

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962
V - 1 FEBRUARI 1962

INHOUD

Prof. Dr. O. BOTTEMA, ereid van WIMECOS	129
Prof. Dr. O. BOTTEMA: Verscheidenheden	131
Dr. P. G. J. VREDENDUIN: Een Amerikaanse test	136
Commissie Modernisering leerplan Wiskunde	144
Wiskunde-Olympiade 1962	152
Boekbespreking	155
Nieuwe mechanica-opgaven	158
Recreatie	159

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

Prof. Dr. O. BOTTEMA ERELID VAN WIMECOS

Door de algemene vergadering van Wimecos van 28 december 1961 werd aan Prof. Dr. O. Bottema het erelidmaatschap van Wimecos aangeboden. Voorzitter Dr. J. H. Wansink sprak het nieuwe erelid als volgt toe:

Prof. Bottema,

zo juist heeft de algemene vergadering van Wimecos besloten u het erelidmaatschap van onze vereniging aan te bieden. Voor ik u vraag, of u ons de eer aan wilt doen dit erelidmaatschap te aanvaarden, rust op mij de gaarne aanvaarde plicht kort uiteen te zetten, wat ons tot dit besluit heeft gebracht.

Van 1937—1941 was u bestuurslid van Wimecos. U hebt in deze jaren de financiën van onze vereniging beheerd. Uw benoeming tot hoogleraar te Delft in 1941 maakte aan deze relatie een einde. Maar dat betekende geenszins dat u na 1941 voor ons een vreemde bent geworden.

Uw belangstelling voor de Nederlandse wiskundeleraar en zijn werk is gebleven en u hebt aan deze belangstelling op een zeer bijzondere wijze uitdrukking weten te geven, met name in de lange reeks van korte bijdragen in Euclides, die ons onder de naam van „Verscheidenheden” allen bekend zijn. U hebt daarbij in 1961 het recordgetal van 50 weten te bereiken. Het is jammer dat niet alle aanwezigen nu reeds uw vijftigste nummer, een feestnummer fonkelend van mathematische humor, hebben kunnen lezen. Door een administratief misverstand is dit niet in het decembern timer van Euclides verschenen maar zal eerst in het volgend nummer van ons tijdschrift worden opgenomen¹⁾. Ook nummer 51 is midde l erw ijl reeds ter perse.

Van uw belangstelling en liefde voor het wiskunde-onderwijs in onze middelbare scholen getuigde uw oratie „de dienst der wiskunde”, daarvan getuigen al uw bijdragen in ons tijdschrift. Van uw positieve waardering voor de onderwijsmethoden bij het v.h.m.o. getuigen uw geslaagde pogingen om het instituut der instructeurs in Delft ingang te doen vinden.

U beschouwt — en terecht — als meest waardevolle element in

¹⁾ blz. 131

de vorming van de leraar zijn opleiding tot vakmanschap, zich uitend in een volkomen beheersing van de door hem te onderwijzen leerstof, ingebed in een geheel van hogere dimensies, waarbij we dit laatste woord niet letterlijk dienen te interpreteren. Door al uw injecties hebt u steeds weer willen bijdragen tot een verruiming van blik en een verdieping van inzicht op het terrein van de schoolwiskunde zelf.

Uw lezing van straks zal niet de eerste zijn, die u voor ons, leraren, houdt.

Bijna een kwart eeuw geleden sprak u op een vergadering van Wimecos over „Maxima en minima bij vierhoeken met gegeven zijden” (Euclides, XV, 1 e.v.). Op het derde Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen hield u een lezing over „het wiskundig gedeelte van het eindexamen der H.B.S.” Ook dit vinden we in Euclides opgenomen (Euclides XII, 284 e.v.).

Al deze geschriften — er zijn er nog meer, ik denk b.v. aan uw hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, die in de Servire-reeks verschenen — zijn het lezen en herlezen voor ons, mensen uit de praktijk van het v.h.m.o., nog steeds de moeite waard.

Maar al deze geschriften zijn reeds van relatief oude datum. Waarom bieden we u dan op dit moment het erelidmaatschap aan?

Omdat u voor ons de verpersoonlijking bent van de band die er tussen de hoogleraar-wiskunde en de leraren-wiskunde moet bestaan. In Duitsland kennen we een tijdschrift: *Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität*. Prof. Behnke staat hier o.a. achter. Wij cultiveren deze Zusammenhang niet op Duitse wijze. Maar we constateren wel met vreugde dat er in ons land tal van instanties zijn die zich voor de juiste samenwerking van school en universiteit inspannen. Vele hoogleraren wijden jaarlijks een deel van hun energie aan de poging om de leraren in functie een hernieuwde oriëntatie t.a.v. de ontwikkeling der wiskunde voorzover die voor het v.h.m.o. van wezenlijke betekenis is mogelijk te maken. U staat hier niet buiten zoals o.m. blijkt uit het feit dat u zowel deel uitmaakt van de Adviesraad voor de Wiskundige Olympiade als van de Adviescommissie voor de vakantiecursussen vanwege het Mathematische Centrum, waarnaar ik in mijn openingswoord heb verwezen.

Wij bieden u het erelidmaatschap van Wimecos aan, Prof. Bottema, omdat we daarmee tot uitdrukking willen brengen hoezeer we uw permanente activiteit voor de belangen van het wiskunde-onderwijs waarderen.

Dan rest me nog slechts de vraag: neemt u dit erelidmaatschap aan?

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

L. Feestnummer.

Wie wel eens op een auctie koopt, weet dat men een begeerd boek verwervend, soms een of meer geschriften als toegift krijgt, die in de veilingscatalogus achter termen als „en enige andere” of „bijgevoegd” verborgen gaan. Het was op deze wijze dat wij in het bezit kwamen van een cahier dat volgeschreven bleek te zijn met wat men het best rijmelarij kan noemen. Het merkwaardige was echter dat de meeste versjés betrekking hadden op een wiskundig onderwerp. Daar uitingen van dit genre in onze taal naar ons beste weten schaars zijn — onze persoonlijke kennis beperkt zich tot een mnemotechnisch kwatrijn ter bepaling van dertien cijfers van het getal pi — worden hier enkele voorbeelden afgedrukt. Het vijftigste nummer der *Verscheidenheden* is daarvoor niet minder geschikt dan elk ander van deze rubriek.

Daar in het manuscript elke naamsaanduiding en trouwens ook elke datering ontbreekt, blijft men aangaande de auteur in het duister tasten. Op grond van een grafologisch onderzoek werd hij in het einde der negentiende eeuw geplaatst, maar een feit is dat zowel de frivoliteit der *gay nineties* als de stemming van het *fin de siècle* ten enenmale ontbreken. Tekstkritische beschouwingen, die een enkele *terminus post quem* opleveren, maken het niet onwaarschijnlijk dat het hier een persoon betreft die een enkel jaar na de laatste eeuwwende het levenslicht aanschouwde. De schriftkundige analyse gaf nog enige interessante aanwijzingen omtrent zijn karakterstructuur, die hier onvermeld kunnen blijven.

Wat de vorm aangaat toont onze schrijver een duidelijke voorkeur voor het ierse sonnet; de themata zijn vooral in de oudere rijmen hoofdzakelijk aan de elementaire wiskunde ontleend, met een zekere nadruk op meetkundige hoofdstukken.

Uit latere proeven blijkt hier en daar bekendheid met wat hoger gelegen gebieden der mathesis, maar of die kennis diepgaand is geweest, lijkt ons zeer de vraag. Hier volgt een karakteristiek voorbeeld van het werk uit het vroegste periode. Er kan uit blijken

dat onze auteur behoorlijk op de hoogte was van de goniometrische functies en hun polen.

Een jongmens aan de Rio del Pecans
 Zei tot zijn vriendin: nog één week, Ans,
 En ik vertrek uit dit land
 Naar het tweede kwadrant,
 Maar mij duizelt de hoogte der secans.

Achter de eenvoud der woorden ligt hier onmiskenbaar een zekere ruimtevrees verscholen. Geserreerder, persoonlijker ook, komt deze tragiek tot uiting in de volgende regels. Vermoedelijk liggen daaraan eigen levenservaringen ten grondslag, bijvoorbeeld een te abrupte overgang van de planimetrie naar het driedimensionale denken:

Er is een triangel in Cadzand,
 Die uitgeleend werd aan een jazz-band.
 Een succes is het niet:
 Hij kijnt weg van verdriet
 En een vóórtdurend heimwee naar Platland.

Ook in de volgende bijdrage zwijgt de tragiek geenszins; dit maal is het die van het eeuwige te laat zijn. Maar zij wordt in evenwicht gehouden door een prometheïse blijheid, die weet dat ook de gewone mens met de titaan verwant is:

Een hoofdonderwijzer uit Rauwerderhem
 Wist niets van Euler (en die niet van hem),
 Maar ontdekt tot zijn glorie
 A posteriori
 Het collineair zijn van H, Z en M.

Wij hebben lang gearzeld alvorens het nu volgende vers hier te plaatsen omdat het onmiskenbaar de distinctie ontbeert, die onze dichter in de regel kenmerkt. Maar misschien vindt het enige waardering om de objectieve toon, het agrarisch milieu en de volkse woordkeuze. In elk geval geeft het op bondige wijze de reactie weer van de natuurlijke mens op het gedoe over het parallellen-axioma:

Een boer leest na melktijd Euclides,
 Van punten en lijnen tot prismoides.
 Hij zegt tot zijn wijf
 Bij postulaat vijf:
 „Heel logisch, ja zelfs nogal wieses”.

Onze onbekende blijkt ervan op de hoogte dat in Engeland een aantal *minor mathematicians* de achternaam *Grace* draagt. De volgende strofen lijken ons eerder geïnspireerd door rijm dwang dan door kennis van hun werk. Maar zij zijn in zover merkwaardig dat hier bij uitzondering een gebied wordt aangeraakt en een woord gebruikt zonder welke veel lyriek uit vroegere en latere tijd ongeschreven zou zijn gebleven.

De vrouw van een van de Grace's
 verzuchtte: weet jij wat mijn vrees is?
 Zijn osculatie is koud
 omdat hij niet van mij houdt:
 Zijn hart behoort de mathesis.

Het blijft natuurlijk altijd de vraag of de hier door de dichter weergegeven situatie en haar verklaring op waarheid berusten. In het bevestigende geval moet men vaststellen dat de betrokken Grace een tegenpool is van de wiskundige Melanthis uit de eerste eeuw onzer jaartelling; van wie Anatole France het gezegde aanhaalt: *Je ne pourrais, sans l'aide de Vénus, démontrer les propriétés d'un triangle.*¹⁾

Halverwege het manuscript gaat de schrijver, ten duidelijkste vastgelopen in het rijmschema dat hij voortdurend heeft gevolgd, met andere versvormen experimenteren. Tegelijkertijd vindt een opmerkelijke verruiming plaats in de keuze der thema's. Aangezien de grafologen tevens een toename van de elevatiehoek van het schrift vaststellen ligt het vermoeden voor de hand dat de dichter een andere functie heeft gekregen of op zijn minst is overgeplaatst. Wij ontmoeten in deze periode een *Ode aan e*, een hekelzang op de analogieën van Delambre en een nogal cryptisch gedicht over het beginsel van de kleinste werking. Wij treffen zelfs een ballade aan „zeer vrij naar het hoogduits”, over het spichtige meisje Conica, 'n hyperbooltje blijkbaar, dat evenals Bellamy's Roosje een nette leest had, maar al te zeer toegaf aan de eisen der mode in het tijdvak der wespentaille; zij werd gewaarschuwd (in de familie kwam degeneratie voor), maar wilde niet luisteren en de gevolgen bleven niet uit: op een zondagmorgen is zij gevonden op haar kamertje, in twee rechten ontaard.

In deze periode komen in het cahier ook epigrammen voor. Het volgende is opvallend, allereerst om het bar slechte ritme, maar ook door de moraliserende toon. De dichter tracht blijkbaar

¹⁾ Anatole France, *Thaïs* (Paris, 1924), p. 134.

een rekenregel uit de analyse, bedoeld voor de limiet van een zogenaamd onbepaalde uitdrukking, te sublimeren tot een algemeen gedragsvoorschrift:

Op een markies.

Hier ligt de l'Hospital; één regel laat hem leven:

In ongewisheid kan afleiding uitkomst geven.

Wij vestigen nog de aandacht op de toch wel verouderde schrijfwijze van de eigennaam in de eerste strofe. Een zekere archaische neiging blijkt trouwens ook op andere plaatsen. In het volgende voorbeeld is blijkbaar de stelling aan de orde dat een antisymmetrische determinant van oneven graad altijd nul is; zij wordt uiterst beknopt geredigeerd.

Op zekere matrices.

Wat vele drukkers niet schijnen te beseffen:

De rang van een scheve matrijs is doorgaans effen.

In de (wel zeer zwakke) eerste regel wordt blijkbaar een poging gedaan om de matrix-algebra met de typografie in verband te brengen; een weinig geslaagd voorbeeld van *littérature engagée*.

Op latere leeftijd keert onze dichter, zoals te verwachten was, naar het oude schema terug. In het volgende wordt verslag gedaan van een rechtsgeding, dat geïnspireerd is op de stelling dat het aantal dimensies van een projectieve ruimte minstens vijf moet bedragen opdat twee vlakken geen punt gemeen kunnen hebben. Het is naar onze mening te cerebraal van allure en vereist, evenals Potgieter's *Florence* te veel uitleg om spontaan te boeien.

Twee vlakken rechtten voor het hof te Athene.

„Hij snijdt mij voortdurend”, klaagde het ene.

De rechter sprak: „Bijaldien en mitsgaders,

'k Zie hier twee commutatieve daders.

Leid hen uit naar S_5 : ik zal spatie verlenen”.

Andere staan in een lichtere toonaard. Het volgende zou men bijna speels kunnen noemen:

Een echtpaar uit Goejanverwelle

Zocht een frans boek om uit te vertellen.

De boekhandelaar zeê:

Neem dit eens mee,

Poincaré, *Les méthodes nouvelles*..

De problemen van een negatieloze fundering der logica hebben onze dichter niet onberoerd gelaten, zoals uit het onderstaande blijkt, dat alleen dan volkomen gewaardeerd zal kunnen worden als men in het laatste woord de klemtoonverschuiving aanvaardt zoals die in het gelocaliseerde milieu veel voorkomt:

Een hulppredikantsvrouw uit Visvliet
Ontkent de negatie van niet niet.
De ouderling zei:
„Daar kan ik niet bij,
Dit nadert de grens van mijn *limiet*”.

Het volgende vers zou alleen al om de voorlaatste regel nooit voor een radiovoordracht in aanmerking kunnen komen. Wij prijzen ons gelukkig dat de betrokken uitgever met dit tijdschrift op goede voet staat.

In een tent aan de rand van de Gobi
Woont een oude sergeant, genaamd Toby.
Hebt gij ook gehoord of
Hij daar werkt voor Noordhoff
Aan een tabel voor de sn van Jacobi?

Wij citeren tenslotte een der laatste gedichten uit de bundel, dat ten duidelijkste geschreven is nà het fundamentele artikel van Harald Bohr over *fast-periodische Funktionen*:

In een ballet te Parijs danste Reina.
Haar kunst liet gevoelens van pijn na.
Men raadpleegde Bohr,
Zij danste hem voor.
Hij zei: 't is niet periodisch, maar bijna.

EEN AMERIKAANSE TEST

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

Elk jaar wordt door The Mathematical Association of America en The Society of Actuaries een test samengesteld, die voorgelegd wordt aan leerlingen van Amerikaanse high schools. De bedoeling van deze test is onder meer de buitengewoon begaafden te kunnen onderkennen. Dit doel bereikt men niet, als men de test zo samenstelt, dat een niet geringe groep ongeveer de maximale score bereikt. Men heeft de opgaven daarom zo gekozen, dat men een behoorlijke spreiding verkrijgt en dat het bijna ondoenlijk is het maximale aantal punten te behalen.

De twaalfde jaarlijkse test, die gegeven is op 9 maart 1961, is hieronder afgedrukt. Zo men ziet bestaat deze uit 20 vragen, waarvoor men elk 3, 10 vragen, waarvoor men elk 4, en 10 vragen, waarvoor men elk 5 punten kan krijgen. Bij elke vraag zijn 5 antwoorden gegeven, waarvan er één het goede is. De leerling krijgt een apart vel, waarop hij van elke vraag het goede antwoord tracht te geven door A, B, C, D of E op te schrijven. Men zou zo door raden zich punten kunnen verschaffen. Om het effect van klakkeloos raden te compenseren, krijgt men voor elk fout antwoord strafpunten en wel $\frac{1}{4} \cdot 3$, $\frac{1}{4} \cdot 4$ resp. $\frac{1}{4} \cdot 5$ strafpunten. De eindscore verkrijgt men door het aantal behaalde punten te verminderen met het aantal strafpunten.

We laten nu eerst de test volgen.

PART I (3 credits each)

1. When simplified $(-\frac{1}{125})^{-\frac{2}{3}}$ becomes:
(A) $\frac{1}{25}$ (B) $-\frac{1}{25}$ (C) 25 (D) -25 (E) $25\sqrt{-1}$
2. An automobile travels $\frac{a}{6}$ feet in r seconds. If this rate is maintained for 3 minutes, how many yards does it travel in the 3 minutes?
(A) $\frac{a}{1080r}$ (B) $\frac{30r}{a}$ (C) $\frac{30a}{r}$ (D) $\frac{10r}{a}$ (E) $\frac{10a}{r}$
3. If the graphs of $2y+x+3=0$ and $3y+ax+2=0$ are to meet at right angles, the value of a is:

- (A) $\pm \frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) 6 (E) -6
4. Let the set consisting of the squares of the positive integers be called u ; thus u is the set 1, 4, 9, If a certain operation on one or more members of the set always yields a member of the set, we say that the set is closed under that operation. Then u is closed under:
- (A) addition (B) multiplication (C) division
(D) extraction of a positive integral root (E) none of these
5. Let $S = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1$. Then S equals:
- (A) $(x-2)^4$ (B) $(x-1)^4$ (C) x^4 (D) $(x+1)^4$ (E) $x^4 + 1$
6. When simplified $\log 8 \div \log \frac{1}{8}$ becomes:
- (A) $6 \log 2$ (B) $\log 2$ (C) 1 (D) 0 (E) -1
7. The third term in the expansion of $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{a^2}\right)^6$ is, when simplified:
- (A) $\frac{15}{x}$ (B) $-\frac{15}{x}$ (C) $-\frac{6x^2}{a^9}$ (D) $\frac{20}{a^3}$ (E) $-\frac{20}{a^3}$
8. Let the two base angles of a triangle be A and B , with B larger than A . The altitude to the base divides the vertex angle C into two parts, C_1 and C_2 , with C_2 adjacent to side a . Then:
- (A) $C_1 + C_2 = A + B$ (B) $C_1 - C_2 = B - A$ (C) $C_1 - C_2 = A - B$
(D) $C_1 + C_2 = B - A$ (E) $C_1 - C_2 = A + B$
9. Let r be the result of doubling both the base and the exponent of a^b , $b \neq 0$. If r equals the product of a^b by x^b , then x equals:
- (A) a (B) $2a$ (C) $4a$ (D) 2 (E) 4
10. Each side of triangle ABC is 12 units. D is the foot of the perpendicular dropped from A on BC, and E is the midpoint of AD. The length of BE, in the same unit, is:
- (A) $\sqrt{18}$ (B) $\sqrt{28}$ (C) 6 (D) $\sqrt{63}$ (E) $\sqrt{98}$
11. Tangents AB and AC are drawn to a circle from exterior point A. Tangent PQR intersects AB in P and AC in R, and touches the circle at Q. If $AB = 20$, then the perimeter of triangle APR is:
- (A) 42 (B) 40.5 (C) 40 (D) $39\frac{7}{8}$ (E) not determined by the given information

12. The first three terms of a geometric progression are $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$. The fourth term is:
 (A) 1 (B) $\sqrt[5]{2}$ (C) $\sqrt[6]{2}$ (D) $\sqrt[7]{2}$ (E) $\sqrt[8]{2}$
13. The symbol $|a|$ means a if a is a positive number or zero, and $-a$ if a is a negative number. For all real values of t the expression $\sqrt{t^4+t^2}$ is equal to:
 (A) t^3 (B) t^2+t (C) $|t^2+t|$ (D) $t\sqrt{t^2+1}$ (E) $|t|\sqrt{1+t^2}$
14. A rhombus is given with one diagonal twice the length of the other diagonal. Express the side of the rhombus in terms of K , where K is the area of the rhombus in square inches.
 (A) $\sqrt{K}$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{2K}$ (C) $\frac{1}{3}\sqrt{3K}$ (D) $\frac{1}{4}\sqrt{4K}$ (E) none of these is correct
15. If x men working x hours a day for each of x days produce x articles, then the number of articles (not necessarily an integer) produced by y men working y hours a day for each of y days is:
 (A) $\frac{x^3}{y^2}$ (B) $\frac{y^3}{x^2}$ (C) $\frac{x^2}{y^3}$ (D) $\frac{y^2}{x^3}$ (E) y
16. An altitude h of a triangle is increased by a length m . How much must be taken from the corresponding base b so that the area of the new triangle is one-half that of the original triangle?
 (A) $\frac{bm}{h+m}$ (B) $\frac{bh}{2(h+m)}$ (C) $\frac{b(2m+h)}{m+h}$ (D) $\frac{b(m+h)}{2m+h}$ (E) $\frac{b(2m+h)}{2(h+m)}$
17. In the base ten number system the number 526 means $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$. In the Land of Mathesis, however, numbers are written in the base r . Jones purchases an automobile there for 440 monetary units (abbreviated m.u.). He gives the salesman a 1000 m.u. bill, and receives, in change, 340 m.u. The base r is:
 (A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 12
18. The yearly changes in the population census of a town for four consecutive years are, respectively, 25 % increase, 25 % increase, 25 % decrease, 25 % decrease. The net change over the four years, to the nearest percent, is:
 (A) -12 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 12

19. Consider the graphs of $y = 2 \log x$ and $y = \log 2x$. We may say that:
 (A) They do not intersect (B) They intersect in one point only
 (C) They intersect in two points only (D) They intersect in a finite number of points but more than two (E) They coincide
20. The set of points satisfying the pair of inequalities $y > 2x$ and $y > 4 - x$ is contained entirely in quadrants:
 (A) I and II (B) II and III (C) I and III (D) III and IV (E) I and IV

PART II (4 credits each)

21. Medians AD and CE of triangle ABC intersect in M. The midpoint of AE is N. Let the area of triangle MNE = k times the area of triangle ABC. Then k equals:
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{16}$
22. If $3x^3 - 9x^2 + kx - 12$ is divisible by $x - 3$, then it is also divisible by:
 (A) $3x^2 - x + 4$ (B) $3x^2 - 4$ (C) $3x^2 + 4$ (D) $3x - 4$ (E) $3x + 4$
23. Points P and Q are both in the line AB and on the same side of the midpoint of line AB. P divides AB in the ratio 2 : 3 and Q divides AB in the ratio 3 : 4. If $PQ = 2$, then the length of AB is:
 (A) 60 (B) 70 (C) 75 (D) 80 (E) 85
24. Thirty-one books are arranged from left to right in order of increasing prices. The price of each book differs by \$2 from that of each adjacent book. For the price of the book at the extreme right a customer can buy the middle book and an adjacent one. Then:
 (A) The adjacent book referred to is at the left of the middle book (B) The middle book sells for \$36 (C) The cheapest book sells for \$4 (D) The most expensive book sells for \$64 (E) None of these is correct
25. Triangle ABC is isosceles with base AC. Points P and Q are respectively in CB and AB and such that $AC = AP = PQ = QB$. The number of degrees in angle B is:
 (A) $25\frac{5}{7}$ (B) $26\frac{1}{3}$ (C) 30 (D) 40 (E) not determined by the information given

26. For a given arithmetic series the sum of the first 50 terms is 200, and the sum of the next 50 terms is 2700. The first term of the series is:
 (A) -1221 (B) -21.5 (C) -20.5 (D) 3 (E) 3.5
27. Given two equiangular polygons P_1 and P_2 with different numbers of sides; each angle of P_1 is x degrees and each angle of P_2 is kx degrees, where k is an integer greater than 1. The number of possibilities for the pair (x, k) is:
 (A) infinite (B) finite, but more than two (C) two (D) one (E) zero
28. If 2137^{753} is multiplied out, the units' digit in the final product is:
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9
29. Let the roots of $ax^2+bx+c=0$ be r and s . The equation with roots $ar+b$ and $as+b$ is:
 (A) $x^2-bx-ac=0$ (B) $x^2-bx+ac=0$ (C) $x^2+3bx+ca+2b^2=0$
 (D) $x^2+3bx-ca+2b^2=0$ (E) $x^2+bx(2-a)+a^2c+b^2(a+1)=0$
30. If $\log_{10}2 = a$ and $\log_{10}3 = b$, then $\log_5 12$ equals:
 (A) $\frac{a+b}{1+a}$ (B) $\frac{2a+b}{1+a}$ (C) $\frac{a+2b}{1+a}$ (D) $\frac{2a+b}{1-a}$ (E) $\frac{a+2b}{1-a}$

PART III (5 credits each)

31. In triangle ABC the ratio $AC : CB = 3 : 4$. The bisector of the exterior angle at C intersects BA extended at P (A is between P and B). The ratio $PA : AB$ is:
 (A) 1 : 3 (B) 3 : 4 (C) 4 : 3 (D) 3 : 1 (E) 7 : 1
32. A regular polygon of n sides is inscribed in a circle of radius R . The area of the polygon is $3R^2$. Then n equals:
 (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 18
33. The number of solutions of $2^{2x} - 3^{2y} = 55$, in which x and y are integers, is:
 (A) zero (B) one (C) two (D) three (E) more than three, but finite

34. Let S be the set of values assumed by the function $\frac{2x+3}{x+2}$

when x is any member of the interval $x \geq 0$. If there exists a number M such that no number of the set S is greater than M , then M is an upper bound of S . If there exists a number m such that no number of the set S is less than m , then m is a lower bound of S . We may then say:

- (A) m is in S , M is not in S (B) M is in S , m is not in S
 (C) both m and M are in S (D) neither m nor M is in S
 (E) M does not exist either in or outside S

35. The number 695 is to be written with a factorial base of numeration, that is, $695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$ where $a_1, a_2, \dots, a_n$ are integers such that $0 \leq a_k \leq k$, and $n!$ means $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Find a_4 .

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

36. In triangle ABC the median from A is given perpendicular to the median from B . If $BC = 7$ and $AC = 6$, then the length of AB is:

- (A) 4 (B) $\sqrt{17}$ (C) 4.25 (D) $2\sqrt{5}$ (E) 4.5

37. In racing over a given distance d , at uniform speed, A can beat B by 20 yards, B can beat C by 10 yards, and A can beat C by 28 yards. Then d , in yards, equals:

- (A) not determined by the given information (B) 58 (C) 100
 (D) 116 (E) 120

38. Triangle ABC is inscribed in a semicircle of radius r . Base AB coincides with diameter AB . Point C does not coincide with either A or B . Let $s = AC + BC$. Then, for all permissible positions of C :

- (A) $s^2 \leq 8r^2$ (B) $s^2 = 8r^2$ (C) $s^2 \geq 8r^2$ (D) $s^2 \leq 4r^2$ (E) $s^2 = 4r^2$

39. Any five points are taken inside or on a square of side 1. Let a be the *smallest* possible number with the property that it is always possible to select one pair of points from these five such that the distance between them is equal to or less than a . Then a is:

- (A) $\sqrt{3}/3$ (B) $\sqrt{2}/2$ (C) $2\sqrt{2}/3$ (D) 1 (E) $\sqrt{2}$

40. Find the minimum value of $\sqrt{x^2 + y^2}$ if $5x + 12y = 60$.

- (A) $\frac{60}{13}$ (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{13}{12}$ (D) 1 (E) 0

De maximale score bedraagt dus 150. Als men bedenkt, dat de toegemeten tijd 80 minuten is, begrijpt men, dat het zelfs voor leraren vrijwel ondoenlijk is dit maximum te behalen. Vandaar, dat men reeds als een „balleboos” beschouwd wordt, als men minstens 80 punten behaalt.

De test is gegeven aan ongeveer 5300 high schools in de Verenigde Staten en Canada. Ongeveer 160.000 leerlingen hebben de vragen trachten te beantwoorden. De laagst behaalde score is —8 en de hoogste 143,75. Belangrijker zijn echter de volgende gegevens:

derde kwartiel	48
mediaan	31
eerste kwartiel	22

(afgerond in gehelen). Een vierde van de leerlingen behaalde dus meer dan 48 punten, een vierde minder dan 22 en de helft minder dan 31. Het aantal, dat minstens 80 punten scoorde, bedroeg ongeveer 270.

Prijzen en onderscheidingen kunnen zowel individueel als per school behaald worden. De schoolprestaties worden niet gemeten aan het schoolgemiddelde, maar bepaald door de som van de drie hoogst behaalde scores.

Dit jaar hebben twee Engelse en twee Nederlandse scholen aan de test meegedaan. De resultaten van de Engelse scholen zijn me niet bekend. De twee Nederlandse scholen waren het Gymnasium Erasmianum te Rotterdam, waar collega Krijgsman zijn leerlingen de opgaven voorgezet heeft, en het Stedelijk Gymnasium te Arnhem.

De resultaten van het Erasmianum zijn zeer fraai:

klasse 6B:	8 leerlingen
	laagste score 25, hoogste 80,50, gemiddelde 52,19,
klasse 5B:	5 leerlingen (de test werd in deze klasse facultatief gesteld)
	laagste score 29, hoogste 50, gemiddeld 40,45.

In Arnhem was het resultaat belangrijk minder gunstig:

klasse 6B:	20 leerlingen
	laagste score 9, hoogste 52,25, gemiddelde 26,19,
klasse 5B:	11 leerlingen
	laagste score 6,25, hoogste 21,25, gemiddelde 14,09.

Ik geef opzettelijk geen kwartielen en mediaan, omdat men zich niet mag laten verleiden de Nederlandse resultaten te vergelijken

met de Amerikaanse, gezien het feit, dat het materiaal zo weinig omvangrijk is, dat dit statistisch niet verantwoord is.

Het spreekt vanzelf, dat aan Nederlandse leerlingen de test in vertaling voorgelegd is.

Belangrijk. Het is de bedoeling, dat de volgende test dit jaar aan een groter aantal scholen in Nederland gegeven zal worden. De test kan m.i. alleen gegeven worden aan leerlingen van de hoogste twee klassen van de h.b.s.-B en van het gymnasium-B. Willen leraren, die de test zouden willen geven zich voor 15 februari in verbinding stellen met de schrijver van dit artikel (adres: Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek), onder opgaaf van het aantal leerlingen van de klassen, waaraan de test gegeven zal worden. Ik zou wel als voorwaarde willen stellen, dat de test aan gehele klassen gegeven wordt en niet alleen aan diegenen, die zich daar speciaal voor beschikbaar stellen. Ik hoop dan voor een gestencilde vertaling te zorgen. Voor het daaraan verbonden administratieve werk, dat ik moet laten doen (afdraaien stencils en verzenden), zal ik wel een geringe vergoeding in rekening moeten brengen.

De leraren moeten de test zelf nakijken, maar dit is slechts weinig werk, daar men alleen een serie letters behoeft te checken.

Er zijn natuurlijk collega's, die zichzelf op de proef willen stellen. Welnu, ten bate van hen volgen hier de antwoorden van de afgedrukte test.

opgaven 1—10 C E E B C E A B C D

10—20 C A E E B E D A B A

21—30 D C B A A C D D B D

31—40 D C B A D B C A B A

COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

Ingesteld is een commissie, die tot taak zal hebben de modernisering van het wiskunde-onderwijs bij het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs in studie te nemen (commissie modernisering leerplan wiskunde) en in verband met deze doelstelling onder meer van advies te dienen inzake

1. de problemen met betrekking tot de onderwerpen met welke behandeling in een aantal scholen zou kunnen worden geëxperimenteerd onder leiding van bepaalde aan te wijzen instituten, met inbegrip van de wijzigingen in het leerplan die met deze experimenten zullen moeten samengaan en van de daaraan verbonden consequenties voor de eindexamens van deze scholen;

2. de maatregelen die genomen kunnen worden om de oudere in functie zijnde leraren in de gelegenheid te stellen zich te oriënteren ten aanzien van de nieuwere ontwikkelingen in de wiskunde;

3. het probleem of en zo ja op welke wijze een programma zou moeten worden samengesteld voor het wiskunde-onderwijs, te geven aan die leerlingen die beschikken over een bijzondere aanleg voor wiskunde en voor wie specialisatie in deze richting wenselijk is, mede met het oog op de internationale positie van Nederland.

In deze commissie zijn benoemd tot *lid en voorzitter* prof. H. Th. M. Leeman, te Amsterdam; tot *leden*: C. J. Alders, te Haarlem; prof. dr. F. van der Blij, te Bilthoven; H. G. Brinkman, te Groningen; dr. L. N. H. Bunt, te Utrecht; prof. dr. H. Freudenthal, te Utrecht; prof. dr. J. C. H. Gerretsen, te Groningen; dr. H. A. Gribnau, te Haarlem; prof. dr. A. Heyting, te Amsterdam; prof. dr. N. H. Kuiper, te Bennekom; prof. dr. F. Loonstra, te 's-Gravenhage; prof. dr. P. Mullender, te Amstelveen; dr. D. N. van der Neut, te Zeist; prof. dr. J. J. Seidel, te Eindhoven; dr. H. Streefkerk, te Zeist; prof. dr. C. Visser, te Voorst; dr. P. G. J. Vredenduin, te Arnhem; tot *lid en secretaris*: dr. A. F. Monna, Boothstraat 17, Utrecht.

De commissie is haar werkzaamheden reeds in de zomer van 1961 begonnen.

Bij de installatie van de „commissie modernisering leerplan wiskunde” heeft de Staatssecretaris van Onderwijs, Drs. G. C. Stubenrouch de volgende rede uitgesproken ¹⁾:

¹⁾ Het spijt de redactie dat door een misverstand de tekst van deze en de volgende rede niet eerder ontvangen werden zodat ze eerst nu geplaatst kunnen worden.

Ook buiten de kringen van de beroepswiskundigen is het een bekende zaak, dat sedert het einde van de tweede wereldoorlog de wiskunde een tijdvak van waarlijk revolutionaire ontwikkeling doormaakt. Een gestadig toenemende behoefte aan wiskundigen in de maatschappij gaat hiermede gepaard. Was het voor de oorlog zó, dat afgestudeerden in de wiskunde, die een werkkring buiten het onderwijs ambieerden, daartoe vrijwel waren aangewezen op de levensverzekeringmaatschappijen, thans vindt de wiskunde een toepassingsgebied in vele bedrijven en is er ook buiten het onderwijs een grote vraag naar wiskundigen ontstaan.

Het vormen van competente wiskundigen is een internationaal probleem van de eerste orde geworden. Hoewel ik besef, dat dit in Uw midden nauwelijks nodig is, releveer ik dat een groot wiskundige als wijlen prof. Van Dantzig in zijn in 1956 onder auspiciën van de Nederlandse onderwijscommissie voor wiskunde verschenen geschrift: „The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics” de aandacht vestigde op de problemen die deze situatie meebrengt.

Het onderwijs op onze middelbare scholen kan niet voorbijgaan aan de evolutie van de wiskunde. Allerwege wordt het standpunt ingenomen dat in de westelijke landen het onderwijs in de wiskunde is achtergebleven bij de ontwikkeling van de wetenschappelijke beoefening van de stof. De kloof tussen de wiskunde-leerstof van de scholen voor v.h.m.o. en de universitaire wiskunde is hierdoor in de laatste decennien steeds groter geworden, zulks ten nadele van de opleiding van de voor de maatschappij noodzakelijke wiskundigen.

De modernisering van het onderwijs in de wiskunde is een internationaal probleem. In de Verenigde Staten wordt, door daartoe ingestelde brede commissies, zeer actief gewerkt aan de oplossing van dit probleem. Zonder twijfel zal het U allen bekend zijn dat ook de zgn. O.E.E.C.-landen in dezen activiteit ten toon spreiden. Ik herinner U aan de in het jaar 1958 te Sèvres en aan de in 1959 te Royaumont gehouden conferenties, waaraan enkelen Uwer deelnamen. Ook in Nederland is aandacht besteed aan deze problemen. De activiteit van de organisaties van wiskunde-leraren, bekend onder de namen Wimecos en Liwenagel, heeft op vruchtbare wijze bijgedragen tot de in het jaar 1958 tot stand gekomen wijziging van het leerplan voor de wiskunde.

De Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde heeft de modernisering van het wiskunde-onderwijs op haar programma staan; de Werkgroep Wiskunde van de Werkgemeenschap voor

vernieuwing van opvoeding en onderwijs houdt zich met deze zaken bezig en ook andere instituten zijn op dit gebied werkzaam.

Aan deze activiteiten hecht ik grote waarde. Zij behoeden voor zelfgenoegzaamheid en stimuleren het besef dat de leerstof geen statisch begrip is doch integendeel dynamiek moet vertonen.

Doordat velen zich met deze materie bezig houden, bestaat echter het gevaar van langs elkaar heen werken. In vele sectoren van de wetenschap is tegenwoordig het begrip teamwork doorgedrongen. Wellicht is dit gegaan ten detrimente van de bekoring van het wetenschappelijk onderzoek. Bij de immer stijgende omvang van de wetenschap lijkt specialisatie echter onvermijdelijk en bundeling van krachten is dan ook nodig om de problemen te kunnen aanpakken. Het komt mij voor, dat ook het probleem van de modernisering van het onderwijs in de wiskunde en de problemen die daarmee verband houden slechts in teamverband met vrucht kunnen worden aangepakt.

Er ligt immers een groot complex van vragen voor ons. De problemen die thans aan de orde zijn, hebben aanmerkelijk bredere strekking dan die, welke zich in 1958 voordeden. Welke moderne delen van de wiskunde zouden, van de zijde van de wetenschap gezien, geschikt zijn voor invoering bij het v.h.m.o. met het oog op de verkleining van de kloof die bestaat tussen de universitaire wiskunde en de schoolwiskunde? Terstond sluit zich daarbij aan de vraag welke mogelijkheden er didactisch op dit punt bestaan. Niet alles wat wetenschappelijk bezien wenselijk zou zijn is wellicht in de praktijk realiseerbaar. Experimenten in scholen zullen nodig zijn om dit uit te maken. Een andere vraag is of en zo ja op welke wijze differentiatie zou kunnen worden aangebracht in het wiskundeprogramma met het oog op de leerlingen die een bijzondere aanleg voor de wiskunde blijken te bezitten. Van andere orde weer is een onderzoek naar de maatregelen die genomen kunnen worden om de oudere in functie zijnde leraren in de gelegenheid te stellen zich te oriënteren met betrekking tot de nieuwere ontwikkeling in de wiskunde.

Het gaat hier om onderzoekingen die bepalend zullen zijn voor het onderwijs in de wiskunde voor decennia. Ik acht dit werk voor de toekomst van Nederland van dermate groot belang dat een onderzoek op dit punt breed moet worden opgezet. Incidentele, meer beperkte onderzoekingen kunnen, hoe belangrijk wellicht, niet bepalend zijn voor de ontwikkeling van het onderwijs op lange termijn. Na de tweede wereldoorlog heeft de maatschappij zich op zodanige wijze ontwikkeld dat het een volstrekte eis van zelfbehoud

is om bij zaken als deze de blik verder te doen reiken dan voor enkele jaren.

Het is om deze redenen dat ik het wenselijk heb geacht een commissie in het leven te roepen ter bestudering van de problemen die ik U noemde. Gezien de omvangrijke problematiek zal de commissie breed van opzet moeten zijn. Ik heb derhalve gemeend een ruim aantal deskundigen op het gebied van de wiskunde en het onderwijs te moeten uitnodigen toe te treden als lid, er daarbij voor zorg dragende dat in de persoon van een aantal leden binding met de organisaties, die ik eerder noemde, wordt bewerkstelligd. De opdracht aan deze commissie die de naam zal dragen van „Commissie modernisering leerplan wiskunde”, is zeer ruim. Zij zal datgene in studie kunnen nemen, dat zij nodig acht voor de modernisering van het wiskundeonderwijs. Zij zal belast zijn met de coördinatie van experimenten. Enkele vraagpunten gaf ik U reeds aan.

De wiskunde behoort tot de wetenschappen, waarvan het voor een leek nauwelijks mogelijk is althans enig inzicht te verkrijgen in de problemen waarmede haar beoefenaren zich bezighouden. Voor de niet-ingewijde is de wiskunde omgeven door een waas van geheimzinnigheid. Het zal echter niet alleen de wiskunde zelf zijn waarmede U zich zult hebben bezig te houden. Overwegingen van didactische aard zullen, zoals ik reeds heb gezegd, bij Uw beschouwingen ook een rol moeten spelen. Naast vakkennis van de wiskunde zal Uw arbeid in de commissie dus nog verdere kwaliteiten van U vergen.

De taak van de commissie zal dus niet eenvoudig zijn en ik besef dat het onderzoek geruime tijd zal vorderen. Ik ben er echter van overtuigd, dat de belangen die hier in het spel zijn U na aan het hart liggen en ik meen dat de gedachte dat deze commissie werk zal verrichten dat van groot gewicht is voor de toekomst van Nederland U allen tot steun zal kunnen zijn bij het verrichten van werkzaamheden die U door Uw lidmaatschap op U hebt genomen.

U zult voor het efficiënt verrichten van Uw taak subcommissies en werkcommissies kunnen formeren. Het zal wellicht nuttig zijn kennis te nemen van hetgeen in het buitenland geschiedt op het stuk van het onderzoek naar de modernisering van het wiskundeonderwijs. Indien U dat nodig acht, zult U tussenrapporten kunnen indienen. Naar behoefte zullen de ambtenaren van mijn ministerie U steeds gaarne voorlichting geven.

Ik ben U, prof. Leeman, erkentelijk, dat U zich bereid heeft verklaard het voorzitterschap van de commissie op U te nemen. In Uw kwaliteit van voorzitter van de commissie voor de middelbare

akten voor de wiskunde bent U reeds enigermate geconfronteerd geweest met de problematiek waar het hier om gaat. U, mijne Heren leden die in de commissie zitting hebt willen nemen, dank ik voor Uw bereidwilligheid om naast Uw drukke werkzaamheden de extra-taak die het lidmaatschap zal medebrengen op Uw schouders te willen nemen.

Met de wens dat de werkzaamheden van Uw commissie voorspoedig zullen verlopen, verklaar ik de commissie voor geïnstalleerd.

De voorzitter van de „commissie modernisering leerplan wiskunde” heeft na de installatie de volgende antwoordrede uitgesproken.

De recente, stormachtige ontwikkeling van de exacte wetenschappen heeft in onzesamenleving veranderingen teweeggebracht, waarvoor het door Uw Excellentie gebruikte predikaat „revolutoir” zeker niet te sterk is. Iemand, die zich in deze snel veranderde wereld enigszins thuis wil voelen en die de hem toegemeten taak in de maatschappij op een voor hem en zijn medemensen bevredigende wijze wil vervullen, zal ongetwijfeld enig begrip van die wetenschappen moeten hebben, waarvan de technische resultaten hem bijna dagelijks in verbazing brengen. Dit geldt in het bijzonder voor hen, die een leidende functie hebben.

Het ligt dan ook voor de hand dat men het onderwijs op onze middelbare scholen zo goed mogelijk aan deze nieuwe situatie heeft moeten trachten aan te passen. Dit heeft voor zover mij bekend bij de vakken natuurkunde, scheikunde en biologie tot op zekere hoogte kunnen plaats vinden. Het feit dat er op het gebied van het onderwijs in de wiskunde weinig en in ieder geval niets van ingrijpende aard geschied is, behoeft wel enige verklaring. Er zijn n.m.m. verschillende oorzaken voor, waarvan de volgende geloof ik de voornaamste zijn nl.:

het typische andere karakter van de moderne wiskunde vergeleken met de schoolwiskunde en de sterke invloed van de klassieke traditie.

Het is hier natuurlijk niet de plaats om in detail in te gaan op dit karakter van de moderne wiskunde. Maar toch lijkt het mij gewenst om er althans iets van te zeggen, omdat daardoor de bijzondere moeilijkheden, waarvoor deze commissie zich geplaatst zal zien, duidelijk naar voren zullen komen.

Omstreeks de eeuwwisseling tekende zich een verandering in de instelling van het denken af. Men begon te twijfelen aan — d.w.z. men stelde de geldigheid discutabel van — allerlei theorieën, die

tot die tijd als onomstotelijk waar hadden gegolden. Het is geen wonder, dat in dit geestelijk klimaat ook de klassieke opvattingen over de wiskunde niet aan kritiek konden ontkomen. Generaties van wiskundigen voordien hadden met enthousiasme de wiskunde beoefend zonder zich er bijzonder druk om te maken, wat wiskunde nu eigenlijk is en wat hun dikwijls verbazingwekkende resultaten voor betekenis hadden in het geheel van de menselijke kennis. Er waren weliswaar hier en daar moeilijkheden opgedoken, maar men had deze over het algemeen niet al te ernstig genomen. Immers, moeilijkheden van deze aard waren in de vorm van paradoxen reeds in de klassieke oudheid bekend en hadden nooit de innerlijke zekerheid waarmee de wiskundigen hun weg gingen, ernstig kunnen schokken. Het enige waar ze zich wel terdege om bekommerden was, om aan hun resultaten de grootst mogelijke graad van zekerheid te geven. Hierdoor werden de eisen, die aan de bewijsvoering werden gesteld hoe langer hoe stringenter. Aangezien echter in een wiskundig bewijs de logische redenering de hoofdrol vervult, is het natuurlijk dat de logische structuur van de wiskunde steeds groter aandacht begon te vragen. Bij een wiskundig bewijs echter hangt de juistheid niet alleen van de zuiverheid van de redenering af, maar ook van de premissen, waarvan wordt uitgegaan. Uiteindelijk loopt bij iedere wiskundige theorie het onderzoek van de structuur uit op de grondonderstellingen, de axioma's. In de klassieke opvatting moeten deze axioma's voor ieder mens evident zijn. Deze eis vloeit zeker niet voort uit logische overwegingen, maar is geheel psychologisch van aard. Het is wel merkwaardig, dat men dit standpunt bleef huldigen toen allang bekend was, dat geen enkel axiomasysteem aan deze eis voldeed, zelfs niet het veelgeprezen klassieke voorbeeld van de Elementen van Euclides. Ik wil hier nu niet nader op deze voor de grondslagen van de wiskunde belangrijke kwestie ingaan, maar mij beperken tot het vaststellen van het feit, dat in de moderne wiskunde deze eis van evidentie in de klassieke zin niet langer gesteld wordt. Het directe gevolg van deze verandering in opvatting is, dat de wiskundige nu veel groter vrijheid bij het construeren van zijn theorieën heeft dan vroeger, met als resultaat de ongeken- de expansie van deze wetenschap in het jongste verleden. Met het gevolg dat steeds grotere delen van andere wetenschappen toegankelijk zijn geworden voor wiskundige behandeling. Ik denk hier niet in de laatste plaats aan die, welke zich bezighouden met de studie van maatschappelijke verschijnselen.

In tegenstelling met de klassieke wiskunde — dus in het bijzonder de schoolwiskunde — waar het hoofdaccent valt op de aard van de

objecten, die in een theorie optreden, houdt de moderne wiskunde zich in hoofdzaak bezig met de logische structuur. Hiervan is het gevolg dat twee wiskundige systemen, al gaan ze over verschillende objecten, in wiskundige zin identiek zijn, als ze dezelfde wiskundige structuur bezitten. Men zou kunnen zeggen dat de moderne wiskunde zich in het gebouw van de abstracties een etage hoger afspeelt, dan de klassieke en daardoor een veel wijder perspectief biedt.

Elke poging om het wiskundeleerplan te moderniseren zal er dan ook op gericht moeten zijn om zoveel mogelijk leerlingen mee te nemen naar deze hogere etage. Dat hier grote moeilijkheden liggen van methodische en didactische aard spreekt vanzelf, moeilijkheden die niet zonder ernstig experimenteren zullen kunnen worden opgelost.

Als tweede oorzaak heb ik de sterke invloed van de klassieke traditie genoemd. Eeuwenlang heeft de overtuiging standgehouden, dat de hoofdtoegangspoort tot het rijk van de wiskunde het meetkundesysteem van Euclides is. Ook nu nog, nu reeds lang duidelijk is dat deze meetkunde veel van haar vroegere belangrijkheid heeft verloren, blijft er in het leerplan een centrale plaats aan toe gekend. Waarom? Misschien omdat er altijd nog velen zijn, die op grond van hun eigen opleiding eerlijk geloven in de grote didactische waarde van dit systeem. Daarnaast zijn er ook reeds velen, die het wel graag minder op de voorgrond zagen of zelfs geheel op de achtergrond, maar die niet duidelijk zien, wat er voor in de plaats gesteld zou kunnen worden.

Men kan zich de vraag stellen of de sterke discrepantie tussen de moderne wiskunde en de schoolwiskunde wel een voldoende motief is om het leerplan van de middelbare scholen te gaan moderniseren. Bij de natuurwetenschappen zou een dergelijk achterblijven niet getolereerd kunnen worden, omdat nieuwe ontwikkelingen direct in de samenleving zichtbaar zijn. Een dergelijke situatie bestaat voor de wiskunde echter niet.

Het zou mogelijk kunnen zijn dat juist de oudere delen van de wiskunde didactisch de beste voorbereiding tot de moderne wiskunde vormen. Hoewel dit niet erg waarschijnlijk is, lijkt het me toch noodzakelijk dat deze commissie ook aan dit probleem aandacht zal geven. Tenslotte zijn alle grote mathematici van nu langs deze weg gegaan.

Veelal wordt de noodzaak tot modernisering gebaseerd op het

argument, dat in onze maatschappij een steeds groeiende behoefte aan wiskundig geschoolden valt te constateren.

Als men hiermee wil zeggen, dat de wiskunde een steeds belangrijker deel van de westerse cultuur is gaan vormen en dat dus ieder, die aan deze cultuur deel wenst te hebben zich enig begrip van de moderne wiskunde moet eigen maken, dan kan ik het daarmee volledig eens zijn. Ook geloof ik wel dat het juist is, dat een modernisering van het leerplan van grote betekenis zal zijn voor hen, die natuurwetenschappen of techniek willen gaan studeren. Men kan zeker verwachten, dat er minder van hen over de wiskunde zullen struikelen, als er een betere aansluiting met de universiteit en hogeschool tot stand komt.

Bedoelt men echter met wiskundig geschoolden universitair opgeleide specialisten, zoals steeds meer gevraagd worden door allerlei instanties, dan meen ik dat we voorzichtig moeten zijn. Bij de opleiding van jonge mensen tot wiskundigen gaat het immers om hen, die voor dit vak een bijzondere aanleg bezitten en het lijkt me toe, dat hun aantal op een bevolking van 11 000 000 zielen niet zo bijzonder groot kan zijn. We zullen er rekening mee moeten houden, dat in ons land het aantal wiskundige specialisten, dat zijn dus zij, die aan een universiteit met hoofdvak wiskunde afstuderen, aan natuurlijke grenzen gebonden is. Of het tegenwoordig aantal van ongeveer een vijftiental per jaar belangrijk kan worden opgevoerd, als we door een doelmatiger leerplan op de middelbare school meer jongelieden dan tot nog toe kunnen animeren om in wiskunde door te gaan, zal de tijd moeten leren.

Ondanks het feit dus, dat we ons er terdege van bewust zijn, dat we aanzienlijke moeilijkheden zullen moeten overwinnen alvorens met gefundeerde voorstellen te kunnen komen, zijn we niet pessimistisch. We geloven zeker dat de modernisering van het leerplan voor wiskunde wenselijk en mogelijk is. Ik kan Uwe Excellentie de verzekering geven, dat alle leden van deze commissie met U overtuigd zijn van het grote belang, dat een bevredigende oplossing van deze problemen voor ons land heeft. Zij zullen daarom met veel optimisme hun krachten geven om de hun opgelegde taak tot een goed einde te brengen.

WISKUNDE-OLYMPIADE - 1962

Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

Persconferentie 19 januari 1962

De rol, die de wiskunde in ons leven speelt, wordt nog steeds belangrijker en uitgebreider. Er is alom een groeiende behoefte aan mensen, die wiskundig kunnen denken, die wiskundige methoden kunnen toepassen en die oorspronkelijk wiskundig werk kunnen verrichten. Om in deze behoefte te kunnen blijven voorzien, moeten we het wiskunde-onderwijs steeds beter tot zijn recht laten komen en mogen we niets nalaten om bij de jeugd belangstelling voor de wiskunde te wekken en levendig te houden. Deze problemen vormen een voorwerp van permanente zorg voor de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde. Deze commissie, ingesteld door het Wiskundig Genootschap, is een subcommissie van de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique en heeft onder meer tot taak het onderwijs in de wiskunde in al zijn vormen te bestuderen vooral met het oog op de toekomstige ontwikkeling ervan in Nederland. Sinds jaren is in de kringen van het Wiskundig Genootschap en van de Onderwijscommissie het plan besproken om een jaarlijkse wiskunde-competitie voor v.h.m.o.-leerlingen te organiseren. Dit is geen oorspronkelijke gedachte en ook de naam „Wiskunde-Olympiade”, die voor de wedstrijd is uitgekozen, is niet nieuw. Dergelijke wedstrijden werden er sinds het begin van deze eeuw jaarlijks in Hongarije gehouden. De daar in 1960 gehouden Olympiade was de zestigste in de Hongaarse reeks. Het feit, dat onder de vooraanstaande wiskundigen ter wereld zo'n onevenredig groot aantal Hongaren is aan te wijzen, wordt voor een deel gezien als een gevolg van die wiskunde-wedstrijden. Vanuit Hongarije hebben andere landen, voornamelijk in het Oosten van Europa, het idee van de wiskunde-olympiades overgenomen. Maar ook in de Verenigde Staten treffen we ze aan. Zo heeft een bekend Hongaars wiskundige, Polya, de Hongaarse traditie voortgezet bij de vergelijkende examens van de Stanford-University.

In ons voornemen om de buitenlandse voorbeelden te volgen zijn we versterkt door het succes, dat er is behaald met het in 1961 door de Onderwijscommissie uitgegeven wiskunde-tijdschrift voor jongeren, „Pythagoras”.

De wiskunde-olympiade 1962, zoals nu gepland, zal in twee ronden worden gespeeld:

de eerste ronde in de namiddag van woensdag 2 mei,

de tweede ronde op een nader te bepalen datum in de tweede helft van de maand oktober.

De eerste ronde is toegankelijk voor de leerlingen van de vierde klasse van de hogereburgerschool en voor de leerlingen van de vijfde klasse van het gymnasium. Uit de deelnemers van de eerste ronde zal een nader te bepalen aantal (b.v. ongeveer 60) worden geselecteerd om aan de tweede ronde deel te nemen. In beide ronden bestaat de taak van de deelnemers in het schriftelijk oplossen van een aantal vraagstukken, die niet uitsluitend bij de schoolwiskunde behoren aan te sluiten. Ze zullen ten dele bestaan uit denkvraagstukken voor de oplossing waarvan meer gezond verstand dan wiskundige techniek zal worden geëist. Deelname aan de Olympiade is alleen voor B-leerlingen zinvol te achten.

Voor deze plannen is de steun van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen verkregen. Een beroep op medewerking wordt eveneens gedaan op de instellingen van v.h.m.o., zowel op de medewerking van de rectoren en directeurs als op die van de aan deze scholen verbonden wiskunde-docenten. Voor de eerste ronde zullen de vraagstukken naar die deelnemende scholen worden gezonden, waar zich leerlingen voor de olympiade hebben aangemeld. In de eerste ronde werken de leerlingen dus aan de eigen school onder toezicht van de eigen leraren. De mogelijkheid dat scholen aan elk waarvan de deelname gering is, zich voor de ronde van 2 mei verenigen tot één gemeenschappelijke zitting, moet uiteraard open blijven. Op de wiskunde-docenten van de afzonderlijke scholen wordt voorts een beroep gedaan om voor de eerste ronde het werk van hun leerlingen te corrigeren alvorens het aan ons op te sturen. Het heeft weinig zin een schatting te geven voor de aan de eerste ronde te verwachten deelname. Voor het buitenland beperken we ons tot de volgende cijfers: In 1958 werd er in de Verenigde Staten aan de door de Mathematical Society georganiseerde wedstrijd deelgenomen door meer dan 80.000 leerlingen verdeeld over 2889 high schools; het aantal deelnemers aan de Poolse wiskunde-olympiade van 1956—57 bedroeg 1629.

De tweede ronde van de Nederlandse wiskunde-olympiade wordt centraal gespeeld. De top ploeg uit de eerste ronde komt op één plaats bij elkaar, b.v. te Utrecht.

Aan de winnaars van de tweede ronde zullen prijzen worden uitgereikt, b.v. in de vorm van boeken. Aantal en aard der prijzen

staat op dit moment nog niet vast. De betekenis van een overwinning in de Olympiade gaat echter ver boven deze prijzen uit. Uiteraard zal het succes in deze nationale wedstrijd de winnaar ook bij zijn verdere studie en bij het verkrijgen van studiebeurzen tot aanbeveling strekken.

Het voornaamste probleem is op dit ogenblik het samenstellen van de vraagstukken. We hebben op dit gebied in Nederland hoege-naamd geen ervaring. De „Wiskundige Opgaven” opgegeven door het Wiskundig Genootschap en de jaarlijkse prijsvragen van dit Genootschap betreffen problemen van een geheel andere categorie dan er in de Olympiade aan de orde kunnen komen. Ze liggen verre boven het niveau van de Olympiade.

Het welslagen van onze nationale wedstrijd zal in hoge mate afhangen van de keuze, die er het eerste jaar zal worden gedaan. Met het samenstellen van de opgave is een commissie belast waarin op gelukkige wijze het hoger onderwijs en het v.h.m.o. samenwerken. Deze Adviescommissie bestaat uit:

Prof. Dr. O. Bottema, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft;

Prof. Dr. N. G. de Bruijn, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven;

Dr. J. T. Groenman, directeur van de Rijkshogereburgerschool te Groningen;

Dr. C. P. S. van Oosten, wiskundeleraar aan het Katholiek Gelders Lyceum en docent aan de Gelderse Leergangen voor de opleiding voor middelbare akten te Arnhem.

Aan deze commissie is Prof. Dr. J.-H. van Lint, hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven als plaatsvervangend lid toegevoegd.

Tot de taak van de Adviescommissie behoort ook de beoordeling van het werk, de selectie voor de tweede ronde en het aanwijzen van de winnaars.

De prijsuitreiking zal in het eind van 1962 kunnen plaatsvinden.

BOEKBESPREKING

WALTER LIETZMANN. Aus meinen Lebenserinnerungen. Herausgegeben von KUNO FLADT. Göttingen. Vandenhoeck & Ruprecht. 1960. 114 bl., met portret.

Bij het overlijden van WALTER LIETZMANN in 1959 heeft Dr. JOH. H. WANSINK in dit tijdschrift ¹⁾ een overzicht gegeven van het leven en werken van deze belangrijke figuur. Het verschijnen van het hierboven genoemde boekje geeft een welkome aanleiding om nog eens op LIETZMANN's betekenis terug te komen en gaarne heb ik daarom aan het verzoek der Redactie voldaan om dat te doen. Ik heb hem goed gekend, eerst door briefwisseling, daarna door zijn werken; later, in 1924, bij een bezoek aan Göttingen, ook persoonlijk. Hij heeft mij gastvrij ontvangen in zijn school, zijn Landheim en zijn woning; ik heb van dat bezoek ontzaglijk veel geleerd.

Het boven vermelde boekje is uitgegeven door KUNO FLADT, de bekende Württembergse wiskundige ²⁾. Hij heeft gebruik kunnen maken van de uitvoerige aantekeningen, die LIETZMANN tijdens zijn leven had verzameld. Het boek is daardoor in meer dan een opzicht van grote waarde geworden: het is allereerst een autobiographie, die ons de mens LIETZMANN leert kennen, het geeft een geschiedenis van de zogen. Reformbeweging van de hand van iemand, die er ten nauwste bij betrokken is geweest en ten slotte leert het op tal van punten de persoonlijke opvattingen van de schrijver kennen.

Het boek begint met de jaren, die LIETZMANN als kind en opgroeiende jongen in zijn geboorteplaats, het oude stadje Drossen in de Neumark, niet ver van Frankfort a. d. Oder, doorbracht, zijn lagerschooltijd, gevolgd door het bezoeken van het gymnasium in laatstgenoemde stad. Dankbaar en met waardering schrijft hij over zijn ouders, zijn onderwijzers, zijn leraren. Reeds in die jaren openbaarde zich zijn belangstelling voor de natuurwetenschappen, destijds met name voor geologie, plantkunde en vooral sterrenkunde.

In het hoofdstuk „Eine grosse und eine kleine Universität” verhaalt dan de schrijver van zijn academische studie. Die grote universiteit was Berlijn, waar hij zijn studie begon. Volgens een lang bestaand plan zou hij die dan onderbreken voor een of twee semesters aan een kleinere universiteit, waarvoor Göttingen werd gekozen, dat toen al een brandpunt was van wiskundige wetenschap. Het is vooral HILBERT geweest, wiens persoon en onderwijs een diepe indruk op LIETZMANN maakten, zozeer zelfs, dat hij zijn plan om astronomie te studeren opgaf, niet naar Berlijn terugkeerde en te Göttingen zijn studie voltooide. HILBERT werd zijn promotor. Ook aan FELIX KLEIN verklaart hij veel te danken te hebben; hij had echter als student met hem minder persoonlijk contact. Dat zou, in geheel ander verband, eerst later komen.

¹⁾ Euclides 35, 1959—1960, 81—82.

²⁾ KUNO FLADT (geb. 1889), het laatst Oberstudiendirektor in Calw en sedert 1954 gepensioneerd, neemt in zijn land een plaats in vergelijkbaar met die van LIETZMANN in Pruisen. Ook hij was belast met het universitaire onderwijs in de elementaire wiskunde met inbegrip van de geschiedenis en de didactiek, eerst te Tübingen, later, na de vereniging van Württemberg met Baden (1952), te Freiburg i. Br. De organisatie van het onderwijs is in de verschillende Duitse staten wel in hoofdtrekken dezelfde, maar er zijn toch verschilpunten. Zo schreef het Württembergse leerplan van 1912 voor de Oberrealschule de analytische meetkunde van de ruimte tot en met de quadratische oppervlakken voor. Dit is het enige mij bekende geval, dat deze stof op een middelbare school wordt onderwezen.

Na de promotie volgde het Staatsexamen; dit liep deels over de speciale studievakken van de kandidaat en betrof voor het overige vakken van algemene ontwikkeling. Voor de eerste had hij tot op zekere hoogte de keuze; LIETZMANN koos wiskunde, natuurkunde en biologie en het is te begrijpen, dat althans voor de eerste twee vakken het examen niet veel meer dan een formaliteit was. Dan kwamen de vakken van algemene ontwikkeling: wijsbegeerte, psychologie, logica en pedagogiek; daarbij nog godsdienst en Duitse letterkunde. Zo althans was het in LIETZMANN's tijd; in de loop der jaren is het examen meermalen gewijzigd.

Na het Staatsexamen stond LIETZMANN voor de beslissing: wat nu? MINKOWSKI, die kort te voren als hoogleraar naar Göttingen was gekomen, raadde hem aan toelating als privaats-docent aan te vragen, maar overwegingen van verschillende aard deden hem daarvan afzien. Hij besloot het onderwijs als loopbaan te kiezen. Kort daarna werd hij als Lehramtskandidat aan het gymnasium met seminarium te Landsberg a. W. geplaatst om daar zijn opleiding te beginnen. Het jaar aldaar was beslissend voor zijn verder leven, zo zegt hij zelf: „Ich war mit Haut und Haar für den Lehrerberuf gewonnen". Voor het tweede jaar, het proefjaar, werd hem Berlijn als standplaats aangewezen; hij vervulde daar praktisch reeds een leraars-betrekking. Normaal zou de pedagogische opleiding, die destijds niet met een examen werd afgesloten, twee jaren moeten duren, maar lang voordat deze termijn verstreken was kreeg hij de gelegenheid om naar de Oberrealschule te Barmen te solliciteren, waar hij ook inderdaad werd benoemd. Hij werd er de opvolger van PAUL ÖSTREICH, de later zo bekend geworden oprichter en leider van de Bund Entschiedener Schulreformer, de idealistische, politiek sterk links georiënteerde beweging, die na de eerste Wereldoorlog een radicale hervorming van het onderwijs nastreefde en een tijd lang grote invloed heeft uitgeoefend.

Reeds na weinige jaren, in 1914, werd LIETZMANN directeur en wel van de Oberrealschule te Jena; hij was toen nog geen 33 jaar oud en wel de jongste directeur in geheel Duitsland. Zijn pedagogische leerjaren, zo zegt hij zelf, waren ten einde, maar nieuwe leerjaren braken aan. Na vijf jaren als directeur te Jena werkzaam te zijn geweest ging hij in gelijke functie over naar de Oberrealschule te Göttingen. Die stad is hij verder trouw gebleven en hij is er na zijn aftreden blijven wonen.

Het is geen wonder, dat Göttingen LIETZMANN sterk aantrok. De stad was niet alleen een brandpunt van wiskundige wetenschap, maar ook van de beweging tot hervorming van het wiskunde-onderwijs. Hier toch woonde FELIX KLEIN, die de ziel was van dit streven ¹⁾ en aan het gymnasium werkten O. BEHRENDSEN en E. GÖTTING, de schrijvers van een leerboek volgens geheel nieuwe inzichten. In diezelfde school leefde nog de herinnering voort aan de zo jong gestorven RUDOLF SCHIMMACK, KLEIN's medewerker in onderwijszaken. Ook aan LIETZMANN's eigen school, de Kaiser Wilhelm II Oberrealschule, waren vooraanstaande wiskundeleraars verbonden: HERMANN WEINREICH, die later als directeur naar Stettin ging en FRIEDRICH SEYFARTH, bekend als uitgever van KLEIN's „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" en later LIETZMANN's opvolger als directeur.

In zijn autobiografie verhaalt LIETZMANN van dit alles uitvoerig, maar hij doet meer; hij geeft ook zijn oordeel over allerlei zaken, waarmede een leraar of directeur in aanraking komt: de opleiding der a.s. leraren in het seminarium, de werkkring

¹⁾ De betekenis van FELIX KLEIN in dit opzicht heeft LIETZMANN geschetst in een artikel, dat hij in 1949 bij de herdenking van KLEIN's geboortedag, honderd jaar tevoren, schreef: Felix Klein und die Schulreform. Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, 1. 1950. 213—219.

en positie van directeur, het uitzoeken van de meest geschikte onder sollicitanten, de noodzakelijkheid dat een leraar niet slechts grondige kennis van zijn vak heeft, maar daarnaast een brede algemene cultuur. Opvallend is zijn mild oordeel over de leerlingen; hij klaagt niet over ze, hij is geen *laudator temporis acti*. Over zijn begintijd in Barmen schrijft hij: „Die ersten drei Jahre, in denen ich meine Jungen bis zum Abitur führen konnte, gehören zu den schönsten und ich darf wohl sagen pädagogisch fruchtbarsten meines Lebens. Ich war damals 25 bis 28 Jahre. Meine Jungen — sie stehen noch heute wie keine andere Generation vor mir — haben damals Mathematik gelernt, sie haben arbeiten gelernt und manche sind darüber hinaus mir lieb geworden, auch wenn unsere Wege sich später getrennt haben. Ich aber habe mit ihnen gelernt und bin ihnen dankbar dafür”.

De biografie van LIETZMANN zou echter nog zeer onvolledig zijn, indien niet melding werd gemaakt van wat hij zelf zijn later levenswerk noemt: het grote aandeel dat hij heeft gehad in de hervorming van het wiskunde-onderwijs.

Het is hier niet de plaats om uitvoerig uiteen te zetten wat deze Reformbeweging inhield, die omstreeks 1900 zich in verschillende landen van Europa deed gelden en waaraan, zoals reeds werd opgemerkt, in Duitsland FELIX KLEIN de grote leider was. Het zij voldoende er op te wijzen, dat invoering van de begrippen „veranderlijke grootheid” en „functie”, aanschouwelijk gemaakt door grafische voorstellingen en uitlopend op de beginselen der differentiaal- en integraalrekening een der kern-gedachten was ¹⁾. Het was de tijd van het zogen. Meraner Leerplan (1905), opgesteld door een commissie, waaruit later de permanente „Deutscher Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht” (D.A.M.N.U.) voortkwam. Hiervan werd LIETZMANN al spoedig secretaris. Toen kwam de oprichting van de „Internationale Mathematische Unterrichtskommission” (I.M.U.K.), op voorstel van DAVID EUGENE SMITH ingesteld op het internationaal mathematisch congres, dat in 1908 te Rome bijeen was. Ook in dit werk werd LIETZMANN door FELIX KLEIN betrokken, in het bijzonder als secretaris van de Duitse onderafdeling der I.M.U.K. In deze laatste functie had hij te zorgen voor de publikatie van de „Berichte und Mitteilungen” en van de „Abhandlungen”, waarvan hij overigens een aantal zelf heeft geschreven.

Maar ook dit is nog niet alles. In 1891 was in Duitsland de „Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts” opgericht, een invloedrijke organisatie, gewoonlijk kort als „Förderverein” aangeduid. Van 1924 tot 1930 was LIETZMANN hiervan voorzitter. In 1938 hield de vereniging op in deze vorm te bestaan; na de oorlog werd ze opnieuw opgericht en zette ze haar werk voort.

Thans nog een enkel woord over LIETZMANN als schrijver en als redacteur. Er kan natuurlijk geen sprake van zijn hier ook maar een enigszins volledige bibliografie te geven; in Poggendorff's Lexicon beslaat ze tezamen ongeveer vier kolommen ²⁾. Een uitzondering worde gemaakt voor het grote werk „Methodik des mathematischen Unterrichts”, aanvankelijk in drie delen, later in samenwerking met ULRICH GRAF in verkorte vorm uitgegeven onder de titel „Mathematik in Erziehung

¹⁾ Vgl. F. KLEIN und RUD. SCHIMMACK. Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Leipzig 1907 en: RUD. SCHIMMACK. Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. Leipzig 1911.

²⁾ J. C. POGGENDORFF. Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften, deel V (1926), VI (1938) en VII (1958).

und Unterricht". Volgens bevoegde beoordelaars, KUNO FLADT en P. ZÜHLKE ¹⁾, heeft het een ver strekkende invloed gehad op het gehele Duitse wiskunde-onderwijs.

In 1914 werd aan LIETZMANN de redactie opgedragen van de „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", een der oudste didactische tijdschriften in Duitsland, in 1869 opgericht door J. C. V. HOFFMANN; aanvankelijk redigeerde hij het samen met H. SCHOTTEN en na diens overlijden alleen. Tot 1943, toen het tijdschrift aan de tijdsomstandigheden ten offer viel, heeft het onder LIETZMANN's leiding een belangrijke taak vervuld. Redacteur was LIETZMANN ook, aanvankelijk samen met A. WITTING, van een reeks kleine, op ongeregelde tijden verschijnende geschriften, de „Mathematische-", later „Mathematisch-Physikalische Bibliothek" genaamd, een uitgave ten dienste van leraren, oudere leerlingen en belangstellenden in het algemeen. Deze onderneming is een groot succes geworden: in de eerste 30 jaren verschenen bijna 100 deeltjes. Bekend is o.a. een dubbel nummer van LIETZMANN's hand: „Der Pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem." Gelukkig is deze uitgave na de oorlog voortgezet.

Dat, ten slotte, ook de universiteit van LIETZMANN's kennis en talenten gebruik heeft willen maken voor de opleiding der leraren, in ruimer verband dan in een seminarium aan één bepaalde school mogelijk is, valt te begrijpen. Kort na zijn komst in Göttingen werd hem opgedragen aan de Universiteit aldaar de didactiek der exacte vakken te onderwijzen en in 1934 volgde zijn benoeming tot Honorar-Professor.

Aan het eind gekomen van zijn boekje verklaart de schrijver: „Wir Alten treten zurück; es ist Aufgabe der Jugend, unsere Bemühungen aufzugreifen und fortzuführen". Daarvoor zal het nodig zijn, dat die jongeren inderdaad weten, wat een vorig geslacht tot stand heeft gebracht. Tot die kennis kan het hier besproken boek veel bijdragen.

D. J. E. Schrek

NIEUWE MECHANICA-OPGAVEN

De natuurkundesectie van VELINES heeft in *Faraday* een oproep geplaatst tot het inzenden van vraagstukken. Ook inzendingen van de kant van de lezers van *Euclides* worden gaarne ingewacht.

De oproep luidt:

Nu de mechanica een onderdeel van de natuurkunde geworden is, dient het karakter van de vraagstukken, waarin de kennis van de beginselen der mechanica getoetst wordt, een wijziging te ondergaan. Het is bekend, dat vele collega's grote behoefte hebben aan een verzameling mechanica-vraagstukken die in een fysisch kleed gehuld zijn. Zo kan in plaats van een kogelbaan van een stoffelijk punt gevraagd worden naar het gedrag van een geladen deeltje in een elektrisch veld; de eenparige cirkelbeweging vindt men terug bij een elektron in een magnetisch veld, botsingsproblemen doen zich voor in de thermodynamica, enz. enz.

Tijdens een bespreking, waar o.m. vertegenwoordigers van *Velines*, *Wimecos* en *Liwenagel* bijeen waren, is het initiatief genomen om te komen tot een reeks van mechanica-vraagstukken in nieuwe stijl en wel op eindexamenniveau.

¹⁾ P. ZÜHLKE. Walter Lietzmann zum 75. Geburtstage. Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, 4, 1955. 161—164, met portret.

Teneinde dit te realiseren, worden alle natuurkundeleraren verzocht enige vraagstukken, waarvan zij menen, dat deze aan de gestelde eisen voldoen, bij mij in te zenden met oplossingen, waarna een redactiecommissie, bestaande uit ondergetekende als voorzitter, Dr. J. Deknatel, Drs. J. P. Steller, Dr. W. J. P. Lignac, Drs. P. A. C. van Vianen en Dr. Joh. H. Wansink de rest zal doen.

Alvorens tot publikatie (aanvankelijk in *Faraday*) over te gaan, zal overleg gepleegd worden met de inspectie, om vast te stellen welke van deze vraagstukken het niveau van het eindexamen in dit onderdeel van de natuurkunde zullen aangeven. Dat de inspectie zich niet zal kunnen uitlaten over het type behoeft zeker geen be-
toog.

Uit praktische overwegingen verzoekt de commissie de inzenders zich te beperken tot de voor 1963 aangewezen groepen.

Indien de ontwerpen getypt worden ingezonden, zal het voor de commissie werkbesparend zijn indien het in zesvoud geschiedt. Uiteraard zullen met de hand geschreven inzendingen even welkom zijn.

N.B. De inzenders kunnen geen auteursrecht laten gelden.

Drs. H. J. Stammer,
Hanenburglaan 38,
's-Gravenhage.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

59. In nr. 53 was gegeven een cirkel met middellijn AB en een punt P binnen de cirkel. Gevraagd werd een loodlijn door P op AB te construeren door uitsluitend gebruik te maken van een liniaal. — Degene, die het vraagstuk opgelost heeft, heeft zonder twijfel gezien, dat het niet essentieel was, dat P binnen de cirkel lag. Wel essentieel is echter, dat P niet op de cirkel en niet op de lijn AB ligt.

Prof. Dr. S. C. van Veen maakte mij op dit laatste attent en stelde in verband daarmee de volgende vragen:

- a. Voer de constructie uit, als P op de cirkel ligt (aangenomen wordt, dat ook het middelpunt M van de cirkel gegeven is).
- b. Voer de constructie uit, als P op de lijn AB ligt, echter niet met A of B samenvalt.
- c. Voer de constructie uit, als P met A of B samenvalt.

Opmerking. Degene, die meer over dit onderwerp wil weten, kan raadplegen: Jacob Steiner's Geometrical Constructions with a Ruler given a Fixed Circle with its Centre. (The Scripta Mathematica Studies, Number IV) Scripta Mathematica. Yeshiva University. New York 1950.

Die Geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. Ostwald's Klassiker No. 60. (antiquarisch).

Ook deze literatuuropgave dank ik Prof. van Veen.

60. Wat is het kleinste getal n , waarvoor geldt, dat $n!$ op 10^3 nullen eindigt?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

57. Het aantal bollen van een vierzijdige stapel is 5, 14, 30, 55, 91, . . . , dat van een driezijdige 4, 10, 20, 35, 56, Een vierzijdige stapel met p lagen zal dus verdeeld moeten worden in twee driezijdige van p en $p-1$ lagen. De driezijdige stapel met $p-1$ lagen moet dus hoger zijn dan de vierzijdige met p lagen. Stel de straal van de bollen r . Dan moet

$$2r + (p-1)r\sqrt{2} < 2r + (p-2)\frac{2}{3}r\sqrt{3}.$$

Hieruit vinden we, dat p minstens gelijk aan 9 is.

Dat de vierzijdige piramide van p lagen verdeeld moet worden in twee driezijdige van p en $p-1$ lagen, ziet men meetkundig ook direct door de vierzijdige te verdelen door een vlak, dat parallel met een diagonaalvlak is en direct naast de top aangebracht wordt.

58. a. Met 1, 2, 3, 4 of 5 sloten is het niet mogelijk. Ik volsta met het bewijs te geven, dat het met 5 sloten niet mogelijk is. Elke sleutel moet in het bezit zijn van minstens twee directeuren. Er moeten dus minstens 10 sleutels zijn. Er is dus een directeur, die minstens drie sleutels heeft. Onderstel directeur A heeft de sleutels 1, 2 en 3. Als hij ook sleutel 4 of 5 heeft, kan de kast door twee directeuren geopend worden. Twee van de directeuren B, C en D moeten dus sleutel 4 hebben en ook twee van hen moeten sleutel 5 hebben, terwijl geen van hen sleutel 4 en 5 mogen hebben. Dit is onmogelijk.

Met zes sloten is het wel mogelijk. De sleutelverdeling is:

A	1	2	3		
B	1		4	5	
C			3	5	6
D		2	4		6

b. Er is geen sleutel van de sleutels 1-6, die elk paar directeuren bezit. De boekhouders moeten dus alle in het bezit zijn van de sleutels 1-6. Dit maakt noodzakelijk, dat er in elk geval nog een sleutel 7 is. Als we sleutel 7 geven aan de directeuren A, B en C en bovendien aan twee van de drie boekhouders, dan kan de kast geopend worden door elk stel van twee directeuren en één boekhouder en door elk stel van één directeur en twee boekhouders. Wil het onmogelijk zijn, dat de kast door drie boekhouders geopend kan worden, dan moet er nog een sleutel, sleutel 8, zijn, die in het bezit is van elke directeur, maar van geen enkele boekhouder. Er zijn dus minstens acht sloten vereist.

Het Nederlandsch Scheepsbouwkundig Proefstation te Wageningen

vraagt voor haar

„Rekencentrum voor Scheepsbouw en Scheepvaart”

Programmeurs

in het bezit van de akte M.O. Wiskunde of gelijkwaardig.

De werkzaamheden zullen bestaan uit het analyseren en coderen van wiskundige problemen voor een elektronische rekenmachine van het type X 1.

Ervaring met soortgelijke werkzaamheden strekt tot aanbeveling.

Schriftelijke sollicitaties te richten aan de Directie van het Nederlandsch Scheepsbouwkundig Proefstation, Postbus 28, Wageningen.

Rectificatie van de adv. in de vorige aflevering

Noordhoff's Schooltafel (5 dec.)

bewerkt door P. WIJDENES
18de druk - gebonden f 2,50.

Deze tafel bevat: I. De logaritmen van de getallen van 1—10000. — II. Logaritmen sinustafel. — III. Sinustafel. — IV. Gon. verhoudingen van hoeken in radialen. — V. Machten, wortels, enz. Zeer eenvoudige behandeling van de kleine hoeken. In tafel II twee volle graden naast elkaar, in tafel III vier volle graden naast elkaar.

Gebruik: technische scholen; h.b.s. 5-j. c.; gymnasium; lyceum.

Noordhoff's log.tafel in vier dec. en rentetafels in acht decimalen

24ste druk - gebonden f 1,90.

Inhoud: I. Gewone logaritmen. — II. Logaritmen sinustafel. — III. Machten, wortels en omgekeerden. — IV. Sinustafel. De gon. verhoudingen van hoeken in radialen. — V. De vijf rentetafels in 8 decimalen, nl. $(1+i)^n$; $(1+i)^{-n}$; $\Sigma(1+i)^n$; $\Sigma(1+i)^{-n}$ en de annuïteitentafel.

Gebruik: h.b.s. 5-j. c.; gymnasium; lyceum.

Na deel Ia en III thans ook deel Ib
volledig omgewerkt en gemoderniseerd!

Ib: Geometrische optica
en Elektriciteit -
6e druk f 6,50

Dr H. LINDEMAN

Drs. G. H. FREDERIK

leerboek der natuurkunde

Uit het Voorwoord bij het zojuist verschenen deel Ib:

Een

V.H.M.O.-

uitgave van

P. Noordhoff N.V.

Groningen

„Zoals wij in het voorwoord van deel Ia schreven, bestaan naar onze mening de grootste didactische moeilijkheden in het aanbrengen van fundamentele natuurkundige begrippen, waarop in de volgende ronde kan worden voortgebouwd en in het gebruik van de geheel eigen taal en denkwijze, die in de natuurkunde ontwikkeld is. Leraar en leerboek kunnen de leerlingen helpen, door hen geleidelijk te laten wennen aan de nieuwe taal en gedachtengang. Hiernaar hebben wij ook in dit boek gestreefd”.

Gemeente 's-Gravenhage

Instituut voor middelbare akten in de exacte vakken.

In januari a.s. begint weer een avondcursus voor de

akte wiskunde M.O.-B.

Aanmelding en/of inlichtingen bij de rector, Drs. H. J. Stammer, die daarvoor elke dinsdag van 19 tot 20 uur in het gebouw Nieuwe Duinweg 6-14 (tel. 55.77.18) spreekuur houdt.

Zojuist verschenen:

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL- REKENING door drs. J. C. Kok e.a.

voor het V.H.M.O.

INHOUD

- I. Getallen, functies en limieten
- II. Differentiaalrekening
- III. Integraalrekening
- IV. Enige toepassingen van de D.- en I.-rekening
- V. De log. en exp. functies

P. Noordhoff N.V.

UIT HET VOORWOORD:

Leidende gedachte is geweest de grootste moeilijkheden uiteen te rafelen. Zo hebben wij de behandeling van afgeleide functies gesplitst in differentie, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt, waarbij - door het opnemen van enige vraagstukken - de mogelijkheid gegeven wordt, met die tussenliggende begrippen ook enigszins te oefenen. Op dezelfde manier is de afleiding van de kettingregel over enige paragrafen verdeeld. Verder is de invoering van het differentiaalquotiënt volledig losgemaakt van de grafische voorstelling, om het begrip niet van het begin af te vervalsen.

De geadverteerde uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.