onze aandacht moet hebben. Van de rekenkunde in de 1e leerkring moet men nl. niet te veel verwachten. De overige wiskundeonderdelen zullen al heel wat tijd vragen (er zijn veel MULO-A's bij, en zij die overkomen van het V.H.M.O. zijn in de regel ook niet de sterkste wiskundeleerlingen) maar vooral: In de 2e leerkring komen er afgestudeerden van H.B.S. of Gymnasium bij - en die hebben immers toch geen rekenkunde gehad. Het zal dus van de 2e leerkring moeten komen. Hoe staan daar de zaken?

De nadruk ligt zeer duidelijk op de didactiek. Volkomen in de geest van de Kweekschoolwet, die de kweekschool ziet als een vakopleiding. In de officiële urentabel stond aanvankelijk één wekelijks lesuur aangegeven voor rekenen — en dat slechts in één van de twee leerjaren. „Rekenen” was daarmee het minst-bedeelde van alle vakken. Daar is intussen al verbetering in gekomen

Rekenen heeft in elk leerjaar een volledig uur en staat nu gelijk me: geschiedenis en aardrijkskunde.

De kweekschool wil dus vakopleiding zijn. Dat betekent, dat ze bij haar leerlingen van de tweede leerkring de „algemene ontwikkeling”, nodig voor het moeiteloos beheersen van de leerstof van de L.S., als voldoende moet beschouwen. Haar taak ligt in de pedagogische scholing, waarbij de didactische vorming een stevig accent behoort te krijgen (we vormen immers onderwijzers!) en de psychologie als hulpwetenschap fungeert.

Het is hier niet de plaats, het aandeel van de psychologie in de opleiding te analyseren, noch om de vraag te beantwoorden, of mogelijk nog andere wetenschappen (sociologie, anthropologie) hierbij betrokken dienen te worden.

Hoe broodnodig met name deze didactische scholing is, behoeft nauwelijks betoog. Er is bijna geen terrein aan te wijzen waarop de beunhazerij zó welig tiert als juist hier. En heus niet alleen op lagere scholen. Gelukkig zijn er tekenen die er op wijzen, dat reëler ideeën veld winnen. Systematische kennisoverdracht is één der hoofdtaken van iedere school, en het is verheugend, dat het inzicht veld wint, dat dit inderdaad systematisch dient te gebeuren — wat nog iets anders is dan vertechnisering of vermethodiek. Het is te betreuren, dat zulke kretten nog zo vaak een gezonde ontwikkeling van de didactiek in de weg staan en een zakelijk gesprek onmogelijk maken.

De vraag is, of de kweekschool tot dit facet van de vakopleiding werkelijk in staat is. Zie ik het goed, dan vindt zij daarbij twee grote problemen op haar weg: dat van de vooropleiding en dat van de personeelsbezetting.

Over die vooropleiding kunnen we kort zijn. Geen enkele wijziging behoeft in Wet of K.B. te worden aangebracht, om de situatie zó te beïnvloeden, dat de tweede leerkring de deur gesloten houdt voor jongelui die het aan de vereiste algemene ontwikkeling ontbreekt. Daar kan iedere kweekschool voor zorgen, met de daadwerkelijke steun van haar eigen inspectie. Indien in dit opzicht sanering nodig is, dan is die ook doorvoerbaar, onverschillig of die sanering de eerste leerkring betreft dan wel de betrouwbaarheid van een ULO-diploma of een getuigschrift, afgegeven door het V.H.M.O. Maar dat is geen zaak van de tweede leerkring.

De kwestie heeft echter nog een kant: Nog steeds sleept de L.S., zeker voor zover ze „opleidt voor H.B.S., Lyceum, enz.” in haar hoogste klassen leer- en oefenstof mee, die daar niet thuishoort, al is er ongetwijfeld in de laatste jaren veel verbeterd.

Maar in 1957 gaf het Nijmeegs Lyceum dit vraagstukje op: „In een fabriek werken vier maal zoveel mannen als vrouwen. Eén man verdient per dag f 10,— en één vrouw f 8,—. Samen verdienen ze per dag f 864,—. Hoeveel mannen en hoeveel vrouwen werken er in die fabriek?”

De R.H.B.S. en M.M.S. in Tiel presenteerde het volgende: „Een auto, die 14 km op 1 liter benzine behoort te rijden, verliest door een lek in de tank onderweg 35 % van zijn benzine. Hoeveel kost de reis Tiel-Groningen (182 km) aan benzine tegen een prijs van 28 cent de liter, als de tank juist bij aankomst in Groningen leeg is?”

Assen leverde deze bijdrage:
„Twee mannen zagen een balk in 8 stukken. Ze doen hierover 28 minuten. Hoelang doen ze erover als dezelfde balk in 16 stukken moet?”

Ik weet zeer wèl, dat met dit drietal opgaven „het” toelatings-examen niet is gekarakteriseerd. Maar zulke dingen komen toch voor. En de „opleidingsscholen” mitsgaders de leerboekjes houden daar rekening mee.

Maar er is meer. G.G.D. en K.G.V., s.g., het delen door een breuk — dat alles behoort tot het vaste programma. En het is beslist géén kost voor kinderen. Zo betwijfel ik ook de waarde van vele verhoudingsvraagstukjes, vooral als die vormen aannemen als deze: „A, B en C verdelen 15 gld. in verhouding $1\frac{1}{2} : 2 : 2\frac{1}{2}$. B krijgt dus . . . gld.”

Met het ontbinden in factoren staat het m.i. evenzo.

Men realiseere zich, dat zulk werk bij tal van examenkandidaatjes wel mòet leiden tot drill, tot africhten. En dat is de grootste en meest funeste kwaal van het rekenonderwijs. Het V.H.M.O. is niet gediend met leerlingen die „rekenen” identificeren met „hokus-pokus” en dan vaag weten dat wiskunde „ook zo iets als rekenen” is. Het zou de moeite lonen, een onderzoek in te stellen naar de vraag, in hoeverre het rekenonderwijs op de L.S. oorzaak is van een aversie tegen de wiskunde bij de leerlingen van de eerste klassen bij het V.H.M.O. Beide partijen zouden er bij gebaat zijn, als de L.S. dergelijke stof niet behandelde. Als het voortgezet onderwijs er werkelijk behoefte aan gaat krijgen, dan zijn de geesten ook weer een beetje gerijpt en zijn de moeilijkheden niet half zo groot meer. En — dan geschiedt de scholing tenminste onder (vaktechnisch) deskundige leiding.

De nieuwe kweekschool wil vakbekwame onderwijzers helpen vormen, mensen die weten wat onderwijs-geven inhoudt, die dus

ook kunnen spelen met de kennis die de gemiddelde Nederlander nodig heeft om zijn maatschappelijke taak naar behoren te kunnen vervullen. Of daar G.G.D. e.t.q. (zie boven) bij hoort, is toch niet dubieus. Daarom acht ik het ook geen ramp, als onze onderwijzers niet in staat zijn, à bout portant allerlei puzzels op te lossen, en evenmin als ze niet in staat zijn om de G.G.D. van 240, 180 en 75 vlot te vinden. Laten we nuchter blijven: Waar, buiten de schoolmuren, berekent men ooit die G.G.D.? Wie, behalve een gespecialiseerd vakman, heeft ooit nodig te weten wat s.g. betekent? En zou zulke stof dan op de basisschool onderwezen moeten worden?

Men versta mij wel: Of zulke stof in de *vooropleiding* aan de orde moet komen, is hier de kwestie niet; maar de vakopleiding (de tweede leerkring) moet ze kunnen laten rusten.

De personeelsbezetting is een moeilijker probleem. Irreëel, en ook onbillijk is het, van de vakleraar-wiskunde niet alleen wat belangstelling voor de didactiek, maar zelfs gedegen didactische vakkennis te verwachten. En toch is hem de didactische vorming van de jongelui in het rekenen opgedragen. Met dit probleem worstelt de kweekschool trouwens met betrekking tot nagenoeg alle L.S.-vakken. Het is nu nog niet te zeggen, in welke richting de oplossing ooit nog eens gevonden kan worden. Eigenlijk staan we voor dit dilemma: Hebben we een mathematicus nodig met didactiek als bijvak — of juist een didacticus met wiskunde als bijvak? Ongetwijfeld is de laatstgenoemde oplossing het meest in de geest van de kweekschoolwet (ik spreek over de tweede leerkring).

Even zeker is het, dat vrijwel iedereen buiten de kweekschool, die zich voor deze zaken interesseert, de eerstgenoemde richting zal prefereren. Discussie hierover kan nuttig zijn. Hoe mijn keuze zou uitvallen, behoeft nauwelijks gezegd. Het komt mij voor, dat er veelal te weinig begrip is voor het grote belang van een verantwoorde didactiek. Eén van de oorzaken is m.i. hierin gelegen, dat didactische blunders in hun gevolgen zo uiterst moeilijk zijn te signaleren. Een uitgebreide, deskundig geleide research zou zeker op zijn plaats zijn. Maar zijn daarvoor de mensen en de mogelijkheden wel beschikbaar? En — zijn er voldoende „didactici met belangstelling voor wiskunde” om de door mij voorgestane oplossing te realiseren? Voorshands is een bevredigend antwoord op het gestelde dilemma nog niet te geven.

Mocht iemand menen, dat kweekschoolkringen geen oog hebben voor het uitzonderlijk belang van een gedegen leerstofbeheersing, dan zou het mij geducht spijten als dit artikeltje aan deze mening

voedsel zou hebben gegeven; ik troost mij met de wetenschap dat ik mijn uiterste best heb gedaan om de tegengestelde overtuiging te versterken. Maar evenveel is er mij aan gelegen, duidelijk te stellen, dat leerstofbeheersing niet meer de taak van de eigenlijke vakopleiding is. Het zij mij daarom vergund, met deze stellingen te eindigen:

1. Studie van de rekendidactiek is één der meest efficiënte methoden om zich rekenschap te geven van de fundamentele noties over getallen en derzelver bewerkingen, en om het inzicht te verdiepen in het wezen van optellen, vermenigvuldigen, enz.;
2. studie van de rekendidactiek is volslagen onmogelijk voor iemand die de te behandelen stof technisch niet beheerst;
3. leerlingen met liefde tot en belangstelling voor de wiskunde (en met dezulken is het V.H.M.O. dolblij en onze volksgemeenschap ten zeerste gediend) mag men alleen verwachten van een school, waar de kinderlijke vóórvormen van deze edele wetenschap op deskundige, d.i. op *didactisch-verantwoorde* wijze zijn verzorgd en gestimuleerd.

Geef ons jongelui in de tweede leerkring, die inderdaad kunnen spelen met de L.S.-stof en eis dan vrij van de kweekschool, dat ze onderwijzers aflevert die hun vak verstaan. Dat is, naar mijn mening, de sfeer waarin de vernieuwde onderwijzersopleiding wil werken en de geest die uit de kweekschoolwet spreekt.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN GYMNASIUM A EN B IN 1960

Wiskunde

Wat de resultaten van de dit jaar afgenomen examens betreft, kan de subcommissie mededelen, dat het gemiddeld cijfer door de A-kandidaten behaald voor de stekunde 5,1 bedraagt (vorig jaar 4,6) en voor de meetkunde 4,8 (vorig jaar 4,6). Voor de B-kandidaten bedroegen deze cijfers voor de stekunde 6,3 (5,3), voor de meetkunde 5,3 (5,3) en voor de trigonometrie en de analytische meetkunde 5,2 (5,3).

De subcommissie verwijst verder naar het uitvoerig verslag over 1959, dat haar voorgangster publiceerde. De eisen voor wiskunde voor het staatsexamen gymnasium A en B 1961 zijn daarin in extenso opgenomen. De a.s. A-kandidaten dienen goede nota te nemen van de verschillende mogelijkheden, die er bij de keuze van de examenstof zijn.

Voor de algebra zijn de onderwerpen vierkantsvergelijkingen en kwadratische functies verplicht gesteld. Hieraan dient de kandidaat één onderwerp toe te voegen en wel naar keuze:

1. de overige in het K.B. 431 voorgeschreven stof voor de algebra in klasse I—IV, met uitzondering van de logaritmen en de reeksen;
2. logaritmen, rekenkundige en meetkundige reeksen met een eindig aantal termen;

3. de beginselen van de differentiaalrekening;
4. hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde;
5. de beginselen van de statistiek.

Wat de meetkunde betreft kan de kandidaat óf stereometrie óf planimetrie kiezen.

In het eerste geval wordt wel kennis van de planimetrie geëist, maar niet expliciet gevraagd.

In het tweede geval wil de subcommissie, misschien ten overvloede, nog opmerken, dat kennis van de goniometrische verhoudingen van hoeken tussen 0° en 180° , de sinus- en cosinusregel, toepassingen ervan bij eenvoudige berekeningen in de driehoek en het verband: $a = 2 R \sin \alpha$, ook tot de leerstof van de planimetrie behoort.

Met „hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde” wordt bedoeld: de Egyptische en Babylonische wiskunde en de Griekse wiskunde tot en met Euclides, Elementen, boek I.

Tenslotte kan de subcommissie niet nalaten de wens uit te spreken, dat de vermindering van de exameneisen voor de algebra tot gevolg zal hebben, dat de studietijd nu besteed zal worden aan verdieping van inzicht, speciaal wat de functies betreft.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR DE STAATSEXAMENS H.B.S. A EN B IN 1960

Wiskunde I

h.b.s.-B. De leden van de sectie wiskunde I menen naar aanleiding van dit examen enkele opmerkingen te moeten maken. Vooral bij het schriftelijk werk bleek, dat vele kandidaten grafische voorstellingen trachten te maken door willekeurige punten te bepalen. Het is evenwel noodzakelijk systematisch na te gaan of er nulpunten, extrema, asymptoten, en dgl. zijn.

De term „kritieke punten” inplaats van nulpunten acht de subcommissie niet geschikt.

De grafieken van $\log x$, g^x , $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, het herkennen van een rechte lijn, parabool of hyperbool zouden tot de parate kennis moeten behoren. Nog steeds verwacht men de begrippen „functie” en „vergelijking”.

Maar al te vaak kan de kandidaat geen verklaring geven van de betekenis van een wortel van een vergelijking.

Het is gewenst, dat een kandidaat weet, van welke vergelijking de wortels ingevoerd worden, als men beide leden van een gegeven vergelijking kwadrateert. De toepassing hiervan op de irrationele vergelijkingen is van belang.

Ook de oplossing van ongelijkheden, o.a. kwadratische en logaritmische, verdient betere bestudering.

Het bepalen van het teken van een gebroken functie gebeurt dikwijls door het produkt van teller en noemer te nemen zonder daarvoor een verklaring te kunnen geven.

Het lijkt de subcommissie wenselijk dan maar liever de teller en de noemer aan een tekenonderzoek te onderwerpen.

Voorts bleek, dat sommige kandidaten de formules voor $\cos 2x$, het aannemen van nieuwe veranderlijken, en vergelijkingen van het type $A \sin(x+a) + B \cos(x+b) = 0$ en $\cos(x-a) = \sin 3x$, niet voldoende beheersten.

Vele kandidaten gaven echter ook blijk van een gedegen voorbereiding op het examen.

Wiskunde II

h.b.s.-B. De subcommissie voor Wiskunde II is van mening, dat de prestaties der kandidaten zich zeker niet in stijgende lijn hebben bewogen, waardoor de opmerkingen van 1958 en 1959 ongewijzigd van kracht blijven.

De correctie van het schriftelijk werk voor de beschrijvende meetkunde werd dikwijls bemoeilijkt door zeer slordige en onnauwkeurige constructie. Bij het mondeling onderzoek bleken de meest eenvoudige grondconstructies dikwijls niet bekend te zijn. De vaardigheid liet soms veel te wensen over, waardoor het uitwerken van een vraagstukje te tijdrovend werd. Vele kandidaten konden geen stereometrische verklaring geven van de gebruikte constructies. Zo lieten sommigen zelfs verstek gaan bij de vraag waarom een punt in een vlak ligt, als ze dit werkstukje met behulp van een hoofdlijn hadden uitgevoerd.

Het schriftelijk werk voor stereometrie gaf, in het bijzonder wat de tekeningen betreft, veelal een slordig beeld, een gevolg van te geringe vaardigheid in het maken van stereometrische tekeningen. Onjuiste oplossingen of het geheel niet kunnen vinden van oplossingen waren hiervan het gevolg.

Bij het mondeling onderzoek in de stereometrie bleek voor verscheidene kandidaten het construeren van de afstand van twee kruisende rechten, grote moeilijkheden te geven, terwijl deze constructie toch in elk leerboek der stereometrie vermeld staat. Het bewijs dat twee rechten loodrecht kruisen, werd herhaalde malen foutief teruggebracht tot loodrechte stand van twee vlakken.

Bovendien bleken vele kandidaten de stellingen in de rechthoekige driehoek, die betrekking hebben op de lengten van lijnstukken, tijdens de behandeling van een stereometrisch vraagstuk, niet tot hun beschikking te hebben, hetgeen de oplossing van het vraagstuk ten zeerste stagneerde.

Wiskunde

h.b.s.-A. Doordat vele kandidaten het functiebegrip niet goed onder de knie hadden, misten ze de goede oplossing van vraagstuk 2 voor algebra. Daardoor ook zagen de meeste kandidaten geen kans om na het schetsen van de grafieken van bijv. de functies x^2 en $x+2$ de oplossing van de ongelijkheid $x^2 > x+2$ uit deze grafieken af te lezen.

De kennis omtrent de kwadratische functie en haar grafiek liet veel te wensen over.

De subcommissie kan geen genoegen nemen met uit het hoofd geleerde formules voor de coördinaten van de top van een parabool.

Dat $(x-2)^2$ ook de waarde nul kan aannemen werd slechts door een enkele kandidaat uit zichzelf opgemerkt.

Het is de subcommissie opgevallen, dat de definitie van logaritme, wortel van een vergelijking, niet tot de kennis van de kandidaten behoorde.

Ondanks de waarschuwing in het verslag van 1959 is het de subcommissie opgevallen, dat de begrippen congruentie en gelijkvormigheid van driehoeken voor een aantal kandidaten nog steeds niet duidelijk zijn.

Ook had een groot aantal van hen moeilijkheden met de eenvoudigste grondconstructies uit de vlakke meetkunde.

De subcommissie stelt het op prijs, dat de kandidaten met de begrippen sinus, cosinus en tangens bekend zijn.

Mechanica

h.b.s.-B. De subcommissie zou ongeveer dezelfde opmerkingen kunnen maken als ze de laatste jaren heeft gedaan, daar bij herhaling dezelfde tekorten in de kennis

van de kandidaten aan te wijzen zijn. Speciaal wijst de subcommissie nog op de gebrekkige kennis van de centripetale kracht, waardoor b.v. het derde vraagstuk van het schriftelijk werk een fiasco werd; van het verband tussen massa en gewicht, en van de energiebeschouwingen. Veel kandidaten zijn te traag in het opzetten van een volledige, overzichtelijke figuur, en het op vlotte wijze bepalen van het type van het te behandelen probleem. Het viel de commissie verder op, dat vrij veel kandidaten blijkbaar slechts een deel van de stof hadden bestudeerd, met name datgene wat in de aanvang van een cursus pleegt te worden onderwezen. De algemene indruk van de resultaten is van die aard, dat er niet van een verbetering vergeleken bij de vorige jaren gesproken kan worden.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

Mathematica & Paedagogia (VII, 20; 1961)

H. CARTAN, Volume des polyèdres;

G. PAPY, Suggestions pour un nouveau programme de mathématique dans la classe de sixième;

NACHTERGALE, MOGENSEN, PELSMAEKER, DEBBAUT, VAN HOUT, Congresverslag „Taal en symbolen in de wiskunde”.

School science and mathematics (LXI, 7; okt '61)

B. H. GRUNDLACH, Modern teaching trends in arithmetic;

TH. G. OVERMIRE, Mathematics in high school biology.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (XL, 215; mei-juni '61)

G. CHOQUET, L'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire et à l'école secondaire;

L. JERONNEZ, Les reglettes de G. Cuisenaire;

A. N. KOLMOGOROV, La profession de mathématicien;

M. BARBUT, Projet de programme de mathématiques dans les classes de seconde A et B.

Praxis der Mathematik (III, 9; sept. '61)

F. W. BAUER, Topologische lineare Räume;

J. WENIGER, Zum System der Zahlbegriffe;

KL. KURSAWE, Grundbegriffe der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung;

H. DÜCKER, Zahlenfolge für $\sqrt{5}$;

A. KLAR, Näherungsformel für den Ellipsen umfang.

L'enseignement mathématique (VI, 4; dec. '60)

A. CHATELET, Les corps quadriques;

PH. M. QUAN, Introduction à la théorie de la relativité restreinte;

E. ASPLUND and B. GRÜNBAUM, On the geometry of Minkowski planes.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XIV, 5; okt. '61)

A. SIEBEL, Differenzen- und Summenrechnung, Grundlage und Hilfsmittel der Analysis;

H. ATHEN, Die vektorielle Behandlung der allgemeinen Gleichung 2. Grades;

H. FRASCH, Kreisteilungsbeziehungen;

G. STEIDLE, Zur Behandlung des Zahlenlottos im Unterricht.

OVER DOCUMENTATIE VAN LEERMIDDELEN (MODELLEN ENZ.) BIJ HET WISKUNDE-ONDERWIJS

door

Dr. H. TURKSTRA

Hilversum

De redactie van Euclides meent dat wel behoefte bestaat aan een documentatie van de modellen, grafieken, strips, films e.d., die als leermiddelen bij het onderwijs in de wiskundige vakken aan onze scholen voor voortgezet onderwijs (V.H.M.O., U.L.O., Kweekschool, H.T.S.) gebruikt worden.

Ten einde tot een dergelijke documentatie te komen, doet de redactie een beroep op hare lezers om daarover informatie te verlenen aan schrijver dezes (Moerbeilaan 58, Hilversum), die de binnengekomen berichten dan t.z.t. hoopt te verwerken in een samenvattend artikel in ons blad.

Voor het maken van een goed overzicht zou het dienstig zijn, dat u gegevens vermeldt over de volgende punten:

1. welke modellen, enz. u zelf reeds gebruikt;
2. welke ervaring u zelf daarmee hebt (zeer te waarderen, matig te waarderen, weinig waarde);
3. bij welke firma's deze worden uitgegeven;
4. modellen, die gemakkelijk zelf of door de amanuensis kunnen worden gemaakt;
5. welke andere, door u nog niet gebruikte, leermiddelen op dit gebied u nog kent;
6. eventueel nog andere informatie.

Gaarne zou ik uwe opgaven ontvangen vóór 1 april 1962, waarna het samenvattend bericht door mij kan worden opgesteld.

Met enige informatie kan ik u misschien nu reeds dienen, doordat ik in opdracht van de 3 Pedagogische Centra voor het V.H.M.O. de tentoonstelling *Vijfde Didactica* in sept. 1959 te Darmstadt bezocht en mijn bevindingen in een artikel van het Chr. Paed. Studieblad publiceerde. Met toestemming van de redactie van dit blad laat ik dit artikel — met weglating van enkele niet terzake dienende passages — hier volgen:

Wiskunde

Het uitgebreidst was de collectie „*Mathematische Modelle Darmstadt*“, welke verzameling meer dan honderd verschillende modellen telt, die alle o.a. bij het onderwijs aan het „Institut für Geometrie

und Kinematik der Technischen Hochschule Darmstadt" worden gebruikt. Men treft er draadmodellen aan van de bekende regelmatige veelvlakken tot en met die van één- en tweebladige hyperboloïden, voorts hulpmiddelen voor beschrijvende meetkunde (o.a. scheve en loodrechte axonometrie), vlakke en ruimtekrommen, enz.

De verkoop aan 't buitenland wordt verzorgd door de firma *Karl Kolb*, Frankfurt am Main, Untermainkai 34. Een uitvoerige catalogus met prijslijst werd aan geïnteresseerden uitgereikt. Voorts kwam ook de bekende firma *Phywé A. G. Göttingen* met een vrijwel nieuwe verzameling stereometrische modellen op deze tentoonstelling uit.

Enige ingenieuze modellen voor het planimetrie-onderwijs (stelling van Pythagoras, oppervlakte en omtrek van de cirkel enz.) troffen bijzonder onze aandacht. Verschillende van deze modellen kunnen door bemiddeling van de heer J. Verhaar uit Bussum (Nederlandse vertegenwoordiger van de Phywé) rechtstreeks aan de scholen worden geleverd. Hij heeft zich ook bereid verklaard deze b.v. op een jaarvergadering van Wimecos of Liwenagel tentoon te stellen.

Een mooie verzameling (vrijwel gelijksoortig aan die van Phywé) bracht ook de firma *Rudolf-Weber-Ulrich* uit Köln, Reinoldstrasse 10 mee.

De firma *Georg H. Knickmann*, Hamburg I, Hühnerposten 11, gaf ook uitgebreide voorlichting voor moderne hulpmiddelen bij het reken- en ruimteleeronderwijs op de Volksschule.

In Heft 1 t/m Heft 8 wordt dit onderwijs van het 1e t/m 9e leerjaar (d.i. dus L.S. en de eerste klassen van het V.H.M.O.) systematisch opgebouwd, volgens een methode door *Prof. Dr. Gustav Rose* uitgedacht.

Wat dit rekenonderwijs, speciaal het aanvangend rekenonderwijs, betreft, vermelden we een zeer originele methode, die de naam draagt van „Heidelberger Unterrichts-Hilfen", Arbeitsmittel für den Rechenunterricht.

Hierbij wordt met vrucht toegepast het psychologisch phomeen van „die Farbenreagenz" bij leerlingen. Het is uit de psychologie n.l. bekend, dat leerlingen, bij wie de Formreagenz nog onvoldoende functioneert, vaak door Farbenreagenz tot een zeker inzicht in mathematische figuren en getallengroepen kunnen worden gebracht. De uitgever van deze leermiddelen is *Bohemia*, Abt. Lehrmittel, Heiligkreuzsteinach, Krs. Heidelberg.

Voor astronomie gaf *Flemmings Verlag* Hamburg 39 de volgende 4 leermiddelen:

1. Flemmings Räder-Tellurium DM 185;
2. Cinhelium DM 175;
3. Flemmings Koördinatenglobus DM 220;
4. Schattenplanetarium, zonder prijsvermelding.

Men kan er prospecti van aanvragen.

BOEKBESPREKING

Wolfgang Franz, *Topologie I, Allgemeine Topologie*. Sammlung Götschen, Band 1181, W. de Gruyter, Berlin, 1960, 144 pag. D.M. 3,60.

In dit zeer aanbevelenswaardige boekje wordt in vier afdelingen een introductie in de algemene topologie gegeven. In het eerste deel (54 pag.) wordt de definitie van een topologie goed bestudeerd. Het tweede deel introduceert de scheidingsaxioma's en het begrip kompakt. Het derde deel handelt over metrische ruimten en geeft o.a. de stellingen van Urysohn over metriseerbaarheid van topologische ruimten. Het vierde deel introduceert de dimensie-theorie.

Wanneer men de topologie wil leren kennen als de z.g. elastiekjes-meetkunde, komt men hier niet aan zijn trekken. Maar veel belangrijker is, dat hier in kort bestek veel te vinden is van wat men van de topologie b.v. in de moderne analyse nodig heeft.

De auteur geeft prijzenswaardige zorg aan de didactiek. De gedeelten met kleine letters bevatten veel up to date informatie en details. Met belangstelling zien we het tweede boekje (over algebraïsche topologie) tegemoet: F. van der Blij

S. Lorent en R. Lorent, *Algebra*. Deel 1 voor de 5e en 4e klassen, 220 blz., Bfr 85, deel 2a voor de 3e, 2e en 1e klassen van de Latijn-Griekse en economische afdelingen, 342 blz., Bfr 150, deel 2b voor de 3e, 2e en 1e klassen van de Latijn-Wiskunde, Latijn-Wetenschappen en wetenschappelijke afdelingen, 559 blz., Bfr 230. Overeenkomstig het leerplan. Vertaald door A. van Twembeke. A. de Boeck, Brussel, 1961.

De Nederlandse leraar zal zich niet in de eerste plaats interesseren voor de kwaliteiten van het boek. Laat ik dus volstaan met mee te delen, dat door de schrijvers grote zorg besteed is aan dit werk. Meer belang zal hij stellen in de gegevens omtrent het Belgische onderwijs, die hem langs deze weg verstrekt worden. Vertaald in de bij ons gangbare terminologie is deel 1 bestemd voor de 2e en 3e klasse van de onderbouw, deel 2a voor de bovenbouw van de A-afdeling en deel 2b voor de bovenbouw van de B-afdeling. Deze bovenbouwen bestaan uit drie klassen; in de „B-afdeling" wordt in elk van deze klassen zeven uur wiskunde gegeven.

Zoals te verwachten is, vinden we alle onderwerpen, die op ons programma thuis horen, in dit boek terug. Van enige besnoeiing, zoals in ons land bij de jongste programmawijziging heeft plaatsgehad, is geen sprake. Alle onderwerpen, die in ons programma niet meer opgenomen zijn of in de circulaire van de inspectie van het examen uitgesloten zijn, vindt men hier in extenso behandeld. De grafieken worden behandeld met behulp van een Y-as, terwijl geen duidelijk onderscheid gemaakt wordt tussen grafieken van functies en van vergelijkingen.

De schrijvers hebben ernaar gestreefd moderne inzichten in hun terminologie te doen doordringen. Zo vinden we een korte beschrijving van verzamelingen en een moderne definitie van relaties en functies als deelverzamelingen van het cartesisch produkt. Een integrerend deel van de behandelingswijze van de algebra vormen deze

vernieuwingen echter niet; de behandeling blijft in hoofdzaak traditioneel. Men mag dit niet te zeer als verwijt opvatten, want zolang het leerplan geen rekening houdt met moderne opvattingen, is het moeilijk deze volledig tot hun recht te doen komen. De definities van limiet en continuïteit weerspiegelen de moderne tendenties nog niet.

Talrijke onderwerpen vinden we behandeld, waar wij met geen mogelijkheid aan zouden kunnen toekomen. In de volgorde, waarin ze in het boek voorkomen, wil ik ze kort vermelden. Allereerst dan de variaties, permutaties en combinaties zonder en met herhalingen, de toepassing daarvan op de afleiding van het binomium van Newton en de beginselen van de kansrekening. Dan volgt een uitgebreid hoofdstuk over determinanten. Als voorbereiding zijn bij het oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden de wortels al in determinantvorm geschreven. Thans komen determinanten van de n° orde in bespreking. De fundamentele eigenschappen worden bewezen, veelal met behulp van volledige inductie naar de orde n . Belangrijk is hierbij natuurlijk de ontwikkeling van een determinant naar de minoren van een rij of kolom. De theorie besluit met het vermenigvuldigen van determinanten. Aan matrices en de betekenis daarvan bij transformaties wordt enige aandacht besteed. Het hoofddoel van de behandeling van determinanten is echter de toepassingen daarvan bij het oplossen van stelsels vergelijkingen. De regel van Cramer voor het oplossen van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden wordt bewezen en verder komen ter sprake homogene stelsels en stelsels van $n+1$ lineaire vergelijkingen met n onbekenden. Deze stelsels vormen het uitgangspunt van een theorie van het elimineren.

Bij de differentiaalrekening wordt het theorema van Rolle vermeld; het theorema wordt begrijpelijkerwijs slechts intuïtief bewezen. Hierna volgt de middelwaardestelling en met behulp daarvan het bewijs van de stellingen, dat een functie, waarvan de afgeleide overal 0 is, een constante functie is en dat een functie, waarvan de afgeleide overal positief (negatief) is, een stijgende (dalende) functie is. Verder wordt nog de regel van l'Hôpital afgeleid.

Bij de herhaling van het getalbegrip worden de begrippen ring en lichaam ingevoerd en ook, zij het terloops, het begrip groep. Reële getallen worden als sneden gedefinieerd. Bewezen wordt, dat de reële getallen een lichaam vormen. Daarna komen de complexe getallen aan de orde. Deze worden ingevoerd als getallenparen. Ook nu weer wordt bewezen, dat de complexe getallen alle eigenschappen van een lichaam hebben. De voorstelling van de complexe getallen door vectoren in het platte vlak geeft aanleiding tot het bewijs van de stelling van De Moivre en het oplossen van binomiaalvergelijkingen. Aangetoond wordt, dat ook de gehele resp. de rationale getallen door middel van getallenparen ingevoerd kunnen worden.

Het getal e wordt gedefinieerd als $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$. Eerst wordt bewezen, dat deze limiet bestaat voor natuurlijke waarden van m door aan te tonen, dat $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ voor toenemende m toeneemt en begrensd is, en daarna dat de zo gevonden limiet ook bereikt wordt voor m reëel. Het getal e blijkt irrationaal te zijn, hetgeen door een eenvoudig bewijs aangetoond wordt. Het spreekt vanzelf, dat hierna de natuurlijke logaritmen en de differentiatie van de exponentiële en logaritmische functies volgt.

Uit het theorema van Rolle wordt de reeks van Taylor en ook die van Mac-Laurin afgeleid, met bespreking van de restterm. Daarna volgen reeksontwikkelingen van $(1+x)^m$, e^x , $\sin x$, $\cos x$ en $\ln(1+x)$.

Ten slotte zien we bij de integraalrekening, dat ook de methode van de partiële

integratie en die van integratie door substitutie besproken worden.

Al met al zien we dus, dat onze zuiderburen, althans wat betreft de omvang van hun programma, een grote voorsprong op ons hebben.

Over deel 2a kan ik kort zijn. Het is in wezen een verkorte uitgave van deel 2b. Het bevat in grote trekken de stof, die bij ons voor algebra aan de B-leerlingen wordt onderwezen.

P. G. J. Vredenduin

Oskar Perron, *Irrationalzahlen*, Göschens Lehrbücherei, Band 1, vierte Auflage, Berlin, 1960, Walter de Gruyter & Co., VIII+202 pg.

De eerste druk stamt uit 1920. Deze vierde druk is bijgewerkt o.a. door literatuur-verwijzingen. We geven een overzicht van de indeling van het boek.

Hoofdstuk 1—3, pg. 1—89: een uitvoerige inleiding in de theorie van het reële getal (uitgaande van sneden) tot en met de exponentiële functie.

Hoofdstuk 4, pg. 90—133: begint met de kettingbreuken; vervolgens komen enkele andere voorstellingen van de reële getallen voor, d.w.z. enkele andere methoden worden behandeld die een reëel getal voorstellen als limiet van een rij rationale getallen. Speciale aandacht wordt gegeven aan voorstellingen waaruit eenvoudig de irrationaliteit van de limiet geconcludeerd kan worden.

Hoofdstuk 5, pg. 134—173: Approximatie door rationale getallen. Allereerst het bekende resultaat van Hurwitz dat bij iedere ξ oneindig vele gehele p, q zijn met $|q\xi - p| < \sqrt{5}$. Verder wordt uitvoerig stilgestaan bij lineaire stelsels; rationale afhankelijkheid etc. Dit hoofdstuk eindigt met enkele stellingen over gelijkverdeling.

Hoofdstuk 6, pg. 174—198: Algebraïsche en transcendente getallen. Hierin worden de getallen van Liouville ingevoerd. Aan het slot wordt de transcendentie van e en π bewezen.

Dit boek is volledig elementair, valt naar ons begrip in twee verschillende delen uit een. De lezer van Euclides zal als regel in eerste instantie in het tweede, getal-theoretische, deel (hoofdstuk 4, 5 en 6) wel iets van zijn gading kunnen vinden.

F. van der Blij

Prof. dr. M. Barner, *Differential- und Integralrechnung I*, Walter de Gruyter & Co. — Berlijn, 1961, Sammlung Göschel dl 86/86a, 176 blz.

Een axiomastelsel voor de reële getallen is de grondslag waarop de schrijver de theorie streng logisch opbouwt. Men vindt dus de eigenschappen van getallenlichamen, de beginselen van de leer van de verzamelingen, rijen en reeksen enz.

De logaritme en de goniometrische functies worden door functionaal vergelijkingen geïntroduceerd, de exponentiële en cyclometrische functies verschijnen als de inverse functies.

Zoals te verwachten was een degelijk boekje. Tot besluit een opmerking. Op blz. 166 moet $\gamma(x)$ en $\sigma(x)$ resp. $ch\ x$ en $sh\ x$ zijn.

Burgers

J. Breuer, *Initiation à la théorie des ensembles*, een Franse vertaling, verzorgd door A. Gloden, van het oorspronkelijke boekje verschenen bij Hermann Schroedel, Verlag K. G. Hannover, onder de titel: *Einführung in die Mengenlehre*. Uitgever: Dunod — Parijs, 121 blz, NF. 8.80.

Een alleraardigst boekje, dat we zo zouden willen aanbevelen voor onze leerlingen van de hoogste klassen. Door het origineel, of de Franse vertaling te gebruiken zou men de leerling tot extra aandacht dwingen, waardoor de bestudeerde paragrafen beter zouden bekijken.

Na een korte inleiding, worden eerst eindige verzamelingen behandeld, waarmede de nieuwe begrippen: deelverzameling, complementaire verzameling, vereniging en doorsnede van verzamelingen, aequivalente verzamelingen en kardinaalgetallen worden ingevoerd.

Dan is de tijd rijp over te stappen naar oneindige verzamelingen, aftelbaarheid, niet-aftelbaarheid, geordende verzamelingen, continue puntverzamelingen, verdichtings- en condensatiepunten, open en gesloten verzamelingen, overal dichte en perfecte verzamelingen.

Een bespreking van de meest bekende paradoxen ontbreekt niet.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

61. Tien brieven worden op willekeurige wijze in tien bijbehorende geadresseerde enveloppen gedaan. Er blijken vijf in de goede en vijf in verkeerde enveloppen terecht gekomen te zijn. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? Geef een oplossing, die voor generalisatie vatbaar is.

62. a. De benzinetank van elk van 7 auto's bevat a liter benzine. De auto's verbruiken elk 1 liter benzine per km. Door handig met de benzine te manoeuvreren is het mogelijk maximaal b km door één van de auto's te laten afleggen, terwijl de overige zes weer op hun basis kunnen terugkeren. Ze vertrekken alle van hetzelfde punt. Druk b in a uit.

b. Men kan de opgave compliceren door de volgende toevoeging. Er wordt een achtste auto toegevoegd, waarvan de tank $\frac{1}{7}b$ liter benzine bevat. Nu kan één van de auto's $b + 1$ km afleggen, terwijl de andere weer op hun basis terugkeren. Bereken b .

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

59. a. Zie fig. 1. S is een willekeurig punt van AP . Door driehoek ABR te beschouwen, zien we, dat PT evenwijdig aan AB is. PQ is de gevraagde loodlijn.

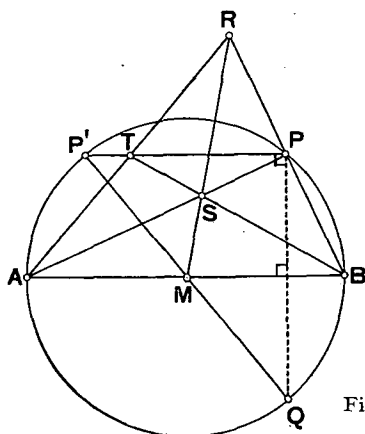


Fig. 1

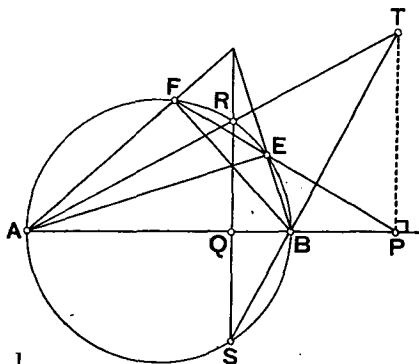


Fig. 2.

b. Zie fig. 2. PEF is een willekeurige lijn door P , die de cirkel snijdt. De theorie van de regelmatige vierzijde levert, dat RS de poollijn van P t.o.v. de cirkel is. AR en SB snijden elkaar in een punt T . PT is nu de gevraagde loodlijn.

c. Zie fig. 3. CDE is een willekeurige lijn, die de cirkel en AB in drie verschillende punten snijdt. FH is de poollijn van C t.o.v. de cirkel. Daarna wordt door B een lijn getrokken, die evenwijdig aan FH is, op dezelfde manier als onder a een lijn evenwijdig aan AB getrokken is. De zo geconstrueerde lijn voldoet aan de vraag.

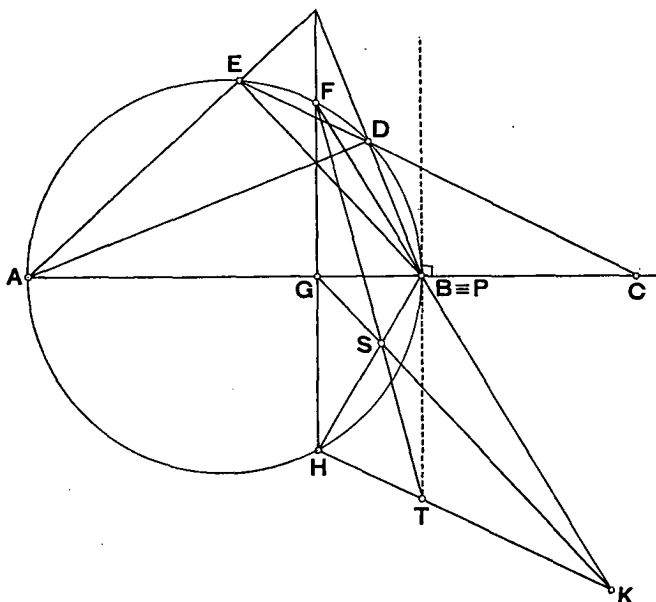


Fig. 3

60. De voorwaarde hiervoor is, dat n het kleinste getal is met de eigenschap, dat $n!$ 10^3 factoren 5 bevat. We onderzoeken eerst, hoeveel factoren 5 het getal $5^k!$ bevat. Onder de getallen 1 tot en met 5^k zijn er 5^{k-1} deelbaar door 5, 5^{k-2} deelbaar door 5^2 , 5^{k-3} deelbaar door 5^3 , enz. Het gevraagde aantal factoren 5 is dus

$$5^{k-1} + 5^{k-2} + 5^{k-3} + \dots + 1 = \frac{1}{4}(5^k - 1).$$

Het aantal factoren 5, dat $(a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \dots + a_{k-1} 5)!$ ($0 \leq a_i \leq 4$) bevat, is dus

$$\frac{1}{4}(a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \dots + a_{k-1} 5 - a_0 - a_1 - \dots - a_{k-1}).$$

Dit moet gelijk aan 1000 zijn en dus moet

$$a_0 5^k + a_1 5^{k-1} + \dots + a_{k-1} 5 = 1 \cdot 5^6 + 1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}.$$

(In het rechter lid is 4000 geschreven als som van machten van 5.) Hieruit volgt $k=5$, $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=0$ en verder $5a_4=4+a_4$, dus $a_4=1$. Het gevraagde getal is dus $3125 + 625 + 2 \cdot 125 + 5 = 4005$.

Zojuist verschenen:

voor het V.H.M.O.

INHOUD

- I. Getallen, functies en limieten
- II. Differentiaalrekening
- III. Integraalrekening
- IV. Enige toepassingen van de D- en I-rekening
- V. De log. en exp. functies

P. Noordhoff N.V.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING door drs. J. C. Kok e.a.

UIT HET VOORWOORD:

Leidende gedachte is geweest de grootste moeilijkheden uiteen te rafelen. Zo hebben wij de behandeling van afgeleide functies gesplitst in differentie, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt, waarbij - door het opnemen van enige vraagstukken - de mogelijkheid gegeven wordt, met die tussenliggende begrippen ook enigszins te oefenen. Op dezelfde manier is de afleiding van de kettingregel over enige paragrafen verdeeld. Verder is de invoering van het differentiaalquotiënt volledig losgemaakt van de grafische voorstelling, om het begrip niet van het begin af te vervalsen.

PROF. DR. P. H. VAN LAER: VREEMDE WOORDEN IN DE NATUURKUNDE

EN NAMEN DER CHEM. ELEMENTEN

ingenaaid f 3.75, gebonden f 4.50

„Dit boekje dient iedere leraar in de natuur- en scheikunde steeds bij de hand te hebben, één exemplaar thuis en één op school!” (Faraday)

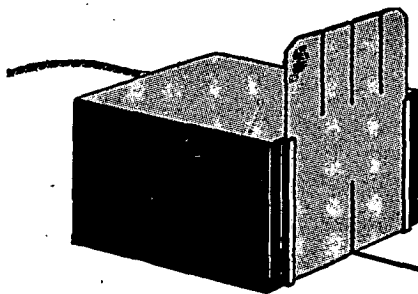


P. Noordhoff N.V. - Groningen

DR. J. H. RAAT:

I: algemeen gedeelte, vloeistoffen, gassen, warmte

f 1,90



25 proeven, vrijwel alle geïllustreerd en waar nodig van een inleiding voorzien; steeds met een opgave van benodigheden, opdrachten en gelegenheid tot het aantekenen van meetresultaten.

NATUURKUNDE - PRACTICUM I

„eenvoudig, zonder kostbare apparatuur”

Tot mijn grote genoegen is dit een practicumboekje waar ik enthousiast over kan zijn.

(G. Boekhoff in WEEKBLAD VAN DE A.V.M.O.)

Bij alle voordelen, die het werken met een practicum kan bieden, zouden wij i.v.m. dit werkje nog willen noemen, dat hier inderdaad een aantal proeven geboden wordt, die binnen het vermogen van de leerlingen liggen.

(De MULO-SCHOOL)

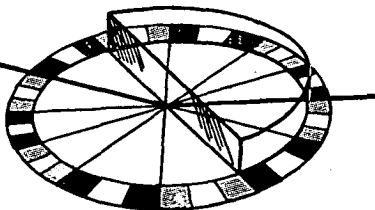
Zesentwintig eenvoudige leerlingenproeven die geen kostbare apparatuur vergen en elk binnen een lesuur van 50 minuten kunnen worden uitgevoerd. Een boekje waarvan elke natuurkundeleraar profijt zal hebben.

(ADVIES)

Thans ook deel II:

licht, geluid,
magnetisme, elektriciteit

f 1,90



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ter perse: SUPPLEMENT MET WIJZIGINGEN bij het



REPETITIEBOEK NATUURKUNDE

voor het VHMO, door Drs. L. H. Kammerer en Dr. J. H. Raat

De wijzigingen in dit supplement betreffen voornamelijk de mechanica en dienen om het boek weer volledig af te stemmen op de exameneisen.

P. Noordhoff N.V. - Groningen



Aan de ACADEMIE MINERVA (afd. H.T.S.) wordt gevraagd:
een leraar in wis- en natuurkunde of wiskunde en mechanica

Volledige betrekking. Salaris volgens rijksregeling. Inlichtingen bij de directeur, Petrus Driessenstraat 3, Groningen, tel. 05900-20515. Sollicitaties met uitvoerige inlichtingen binnen 10 dagen na het verschijnen van dit blad aan burg. en weth.

De Leidsche Onderwijsinstellingen zoeken voor haar opleiding voor de akte *Wiskunde MO B* een medewerker.

Hem zal worden opgedragen het onderdeel

DIFFERENTIAAL en INTEGRAALREKENING DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

In het bijzonder worden zij uitgenodigd te reflecteren, die ervaring hebben bij het opleiden voor de akte *Wiskunde MO B*.

Brieven met uitvoerige inlichtingen worden gaarne ingewacht bij de directie van de Leidsche Onderwijsinstellingen, Zijlsingel te Leiden.