

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962

IV - 15 DECEMBER 1961

INHOUD

A. MAASSEN: Verzamelingen en relaties	97
Wiskundig Genootschap	118
Ir. G. P. ITTMANN: Pythagorese driehoeken	119
Boekbespreking	122
Ontvangen boeken	125
WIMECOS	126
Kalender	127
Recreatie	128

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Moerbeilaan 58, Hilversum, tel. 02950/42412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; Prof. dr. H. WIBLENGA, Amsterdam;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; P. WIJDENES, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaben voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

VERZAMELINGEN EN RELATIES ¹⁾

door

A. MAASSEN

Arnhem

In de inleiding tot het rapport dat door de Nederlandse Onderwijs Commissie voor wiskunde is samengesteld, schrijven Prof. Loonstra en Dr. Vredenduin:

„Het wiskunde onderwijs op de middelbare scholen is in vele landen en zeker ook in Nederland verouderd. De snelle ontwikkeling van de maatschappij en van de wetenschap in de laatste decennia en de sterk vermeerderde behoefte aan mathematisch geschoolden die daarvan het gevolg is, hebben het probleem, de tekortkomingen van ons onderwijs op te sporen en te compenseren, urgent gemaakt”.

De eisen die maatschappij en wetenschap aan het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs stellen, moeten uitgangspunt zijn bij de oplossing van dit urgente probleem. Hoezeer het middelbaar wiskunde-onderwijs van maatschappij en wetenschap kan vervreemden bij gebrek aan een intensief contact met de wiskundigen van professie, ondervinden wij heden aan de lijve; klachten van het hoger onderwijs en van wiskundigen die werken op research-afdelingen van bedrijven en die assistenten zoeken van middelbaar niveau, zijn er te over; men behoeft maar te luisteren, als men bij toeval in die kringen verzeild raakt.

Dat een intensief contact tussen docenten van het V.H.M.O. enerzijds en hoogleraren anderzijds in de huidige maatschappij broodnodig is, wordt met name in Duitsland en Amerika uitstekend begrepen.

In Duitsland: getuige „Grundzüge der Mathematik”, een werk, dat vier banden beslaat, waaraan hoogleraren en leraren hebben gewerkt en dat voor alles tot doel heeft: „die Schul- und Hochschulmathematik immer mehr auf einander abzustimmen”. „Dieses Werk ist den im Schulalltag stehenden Lehrern an unsern Gymnasien gewidmet. An ihrem Können und ihrer Liebe zu unserer

¹⁾ Voordracht gehouden voor Liwenagel op 4 februari 1961 te Utrecht.

Wissenschaft hängt das Schicksal des kommenden Geschlechtes an Mathematikern”.

In Amerika: getuige het werk van de School Mathematics Study Group, waarover Dr. Bunt ons in de laatste Wimecosvergadering uitvoerig heeft ingelicht.

De wijzigingen die wij in ons onderwijs zullen moeten aanbrengen, zijn tweëerlei: sommige nieuwe onderwerpen zullen het V.H.M.O. moeten binnentreden, sommige reeds bestaande onderwerpen zullen op andere wijze moeten worden aangeboden, zó dat wordt voorbereid, wat velen van onze leerlingen na hun eindexamen te verwerven zullen krijgen.

De wiskunde van het V.H.M.O. is tot op zekere hoogte een afgerond, een gesloten geheel, moet dat misschien ook wel zijn, omdat anders geen uniform examen kan worden afgenomen; maar ons *onderwijs in de wiskunde* moet openstaan naar hoger onderwijs en toegepaste wiskunde. Het uitzicht op de zuivere, zowel als op de toegepaste wiskunde, mag niet belemmerd worden door een al te rechtstreekse voorbereiding op of een training voor het examen. Zeker moeten onze leerlingen niet de indruk krijgen, dat hun wiskunde afgesloten is; indien wij hun iets van de wiskunde-aan-de-overzijde-van-het-examen vertellen — en ons programma moet dunkt me zó zijn, dat wij daartoe volop de gelegenheid hebben —, dan moeten wij dat kunnen doen al voortbouwend op de begrippen die wij zelf hebben aangebracht.

De titel van deze voordracht is: verzamelingen en relaties. Vooral het eerste van deze twee begrippen is van groot belang voor de schoolwiskunde. Het is echter niet mijn bedoeling u voor te stellen om alles wat ik van verzamelingen en relaties ga vertellen — en van de daarmee verband houdende logische begrippen — als onderdeel van de schoolwiskunde in te voeren. Ik wil slechts iets schetsen van de achtergrond van wat wij dagelijks in de school doen. Van een enkel probleem van deze logische achtergrond zal ik u een oplossing voor de schoolwiskunde voorstellen. Tenslotte zal ik u een manier voorleggen waarop sommige begrippen, die het inzicht van onze leerlingen zullen bevorderen, in ons onderwijs zouden kunnen worden ingevoerd. Wanneer ik in deze voordracht aan de schoolwiskunde denk, zal ik ook aan die gedachte uiting geven.

Verzamelingen

Het logische begrip verzameling ligt ten grondslag aan vele onderwerpen van de wiskunde: topologie, maattheorie, de theorie van

lichamen, groepen en ringen, lineaire algebra, en de theorie van afbeeldingen, functies en transformaties. Bovendien — en dit is wellicht nóg belangrijker — bestaat er een nauw verband tussen de logische operatoren en de verzamelingtheoretische begrippen. Ik wil dit laatste voor u uitwerken, en ga dan eerst iets zeggen over de logische operatoren.

Sommige lettercombinaties noemt men oordelen (ook wel: uitspraken). Voorbeelden van oordelen zijn:

- (a) Ieder even getal is de som van twee oneven getallen.
- (b) Ieder oneven getal is de som van twee even getallen.
- (c) Ieder positief even getal, behalve 2, is de som van twee priemgetallen.

Bij de klassieke opvatting worden de oordelen ingedeeld in ware en onware oordelen.

Volgens het tweewaardigheidsprincipe is ieder oordeel of waar of onwaar. Men eist niet, dat men van ieder oordeel kan uitmaken tot welke categorie het behoort.

Van de genoemde uitspraken heeft (a) de waarheidswaarde: waar, en (b) de waarheidswaarde: onwaar. Welke waarheidswaarde (c) heeft, weten we niet; bij de klassieke opvatting neemt men aan, dat het op zichzelf vaststaat, of (c) waar of onwaar is; dat wij het niet weten doet daaraan niets toe of af.

Nu de logische operatoren zelf.

De negatie.

De ontkenning van het oordeel „het is vandaag zondag” luidt: het is vandaag geen zondag” of ook „het is vandaag niet zondag”. In de logica pleegt men het woordje „niet” vooraan te zetten: „niet het is vandaag zondag”.

Als nu A een uitspraak is, dan is $\sim A$ (niet A) een nieuwe uitspraak, die volgens het tweewaardigheidsprincipe een waarheidswaarde heeft tegengesteld aan die van de uitspraak A. Als we aan een onware uitspraak het symbool 0, en aan een ware uitspraak het symbool 1 toekennen, dan kunnen we de volgende waarheidstabel van de negatie maken:

A	$\sim A$
1	0
0	1

De conjunctie.

Twee uitspraken A en B worden door deze operator verbonden tot een nieuw oordeel nl. $A \wedge B$ (A en B). Deze nieuwe uitspraak

is dan en alleen dan waar, als zowel A als B waar is. De waarheidstabel van de conjunctie ziet er als volgt uit:

		(B)	
		1	0
(A)	1	1	0
	0	0	0

De disjunctie.

Als A en B twee uitspraken zijn, dan is $A \vee B$ (A of B) een nieuwe uitspraak; in de logistiek is deze waar, als tenminste één van de twee uitspraken A en B waar is. In de omgangstaal is dat anders:

„Bent U lid van Liwenagel of bent U hier als genodigde?”

„Bent u per trein of op andere wijze hierheen gekomen?”, zijn vragen die u, zonder logistisch onwaarheid te spreken, met een kort „ja” kunt beantwoorden; maar ik raad u ten sterkste af dergelijke vragen in de omgangstaal zonder meer te bevestigen. Wanneer u uw leerlingen leert:

„ $^3 \log 9 = 2$ of het wordt de hoogste tijd, dat jullie ophouden met nog iets aan de moderne talen te doen”,

haalt u zich ongetwijfeld moeilijkheden op de hals, hoewel uw stelling logistisch niet aanvechtbaar is.

De waarheidstabel van de disjunctie ziet er als volgt uit:

		1	0
1	1	1	1
	0	1	0

De implicatie.

Deze logische operator verbindt twee uitspraken A en B tot een nieuw oordeel nl. $A \Rightarrow B$ (A impliceert B, of: als A, dan B). Dit nieuwe oordeel is waar, dan en alleen dan, als de waarheid van A die van B impliceert, d.w.z. $A \Rightarrow B$ is onwaar precies dan als A waar is en B onwaar. De logische matrix van de implicatie ziet er dus als volgt uit:

		(B)	
		1	0
(A)	1	1	0
	0	1	1

Allereerst kan worden opgemerkt, dat niets geëist wordt aangaande een verband tussen de inhoud van A en die van B; de uitspraak:

„Kennedy is president van de Verenigde Staten $\Rightarrow 5 + 6 = 11$ ” is waar.

Vervolgens merken we op, dat uit deze conventie blijkt, dat uit een onware uitspraak iedere uitspraak volgt. Dus:

" $1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 + 1 = 2$ " is waar,

" $1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 + 1 = 3$ " is onwaar,

" $1 + 1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 3$ " is waar,

" $1 + 1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2$ " is waar.

De equivalentie.

Als A en B twee uitspraken zijn, dan is $A \Leftrightarrow B$ (A is equivalent met B) een nieuwe uitspraak, die precies dan waar, is als:

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ waar is. De matrix ervan is:

	1	0
1	1	0
0	0	1

Nu de verzamelingen.

Iedereen kent het begrip verzameling. Soms bestaat een verzameling uit een eindig aantal elementen. Als dit aantal niet al te groot is, kan men de verzameling definiëren door de elementen ervan te noemen. De verzameling die als elementen heeft de getallen 1, 2 en 3 en geen andere, noteren we zó: $\{1, 2, 3\}$. Dat 2 element van deze verzameling is, noteren we als volgt: $2 \in \{1, 2, 3\}$.

Altijd wordt een verzameling gekarakteriseerd door een eigenschap, die de elementen van die verzameling bezitten, terwijl elementen die niet tot die verzameling behoren, die eigenschap niet bezitten. Zo is bijv. de verzameling van de wiskundeleraars de verzameling van de dingen die de eigenschap hebben wiskundeleraar te zijn. We schrijven nu het volgende op:

x is wiskundeleraar.

Dit is geen uitspraak, het heeft geen zin hierbij van waarheid of onwaarheid te spreken. Men noemt het een „oordeelsvorm”. Deze oordeelsvorm wordt pas een oordeel, waar of onwaar, als we voor x de naam van een ding substitueren. De letter x is een variabele, een „placeholder”, zoals Amerikanen zeggen. Vervangen we de placeholder door „dit stukje krijt”, dan ontstaat een onwaar oordeel; vervangen we x door „de voorzitter van Liwenagel”, dan ontstaat een ware uitspraak. De verzameling van de dingen die aanleiding geven tot een waar oordeel, kunnen we als volgt noteren:

$\{x: x \text{ is wiskundeleraar}\}$.

Het is op zijn zachtst gezegd dikwijls zeer praktisch om x als placeholder te zien voor een bepaalde klasse van dingen; in dit

geval voor de elementen van de verzameling van de mensen. Zo plegen we op school, in de planimetrie, verzamelingen van punten te beschouwen, en wel van punten die in het vlak liggen waarin wij de planimetrie bedrijven. Men noemt dit vlak dan wel de alverzameling, the universe of discourse; daarbij wordt het vlak dus opgevat als puntverzameling. Bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden is de alverzameling gewoonlijk het lichaam van de reële getallen.

Ter vereenvoudiging voeren we de volgende notatie in: dat een bepaald element d van de alverzameling de eigenschap E heeft, noteren we zó: Ed .

$\{x: Ex\}$ is nu de verzameling van de elementen die de eigenschap E bezitten.

Het kan gebeuren dat alle elementen van de alverzameling de eigenschap E bezitten. Bijv.: de alverzameling (notatie: I) is de verzameling van de niet-negatieve reële getallen en E is het praedicaat: „is het kwadraat van een reël getal”. Dan is:

$$\{x: Ex\} = I, \text{ of anders gezegd: voor elke } x: Ex.$$

Als nu de alverzameling eindig veel elementen bevat: $a_1, a_2, \dots a_n$ en al die elementen de eigenschap E hebben, dan is het volgende oordeel waar:

$$Ea_1 \wedge Ea_2 \wedge \dots \wedge Ea_n.$$

In het geval de alverzameling niet eindig is, wordt deze notatie gegeneraliseerd tot $\bigwedge_x Ex$, hetgeen betekent: voor elke $x: Ex$. Dus:

$$\{x: Ex\} = I \Leftrightarrow \bigwedge_x Ex.$$

We hebben gezien, dat: „ x is wiskundeleraar” pas een zinvol oordeel wordt, als x vervangen wordt door een element van de alverzameling. Het oordeel:

$$\bigwedge_x x \text{ is wiskundeleraar}$$

is echter zonder meer zinvol: wat voor betekenis zou er aan dit oordeel verbonden kunnen worden, nadat x vervangen is door de naam van een bepaalde persoon? In:

$$x \text{ is wiskundeleraar}$$

heet x een *vrije* variabele; in:

$$\bigwedge_x x \text{ is wiskundeleraar}$$

heet x een *gebonden* variabele: gebonden door de quantor „alle”.

Nemen we nu eens als de alverzameling de verzameling van de vlakke vierhoeken; laat A het praedicaat „is een rechthoek” zijn en B het praedicaat „heeft twee evenlange diagonalen”. Beschouwen we nu:

$$Ax \Rightarrow Bx.$$

Deze oordeelsvorm gaat over in een waar oordeel, als de placeholder x door een willekeurig element van de alverzameling wordt vervangen, gezien de logische matrix van de implicatie. Dus:

$$\bigwedge_x (Ax \Rightarrow Bx).$$

Maar dit betekent, dat ieder element dat de eigenschap A bezit, ook de eigenschap B heeft; men drukt dit ook zó uit:

$$\{x: Ax\} \text{ is een deelverzameling van } \{x: Bx\},$$

en noteert dit met:

$$\{x: Ax\} \subset \{x: Bx\}.$$

We mogen dus schrijven:

$$(1) \quad \bigwedge_x (Ax \Rightarrow Bx) \Leftrightarrow \{x: Ax\} \subset \{x: Bx\}.$$

De logische operator, de implicatie, staat dus in nauw verband met het begrip inclusie van de verzamelingsleer.

(1) heeft een belangrijke konsekwentie:

Laat de alverzameling weer de verzameling van de vlakke vierhoeken zijn. Nu geldt:

$$\bigwedge_x (\text{de hoekensom van } x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x \text{ is een vierkant}).$$

In plaats van „ x is een vierkant” mag u ook wel iets anders lezen, als er maar een zinvolle uitspraak komt als x door een willekeurig element van de alverzameling vervangen wordt. Volgens (1) is dus ook het volgende waar:

$$\{x: \text{de hoekensom van } x = \frac{3}{2}\pi\} \subset \{x: \dots\}.$$

De eerste verzameling bevat geen enkel element; zo’n verzameling wordt leeg genoemd; we noteren de lege verzameling met het symbool: $\emptyset$. De consequentie van (1) is nu dat de lege verzameling deelverzameling is van iedere verzameling.

De definitie van de gelijkheid van twee verzamelingen, die hierna volgt, impliceert, dat er maar één lege verzameling is.

Gelijkheid van twee verzamelingen.

Twee verzamelingen V_1 en V_2 heten gelijk, precies dan als V_1

deelverzameling is van V_2 en V_2 deelverzameling van V_1 . Deze definitie van $V_1 = V_2$ heeft als gevolg het belangrijke principe dat de enige manier om de gelijkheid van twee verzamelingen te bewijzen, is: aan te tonen, in twee stappen, dat ieder element van een van beide verzamelingen ook behoort tot de andere.

Na hetgeen er gezegd is over het verband tussen implicatie en inclusie, is het wel duidelijk dat de definitie:

$$V_1 = V_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} V_1 \subset V_2 \wedge V_2 \subset V_1$$

tot gevolg heeft:

$$\bigwedge_x (Ax \Leftrightarrow Bx) \Leftrightarrow \{x: Ax\} = \{x: Bx\}.$$

Een voorbeeld vindt u in: de alverzameling is de verzameling van de vlakke vierhoeken; Ax betekent: x is een parallellogram; Bx betekent: de diagonalen van x delen elkaar middendoor.

De operator equivalentie correspondeert dus met het begrip van de gelijkheid van twee verzamelingen.

De complementverzameling.

Het complement V^c van een verzameling V is de verzameling van de elementen die niet tot V behoren. V^c kan met een z.g. Venndiagram aanschouwelijk worden gemaakt:



(De rechthoekige schijf stelt de alverzameling voor.)

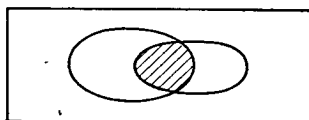
Het is nu duidelijk, dat:

$$\{x: \sim Ax\} = \{x: Ax\}^c.$$

De negatie en de complementverzameling corresponderen dus met elkaar.

De doorsnede.

De doorsnede van twee verzamelingen V_1 en V_2 (we noteren die met: $V_1 \cap V_2$) is de verzameling van die elementen die zowel tot V_1 als tot V_2 behoren.

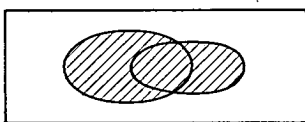


Als nu $V_1 = \{x: Ax\}$ en $V_2 = \{x: Bx\}$, dan is $V_1 \cap V_2$ de verzameling van de elementen x waarvoor geldt: $Ax \wedge Bx$. Dus:

$$\{x: Ax \wedge Bx\} = \{x: Ax\} \cap \{x: Bx\}.$$

De vereniging.

De vereniging van twee verzamelingen V_1 en V_2 (we noteren die met: $V_1 \cup V_2$) is de verzameling van de elementen die tot V_1 of tot V_2 behoren. De term „of” is hier gebruikt in de zin van de logische conjunctie. Het Venndiagram van de vereniging ziet er zó uit:



Deze verzameling is nu juist de verzameling $\{x: Ax \vee Bx\}$, als $V_1 = \{x: Ax\}$ en $V_2 = \{x: Bx\}$. Dus:

$$\{x: Ax \vee Bx\} = \{x: Ax\} \cup \{x: Bx\}.$$

We kunnen nu het volgende overzicht maken (d is een element van de alverzameling):

	$\sim Ad$	$\Leftrightarrow$	$d \in \{x: Ax\}^c,$
	$Ad \wedge Bd$	$\Leftrightarrow$	$d \in \{x: Ax\} \cap \{x: Bx\},$
(1)	$Ad \vee Bd$	$\Leftrightarrow$	$d \in \{x: Ax\} \cup \{x: Bx\},$
	$\bigwedge_x (Ax \Rightarrow Bx)$	$\Leftrightarrow$	$\{x: Ax\} \subset \{x: Bx\},$
	$\bigwedge_x (Ax \Leftrightarrow Bx)$	$\Leftrightarrow$	$\{x: Ax\} = \{x: Bx\}.$

Tot hiertoe is stilzwijgend verondersteld, dat Ax en Bx zinvolle uitspraken worden, als x door een willekeurig element van de alverzameling wordt vervangen.

In een logistisch systeem moet worden vastgesteld, welke tekencombinaties als oordelen worden beschouwd.

In de schoolwiskunde wordt de combinatie:

$$\frac{0}{0} = 1$$

niet als zinvol erkend, omdat $\frac{0}{0}$ niet wordt gedefiniëerd. Men kan aangaande $\frac{0}{0} = 1$ niet van waarheid of onwaarheid spreken. Er zijn

in de schoolwiskunde meer van dergelijke tekencombinaties. Het zijn juist deze combinaties die de moeilijkheden verwekken. Aan de hand van (1) kunnen we dit goed demonstreren.

De alverzameling is de verzameling van de reële getallen; het volgende is waar:

$$\left\{x: \frac{x}{x} = 1\right\} \subset \{x: x = x\}.$$

Volgens (1) zou dit gelijkwaardig zijn met:

$$\bigwedge_x \left(\frac{x}{x} = 1 \Rightarrow x = x \right).$$

Maar de oordeelsvorm:

$$\frac{x}{x} = 1 \Rightarrow x = x,$$

gaat niet over in een oordeel, laat staan een waar oordeel, als x vervangen wordt door 0; immers het implicatieteken kan slechts oordelen verbinden, en $\frac{0}{0} = 1$ is geen oordeel.

Er staan ons drie wegen open, om (1) te redden:

(a) We kunnen de definitie van de deling wijzigen in:

$$\frac{a}{b} = c \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = b.c \wedge b \neq 0.$$

Hiermee is $\frac{0}{0} = 1$ een onwaar oordeel geworden.

Niet velen zullen dit voor de schoolwiskunde willen aanvaarden, temeer omdat $\frac{0}{0} \neq 1$ niet zou impliceren: $\frac{0}{0} > 1 \vee \frac{0}{0} < 1$.

(b) We kunnen doen, alsof zinloze „oordelen” onware oordelen zijn. Dit lijkt mij voor de schoolwiskunde wel toelaatbaar. Wanneer we dat doen, wordt het volgende waar:

$$\begin{aligned} \bigwedge_x (x^{-2} \log (x^2 - 7x + 5) = 1 \\ \Leftrightarrow (x - 2 > 0 \wedge x \neq 3 \wedge x^2 - 7x + 5 = x - 2) \Leftrightarrow x = 7). \end{aligned}$$

U zult het wel met mij eens zijn, indien ik het symbool „ $\bigwedge_x$ ” in dit oordeel, zeker voorlopig, voor de school overbodig noem; we schrijven in de klas:

$$x^{-2} \log (x^2 - 7x + 5) = 1 \Leftrightarrow x = 7,$$

en voegen er slechts in gedachten „voor iedere x ” aan toe. Misschien

kunnen we in de hoogste klassen bij gelegenheid die gedachte eens uitspreken.

Ik kan niet nalaten in dit verband een lans te breken voor de notatie die door Prof. Kuiper tijdens de laatste vakantiecursus is gepropageerd, n.l.

$$\{x: x^{-2} \log (x^2 - 7x + 5) = 1\} = \{x: x - 2 > 0 \wedge x \neq 3 \\ \wedge x^2 - 7x + 5 = x - 2\} = \{x: x = 7\} = \{7\}.$$

Didactisch is dit veel beter: de opvatting waarbij een vergelijking als een „setbuilder” wordt gezien, spreekt de leerlingen sterk aan.

c) We kunnen de alverzameling beperken. De onder (b) genoemde vergelijking zou dan als volgt kunnen worden opgelost:

We beginnen met de alverzameling te beperken en merken op:

$$x - 2 > 0 \wedge x \neq 3 \wedge x^2 - 7x + 5 > 0.$$

Nu is:

$$x^{-2} \log (x^2 - 7x + 5) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 5 = x - 2 \Leftrightarrow x = 7.$$

De vraag rijst nu: wat van de verzamelingsleer is geschikt voor de schoolwiskunde? In Amerika ijvert de School Mathematics Study Group voor een vroegtijdig binnentreden in het onderwijs van het verzamelingsbegrip. Zij verantwoordt de daadkracht waarmee zij dit doet, in een der Appendices aan haar rapport. Sprekend over het verzamelingsbegrip, zegt zij: „This concept occurs in all branches of mathematics, as well as in sciences and in life generally. For mathematics it is a unifying concept, simple and interesting. It will be used freely in this appendix, in the firm belief that it has much to offer in teaching a number of standard topics in the high school program”.

In de tweede klas — soms zelfs al in de eerste — behandelen wij de z.g. meetkundige plaatsen. De Nomenclatuurcommissie heeft vorig jaar voorgesteld de term „meetkundige plaats” te vervangen door de term „verzameling”; ik kan mij niet aan de indruk onttrekken, dat zij meende niet méér te mogen doen, omdat zij zich niet gerechtigd voelde een bepaalde methodiek te propageren. Indien wij het echter zouden laten bij deze termwijziging, dan zou dit voorstel van de Nomenclatuurcommissie dunkt me een slag in de lucht geweest zijn.

In dit hoofdstuk van de meetkundige plaatsen hebben wij een mooie gelegenheid het verzamelingsbegrip in te voeren.

„De verzameling van de punten die 2 cm van een gegeven punt A verwijderd zijn, is $\odot (A, 2 \text{ cm})$ ”.

is gesneden koek voor tweede klassers, als u tevoren geappelleerd hebt aan hun intuïtief begrip van verzameling.

Met de volgende puntverzamelingen:

de verzameling van de punten die minder dan 2 cm van A verwijderd zijn,

de verzameling van de punten die niet minder dan 2 cm van A verwijderd zijn,

de verzameling van de punten die minder dan 2 cm van A én minder dan 3 cm van B verwijderd zijn,

de verzameling van de punten die minder dan 2 cm van A óf minder dan 3 cm van B verwijderd zijn,

kunt u de leerlingen de Venndiagrammen zelf laten maken. Dat het Venndiagrammen zijn, behoeven de leerlingen niet te weten; de namen doorsnede, vereniging en complement zullen zij snel leren kennen. Het tekenen van een complementverzameling is niet altijd even gemakkelijk: die kan dikwijls niet in zijn geheel worden gekleurd. Van het belang van dit begrip ben ik overigens aanzienlijk minder overtuigd dan van het belang van doorsnede en vereniging; ik geloof zelfs dat we het kunnen missen.

In de meetkunde is het begrip deelverzameling visueel te maken. Over de gelijkheid van twee verzamelingen zullen we moeten uitweiden. Dit begrip is van erg groot belang. Er zijn veel voorbeelden te bedenken die kunnen helpen dit begrip te vormen. Het bewijs van de stelling:

De verzameling V van de punten die even ver van een gegeven punt A als van een gegeven punt B verwijderd zijn, is de middelloodlijn l van het lijnstuk AB , spreekt de leerlingen nu veel meer aan, dan zonder alle voorbereidingen. Het valt klaarblijkelijk uiteen in tweeën:

$$\left. \begin{array}{l} XA = XB \Rightarrow X \in l \\ X \in l \Rightarrow XA = XB \end{array} \right\} \Rightarrow (XA = XB \Leftrightarrow X \in l) \Rightarrow V = l.$$

De leerlingen krijgen met dergelijke stellingen vanzelf gevoel voor het verband tussen equivalentie van oordelen en gelijkheid van verzamelingen.

Het begrip vereniging speelt een natuurlijke rol in de stelling:

De verzameling van de punten die even ver van twee elkaar snijdende lijnen verwijderd zijn, is de vereniging van de bissectrices van de hoeken door die lijnen gevormd.

De constructie van de punten X waarvoor geldt $P_1X \wedge P_2X$ (P_1 en P_2 zijn twee praedicaten) komt nu feitelijk neer op de constructie van de doorsnede van twee verzamelingen.

Tenslotte: het zal ongetwijfeld nuttig zijn, om het hoofdstuk van de „meetkundige plaatsen”, dat dan in de zojuist geschetste vorm is gegoten, aan te vullen met opgaven zoals:

V_1 is de verzameling van de rechthoekige driehoeken,

V_2 is de verzameling van de driehoeken waarvan een zwaartelijn gelijk is aan de helft van de zijde die hij middendoor deelt.

Is de ene verzameling deelverzameling van de andere? Zijn de verzamelingen gelijk?
en:

V_1 is de verzameling van de ruiten,

V_2 is de verzameling van de rechthoeken.

Wat is $V_1 \cap V_2$?

Al wordt het begrip verzameling in de hier geschetste werkwijze met behulp van de meetkunde ingevoerd, toch is dit begrip geenszins alleen voor de meetkunde van belang. We moeten beseffen dat het in feite gaat om de logische operatoren; maar het verband tussen deze operatoren en de begrippen uit de verzamelingsleer, en het feit dat deze begrippen met de meetkunde aanschouwelijk te maken zijn, pleiten voor een invoering ervan juist via de meetkunde.

De begrippen van de verzamelingsleer spelen een niet te onderschatten rol bij de vergelijkingen en de ongelijkheden. De logische achtergrond van het invoeren en het verduisteren van wortels kan helder uiteengezet worden met het verzamelingsbegrip. Nemen we als voorbeeld de volgende vergelijking:

$$\frac{x}{x-3} - \frac{8x-12}{(x-3)(x+1)} = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = 4.$$

Dit is geheel juist (indien we het verstaan in de zin die eerder is genoemd), maar hiermee is de eerste vergelijking niet opgelost. Het betekent:

$$\left\{ x: \frac{x}{x-3} - \frac{8x-12}{(x-3)(x+1)} = 0 \right\} \subset \{x: x = 3 \vee x = 4\} = \{3, 4\}.$$

In woorden: de verzameling van de wortels van de eerste vergelijking is een deelverzameling van de verzameling $\{3, 4\}$.

Onze leerlingen moeten begrijpen, dat de elementen van de gevonden verzameling nog moeten worden getoetst, en dat deze toetsing niet nodig is, indien zij de vergelijking als volgt oplossen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-3} - \frac{8x-12}{(x-3)(x+1)} = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow (x = 3 \vee x = 4) \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

De bijbehorende verzamelingen zijn nu n.l. gelijk.

Voor de ongelijkheden geldt m.m. hetzelfde als wat gezegd is

van de vergelijkingen. Bij de ongelijkheden zal het expliciet vermelden van de eigenschappen:

$$U \cap (V \cup W) = (U \cap V) \cup (U \cap W)$$

$$U \cup (V \cap W) = (U \cup V) \cap (U \cup W)$$

ongetwijfeld verhelderend werken.

Tenslotte moet ik nog opmerken, dat de verzamelingen een belangrijke rol spelen bij de functies en de relaties, maar hierover zal ik na de pauze spreken.

Voor de relaties (afbeeldingen) hebben we nog een begrip uit de verzamelingsleer nodig n.l. de produktverzameling, ook wel het cartesisch produkt genoemd:

Onder het cartesisch produkt $V_1 \times V_2$ van de verzamelingen V_1 en V_2 verstaan we de verzameling van de geordende paren (a, b) waarin $a \in V_1$ en $b \in V_2$.

Als V_1 de verzameling van de jongens is die een bepaalde dansles volgen, en V_2 de verzameling van de deelnemende meisjes, dan is $V_1 \times V_2$ de verzameling van de mogelijke dansparen.

De gymnasium- α leerlingen die aan statistiek doen, hebben vele malen het aantal elementen van een produktverzameling berekend. Wanneer de statistiek eenmaal op alle afdelingen van ons V.H.M.O. zal zijn ingevoerd — en ik geloof dat zelfs de meest fervente tegenstanders daarvan niet in staat zullen blijken deze ontwikkeling tegen te houden — en dit vak in de lagere klassen met eenvoudige kansrekening zal worden voorbereid, dan kan dunkt me het tijdig invoeren van het begrip produktverzameling in ons onderwijs geen moeilijkheden opleveren.

Er zijn twee manieren waarop men in de moderne wiskunde het functiebegrip benadert: bij de eerste wordt een functie beschouwd als een afbeelding, en bij de tweede als een relatie. Een essentiëel onderscheid tussen deze begrippen is er niet; er is slechts een verschil in zienswijze en in didactische aanpak.

Het begrip afbeelding.

We kunnen dat goed invoeren met behulp van praktische voorbeelden:

Voorbeeld 1a

We voegen aan iedere inwoner van Utrecht die op deze zaterdagmiddag ingeschreven staat in het bevolkingsregister alhier (we zullen deze mensen kortweg „Utrechter” noemen), de letters toe

die onder zijn initialen voorkomen. Dus aan de Utrechter Pieter Paul Derksen worden de letters D en P toegevoegd.

Aan iedere Utrechter worden dus een of meer letters toegevoegd.

Voorbeeld 1b

We voegen aan ieder van de genoemde Utrechtters de beginletter van zijn achternaam toe.

Nu wordt aan iedere Utrechter precies één letter toegevoegd.

Als we deze voorbeelden analyseren, dan ontdekken we twee verzamelingen: de verzameling van de Utrechtters en die van de letters van het alfabet. Aan ieder element van de eerste verzameling worden een of meer, respectievelijk wordt precies één element van de tweede verzameling toegevoegd.

De eerste toevoeging heet een meerduidige en de tweede een eenduidige afbeelding van de verzameling van de Utrechtters in de verzameling van de letters van het alfabet. Een element van V_2 dat aan het element a van V_1 wordt toegevoegd, heet een *beeld* van a . Een element van V_1 waarvan het beeld het element b in V_2 is, heet een *origineel* van b . Bij afbeeldingen krijgt elk element van V_1 minstens één beeld; daarentegen behoeft niet ieder element van V_2 als beeld op te treden. Men noemt V_1 wel de *origineelverzameling* (de „bron”, zegt Prof. Kuiper), en de, al of niet echte, deelverzameling van V_2 waarvan de elementen als beeld optreden, heet de *beeldverzameling* (ook wel: het beeld van V_1 onder de beschouwde afbeelding). Indien de beeldverzameling juist V_2 is, heet de afbeelding een afbeelding van V_1 *op* V_2 . Bij eenduidige afbeeldingen krijgt ieder origineel precies één beeld, maar een beeld kan daarbij meer dan één origineel hebben. Indien ieder beeld precies één origineel heeft, noemt men de eenduidige afbeelding *een-eenduidig*.

Met enige fantasie kan men heel wat voorbeelden van een- en meerduidige afbeeldingen bedenken die aansluiten op het dagelijkse leven: het plaatsen van de leerlingen in een klaslokaal, het invullen van het toto-formulier, de rectorale bezigheid die aan de leraren van een bepaalde school de klassen ervan toevoegt.

Het belang van het begrip afbeelding in de wiskunde kan moeilijk worden overschat. In iedere operatie kunt u een eenduidige afbeelding ontdekken; een operatie is immers een wet die aan twee elementen a en b een derde element c toevoegt. Bij een operatie spelen drie verzamelingen een rol: V_1 , V_2 en V_3 ; aan een willekeurig element van $V_1 \times V_2$ wordt een element van V_3 toegevoegd; dus $V_1 \times V_2$ wordt afgebeeld in V_3 ; we noteren dit zó: $V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$. Veelal zijn V_1 , V_2 en V_3 gelijk.

De optelling van twee gehele getallen voegt aan een paar gehele getallen een derde geheel getal toe; we hebben hier: $V \times V \rightarrow V$, waarin V de verzameling is van de gehele getallen.

Doorsnede- en verenigingvorming van deelverzamelingen van een en dezelfde verzameling zijn ook voorbeelden van afbeeldingen; $V_1 = V_2 = V_3$ is dan de verzameling van alle deelverzamelingen van een bepaalde alverzameling; aan twee deelverzamelingen E en F wordt een derde deelverzameling $E \cap F$ respectievelijk $E \cup F$ toegevoegd.

Een voorbeeld waarin V_1 , V_2 en V_3 niet alle gelijk zijn:

V_1 is de verzameling van de punten P van het vlak, V_2 is de verzameling van de lijnen l van het vlak; we voegen nu aan ieder paar (P, l) de afstand (P, l) toe; V_3 is dan de verzameling van de reële (niet-negatieve) getallen.

Een fraai schoolvoorbeeld van een eenduidige afbeelding is het begrip rij: een rij is in de schoolalgebra een afbeelding van de verzameling van de natuurlijke getallen (of van bepaalde deelverzamelingen daarvan) in die van de reële getallen.

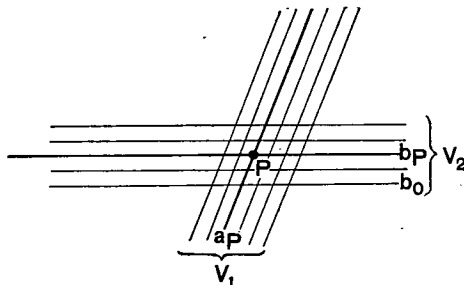
Belangrijk voor de schoolwiskunde i.v.m. grafieken zijn nog de volgende twee afbeeldingen:

Voorbeeld 2.

V_1 is een rechte lijn l en V_2 de verzameling R_1 van de reële getallen. Op l worden twee punten O en E gekozen. De afbeelding $V_1 \rightarrow V_2$ is: voeg aan O het getal 0 toe, aan E het getal 1, en aan het punt X van l het getal waarmee men E uit O moet vermenigvuldigen om X te krijgen. De lijn l heet dan een getallenlijn.

Voorbeeld 3.

Ook het invoeren van coördinaten in een vlak α is een afbeelding, n.l. een afbeelding van α op de verzameling R_2 van de geordende paren van reële getallen, dus op $R_1 \times R_1$. We brengen in α twee „arceringen” aan: V_1 en V_2 .



Door van een willekeurig element b_0 van V_2 een getallenlijn te maken, worden de punten van b_0 „genummerd”; deze „nummering” dragen we over op de elementen van V_1 : we voegen aan het element a van V_1 het getal toe dat staat bij het snijpunt van a met b_0 . Op analoge wijze kunnen we de elementen van V_2 „nummeren”. Hiermee zijn V_1 en V_2 afgebeeld op R_1 , en daarmee $V_1 \times V_2$ op R_2 ; noemen we deze afbeelding A ;

$$V_1 \times V_2 \xrightarrow{A} R_2.$$

Door aan ieder punt P van α toe te voegen het element (a_P, b_P) van $V_1 \times V_2$ (waarin a_P en b_P lijnen door P zijn), wordt α afgebeeld op $V_1 \times V_2$; noemen we deze afbeelding B ;

$$\alpha \xrightarrow{B} V_1 \times V_2.$$

Beschouwen we nu de afbeelding AB ; dit is de afbeelding die ontstaat als we eerst de afbeelding B affectueren op α en vervolgens de afbeelding A op $V_1 \times V_2$:

$$\frac{\alpha}{P} \xrightarrow{B} \frac{V_1 \times V_2}{(a_P, b_P)} \xrightarrow{A} \frac{R_2}{(\xi, \eta)} = ABP.$$

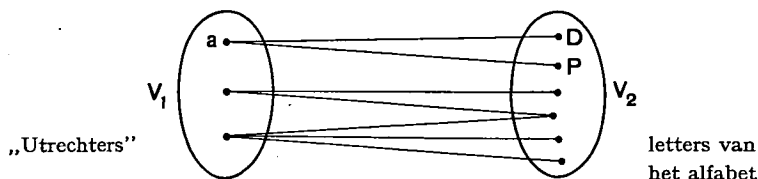
Door de afbeelding AB wordt in α dus een coördinatenstelsel ingevoerd.

Voor hen die het accent willen laten vallen op het afbeeldingskarakter van functies, vormen de genoemde voorbeelden een inleiding tot de functies van de schoolalgebra. Deze functies zijn eenduidige afbeeldingen van R_1 (of van een deelverzameling van R_1) in R_1 .

Het begrip relatie.

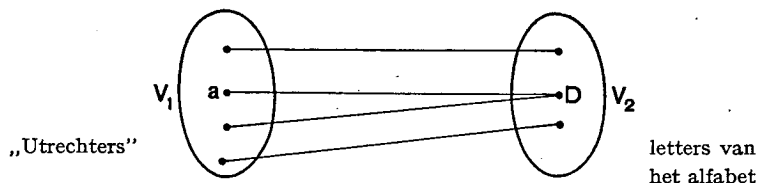
Nauw verbonden met het begrip afbeelding is het begrip relatie.

Een afbeelding van V_1 in V_2 wordt tot stand gebracht door een voorschrift; een dergelijk voorschrift heet een relatie. Dat een element x van V_1 en een element y van V_2 door een relatie R zijn gelieerd, kan men aangeven met: xRy . Een relatie kan in beeld worden gebracht door gelieerde elementen te verbinden. Nemen we voorbeeld 1a:



Als a de reeds eerder genoemde Pieter Paul Derksen is, dan zijn de volgende oordelen waar: $aR_{1a}D$ en $aR_{1a}P$.

Nemen we voorbeeld 1b:



Het oordeel $aR_{1b}y$ is gelijkwaardig met: y is de letter D.

Een relatie tussen de elementen van V_1 en die van V_2 selecteert uit het cartesisch produkt van V_1 en V_2 een deelverzameling, n.l. de verzameling van de paren elementen die door de relatie zijn gelieerd.

Het ligt nu voor de hand de relatie te identificeren met deze deelverzameling. We definiëren dus:

Een relatie tussen de elementen van V_1 en V_2 is een, al of niet echte, deelverzameling van het cartesisch produkt van V_1 en V_2 .

Zo is nu:

$R_{1a} = \{(x, y): x \in V_1 \wedge y \in V_2 \wedge y \text{ is een der initialen van } x\}$,

$R_{1b} = \{(x, y): x \in V_1 \wedge y \in V_2 \wedge y \text{ is de laatste initiaal van } x\}$.

Voor hen die het accent willen laten vallen op het relatiekarakter van het functiebegrip, wordt nu de definitie van een functie:

Een functie van de elementen van V_1 in V_2 is een relatie tussen de elementen van V_1 en die van V_2 , waarbij ieder element van V_1 precies éénmaal als eerste in de elementenparen voorkomt.

Ik wil u een en ander nog verduidelijken met enige voorbeelden:

$V_1 = \{-4, -1, 3\}$ en $V_2 = \{-6, 2, 4\}$. Noem alle elementen van het cartesisch produkt van V_1 en V_2 ; ook die van de relatie $R = \{(x, y): x \in V_1 \wedge y \in V_2 \wedge x < y\}$.

$V_1 = \{10, 13, 14\}$ en $V_2 = \{-6, 2, 4\}$.

De relatie $\{(x, y): x \in V_1 \wedge y \in V_2 \wedge x < y\}$ is leeg.

V_1 is de verzameling van de gehele getallen, V_2 eveneens. Noem alle elementen van de relatie $R = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$.

In deze voorbeelden zijn de verzamelingen V_1 en V_2 verzamelingen van reële getallen. In die gevallen is $V_1 \times V_2$ een deelverzameling van de verzameling R_2 van de geordende paren reële getallen, die kan worden afgebeeld in een vlak α waarin een coördinatenstelsel is ingevoerd, zoals in voorbeeld 3 is beschreven; het beeld

van de deelverzameling $V_1 \times V_2$ van R_2 bij deze afbeelding heet de grafiek van $V_1 \times V_2$, en het beeld van een relatie (deelverzameling van $V_1 \times V_2$) heet de grafiek van die relatie.

Het is niet moeilijk de grafieken te tekenen die behoren bij de drie zojuist genoemde voorbeelden.

Laat V_1 de verzameling van de reële getallen zijn, V_2 eveneens; laat x een element zijn van V_1 en y een element van V_2 . Wat is de grafiek van $V_1 \times V_2$? Wat is de grafiek van ieder van de volgende relaties? Welke van deze relaties zijn functies?

$$S_1 = \{(x, y) : x = y\}, S_2 = \{(x, y) : x < y\}, S_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 0\}, \\ S_4 = \{(x, y) : x^2 = y^2\}, S_5 = \{(x, y) : x^2 = y\}.$$

In het voorafgaande is gebleken dat het functiebegrip twee facetten heeft: een functie kan worden gezien als een afbeelding en ook als een relatie.

Nu definieert een afbeelding van een verzameling V_1 in een verzameling V_2 een deelverzameling van het cartesische produkt van V_1 en V_2 , dus een relatie; omgekeerd definieert een deelverzameling van $V_1 \times V_2$ een afbeelding van V_1 in V_2 .

Men kan ook zeggen dat een afbeelding een relatie is, hetgeen we gedaan hebben, toen we een functie als een relatie definieerden.

De begrippen afbeelding en relatie zijn dus identiek; maar men kan op school over afbeeldingen spreken, zonder maar aan relaties, dus aan deelverzamelingen van cartesische produkten, te denken, en omgekeerd; m.a.w. de didactische aanpak van het begrip afbeelding verschilt nogal van die van de relatie.

Ongetwijfeld zal het functiebegrip altijd een belangrijke rol blijven spelen in ons V.H.M.O. Tijdens de laatste vakantiecursus van het Mathematisch Centrum heeft Prof. Kuiper met stelligheid voorspeld, dat de toekomstige schooldefinitie van een functie althans voor de hoogste klassen zal luiden: een functie is een deelverzameling van een cartesisch produkt; ook in Amerika wordt gepropageerd de functie als een relatie te zien. Maar Prof. Kuiper achtte de tijd hiervoor klaarblijkelijk nog niet rijp, en ik twijfel er niet aan of u zult zich in die mening met hem kunnen verenigen, indachtig het (weinig Amerikaanse) tempo dat wij in Europa plegen te hebben. Trouwens de definitie van een eenduidige afbeelding van V_1 in V_2 , zijnde:

een wet die aan ieder element van V_1 precies één element van V_2 toevoegt,

is beslist duidelijker dan de definitie die luidt:

een éénduidige afbeelding van V_1 in V_2 is een deelverzameling

van $V_1 \times V_2$ waarbij ieder element van V_1 precies éénmaal als eerste in de elementenparen voorkomt.

Hieruit moet u niet concluderen dat te allen tijde een formulering met het werkwoord „toevoegen” te preferen is boven een formulering waarin de term „deelverzameling van het cartesische produkt” voorkomt. Bij meerduidige afbeeldingen is het dikwijls prettiger te spreken over relaties.

Bij de verzamelingen hebben we „oordeelsvormen” ontmoet met één vrije variabele:

x is een wiskundeleraar, x is een parallellogram, enz.

Er zijn ook „oordeelsvormen” met twee variabelen:

x is vader van y , $x + y = 2$, $x > y$.

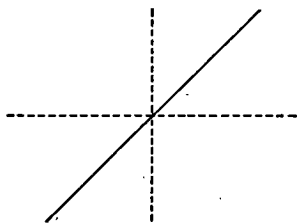
Ook dergelijke oordeelsvormen bepalen deelverzamelingen, maar deze van produktverzamelingen.

Indien (a, b) een element is van de relatie R , dan zeggen we dat a en b door de relatie R zijn gelieerd.

Er zijn nu bepaalde relaties die in het wiskundig denken van belang zijn. Al deze relaties zijn deelverzamelingen van cartesische produkten van *gelijke* verzamelingen:

De identieke relatie.

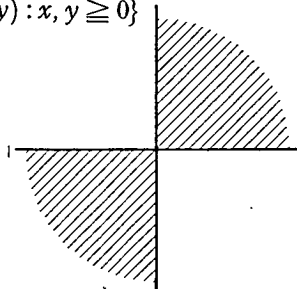
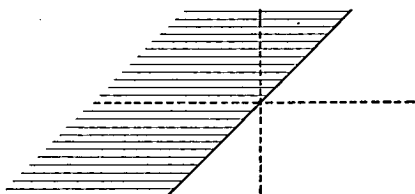
Dit is een relatie die bestaat uit de verzameling van alle paren (a, a) in $V \times V$. Het is de zogenaamde identieke afbeelding. Als V de verzameling van de reële getallen is, dan is de grafiek van de identieke relatie:



De reflexieve relatie.

Dit is een relatie die de identieke als deelverzameling bevat. Bijv. V is de verzameling van de reële getallen.

$$R_1 = \{(x, y) : x \leq y\} \quad R_2 = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$$



De symmetrische relatie.

Dit is een relatie R in $V \times V$ waarvoor geldt:

$$\bigwedge_{x \in V} \bigwedge_{y \in V} ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R).$$

Voorbeelden:

V is de verzameling van rechte lijnen in het vlak;

$$R = \{(x, y): x \parallel y\},$$

V is de verzameling van de reële getallen;

$$R = \{(x, y): y = 2 \log x \vee y = 2^x\},$$

V is de verzameling van de reële getallen; $R = \{(x, y): x + y > 0\}$.

De grafieken van de symmetrische relaties hebben de grafiek van de identieke relatie als as van symmetrie.

De transitieve relatie.

Dit is een relatie R in $V \times V$ waarvoor geldt:

$$\bigwedge_{x \in V} \bigwedge_{y \in V} \bigwedge_{z \in V} ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$$

Voorbeelden:

V is de verzameling van de reële getallen; $R = \{(x, y): x > y\}$,

V is de verzameling van de driehoeken in het vlak;

$$R = \{(x, y): x \cong y\}.$$

De equivalente relatie, equivalentie.

Een equivalente relatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is. Dat a en b door een equivalente relatie gelieerd zijn, pleegt men zó te noteren:

$$a \sim b \text{ („} a \text{ is equivalent met } b'').$$

De definitie van een equivalente relatie houdt dus in:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_x x \sim x, \\ & \bigwedge_x \bigwedge_y (x \sim y \Rightarrow y \sim x), \\ & \bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z ((x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z). \end{aligned}$$

Voorbeelden:

De relatie „is gelijkvormig met” tussen vlakke figuren,

de relatie „heeft dezelfde richting als” tussen lijnen van het vlak.

Is R een equivalente relatie in $V \times V$, dan kan men de elementen van V in klassen indelen zó dat twee elementen precies dán tot dezelfde klasse behoren als zij door R gelieerd zijn. Deze klassen heten equivalentieklassen.

De equivalentieklassen kunnen genomen worden als elementen van een nieuwe verzameling, die het quotiënt van V en R heet: V/R .

Voorbeelden:

V is de verzameling van de rechte lijnen van het vlak,
 R is de relatie „heeft dezelfde richting als”,
 V/R is de verzameling van de „arceringen” van het vlak.

V is de verzameling van de vlakke figuren,
 R is de relatie „is gelijkvormig met”,
 V/R is de verzameling van de „vormen”: de klassen van gelijkvormige figuren.

V is de verzameling van de niet-negatieve gehele getallen,
 R is de relatie „heeft bij deling door n dezelfde rest als”,
 V/R is de verzameling van de restklassen modulo n .

V is de verzameling van de paren gehele getallen (p, q) met $q \neq 0$,
 (p, q) en (r, s) zijn door de relatie R gelieerd precies dan als $p.s = q.r$,
 V/R is de verzameling van de rationale getallen.

Leerlingen uit de eerste klas vormen onbewust equivalentieklassen als ze zonder aarzelen zeggen, dat twee driehoeken die congruent zijn, „dezelfde driehoek zijn”.

Het geven van namen aan equivalentieklassen noemt men: definiëren door abstractie.

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Het traditionele december-symposium zal worden gehouden op *zaterdag 23 dec. 1961* in het *Kath. Lyceum „Geert Groote College”, Boerhavelaan 1 te Deventer.*

Programma:

10,30 koffie.

11,00 Opening door de voorzitter; aansluitend *Prof. Dr. F. Loonstra:*
„Groepsconstructies”.

12,30 Lunch.

13,30 *Prof. Dr. J. de Groot: „Iedere afbeelding is lineair”.*

14,30 thee.

15,00 *Prof. Dr. N. G. de Bruyn: „De omkering van de limietstelling van Cauchy”.*

16,00 Sluiting.

Aanmelding voor de lunch tot 17 dec. door overschrijving van *f* 1,20 op postgiro 825590 t.n.v. Amsterdamsche Bank - Zutphen, met vermelding Dr. Korthagen, lunch.

Alle belangstellenden zijn welkom!

PYTHAGORESE DRIEHOEKEN

door

IR. G. P. ITTMANN

Natuurkundig Laboratorium
N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken
Eindhoven — Nederland

Samenvatting

Het is een bekende wijsheid van de tuinman en de timmerman, dat je met de zijden 3, 4 en 5 een rechthoekige driehoek kunt maken. Velen weten ook wel, dat het bovendien gaat met 5, 12 en 13, maar dat het evenzo wil lukken met 8, 15 en 17 is minder bekend.

Dat er echter een rechthoekige driehoek 20, 21, 29 bestaat, blijkt vrijwel onbekend te zijn bij niet-wiskundigen, om van Pythagorese driehoeken met nog grotere zijden maar te zwijgen.

Het algemene, aan de wiskundigen van het oude Babylon en Hellas reeds ongeveer in deze vorm bekende, voorschrift ¹⁾ voor de constructie van driehoeken volgens Pythagoras luidt:

Neem twee onderling ondeelbare getallen a en b , die *allebei oneven* moeten zijn, dan luiden de onderling ondeelbare zijden van de rechthoekige driehoek:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2}; y = ab; z = \frac{a^2 + b^2}{2}. \quad (1)$$

Uit (1) zien wij direct, dat de schuine zijde z *oneven* wordt, terwijl één der rechthoekszijden n.l. y *ook altijd oneven* is.

De andere rechthoekszijde x is steeds een viervoud.

¹⁾ Zie bijv.: E. Schneider, Van nul tot oneindig, wiskunde als ontspanning; p. 78. Bussum—Antwerpen: geen jaartal.

Vgl. ook: O. Neugebauer. The exact sciences in antiquity, p. 39 en 52. Princeton University Press, Princeton, New Jersey; 1952.

a	b	x	y	z	$x^2 + y^2 = z^2$
3	1	4	3	5	$16 + 9 = 25$
5	1	12	5	13	$144 + 25 = 169$
5	3	8	15	17	$64 + 225 = 289$
7	1	24	7	25	$576 + 49 = 625$
7	3	20	21	29	$400 + 441 = 841$
7	5	12	35	37	$144 + 1225 = 1369$

In bovenstaande tabel zijn de driehoeken gerangschikt naar groter wordende schuine zijde. Het eerste, tweede en vierde exemplaar hebben als gemeenschappelijk kenmerk, dat de grootste twee zijden slechts 1 verschillen, hetgeen wij verkrijgen door $b = 1$ te maken.

Voor dergelijke heel platte driehoeken worden de zijden in het algemeen ²⁾:

$$x = \frac{a^2 - 1}{2}; y = a; z = \frac{a^2 + 1}{2}, \quad (2a)$$

hetgeen ook is te schrijven als:

$$x = \frac{y^2 - 1}{2} \text{ en } z = \frac{y^2 + 1}{2}, \quad (2b)$$

De eerste, derde en zesde driehoek hebben als gemeenschappelijk kenmerk, dat de beide oneven zijden 2 verschillen, hetgeen algemeen kan worden verkregen door: $b = a - 2$ te maken.

Deze driehoeken worden niet zo plat en de algemene uitdrukkingen luiden in dit geval:

$$x = 2(a - 1); y = (a - 1)^2 - 1; z = (a - 1)^2 + 1. \quad (3)$$

Deze kan men dus goed rangschikken naar de opeenvolgende *even* getallen $(a - 1)$.

Uit onze tabel blijft nu nog over de vijfde *driehoek* 20, 21, 29, die minder algemeen bekend is. Zijn kenmerk is, dat *de kleinste twee zijden slechts 1 verschillen* en bij voldoende grote getallen betekent dit, dat deze driehoeken *bijna gelijkbenig* zijn. Wat is nu het constructievoorschrift voor dergelijke bijna gelijkbenige, recht-

²⁾ Pythagoras zelf schijnt deze formule (2a) reeds te hebben gekend (Enc. Britt. 18, 804, 1957). Vgl. ook: B. L. v. d. Waerden: Ontwakende wetenschap; Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde, p. 112, P. Noordhoff N.V.; Groningen, 1950.

hoekige driehoeken? De voorwaarde luidt:

$$x-y = \pm 1 \quad (4)$$

en dit wordt:

$$(a+b)(a-b) = 2(ab \pm 1). \quad (5)$$

Noemen wij a en b resp. a_{n+1} en a_n , dan blijken zij te voldoen aan de volgende recurrente betrekking:

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad (6)$$

die ook voorkomt bij de benadering van $\sqrt{2}$ met behulp van kettingbreuken.

Combinaties van a en b , die hieraan voldoen, zijn:

a	b	x	y	z	$x^2 + y^2 = z^2$
3	1	4	3	5	$16 + 9 = 25$
7	3	20	21	29	$400 + 441 = 841$
17	7	120	119	169	$14400 + 14161 = 28561$

Deze bijna gelijkbenige driehoeken blijken veel minder dicht gezaaid te zijn, dan die beide soorten van platte driehoeken. Nemen wij nu de som der beide rechthoekszijden: 239, dan is daarvan het kwadraat: 57 121.

Inderdaad verschilt dit slechts 1 van het dubbele van het kwadraat der schuine zijde, dat 57 122 bedraagt. Wij zien dus, dat het quotiënt: $\frac{239}{169}$ een aardige benadering is voor $\sqrt{2}$. Die benadering

kan men uiteraard naar believen nog opvoeren door een grotere driehoek van het soort (5) te gebruiken. Aan de Pythagoreërs was een dergelijke benadering voor $\sqrt{2}$ al bekend ³⁾.

De reeds behandelde driehoek 8, 15, 17 heeft nog iets bijzonders, n.l. dat 2 maal de *even* rechthoekszijde slechts 1 *kleiner* is dan de schuine zijde, die altijd een viervoud + 1 is:

$$2x = z - 1 \quad (7)$$

Dit levert:

$$a^2 = 3b^2 - 2, \quad (8)$$

³⁾ Enc. Britt. 18, 804, 1957. Zie voor de diagonaal van een vierkant. B. L. v. d. Waerden, loc. cit., p. 308 en 141.

hetgeen inderdaad klopt voor: $a = 5$ en $b = 3$, terwijl de volgende oplossing is: $a = 19$ en $b = 11$. Hieraan beantwoordt de driehoek:

$$x = 120; y = 209; z = 241. \quad (9)$$

Nu is: $\frac{209}{120}$ een heel aardige benadering voor $\sqrt{3}$ en inderdaad gelden voor a en b recurrente betrekkingen:

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} \text{ en } b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}, \quad (10)$$

die ook afgeleid kunnen worden uit de benadering van $\sqrt{3}$ met behulp van kettingbreuken.

Tenslotte is de driehoek 3, 4, 5 het eerste voorbeeld, waarbij 2 maal de *oneven* rechthoekszijde slechts 1 *groter* is dan de schuine zijde, zodat hiervoor in het algemeen geldt:

$$2y = z + 1. \quad (11)$$

Dit levert:

$$(a-b)^2 = 2ab - 2, \quad (12)$$

hetgeen behalve voor: $a = 3$ en $b = 1$ ook klopt voor: $a = 11$ en $b = 3$. Hieraan beantwoordt:

$$x = 56; y = 33; z = 65. \quad (13)$$

Het quotiënt: $\frac{56}{33}$ is weer een heel aardige benadering voor $\sqrt{3}$ en ook in dit geval gelden voor a en b de recurrente betrekkingen (10).

Gesprekken met o.a. mijn collega's N. Warmoltz en J. Hornstra hebben bijgedragen tot het ontstaan van dit verhaal.

BOEKBESPREKING

W. J. de Tombe, R. L. Krans en J. Rekvelde, *Fysica voor de kweekscholen. Deel I*. 190 blz. Eerste druk, uitg. J. B. Wolters, Groningen, 1960. Ing. f 5,90, Geb. f 6,75.

Het bovenstaande driemanschap staat er borg voor dat er iets goeds geboden wordt. Bij doorbladeren herkent men direkt het platenmateriaal uit het bekende leerboek voor het VHMO van Krans en Vrij, de docent in de didactiek Rekvelde liet zich niet onbetuigd wat de tekst betreft, terwijl de Tombe rekening hield met de typische kweekschoollezen.

Met genoegen constateerden wij, dat veel zorg is besteed aan de definities, waarbij ook de dimensies aan hun trek komen. Dit deel behandelt de warmteleer, mechanica, vloeistoffen en gassen, terwijl enkele hoofdstukken zijn toegevoegd over het Heelal en het Weer.

In het hoofdstuk Vloeistoffen is men in de tekeningen niet steeds konsekvent in het gebruik van de pijltjes. Soms zijn ze als vectoren bedoeld en ligt het aan-

grijpingspunt waar het behoort (fig. 90), soms echter zijn het meer een soort „richtingaanwijzers” (fig. 82, 84, 85 enz.). Het eerste systeem lijkt ons de voorkeur verdienen.

Onze snel veranderende taal dwingt in bijna iedere nieuwe druk tot een andere schrijfwijze. Men ziet dan allicht over het hoofd, dat in de figuur (Bijv. 135) de oude spelling staat. In fig. 141 is niet duidelijk, in welke eenheden $p = b + h$ staat.

Afgezien van deze kleinigheden is het een uitstekend boek dat zijn weg wel zal vinden. Er is nog een apart docentenboekje met antwoorden en een advies voor het indelen van de leerstof.

Van Santen

J. H. Raat, *Werkschrift Geometrische Optica*. 48 blz. Uitg. P. Noordhoff N.V., Groningen f 1,90.

Teneinde de leerlingen het tijdrovende werk van het maken van optische tekeningen en konstrukties te besparen, is schrijver overgegaan tot het samenstellen van een werkschrift, waarin de basisfiguren reeds zijn aangebracht, terwijl tevens een groot aantal opgaven, meestal in de vorm van aan te vullen zinnen, aanwezig is.

Er is een ruime keuze in genoemde tekeningen en ongetwijfeld zal het beoogde doel, benevens het bevorderen van de netheid, worden bereikt, hoewel wij ons kunnen voorstellen, dat vele natuurkunde-docenten in dit opzicht meer vrijheid willen behouden.

Van Santen

P. van der Hoeven, *Metafysica en fysica bij Descartes*, J. Noorduyt en Zoon. N.V., Gorinchem, 1961. Dissertatie. 293 blz.

De auteur, van huis uit wiskundige, geeft een diepgaande beschouwing over het verband tussen de metafysica en de fysica bij Descartes. Problemen, die het wiskundig denken betreffen, komen echter nauwelijks aan de orde. Een uitvoerige bespreking in Euclides lijkt mij dan ook niet op zijn plaats. Ik zou willen volstaan, met de opmerking, dat het werk van belang is voor diegenen, die reeds kennis genomen hebben van de filosofie van Descartes en er prijs op stellen hun mening met die van een ander te confronteren.

P. G. J. Vredenduin

E. E. F. Zweers en Dr. W. P. J. Lignac, *Opbouw en Uitbouw Natuurkunde Werkboek III*. J. B. Wolters, Groningen, 386 blz., Prijs f 11,90 (f 12,90).

Het aansluitend mechanica repertorium kost f 2,40, (64 blz.).

Het boek ziet er buitengewoon verzorgd uit en zal m.i. bij de jeugd wel een goed onthaal vinden evenzo allicht bij de docenten, die de voorgaande delen „Verkennen en begrijpen” alsmede „begrijpen en toepassen” met genoegen gebruiken.

Dit deel steekt van wal met Beweging en Kracht, Trillingen en Golven (totaal 128 blz.) en zeer voldoende oefenmateriaal. Om echter de leerlingen een behoorlijk overzicht te geven eventueel hun blik te verruimen; zie b.v. no. 37 met fig. 15, zodat ze van de bomen ook het bos leren zien, zal de docent, wil hij niet in tijdnood geraken wel eens zijn toevlucht moeten nemen tot een met zorg opgestelde stencil. Hij vindt vraagstukken te kust en te keur, waarnaar hij tevens kan verwijzen. Het zij mij veroorloofd enige opmerkingen en suggesties ten beste te geven.

Op pag. 31 zou ik de opmerking over de ampère weglaten en uitsluitend spreken van het m.k.s. stelsel.

Op blz. 32 mis ik een vraag als: hoe merkt men van een lichaam zijn (trage) massa, hoe zijn gewicht (zware massa), als men zich bevindt op het opp. van de aarde, maar ook, als men zich zou bevinden op 2, 10 resp. 60 aardstralen van het middelpunt verwijderd?

Bij de behandeling van de vectoren zou ik in dl. IV „Inzicht en Uitzicht” de snelheid v ook in de vorm $\frac{d\vec{r}}{dt}$ gieten, door dus de beweging te beschouwen vanuit

een vastpunt O buiten de baan. Door invoering van de „hodograaf” zie b.v. het boek van prof. Dr. R. Kronig c.s. dl. I is men dan met de versnelling „zo” klaar: deze is gelijk aan de snelheid, waarmee het eindpunt van de snelheidsvector zich langs de hodograaf verplaatst. Hoe vinden dan b.v. onmiddellijk de bekende formule $a_c = v\omega^2$?

Op pag. 48 zou ik opmerken, dat de arbeid door het s.p. (snelh. = v) op een remmende kracht F , die een vertraging a geeft, te verrichten $\frac{v}{a} \cdot \frac{1}{2}v \cdot ma = \frac{1}{2}mv^2$

Joule zou bedragen.

Blz. 58 1ste regel: een kracht = $\frac{g}{20} N$.

Blz. 59 verwijs toch ook naar § 17 en § 52.

Blz. 70 definitie stoot: een gedurende een uiterst korte (onbekende) tijd werkende *zeer grote* (onbekende) kracht.

Blz. 79 naar aanleiding van fig. 63 ook attenderen op een seismograaf.

Blz. 92 1^o de vorm: $A \sin (Bt + C)$.

Blz. 86. Hoe *meeth.* duidelijk te maken, dat $U = a_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + a_2 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha \right)$

ook in de vorm $A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \Phi \right)$ is te schrijven. Bereken dan A en Φ als $\alpha = 90^\circ$ is,

terwijl a_1 en a_2 gegeven zijn. (Ook van belang voor de theorie van de wisselstromen).

§ 25. Hoe uit lopende golven door terugkaatsing staande golven kunnen worden verkregen kan m.i. wel iets eenvoudiger worden toegelicht (recensent gaarne bereid deze bewering te staven) zie fig. 74 en 76.

Blz. 114 en 115. Hoe uit de „moeder formule” van Laplace $v = \sqrt{\frac{c_p p}{c_v S}}$ te be-

grijpen, dat v toch *niet* van p afhangt? Hoe hieruit „onze” formule af te leiden? Hoe m.b.v. dimensie beschouwingen aan te tonen, dat S de soortelijke *massa* voorstelt. Belang van deze formule?

Geluid en muziek (blz. 129—173) met de examen-eisen wordt zeer voldoende rekening gehouden: ook de geluidsband wordt niet vergeten.

Val en worp (blz. 173—205).

In § 51 mis ik de vraag: hoe kon Newton aannemelijk maken, dat de aarde de maan heus bij zich kan houden?

Of het nodig is de *Coriolis krachten* ook *quantitatief* te behandelen en dan de formule $k_c = 2\omega v \sin \varphi$ zonder meer te vermelden, waag ik te betwijfelen.

Rust en beweging (blz. 205—249).

Om het belang van de momentenstelling goed uit te laten komen zou ik bij § 60 ook de vraag stellen: hoe m.b.v. deze stelling omgekeerd het parallellogram van krachten aannemelijk te maken?

Warmte en energie (pag. 249—301).

Vooral in verband met de behandeling van de cal. machines § 84 dient er m.i. toch uitdrukkelijk op gewezen te worden, dat warmte *ongeordend molecuulair arbeidsvermogen* is, zodat men niet kan verwachten dat deze voor 100 % in geordende mechanische energie omgezet kan worden: voor 30 % is al een hele prestatie § 80. Arbeidswaarde van de calorie volgens Mayer; waarom berekening niet als volgt?:

$c_p - c_v$ cal. $\equiv$ arbeid verricht bij het c_p proces, welke arbeid voor normale lucht

$$= 76 \times 13,6 \times g \times \frac{1}{273} \cdot \frac{1000}{1,293} \text{ erg.}$$

bedraagt. Joule (en Rowland) laten hier verstek gaan?

De bespreking van het smoorproces zou ik enigszins anders inkleden, omdat ik betwijfel of deze redactie goed „inslaat”. Het doornemen van de Magnetische en Elektrische velden (blz. 301–349) geeft mij geen aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

Wat ten slotte het mechanica repertorium betreft, in het bijzonder bestemd voor de 5de klasse van de h.b.s., zij het mij veroorloofd te vragen: waarom aan de koppel vector (fig. 11) niet de *tegengestelde* richting te geven? (rechtse schroef). Het bewijs, dat de resultante van 2 koppels opgeleverd kan worden door de „resultante” van de bijbehorende koppelvectoren heb ik niet gezien. Overigens heeft de recensent, gezien het vele werk door de schrijvers van „Opbouw en Uitbouw” verzet, gemeend er zich ook niet met een Jantje van Leiden af te mogen maken.

Okken.

ONTVANGEN BOEKEN

Van P. Noordhoffs Uitgeverij Groningen ontvingen wij:

- B. Marius en J. H. H. Grooten, *Natuurkunde vraagstukken voor Kweekscholen*, dl. I en II, 5de druk, 280 resp. 275 opgaven, f 0.90 resp. f 1.—.
- B. Marius, *Contact-meetkunde voor Kweekscholen*, 3e druk, 114 blz., f 3.50.
- B. Marius, *Stereometrie voor Kweekscholen*, 4e druk, 80 blz., f 2.25.
- W. Docter, *Rekenkunde voor Kweekscholen*, 2e druk, 85 blz. f 2.90.
- P. Wijdenes, *Algebra voor examens in Handelsrekenen*, 6e druk, verzorgd door H. Pleysier, 6e druk, 156 blz., f 5.90.
- C. J. Alders, *Planimetrie voor M.O. en V.H.O.*, 16-20e druk, 165 blz., f 3.50.
idem, *Algebra voor M.O. en V.H.O.*, deel I, 41e-45e druk, 113 blz. f 2.50.
idem *Goniometrie voor M.O. en V.H.O.*, 11e-15e druk, 64 blz., f 1.90.
- Wijdenes en Van de Vliet, *Algebra en financiële rekenkunde* voor de H.B.S.-A, 9e druk, 127 blz., f 3.50.
- Dr. H. Streefkerk, *Nieuw Meetkunde boek voor M.O. en V.H.O.*, deel II, 4e druk, 123 blz., f 3.50. deel III, 3e druk, 95 blz., f 3.75.
- Schrek, *Beknopte Analytische Meetkunde*, 3e druk, 155 blz., f 3.90.
- B. Nicolai en Dr. J. H. Raat, *Natuurkunde voor de lagere school*, 2e druk, 119 blz., f 4.25.
- P. Wijdenes en dr. P. G. van de Vliet, *Logaritmen- en Interesttafels*, uitgave G, 7e druk, f 2.75.
- 250 *Opgaven* samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie, 6e druk, f 1.90.
- Noordhoff's *Logaritentafel* in vier decimalen en *Rentetafels* in acht decimalen, 24e druk, f 1.90.
- M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw algebraboek III*, 10e druk, 78 blz., ing. f 2.25.
idem, *Meetkundige vraagstukken*, 2de deel, 13e druk, f 2.25, Groningen.

B. Marius en A. C. Valkenaars, *Algebra voor de Kweekschool*, 100 blz. f 3.50, Groningen.

De schrijvers zijn er m.i. in geslaagd, de hoofdstukken die zijn aangegeven in de Kweekschoolwet van 1953, zo te behandelen, dat de zelfwerkzaamheid wordt gestimuleerd, om de stof te beheersen.

C. J. Alders, *Inleiding tot de Analytische Meetkunde*, 11e–15e druk, 79 blz. f 2.50.

P. Wijdenes, *Algebra voor Mulo III*, 23e druk. Examenuitgave voor B, 156 blz. f 4.20.

WIMECOS

Naar aanleiding van het ontbreken van de kosmografie als leervak voor de scholen voor v.w.o. en h.a.v.o. in het wetsvoorstel 5350 is door het bestuur van Wimecos de volgende brief verzonden:

Zeist, 11 oktober 1961

Aan Zijne Excellentie de Minister van
Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen te
's-Gravenhage.

Excellentie,

Het bestuur van de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie (Wimecos) veroorlooft zich het volgende onder Uw aandacht te brengen.

In het wetsvoorstel 5350 wordt noch voor de scholen voor v.w.o. noch voor de scholen voor h.a.v.o. de kosmografie genoemd onder de vakken, waarin onderwijs zal worden gegeven.

Toch heeft het onderwijs in de kosmografie — welke naam we gaarne door sterrenkunde vervangen zouden zien — grote waarde voor de algemene vorming der leerlingen. We willen hierbij op de volgende aspecten wijzen:

- a. De behandeling van de ontwikkeling van het inzicht in de bouw van het sterrenstelsel in het algemeen en van het zonnestelsel in het bijzonder, laat de leerlingen iets zien van de geestelijke worsteling bij de grote figuren uit het verleden, om zich vrij te maken van wat een eerste oppervlakkige waarneming schijnt te leren en van daarop berustende, steeds weer overgeleverde denkbbeelden.
Geen andere exacte wetenschap kan deze strijd om het juiste inzicht in de verschijnselen zo met treffende voorbeelden illustreren als juist de sterrenkunde.
- b. Alleen in de sterrenkunde bestaat de mogelijkheid om van het geleerde in de wiskunde, de mechanica, de natuur- en scheikunde op ongedwongen wijze toepassingen op grote schaal te laten zien en om daarmee aan de leerling de samenhang en onderlinge afhankelijkheid van de exacte vakken te tonen.
- c. De onderbrenging van de leerstof bij een ander vak houdt het gevaar in, dat de bijzondere functie, die de sterrenkunde kan hebben t.a.v. de algemene vorming der leerlingen, niet behoorlijk tot zijn recht komt.
- d. In onze tijd, waarin zich de ruimtevaart steeds meer zal ontwikkelen, is het o.i. niet toelaatbaar, dat abiturienten van scholen voor v.w.o. en h.a.v.o. die toch in de maatschappij leidende functies zullen gaan bekleden, niet op de hoogte zouden zijn van de bouw van het zonnestelsel en van de plaats van dit stelsel in het geheel van de kosmos.

Het bestuur van Wimecos hoopt, dat het aangevoerde Uwe Excellentie er toe brengen zal nader te overwegen aan de kosmografie (Sterrenkunde) een plaats in te ruimen onder de vakken, die aan de scholen voor v.w.o. en h.a.v.o. onderwezen zullen worden.

Met de meeste hoogachting,
namens het bestuur van Wimecos

Joh. H. Wansink, voorzitter
J. F. Hufferman, secretaris

TIJDSCHRIFTENCIRCULATIE WIMECOS

JAARVERSLAG 1960/1961

De lezerslijst laat zien dat er 32 leden zijn, die naar wij veronderstellen $\pm$ 220 gulden aan abonnementsgelden zullen betalen.

In het afgelopen jaar werden f 230.50 ontvangen en waren de uitgaven ongeveer 200 gulden. Een gunstige situatie dus die vooral te danken is aan het feit, dat er geen nieuwe inlegvellen nodig waren.

Voor de toekomst ziet het er naar uit dat in- en uitgaven elkaar in evenwicht zullen houden met nieuwe circulaires ($\pm$ 35 gld.), abonnementen ($\pm$ 150 gld.) verzendkosten ($\pm$ 25 gld.) en het inbinden van jaargangen ($\pm$ 30 gld.)

De circulatie liep in het algemeen vrij regelmatig, opmerkingen hierover kwamen nauwelijks binnen.

15 oktober, 1961

G. J. J. Boost

VERSLAG REDACTIE-EUCLIDES

Jaargang 36 (1960—1961)

Aan de Besturen van

„Wimecos” en „Liwenagel”

Over de 36e jaargang van Euclides zijn weinig bijzonderheden te vermelden. De samenstelling van de redactie onderging geen wijziging. Evenmin waren er veranderingen in werkwijze en taakverdeling.

Evenals in vorige jaren kan worden opgemerkt dat de samenwerking tussen redactieleden onderling en tussen redactie en uitgeverij niets te wensen overliet.

Dank wil de redactie brengen aan de geregelde medewerkers, die steeds weer voor nieuwe kopij zorgen. Er was trouwens geen gebrek aan kopij. Het is alleen jammer, dat niet steeds toegezegde teksten van voordrachten ook werkelijk werden ontvangen.

Voor wensen en suggesties houdt de redactie zich gaarne aanbevolen.

De omvang van de 36e jaargang was 336 pagina's, 16 meer dan normaal.

Namens de redactie van „Euclides”

De voorzitter, De secretaris,

J. H. Wansink A. M. Koldijk.

CONTRIBUTIE

De penningmeester van Wimecos verzocht de leden die hun contributie over 1961/62 nog niet hebben betaald, f 8.00 te willen overschrijven op postgirorekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, de Houtmanstraat 37, Hoogezaand.

WIMECOS

Algemene vergadering op donderdag 28 december 1961 in „Esplanade”, Lucas Botwerf, Utrecht. Aanvang 10.30 uur. Voor de voorlopige agenda zie men het vorige nummer (blz. 94).

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

Van de heer B. Kootstra uit Roosendaal, een niet-wiskundige, ontvang ik een zestiental aardige opgaven, waarvan ik er graag een aantal opneem. Hieronder het eerste stel.

57. Een bollenstapel in de vorm van een vierzijdige regelmatige piramide bevat zoveel bollen, dat er twee driezijdige bollenstapels uit gevormd kunnen worden, waarvan de hoogte van elk groter is dan die van de oorspronkelijke. Uit hoeveel lagen bestaat de oorspronkelijke stapel minstens?

58. a. Aan het hoofd van een bank staan vier elkaar wantrouwende directeuren. Ze willen een brandkast hebben, die geopend kan worden door elk drietal directeuren maar niet door twee directeuren. Hoeveel sloten moet de brandkast minimaal hebben en hoe moeten de directeuren de sleutels verdelen?

b. Bovenstaande opgave kan als volgt worden uitgebreid. Er zijn ook nog drie boekhouders. De brandkast moet nu bovendien nog aan de eis voldoen, dat hij geopend kan worden door elk stel van twee directeuren en één boekhouder en door elk stel van één directeur en twee boekhouders, maar niet door de drie boekhouders. Gevraagd wordt weer het minimaal aantal sloten en de verdeling van de sleutels.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

55. We noemen de gevangenen A, B en C en veronderstellen, dat A degene is, die zich gemeld heeft.

A denkt: als ik een witte heb, ziet b.v. B bij mij een witte en bij C een zwarte. B zal dan denken: als ik een witte heb, ziet C bij A en bij mij een witte, zou dan concluderen: ik heb een zwarte. Hij meldt dit echter niet — zo denkt B nog steeds in A's gedachtengang — dus heb ik (B) geen witte, maar een zwarte. En — zo peinst A verder — B zou dit (tuk op gratie als hij is) melden. B houdt echter zijn mond. Ik heb dus geen witte en ga dus melden, dat ik een zwarte schijf op mijn rug heb.

56. De mogelijkheden zijn

1	1	36	1	6	6
1	2	18	2	2	9
1	3	12	2	3	6
1	4	9	3	3	4

Alleen 1, 6, 6 en 2, 2, 9 leveren gelijke sommen. Een van deze twee moet het dus geweest zijn. Op grond van het laatste gegeven blijkt het alleen in het geval 1, 6, 6 mogelijk, dat de ambtenaar nu de leeftijden kent.

Waardevolle hulpmiddelen

bij de analytische meetkunde:

Prikmallen

met volledige aanwijzingen.

4 ellipsen, 3 hyperbolen, 3 parabolen met assen, brandpunten en asymptoten.

35 cent per stel; minimum afname 10 stel.

bij de goniometrie:

Grafiekenbladen

voor de goniometrie

met volledige aanwijzingen.

15 bladen in envelop 75 cent; 100 bladen los f 4,—.

Leraren, die deze hulpmiddelen niet kennen, gelieven een exemplaar aan te vragen bij de uitgever.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

C.J. ALDERS

**Wiskunde-
boeken voor
M.O. & V.H.O.**

Algebra (3 delen) — Planimetrie
Stereometrie — Goniometrie
Driehoeksmeting — Inleiding tot de
Analytische Meetkunde

11e - 45e drukken. Prijs per deeltje gemiddeld f 2.50

„Beknopt, helder, degelijk!

Voorzien van overvloedig oefenmateriaal, met alle ballast overboord”

Aldus beoordeelde de heer J. Koksma in
„Chr. Gymn. en M.O.” de Alders-serie
in haar totaal.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

De 3 meest gebruikte tafels:

Noordhoff's Schooltafel (5 dec.)

bewerkt door P. WIJDENES
17de druk - gebonden f 2,50.

Deze tafel bevat: I. De logaritmen van de getallen van 1—10009. — II. Logaritmen sinustafel. — III. Sinustafel. — IV. Rentetafels. En verder nog enige bijtafels.

Zeer eenvoudige behandeling van de kleine hoeken. In tafel II twee volle graden naast elkaar, in tafel III vier volle graden naast elkaar.

Gebruik: h.b.s. 5-j. c.; gymnasium; lyceum; h.t.s.

Noordhoff's log.tafel in vier dec. en rentetafels in acht decimalen

24ste druk - gebonden f 1,90.

Inhoud: Gewone logaritmen. — Logaritmen sinustafel. — Sinustafel. — Rentetafels. — Machten, wortels en omgekeerden. Omtrek en oppervlakte van de cirkel. — De vijf rentetafels in 8 decimalen, nl. $(1+i)^n$, $(1+i)^{-n}$, $\Sigma(1+i)^n$, $\Sigma(1+i)^{-n}$ en de annuïteitentafel.

Gebruik: h.b.s. 5-j. c.; gymnasium; lyceum.

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

Logaritmen- en rentetafels — Tafel G

103 bladzijden - 6de druk - gebonden f 2,75.

Dit is een beknopte uitgave van Tafel E en bevat niet meer dan men op school nodig heeft, nl.:

Rentetafels: I. $(1+i)^n$;

II. $(1+i)^{-n}$;

III. $(1+i) + (1+i)^2 + \dots$

IV. $(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots$

V. Annuïteitentafel met achterafbetaling der rente.

} alle in
100 termijnen
en 8 decimalen.

Bijtafels:

VI. $\sqrt[n]{1+i}$

VII. Herleiding van dagen tot decimale gedeelten van een jaar en omgekeerd.

Gebruik: h.b.s.-A.; handelsschool; akten handelswetenschappen.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

De geadverteerde uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.