

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962

II - 1 OKTOBER 1961

INHOUD

In Memoriam Dr. P. Doomenbal	33
Kalender	34
Dr. L. N. H. Bunt: Vernieuwing van het wiskunde-onder- wijs in de Verenigde Staten	35
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	54
Recreatie	58
Dr. J. T. Groenman: Bij een „Verscheidenheid”	60
Liwenagel	64

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, de Houtmanstraat 37, Hoogezand, tel. 05980/3516; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/4212;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIBLENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

IN MEMORIAM

Dr. P. DOORNENBAL

1899—1961

Dr. P. Doornenbal, coördinerend inspecteur in 'de derde inspectie van het v.h.m.o., is na een ernstige, langdurige ziekte op 20 juli 1961 in Den Haag overleden. Het Bestuur van Wimecos wenst hem hier te gedenken en dank uit te spreken voor al wat hij in de betrekkelijk korte duur van zijn inspectoraat voor het wiskundeonderwijs in Nederland heeft betekend. We zullen zijn toewijding voor de belangen van dit onderwijs, en de vriendelijkheid, hartelijkheid, welwillendheid en hulpvaardigheid die zijn optreden kenmerkten, niet gemakkelijk vergeten.

De jaren van zijn inspectoraat—dr. Doornenbal werd in 1952 als opvolger van inspecteur C. de Bruijn belast met het inspectoraat in de noordelijke provincies—vallen vrijwel samen met de jaren, waarin het nieuwe wiskundeprogramma voor hogereburgerschool en gymnasium werd voorbereid en tot stand kwam. Het is onze overtuiging dat op de totstandkoming van dit programma ook dr. Doornenbal's invloed van belang is geweest. Hij was aanwezig op de buitengewone algemene vergadering van Wimecos in februari 1955, die het concept-leerplan vaststelde en op de jaarvergadering van Liwenagel in april 1955, waarin Liwenagel zich uitsprak voor aanpassing van het wiskundeprogramma van het gymnasium aan de voorstellen der leerplancommissie. Door zijn deelname aan de discussie heeft dr. Doornenbal destijds de te volgen procedure wezenlijk beïnvloed.

In de contacten die we met dr. Doornenbal mochten hebben, hebben we hem in de jaren 1955—1958 leren kennen niet alleen als een warm voorstander van de door Wimecos, Liwenagel en de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. beoogde vernieuwing, maar tevens als een voorzichtig leidsman die zijn vrees dat het ontwerpprogramma overladen was en dat de statistiek tot die overlading dreigde bij te dragen, niet voor ons verborgen hield. Dit bleek ons in het bijzonder in de periode waarin door het verblijf van inspecteur Van Dam in Amerika de contacten inzake de exacte vakken geheel via dr. Doornenbal

liepen. Toen de Wimecos-leerplan-commissie aan zijn bezwaar tegemoet kwam door er toe over te gaan de statistiek te laten vervallen, bereikte het aldus gewijzigde programma in een snel tempo het Staatsblad.

Dr. Doornenbal was een welkome gast op onze jaarvergaderingen, waar we hem de beide laatste jaren reeds node misten.

We houden zijn nagedachtenis in ere.

Het Bestuur van WIMECOS.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, De Houtmanstraat 37, Hoogezaand.

VIJFTIENDE AMSTERDAMSE UNIVERSITEITSDAG op ZATERDAG 21 OKTOBER 1961

Op zaterdag 21 oktober 1961 organiseert de Amsterdamse Universiteits-Vereniging de vijftiende Amsterdamse Universiteitsdag.

Des morgens te elf uur precies zullen de deelnemers in de Aula worden welkom geheten door de Voorzitter der Vereniging, Dr. M. W. Holtrop, waarna de opening zal geschieden door de Rector Magnificus, Prof. Dr. J. Kok. Daarna zal Dr. J. Spaander, Directeur van het Rijks Instituut voor de Volksgezondheid, een voor alle deelnemers bestemde rede uitspreken over:

„Leven, werken en denken in het atoomtijdperk”,

Tussen half een en twee uur is er gelegenheid de koffiemaaltijd te gebruiken in de Mensa Academica.

Des namiddags van 2—5 uur worden voor alle faculteiten colleges gegeven waarvan een aantal zal aansluiten bij het onderwerp van de ochtendspreker.

Na afloop der middagcolleges vindt in Krasnapolsky een gemeenschappelijke maaltijd plaats.

De avond zal worden besloten met een toneelvoorstelling in Hypokriterion door de Amsterdamsche Studenten Tooneel Vereeniging.

Ook echtgenoten van alumni(ae) zijn op deze dag hartelijk welkom.

Nadere inlichtingen voor belangstellenden zijn te verkrijgen bij de secretaresse van de Amsterdamse Universiteits-Vereniging, Mevr. Mr. A. E. Prakken-Bukers, Minervalaan 73^a Amsterdam-Z.

Diegenen der Amsterdamse alumni(ae), die geen jaarlijkse circulaire betreffende de Universiteitsdag ontvangen, worden vriendelijk verzocht hun tegenwoordig adres op te geven bij het secretariaat.

VERNIEUWING VAN HET WISKUNDE-ONDERWIJS IN DE VERENIGDE STATEN ¹⁾

door

Dr. L. N. H. BUNT

Utrecht

1. De kritiek die op het Amerikaanse wiskunde-onderwijs al sedert geruime tijd wordt uitgeoefend dient, zoals vanzelf spreekt, gezien te worden tegen de achtergrond van het Amerikaanse onderwijsstelsel. Het lijkt me daarom goed hierover vooraf, zij het in het kort, iets te zeggen.

Voor geheel Amerika geldt, dat het onderwijssysteem omvat: de lagere school voor kinderen tot 12 jaar, de high school voor de 13- tot 18-jarigen, het college, dat meestal 4 jaren omvat, en de universiteit, die hier nog 3 jaren aan toevoegt. Door een Europese bril gezien, vertoont dit systeem twee bijzonderheden. Ten eerste is er maar één high school, ten tweede is er het college. Alle kinderen gaan naar de high school, en er staan binnen deze school allerlei richtingen voor hen open. De leerling stelt het programma van zijn schoolvakken zelf samen. Weliswaar geschiedt dit onder nauwlettend toezicht van de schoolleiding en is veelal de mate van begaafdheid van de leerling beslissend voor zijn keuze, maar helaas spelen hierbij ook andere factoren een rol. Een leerling b.v. die van de lagere school een tegenzin tegen het rekenen heeft meegebracht of die bij geruchte heeft vernomen dat de wiskunde een vervelend of moeilijk vak is, zal wellicht gebruik maken van de hem vergunde vrijheid om algebra en meetkunde te omzeilen. Hij verspeelt dan wel zijn kansen op hogere studie, maar merkt dit pas goed, en dan tot zijn spijt, als het te laat is. Men komt zulke mislukte figuren herhaaldelijk tegen. In de wachtkamer van een Greyhoundbusstation knoopte ik eens een gesprek aan met een jongmens, die evenals ik een lange tijd moest wachten en alleen maar aandacht scheen te kunnen opbrengen voor de gokautomaat en de juke-box, vaste attributen van dergelijke gelegenheden. Hij bleek met zichzelf niet erg tevreden te zijn. Sinds enige maanden had hij de high

¹⁾ Voordracht Algemene Vergadering van Wimecos. Utrecht, 28 december 1960.

school voltooid en nu trachtte hij toegang tot een college te krijgen. Hij had daartoe, zoals gebruikelijk is, de bewijzen van de resultaten van zijn middelbare-schoolstudie naar een aantal colleges gezonden. Die wilden hem echter niet toelaten, omdat de lijst van zijn vakken, behalve het verplichte Engels en Amerikaanse geschiedenis, geen hogere aspiraties vertoonde dan vakken als „general mathematics” (een soort kruidenierswiskunde), een cursus in „general science” (wat meestal niet veel meer dan plaatjes kijken betekent), handenarbeid, gymnastiek, en „civics”, een vak dat zo vaag gedefinieerd pleegt te worden dat het ontsnapt aan elke poging om te begrijpen wat het inhoudt. Er scheen echter nog hoop voor deze jongeman te zijn, want één college bleek niet geheel ongenegen om toch nog met hem te praten.

Dit brengt ons op het tweede verschilpunt met het Europese onderwijs: de aanwezigheid van het college. Het onderwijs dat aan dit instituut gegeven wordt, is naar onze maatstaven enerzijds middelbaar, anderzijds hoger onderwijs. Het is onmogelijk een scherpe scheidingslijn te trekken, maar, globaal gesproken, is het onderwijs in de eerste twee jaren van het college te vergelijken met dat in de hoogste twee klassen van onze middelbare school. Hierbij denk ik dan aan onze h.b.s., want Grieks wordt niet onderwezen, en voor zover Latijn op het programma staat, is dit vak niet te vergelijken met het gelijknamige vak op een Nederlands gymnasium. De eerste twee jaren van het college fungeren dus als een verlengstuk van de high school, d.w.z. van de periode van algemeen vormend onderwijs, maar toch is er dikwijls ook wel reeds een mogelijkheid tot specialisatie. Dit hangt af van de doelstelling en het niveau van een bepaald college. Ik moet thans volstaan met op te merken dat er, wat dit niveau betreft, de grootst denkbare verschillen voorkomen.

2. Het onderwijs in de wiskunde, tot de beschouwing waarvan we ons verder zullen beperken, wordt natuurlijk mede gekarakteriseerd door de genoemde eigenaardigheden van het onderwijsstelsel. Als alle leerlingen naar dezelfde middelbare school gaan zonder in min of meer homogene groepen te worden ingedeeld, zal dit een ongunstige beïnvloeding van het niveau van het lesgeven en studeren tot gevolg hebben. Wanneer een leerling zijn vakken zelf kiest, en dus bij mislukking voor het ene vak het volgend jaar gewoon een ander kan nemen, kunnen eigenlijk alleen belangstelling en innerlijke drang tot ijver en volharding aansporen. En wanneer de instituten voor hogere studie aan een leerling met een onvoldoend schoolresultaat alsnog gelegenheid bieden om zijn achterstand in

te halen, is ook dit voor hem geen reden om met zijn algemene vorming haast te maken.

Dat er nog andere, eveneens belangrijke factoren zijn die het niveau van het onderwijs beïnvloeden, is voor het thema van onze beschouwingen niet relevant genoeg om erop in te gaan. Deze factoren, waarvan de interpretatie van het begrip „democratie” één der allerbelangrijkste is, zijn nl. te beïnvloeden en te wijzigen. De vorm van het onderwijsstelsel is echter niet voor grote veranderingen vatbaar, zeker niet in een conglomeraat van vijftig staten die alle zo onafhankelijk mogelijk van de federale regering willen zijn. Men zou er trouwens niet aan denken om afstand te doen van zijn high school voor iedereen en waarin voor zittenblijven geen plaats is, en van zijn college, twee instituten die zo menige Amerikaan aan de gelukkigste periode van zijn leven doen terugdenken.

Dit betekent nu echter, dat een hervorming van het onderwijs in de wiskunde er rekening mee moet houden, dat leerlingen dit vak al of niet zullen kiezen, dat ze er niet op zullen blijven zitten, en dat er altijd nog wel een college te vinden zal zijn waar ze hun lacunes in de wiskunde kunnen aanvullen.

3. Ik zal niet trachten U een beeld te geven van de toestand waarin het onderwijs in de wiskunde in de Verenigde Staten tot voor kort verkeerde. Dit zou ons te veel ophouden. Reeds op grond van deze enkele mededelingen zult U, als ervaren leraren, die hun handen eraan vol hebben om hun leerlingen tot aandacht en medewerking te brengen, er helemaal geen moeite meer mee hebben Uzelf een beeld te vormen dat niet te zeer van de werkelijkheid afwijkt. Om dit beeld niet toch nog te rooskleurig te doen uitvallen vertel ik U er bij dat het tekort aan leraren die hun vak kennen in veel staten schrikbarend groot is.

Dit ongunstige beeld van het Amerikaanse wiskunde-onderwijs bestond niet alleen in de geest van de Europese bezoekers van het land. De wis- en natuurkundigen in Amerika wisten heel goed hoe slecht het met het onderwijs gesteld was. Wanneer ik bij mijn eerste bezoek aan de Verenigde Staten het department of mathematics van een willekeurige universiteit binnentrad, was dit het eerste onderwerp waarover men sprak. Maar degenen die in hoogste instantie de belangen van het onderwijs moesten behartigen, schenen er niet van te overtuigen dat het wiskunde-onderwijs slecht was. Er werden wel enkele individuele en steeds luider wordende protesten vernomen, zoals b.v. dat van admiraal Rickover ¹⁾, maar

¹⁾ Rear Adm. H. G. Rickover, USN, *The Balance Sheet on Education*. Detroit, 1957.

belangrijke gevolgen bleven uit. Tot op het ogenblik, waarop men dit van onverdachte zijde, naar het scheen, niet langer kon aanzien en door het afschieten van één enkele spoetnik alle weerstanden, maar dan ook letterlijk alle weerstanden, uit de weg vaagde.

Dit laatste betekende dat men nu opeens, vrijwel eensgezind, tot erkenning van de juistheid van de geuite bezwaren kwam, te weten: leerstof en methode van het onderwijs in wiskunde staan in het algemeen op een onvoldoende peil, en voorzover dit peil wel voldoende is, zijn er te weinig leerlingen die het vak kiezen.

Nu moet men Amerika kennen om goed te kunnen begrijpen wat het doorbreken van een nieuw inzicht in dat land tot praktische gevolgen heeft. De ondernemingszin en voortvarendheid van de Amerikaan kennen dan geen grenzen. Wanneer men er b.v. van overtuigd is, dat een gedeelte in het centrum van New York City, ter grootte van een flinke Europese stad, niet meer aan moderne eisen van stedenbouw voldoet, ziet men er niet tegenop om het met de grond gelijk te maken en er een moderne stad van wolkenkrabbers voor in de plaats te zetten. Men is daar op dit ogenblik mee bezig. Hiermee vergelijkbaar is datgene wat zich op het gebied van het wiskunde-onderwijs afspeelt. Het didactische vuur, dat op vele plaatsen aanwezig was maar door de ongunstige omstandigheden alleen maar smeulende kon worden gehouden¹⁾, wordt thans tot een uitslaande brand die zich verspreidt over de talloze universiteiten en colleges. Niet één universiteit of college blijft onberoerd door deze beweging.

4. Er zijn enkele plaatsen waar de vernieuwingsbeweging zich concentreert. Het werk van een paar van de belangrijkste centra zal ik achtereenvolgens bespreken.

Allereerst twee werkgroepen die voorbereidend werk hebben verricht, waarvan de resultaten een duidelijk zichtbare invloed hebben op het werk van alle thans meer actuele groeperingen.

a. Het zgn. *College at the University of Chicago* heeft zich reeds een aantal jaren ten doel gesteld onderdelen van de moderne wiskunde in de scholen ingang te doen vinden²⁾. Als stimulans voor de leerlingen werd aldaar tevens de mogelijkheid geopend dat degenen die met succes een moderne leergang hadden doorgemaakt, in aanmerking kwamen voor een reductie in hun wiskunde-programma aan het College. Een dergelijke mogelijkheid is thans aan veel universiteiten geopend. Gegadigden kunnen daartoe deel-

¹⁾ Het beeld is van Dr. E. J. Dijksterhuis.

²⁾ The College Mathematics Staff, *Concepts and Structure of Mathematics*. Chicago, 1954.

nemen aan een examen, dat voor het gehele land centraal geregeld is en bekend staat onder de naam *Advanced Placement Test*; het programma omvat analytische meetkunde en analyse.

b. Een tweede werkgroep die veel invloed op de huidige vernieuwingsprogramma's heeft, is de *Committee on the Undergraduate Program*. Deze commissie is ingesteld door de Mathematical Association of America en heeft ten doel het onderwijs in de wiskunde aan de colleges op een hoger peil te brengen. Omdat, zoals we zagen, het niveau van de laagste jaren van het college te vergelijken is met dat van de hoogste jaren van onze scholen, is het begrijpelijk, dat het werk van deze commissie talrijke aanrakingspunten met het programma van de middelbare school heeft ¹⁾.

5. Ik kom thans tot de experimenteergroepen voor de middelbare school. Het project van de *Universiteit van Illinois* voor de verbetering en hervorming van de schoolwiskunde wordt uitgevoerd door het College of Education and Engineering en het Department of Mathematics van deze universiteit. Het is een groots opgezet experiment met de bedoeling aan te tonen dat normale leerlingen zeer wel vatbaar zijn voor onderwijs in een degelijk soort wiskunde. Hoofd van deze groep is Prof. Beberman, die zich hiermee in de Verenigde Staten een grote reputatie heeft verworven. De onderwezen leerstof ziet er modern uit. Het begrip „verzameling” wordt volop gebruikt en een functie wordt gedefinieerd als een bijzonder soort relatie, waarbij een relatie een verzameling van geordende paren is. Moderne notaties worden consequent toegepast; b.v. voor een functie van twee veranderlijken

$$f = \{(x, y, z) : z = 2x + 3y\},$$

of voor een bepaalde kans bij het werpen met twee dobbelstenen

$$\Pr \{(j, k) : j + k \leq 5\}.$$

Zoals bij alle werkgroepen het geval is, worden experimentele leergangen vervaardigd en, in gestencilde vorm, ter beschikking van een aantal scholen gesteld, die op vrijwillige basis aan het onderzoek deelnemen. Het samenstellen van zo'n experimenteel leerboek geschiedt met de uiterste zorg, door deskundige schrijvers die er blijken van geven voortreffelijke docenten te zijn. Parallel met de

¹⁾ De volgende publikaties zijn uitgegeven door deze commissie:

The Kansas Summer Writing Group, *Universal Mathematics. Functions and limits*. Kansas, 1954.

R. L. Davis, ed., *Elementary Mathematics of Sets*. New Orleans, 1955.

The Dartmouth College Writing Group, *Modern Mathematical Methods and Models*. Vol. I, *Multicomponent Methods*; Vol. II, *Mathematical Models*. Dartmouth, 1958.

tekst voor de leerlingen gaat een tekst voor de leraren. Deze bespreekt de didactische en wetenschappelijke achtergrond van de leerstof en geeft aanwijzingen voor het onderricht. Dit laatste gebeurt nooit op een manier die door de leraar als kwetsend voor zijn gevoel van eigenwaarde zou kunnen worden beschouwd; de Amerikanen zijn er meesters in om hun didactische raadgevingen in de vorm van „suggestions” aan te bieden, één van de vele uitingen van hun democratische manier van omgaan met elkaar. Omgekeerd achten onze Amerikaanse collega's die aan een experiment meewerken, zich er volstrekt niet boven verheven zulke „teaching suggestions” op te volgen. En het kost ook weinig moeite een voldoende aantal enthousiaste medewerkers te vinden. Het is geen uitzondering als er een vijftig scholen bij een experiment betrokken zijn. Hierbij komen dan dikwijls nog zo'n paar honderd scholen, die het experimentele programma ook gaan volgen, maar waarvan de resultaten niet worden meegemeld.

Op de leerstof zal ik hier niet ingaan, omdat deze aan de orde komt bij een van de nog te bespreken werkgroepen.

6. De *College Entrance Examination Board* is een lichaam waarbij een groot aantal van de belangrijkste universiteiten en colleges zijn aangesloten en dat de toelatingseisen tot deze instituten vaststelt. Deze Board heeft de zgn. *Commission on Mathematics* ingesteld, bestaande uit 14 van de meest vooraanstaande wiskundeleraren, -hoogleraren en -didactici. Aan de commissie is opgedragen voorstellen te doen tot verbetering en vernieuwing van het wiskunde-programma voor die leerlingen van de high school die hun studie in een college denken voort te zetten. De voorstellen van deze commissie zijn vervat in een tweedelig rapport ¹⁾, waarvan het eerste deel een algemene bespreking van het voorgestelde programma geeft en het tweede deel een verzameling hoofdstukken vormt, in elk waarvan een bepaald onderwerp van het programma wordt uitgewerkt. Het rapport geeft bovendien een uiterst leesbare uiteenzetting van de motieven die de commissie bij het doen van haar voorstellen hebben geleid. Allereerst wordt de nadruk gelegd op de grote behoefte aan goed opgeleide wiskundigen, die allerwege bestaat. De vraag komt nu niet meer alleen, zoals vroeger, van de kant van natuurwetenschap en techniek, maar ook van de zakenwereld, de industrie en de overheid. Thans reeds twee jaar geleden waren er in de Verenigde Staten meer dan 3000 automatische digitale rekenmachines, waarvoor een wiskundig onderlegd per-

¹⁾ *Report of the Commission on Mathematics*. Vol. I, *Program for college preparatory mathematics*; Vol. II, *Appendices*. New York, 1959.

soneel van 30000 man vereist wordt. Dit vergeleken met een totaal van 20000 leden van alle Amerikaanse verenigingen van mathematici tezamen, toont de grote achterstand in de omvang van het beschikbare wiskundige personeel aan. Er wordt in het rapport gesproken over de achterstand vergeleken bij andere landen, met name Rusland. Weliswaar wordt opgemerkt, om redenen die men kan begrijpen, dat de commissie reeds was geïnstalleerd vóór de spoetnik-paniek uitbrak, maar deze zal toch wel van invloed zijn geweest op de politiek van de lichamen die voor de nodige personele en materiële hulp zorgden door het beschikbaar stellen van topfiguren en van ruime fondsen.

Er dienen dus op korte termijn meer wiskundigen te komen. Voor zover dit de middelbare school betreft, betekent het dat er meer leerlingen een degelijke cursus in wiskunde dienen te kiezen en dat daarbij geen tijd verloren moet gaan met het onderwijzen van leerstof die van geen belang is. De studie van het vak wiskunde moet dus zowel aantrekkelijk als efficiënt zijn.

Wat het eerste punt betreft, stelt de commissie zich op het standpunt, dat goed onderwijs in wiskundige leerstof die de leerlingen werkelijk aankunnen in zichzelf een grote motiverende kracht bezit. Leerlingen worden gauw ontmoedigd door leerstof die te moeilijk is, maar wat ze goed kunnen, doen ze meestal graag. De commissie acht het daarom wenselijk om, meer dan tot nu toe gebruikelijk is, leerlingen die dezelfde dingen aankunnen ook in dezelfde klassen les te doen geven. Tevens wordt de wens uitgesproken, dat de leerstof meer aantrekkelijk zal worden gemaakt door de leerlingen gelegenheid te geven hun eigen initiatief en fantasie te gebruiken. Wat deze wens voor de leerstof betekent, wordt niet door deze commissie met expliciete voorbeelden toegelicht. Het is echter een algemeen uitgesproken wens en de voorstellen van andere commissies geven dan ook in overvloedige mate concrete voorbeelden van wat ermee bedoeld wordt.

Wat het tweede punt betreft, het efficiënt kiezen van de leerstof, wordt in het rapport het volgende, echt Amerikaanse beeld toegepast ¹⁾. Wanneer een stad zich uitbreidt wordt het steeds moeilijker om vanuit het centrum de nieuwe stadswijken en de voorsteden te bereiken. Het centrum is nog steeds het belangrijkste gedeelte van de stad, maar de straten zijn te nauw en te vol om snel genoeg naar de buitenwijken te kunnen komen. Een stelsel van verkeerslichten en éénrichtingswegen geeft een tijdelijke op-

¹⁾ Merkwaardigerwijs ontleent ook de commissie haar beeld aan de stedenbouw.

lossing van de moeilijkheden, maar tenslotte blijkt ook deze onvoldoende. Men gaat er dan toe over een snelweg te bouwen die vanuit het centrum, door en over alles heen, rechtstreeks naar de buitenwijken gaat.

Precies dezelfde procedure is thans vereist door het uitgroeien van de wiskunde, nl. dat er nieuwe en efficiënter wegen worden gevonden die de grondbeginselen van het vak, die in de middelbare school worden onderwezen, verbinden met gebieden van de moderne wiskunde, opdat de leerlingen in die nieuwere gebieden kunnen doordringen zonder genoodzaakt te zijn de gehele thans gebruikelijke leerstof door te werken. Hierbij zullen verouderde of in onbruik geraakte delen komen te vervallen, hetgeen ongetwijfeld door sommigen zal worden betreurd. Hoewel die stof zijn waarde behoudt, is de studie ervan niet van evenveel belang als het kennis maken met de geest, de methode en de inhoud van de huidige wiskunde. Traditionele wiskunde — algebra, meetkunde, goniometrie — blijft nog steeds de belangrijke kern van de schoolwiskunde, maar de afstand tussen deze kern en de nieuwere gebieden moet worden verkort door nieuwe methoden van aanpak.

7. Vergeleken met onze leerstof, zijn nu de concrete voorstellen van de commissie ten dele niet, en ten dele wel revolutionair. Er wordt geen poging gedaan om de traditionele leerstof in de wortel aan te tasten. Ze wordt gemoderniseerd en op natuurlijke wijze hier en daar uitgebreid. Maar er zijn ook uiterst ingrijpende vernieuwingen. Deze betreffen de behandeling van de vlakke meetkunde, de stereometrie, en de leerstof van het tweede semester van de zesde klas, waarbij, afgezien van minder belangrijke mogelijkheden, de leraar de keus wordt gelaten tussen hetzij waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, hetzij moderne algebra.

Tegen het gangbare meetkunde-onderwijs worden de volgende drie bezwaren aangevoerd:

- a. er is te veel logisch formalisme,
- b. er wordt te weinig gebruik gemaakt van de hulpmiddelen van de algebra,
- c. men onderwijst de stereometrie als afzonderlijk en formeel leervak in plaats van zich tevreden te stellen met „plausibele” redeneringen of redeneringen gebaseerd op het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

De commissie stelt daarom een leergang voor, die steunt op een flink aantal axioma's, waaronder ook de congruentie-eigenschappen van driehoeken voorkomen. Er wordt een zeer beperkt aantal stellingen bewezen. Het rapport vermeldt er zeven. Deze dienen

als grondslag voor de onmiddellijk hierop volgende overgang op een rechthoekig coördinatenstelsel en behandeling van het grootste deel van de planimetrie met behulp van de methoden der analytische meetkunde. Tenslotte worden hierna, door middel van de „gewone” methoden, ook nog een aantal stellingen bewezen. De eigenschappen van ruimtefiguren worden zoveel mogelijk naar analogie van de corresponderende eigenschappen van vlakke figuren behandeld, met weinig formele bewijzen; voor dit onderdeel, de ruimte-meetkunde, worden in totaal 24 lessen uitgetrokken.

Deze opzet is ongetwijfeld uiterst interessant. Hij leidt tot een aanzienlijke bekorting en onderwijst vroegtijdig één belangrijke algemene methode in plaats van allerlei kleine handigheden. De door het rapport verwekte indruk dat de lacunes, welke de theorie van Euclides vertoont, in de grondslagen van het voorgestelde systeem niet meer optreden, is weliswaar niet juist. Ook zijn er meer stellingen nodig dan de zeven die het rapport aangeeft. Dit alles doet aan de waarde van de methode weinig af en we kunnen, dunkt me, met veel belangstelling uitzien naar het eerste leerboek dat volgens de aangegeven principes zal zijn ingericht. Het lijkt me echter wel, dat het rapport iets te optimistisch is ten aanzien van de moeilijkheden die de leerlingen zullen ondervinden bij het zelfstandig oplossen van vraagstukken. We moeten nl. niet uit het oog verliezen, dat het hier gaat om een cursus voor beginners in de wiskunde. Ze hebben nog geen ervaring met meetkundige figuren en zullen er dus in het bijzonder niet veel kijk op hebben hoe men, bij het bewijs van een stelling, de figuur een eenvoudige stand t.o.v. het assenstelsel geeft. Zien ze dit wel, dan zullen ze wellicht, naar de andere kant doorslaande, bij het kiezen van de coördinaten van de optredende punten afbreuk doen aan het algemene karakter van de figuur. Zien ze het niet, dan ontaardt het bewijs veelal in een onaangenaam gereken, dat bovendien de meetkunde erg naar de achtergrond verplaatst. Er worden een 30-tal voorbeelden gegeven van vraagstukken die met de analytische methode snel zijn op te lossen. Zo b.v. het volgende: Bewijs dat de meetkundige plaats van de hoekpunten van de rechte hoeken waarvan de benen door twee gegeven punten gaan, een cirkel is. Geeft men de gegeven punten aan door $(-a, 0)$ en $(a, 0)$, de richtingscoëfficiënten van de lijnen door deze punten door m en m' , en het snijpunt van die lijnen door (x, y) , dan is uit de betrekkingen $m = \frac{y}{x+a}$, $m' = \frac{y}{x-a}$ en $mm' = -1$ gemakkelijk de betrekking $x^2 + y^2 = a^2$ af te leiden, waarmee het vraagstuk is opgelost. Niettemin veronderstelt dit

nogal wat omtrent de meetkundige (en algebraïsche) kennis en vaardigheid van de leerling.

Wat de leerstof voor het tweede semester van de zesde klas betreft, heeft de commissie een uitgewerkte leergang voor kansrekening en statistiek samengesteld ¹⁾. De leerstof is in grote lijnen dezelfde als die, welke vervat is in het leerboek van de huidige spreker. Het komt mij voor, dat de beschikbare lesuren met de stof van het Amerikaanse schoolboek gevuld zullen zijn en dat er dus niet veel reden zal bestaan om nog supplementair materiaal te vervaardigen, zoals de commissie zich voorstelt.

Een van de aantrekkelijke kanten van het rapport wordt gevormd door de 22 hoofdstukken van deel II. Enkele titels hiervan zijn b.v. „Sets, relations, and functions”, „Permutations, selections, and the Binomial Theorem”, „Mathematical induction”, „Order relations in plane geometry”, „Introduction to vectors”, „Circular functions”. Deze hoofdstukken zijn zo duidelijk van stijl, dat ze haast in een schoolboek zouden kunnen worden opgenomen. Het is daarom zoveel te meer jammer, dat de commissie ook niet voor het alternatieve onderwerp voor het tweede semester van de hoogste klas, inleiding in de moderne algebra, een uitgewerkte tekst heeft samengesteld. Evenals dit het geval was voor de statistiek, is het nl. voor menig een aanvankelijk niet duidelijk hoe dit geheel nieuwe onderwerp onderwijsbaar kan worden gemaakt. Het zou een droge opsomming worden, wanneer ik het voorgestelde programma enigszins volledig zou weergeven. Men kan echter in deel I van het rapport uitvoerig beschreven vinden, uit welke onderdelen de commissie zich de behandeling denkt samengesteld van de onderwerpen: groepen (al of niet commutatief, transformaties), ringen en lichamen. Verschillende begrippen en methoden die in het rapport alleen maar worden opgesomd, zullen we aanstonds in het meer uitgewerkte programma van een andere werkgroep eveneens tegenkomen.

8. Een interessant experiment vindt plaats aan Ball State Teachers College. Dit is een college in Muncie, Indiana, dat uitsluitend bestemd is voor de opleiding van leraren aan de high school. Het meetkundeproject dat door de wiskundestaf is opgezet, beoogt het onderwijs in dit vak te geven volgens de beginselen van Hilbert. Een enkel axioma is wat vereenvoudigd, maar het principe is gehandhaafd. De leerlingen worden dus b.v. geoefend in het werken met orderrelaties, wat een behoorlijk vermogen tot

¹⁾ Commission on Mathematics, *Introductory probability and statistical inference* (revised preliminary edition). Hierbij behoort: *Teachers notes and answer guide*. New York, 1959.

abstractie vereist. Ik heb enkele lessen over dit onderwerp bijgevoond en constateerde inderdaad dat er leerlingen waren die de zaak doorhadden; ik had echter tevens reden om te betwijfelen dat de meerderheid begreep waarom het ging. Het experimentele materiaal is inmiddels als schoolboek gepubliceerd ¹⁾.

Het experiment van Ball State is veel beperkter van opzet dan dat van de Commission on Mathematics. Er zijn meer van dergelijke beperktere experimenten. Sommige hebben alleen betrekking op het onderwijs in de lagere klassen van de middelbare school. Dit is b.v. het geval met het project van de Universiteit van Maryland, dat uitsluitend de eerste en tweede klas van de high school betreft. Eveneens met dat van Boston College. Bij laatstgenoemd experiment verschillen de leerlingenboeken in allerlei opzichten van de normale schoolboeken, en niet alleen door hun moderne notatie; verzamelingen en logistiek zijn de grondslag van alles. De cursus draagt dan ook de titel: Sets, Operations and Patterns.

Zoëven sprak ik van de voortvarendheid waarmee de Amerikanen te werk gaan wanneer ze bezield zijn door een nieuwe gedachte. U zult het waarschijnlijk wel met mij eens zijn, dat bij de geschetste pogingen tot vernieuwing een zekere mate van voortvarendheid inderdaad aan de dag treedt. Maar ze gaan nog verder. Professor Patrick Suppes en zijn medewerkers aan Stanford University interesseren zich voor het rekenen van jonge kinderen. In het door hem geleide experiment, dat in een aantal lagere scholen in Californië plaatsvindt, wordt door leerlingen van de eerste klas, naar het schijnt met succes, niet alleen gewerkt met het begrip „verzameling”, maar ook met de moderne notatie hiervan en met het symbool voor de vereniging van twee verzamelingen. Een beschouwing van de hierbij in de klas gebruikte werkboeken wekt niet eens de indruk dat de kinderen het moeilijker zullen vinden dan de andere, meer gebruikelijke methoden. Het zou trouwens niet zo verrassend zijn, als door toepassing van de methode van deze werkgroep het getalbegrip bij kinderen beter en sneller dan gewoonlijk werd aangebracht, omdat immers het logische begrip „verzameling” fundamenteeler is dan het wiskundige begrip „getal”.

9. De werkgroep die ik voor het laatst bewaard heb, de School Mathematics Study Group, is de meest recente en tevens de meest belangrijke. Het is een groep van ongeveer 60 personen, bestaande uit professoren, leraren en didactici, die bovendien de nodige medewerkers aantrekt voor het schrijven van boeken. Haar doel-

¹⁾ C. F. Brumfiel, R. E. Eicholz and M. E. Shanks, *Geometry*. Reading (Mass.), 1960.

stelling is dezelfde als die van de Commission on Mathematics, nl. de verbetering en vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. De financiële middelen waarover ze beschikt zijn echter zo groot, dat het werk van de Commission en van alle andere centra van vernieuwing in de schaduw komt te staan van dat van deze werkgroep. Ze ontvangt een subsidie, die haar, via de National Science Foundation, rechtstreeks door het Congres wordt verstrekt, en die enige miljoenen dollars bedraagt. Wanneer voortvarendheid zich op deze manier openbaart, kan men vrijwel ieder redelijk doel bereiken. De activiteiten van de S.M.S.G. zijn dan ook uiterst veelzijdig. Ze omvatten o.m. het samenstellen van experimentele leerboeken voor alle klassen van de lagere en de middelbare school, van monografieën over losse onderwerpen voor meer begaafde of geïnteresseerde leerlingen, van brochures, boeken en studiegidsen voor leraren in functie die hun kennis van de wiskunde willen opfrissen, en het bestuderen van de mogelijkheden die het gebruik van films en van de televisie voor het onderwijs in wiskunde heeft.

De S.M.S.G. heeft in de twee jaren van haar bestaan een volledige serie schoolboeken samengesteld waarvan ieder deel in ongeveer 75 scholen op zijn doelmatigheid en bruikbaarheid wordt getoetst. De leraren van de experimenteerscholen geven hun ervaringen en kritiek aan de werkgroep te kennen, en op basis daarvan heeft de S.M.S.G. in de afgelopen zomer van een aantal boeken al een nieuwe versie gereedgemaakt. U moet U deze taak niet te gering voorstellen. Het wiskunde-onderwijs moet op alle niveaus verbeterd worden. Voor de eerste klas van de high school was het schrijven van een boek betrekkelijk gemakkelijk, omdat men kon uitgaan van een vrijwel uniforme basis. Maar voor de hogere klassen bestond deze niet, en toch wilde men zulke klassen, ook als de ondergrond niet voldoende was, zonder tijdverlies voor het college voorbereiden. De boeken voor deze klassen werden dus zo ingericht, dat in de eerste hoofdstukken een snelle behandeling plaatsvond van de leerstof die beheerst moest worden om de voor zo'n klas geprojecteerde stof te kunnen bestuderen. Het behoeft geen betoog, dat dit een uiterst lastige opdracht is. In de eerste plaats is er een bijzondere organisatievorm van de werkgroep voor nodig. In de tweede plaats verlangt ze alleen al voor de high school een werkzaamheid voor minstens vijf jaar, omdat de leerboeken voor de hogere klassen voorlopig elk jaar moeten worden aangepast aan de omstandigheden die door toedoen van de werkgroep zelf veranderd zijn. Om deze twee redenen diende er een uiterst nauwkeurige en omvangrijke planning aan het werk vooraf te gaan. Zelfs in ons

goede Nederland, waar alle onderwijszaken tot in kleinigheden bij wet of verordening geregeld zijn, kan men zich een dergelijke planning, gevolgd door het uitvoering geven eraan, alleen met moeite voorstellen.

Wanneer we nu onder dit gezichtspunt b.v. de algebracursussen bekijken die door de werkgroep zijn samengesteld, dan verrast ons direct een veelheid van didactische vondsten. Omdat de S.M.S.G. bijzondere nadruk wil leggen op het bijbrengen van inzicht in de bouw van een getallenlichaam en in verwante structuren, wordt vanaf het begin een grote zorgvuldigheid betracht bij de opeenvolgende uitbreidingen van het getallensysteem. De invoering van de negatieve getallen in de eerste klas gaat als volgt ¹⁾. Eerst wordt de wiskundige grondslag van het rekenen, dat op de lagere school geleerd is, aan het licht gebracht. Dit geschiedt met veel zorg; zonder in uitgebreide theorie te vervallen, laat men op alle plaatsen die er aanleiding toe geven, uitkomen wat de fundamentele rol is van de commutatieve, associatieve en distributieve wetten en van de getallen 0 en 1. Het getal $-a$ wordt ingevoerd door de definitie $a + (-a) = 0$ ($a \geq 0$) en de oude wetten worden geldig verklaard voor de nieuwe getallen. Hierbij hoedt men zich ervoor apodictisch te werk te gaan; men legt gewoon de nadruk erop, dat het geen zin heeft om de wiskunde moeilijker te maken dan nodig is door voor de nieuwe getallen aparte rekenwetten voor te schrijven. Men laat daarna zien welke gevolgen deze twee afspraken hebben voor de regels die bij het rekenen met negatieve getallen moeten worden toegepast. Dit wordt op een zo duidelijke manier uitgelegd, dat ik nu pas overtuigd ben geworden van de uitvoerbaarheid van deze methode. Weliswaar wordt eigenlijk slechts bewezen, dat de rekenregels een gevolg zijn van het geldig verklaren van de grondwet. Er wordt niet bewezen dat, omgekeerd, het zich houden aan de rekenregels voldoende garantie biedt voor het handhaven van de grondwet. Dit onderscheid zou zeker niet door de jeugdige studenten worden begrepen. Maar nu biedt een van de volgende delen van de algebraleergang de gelegenheid hierover iets te zeggen. Dit deel is immers bestemd voor een hogere klas, waar men, in overeenstemming met het bovengenoemde principe van het voorkomen van tijdverlies voor de „college-bound student”, een verkorte behandeling van de benodigde, voorafgaande leerstof geeft. De negatieve getallen worden daar nu snel ingevoerd en de rekenregels zonder meer gedefiniëerd. Omdat hierbij dus niet

¹⁾ Dat dit in de eerste klas gebeurt, betekent op zichzelf al bijna een omwenteling in het Amerikaanse wiskunde-onderwijs.

gesproken wordt over het rekening houden met de oude wetten, en daardoor althans dus niet gesuggereerd wordt dat ze geldig blijven, bestaat er nu een mooie gelegenheid om de *volledige* permanentie van deze wetten ter sprake te brengen. Weliswaar gaat de leerlingentekst daar niet diep op in, wat goed gezien is, omdat b.v. alleen al het bewijs van het doorgaan van de commutatieve wet van de optelling een omvangrijk gereken met zich brengt, en voor de associatieve wet is het nog veel erger. Zoveel te meer reden bestaat er, om op deze zaak in te gaan in de bijbehorende handleiding voor de leraar, wat dan ook gebeurt. Dit is voor een Amerikaanse leraar helemaal niet overbodig; hij heeft soms knappe leerlingen en deze zouden het hem met hun vragen wel eens lastig kunnen maken. Ik haast mij echter hieraan toe te voegen dat ook wij, met al onze geleerdheid aan universiteit of anderszins opgedaan, niet altijd een bevredigend antwoord gereed hebben op vragen van onze leerlingen over de leerstof. De „commentaren voor de leraren” bevatten daarom ook voor de West-Europese collega's interessante beschouwingen, en vormen, tezamen met andere publikaties van de S.M.S.G., iets wat nu pas met recht de naam zou verdienen van „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus”.

Voor de klassen die nog hoger genummerd zijn, is nog steeds de kans niet verkeken om hun min of meer intuïtieve kijk op het negatieve getal door een goed wiskundig inzicht te laten aanvullen. In deel I van Intermediate Algebra wordt het systeem, gevormd door de natuurlijke getallen en het getal 0, nog eens anders uitgebreid. Er wordt nu (dus geheel opnieuw) uitgegaan van de axioma's voor het genoemde systeem, aangevuld met het axioma „ $a + x = b$ heeft één en slechts één oplossing”. Op deze basis wordt aangetoond: 1e. de natuurlijke getallen en het getal 0 behoren tot het nieuwe systeem, 2e. de negatieve getallen behoren ertoe, 3e. de rekenregels (die de leerlingen allang kenden) volgen uit de axioma's. Hiermee is dan aangetoond dat het nieuwe systeem, welk dit ook zij, minstens het systeem van de gehele getallen omvat.

Wanneer ik nog vermeld, dat er ook een methode wordt behandeld voor het invoeren van de negatieve getallen door middel van geordende getallenparen, zult U kunnen vermoeden dat, wat de structuur van de algebra betreft, ieder aan zijn trekken kan komen.

Dat ik bij dit onderwerp wat lang heb stilgestaan, diende om U te doordringen van de ernst die men ermee maakt om de leerlingen een goed inzicht in de opbouw van de verschillende getallenstelsels te geven. De behandeling van de overige leerstof staat op hetzelfde

hoge peil. Toch verliest men niet uit het oog, dat een te volledige, te strenge of te snelle manier van behandelen evenzeer schadelijk is voor de wiskundige gezondheid van de leerlingen als de slappe kost die deze tot voor kort veelal toegediend kregen. Voorzover dit zonder nadeel voor het resultaat te verwezenlijken is, wil men zich ervoor hoeden dat de leerlingen ontmoedigd worden door een al te strenge opbouw. Bovendien bestaat er bij deze topgroep van auteurs geen reden zich te laten misleiden door de bij schoolboekschrijvers veelvuldig voorkomende vrees, dat ze, op grond van een minder strenge tekst, door hun critici niet voor vol zullen worden aangezien. De experimentele teksten zijn bovendien zeer duidelijk en moedigen ook daardoor de leerlingen aan tot studeren. Ze schijnen erop gericht te zijn de leerlingen ervan te doordringen dat ze het zelf kunnen. Ze verschillen dan ook essentieel van de meeste Nederlandse schoolboeken en het zou mij niet verwonderen wanneer de gebruikers van de nieuwe Amerikaanse leerboeken tot grotere zelfstandigheid bij de studie van de wiskunde zullen blijken te worden opgevoed dan de leerlingen die het met onze boeken moeten stellen.¹⁾ De behandeling van de leerstof gaat dus stapje voor stapje, maar elk van deze stappen wordt welbewust gezet op de weg naar inzicht in de elementen van de moderne wiskunde. De gehele serie schoolboeken is van deze nieuwe geest doortrokken. De werkgroep is zelfs zover gegaan uitvoering te geven aan het opvullen van de lacune die ik boven aangaf in de leerstoffragmenten van de Commission on Mathematics. Ze heeft nl. een interessante cursus samengesteld²⁾ waarin matrices, groepen, ringen, lichamen, vectorruimten (van niet meer dan twee dimensies) en transformaties van het platte vlak door middel van vectoren worden behandeld. De theorie is doorschoten met een rijke hoeveelheid oefenmateriaal. Deze laatste cursus geeft er de blijken van, nog niet volledig experimenteel in de school te zijn beproefd, maar dit zal zeker niet uitblijven. Ik beveel hem aan in de belangstelling van hen, die zich afvragen in welke vorm iets van de moderne algebra aan de leerlingen kan worden gebracht.

Het bestek van deze voordracht is te beperkt om de andere onderdelen van de experimentele cursus van de S.M.S.G. te bespreken.

10. De volgende, belangrijke vraag zal wel reeds bij de lezer gerezen zijn. Waar moeten de leraren die thans in functie zijn de kennis vandaan halen die nodig is om de voorgestelde programma's

¹⁾ Afgezien van de boeken die een gunstige uitzondering vormen.

²⁾ Onder de titel *Introduction to Matrix Algebra*.

te onderwijzen? Eén ding staat vast: bij het begin van de experimenten bezaten ze die kennis niet. Een tweede ding echter ook: de Amerikanen wisten dat zelf heel goed. Vandaar dat ze geen middel onbeproefd hebben gelaten om dit euvel te verhelpen. In de eerste plaats zijn de commentaren voor de leraren daarbij een mooi hulpmiddel. In de tweede plaats stelt de S.M.S.G. afzonderlijke, speciaal voor de druk bezette leraren geschreven, gemakkelijk leesbare studieboeken samen; ze geeft die uit in een serie met titel *Studies in mathematics* ¹⁾. In de derde plaats werkt ze mee aan de verspreiding van andere nuttige lectuur voor de leraren, zoals b.v. het uit het Russisch vertaalde boek over meetkunde van B. V. Kutuzov, opgenomen in dezelfde serie ²⁾. In de vierde plaats organiseert de National Science Foundation aan een groot aantal universiteiten Summer Institutes, Academic Year Institutes en In-service Institutes, voor wiskundeleraren in functie. Ze hebben resp. plaats in de zomervakantie gedurende een periode die ligt tussen vijf en tien weken, gedurende een geheel jaar full-time, of een jaar lang iedere week een hele of een halve dag. Het enthousiasme van de leraren voor deze cursussen is groot en wordt bovendien op verschillende manieren aangewakkerd. Om te beginnen worden alle reis- en verblijfkosten vergoed. Wat de zomercursussen betreft, komt dit uiteraard ten eerste tegemoet aan de reislust van de Amerikaanse wiskundeleraren, die nu een kans krijgen op een goedkoop zomerverblijf elders in hun, ook voor henzelf zo interessante land. Het aantal gegadigden voor een zomercursus aan een universiteit in de Rocky Mountains b.v., overtreft verre het aantal beschikbare plaatsen. Vervolgens is er aan het eind van de cursus een examen, waarmee men „credit points” kan veroveren die meetellen bij een eventueel examen voor de masters degree. Tenslotte geven veel scholen op basis van deze zelfde examens een (blijvende) salarisverhoging.

Ondanks het zeer grote aantal van deze cursussen is het echter toch niet mogelijk alle leraren te bereiken. Bovendien is een zomercursus van vijf of zelfs tien weken te kort om een grote achterstand in kennis van de wiskunde weg te werken. Tevens vervliegt de kennis die men niet blijft onderhouden. Vandaar dat de N.S.F. nog meer activiteiten stimuleert en bekostigt. Zo noem ik dan als

¹⁾ Tot dusver verschenen: Vol. I, R. D. Luce, *Some Basic Mathematical Concepts*; Vol. II, C. W. Curtis, P. H. Daus and R. J. Walker, *Euclidean Geometry Based on Ruler and Protractor Axioms*; Vol. III, V. H. Haag, *Structure of Elementary Algebra*.

²⁾ Vol. IV, *Geometry*.

vijfde activiteit die van de schriftelijke cursussen. Er waren al eerder universiteiten die een systeem van schriftelijke cursussen in een grote verscheidenheid van vakken onderhielden. Een erg goed georganiseerde opzet zag ik in Oregon. Dit is een staat aan de westkust, die zowel grote steden als zeer afgelegen gebieden bevat. Alle universiteiten van deze staat verzorgen, in een gemeenschappelijke organisatie, een programma van schriftelijke cursussen. Het geheel wordt geleid door een departement van de staat Oregon, dat van elke universiteit de beste specialisten uitzoekt om aan dit programma mee te werken. In veel gevallen werken de cursisten samen in zeer kleine groepjes, en met regelmatige tussenpozen worden deze bezocht door deskundigen die voor de nodige extra uitleg zorgen. De organisatie beschikt hiertoe over een welvoorziene transportafdeling en schakelt voor de afgelegen gebieden zelfs vliegtuigen in. Het klinkt als een modern sprookje ¹⁾).

Het aantal wiskundeleraren dat door al deze maatregelen tezamen bereikt wordt, is al vrij groot. Maar het is nog niet voldoende en men wil nu voortmaken. Wat zou dan, in de zesde plaats, meer in de lijn van Amerika liggen dan om het machtige apparaat van de televisie in te schakelen? Eén docent kan dan het hele land bestrijken. Hij kan bovendien gekozen worden uit de allerbesten. En dit gebeurt nu inderdaad. De uitzendingen in het programma met de veelzeggende titel „Continental Classroom” waren tot voor kort in hoofdzaak bestemd voor degenen die in een of ander vak niet voldoende middelbaar onderwijs hadden genoten of die, in het algemeen, hun kennis door middel van een meer modern programma wilden aanvullen. Zo wordt er vanuit New York sinds 1958 een cursus in moderne wiskunde op middelbare-schoolniveau uitgezonden. Maar nu zijn er ook al dergelijke cursussen voor de leraren. Binnenkort zal b.v. een televisiecursus in kansrekening en statistiek worden gegeven door Prof. Mosteller, van Harvard University, lid van de werkgroep Commission on Mathematics. De cursus is speciaal bedoeld voor die leraren, die in hun hoogste klassen het reeds genoemde leerboek voor statistiek van deze werkgroep gaan gebruiken. Er wordt een speciaal begeleidend leerboek voor ontworpen, het schoolboek dus van de leerlingen in de Continental Classroom. Er zal een schriftelijke cursus aan gepaard gaan en bovendien, als nieuwste snufje, het gebruik van z.g.n. „teaching machines”. Ik noem dat als zevende en laatste punt van dit uitgebreide programma van in-service teacher training. Het woord teaching

¹⁾ B.v. „Tom Poes en de schriftelijke cursussen”.

machine wordt misschien het best vertaald met „studieapparaat”. In zijn volledige vorm is het een trommel, waarin zich een cursus voor zelfstudie bevindt, die men bij kleine gedeelten door een venster in de wand van de trommel kan bestuderen. Door middel van een knop draait men de cursus voor het venster langs. Het gedeelte dat men ziet, omvat maar een paar regels, die soms een zekere informatie geven, soms een vraagstuk laten maken, maar altijd minstens één vraag bevatten om de leerling te stimuleren tot nadenken. Deze schrijft het antwoord op een daarvoor bestemde plaats, draait aan de knop, het juiste antwoord wordt zichtbaar, terwijl dat van de leerling achter een ruitje schuift zodat hij het wel kan zien maar er niet bij kan komen. Hij kan dus, zagezegd, niet spieken. Heeft hij de cursus geheel doorgedraaid, dan kan hij uiteraard van voren af aan beginnen en hiermee doorgaan tot hij alle vragen vlot kan beantwoorden. Bij de meer geperfectioneerde apparaten blijven zelfs, als men de cursus voor de tweede keer draait, de reeds goed beantwoorde vragen automatisch achterwege. Nu is echter het beginsel waarvan men uitgaat bij het gebruik van deze apparaten, dat een tweede keer doordraaien voor een normale leerling niet nodig moet zijn. De cursus wordt daarom aangeduid met de naam „programmed course”. Dit houdt dus in, dat de cursus zo moet zijn samengesteld, dat het een normale leerling mogelijk is, door het lezen van de opeenvolgende tekstgedeelten en het beantwoorden van de vragen, de aangeboden stof te verwerken en te gaan beheersen. Het spreekt wel vanzelf dat er een speciale techniek vereist wordt voor het opbouwen van geprogrammeerde cursussen. Ze zijn bovendien kostbaar, omdat ze veel materiaal moeten bevatten. Zo zal een leerling die de vlakke-meetkundecursus die ik in mijn bezit heb, wil doorwerken, genoodzaakt zijn 1877 bladzijden te bestuderen en daarbij 11027 vragen te beantwoorden. (Hier glimlacht Euclides en hij tast wederom in zijn zak om drie obolen uit te keren aan een domme leerling.) Niettemin, de tijden zijn veranderd, en alleen reeds het simpele feit, dat de laatstgenoemde cursus, en vele andere dure cursussen bovendien, thans door de Encyclopaedia Britannica Films, Inc. geproduceerd worden, bewijst wel, dat er gegronde redenen bestaan om te vermoeden dat er wat in zit. De methode wordt trouwens reeds in talrijke grote bedrijven toegepast bij het vakonderwijs.

Welnu, voor de bovengenoemde televisiecursus wordt ook een dergelijke geprogrammeerde cursus vervaardigd, die zich nauw aansluit bij de ontworpen leergang. En als alles dus op tijd klaar komt, dan kan in januari 1961 een eenzaam wiskundeleraar ergens in de bergen van Montana, als het buiten 40° vriest, op zijn televisie-

scherm de colleges van Prof. Mosteller aan Harvard University volgen, uit zijn boek de theorie nader bestuderen, de vraagstukken maken en die gecorrigeerd terugkrijgen benevens opheldering van eventuele moeilijkheden, en, als dit nog niet voldoende is, zich bovendien laten spenen door zijn anti-spiekapparaat.

11. De achterstand bij het wiskunde-onderwijs in Amerika is nog groot, en er wordt hard gewerkt om deze in te halen. Eigenlijk is het werk nog maar pas begonnen, en ik heb weinig Amerikanen gesproken die zich ten aanzien van de bereikbare resultaten aan een overdreven optimisme schuldig maken. Wanneer U echter met mij zou hebben kunnen zien hoe deze wiskundeleraren, die, als alle Amerikanen, zo bijzonder op hun persoonlijke vrijheid zijn gesteld, met bijna aandoenlijke ijver aan de inhaalcursussen deelnemen; hoe ze dan tot laat in de nacht met elkaar hun moeilijkheden bespreken en niet rusten voor ze hun les kennen en hun huiswerk-sommen afhebben; en hoe anderen 's morgens om zes uur al present zijn in hun Continental Classroom; dan zou U zich, evenals ik, geen zorgen maken over de toekomst van het Amerikaanse wiskunde-onderwijs.

We komen er dan zelfs toe ons af te vragen of het Europese, en in het bijzonder het Nederlandse, wiskunde-onderwijs aan de eerder genoemde normen voldoet. Zoals U wel weet, wordt deze vraag vrijwel algemeen ontkennend beantwoord. Dan rijst dus de verdere vraag, of enkele van de bovengenoemde maatregelen, activiteiten en experimenten, zij het op kleinere schaal, ook voor ons land in aanmerking komen. Voor elk van deze drie kunnen we, in ons zo goed georganiseerde land, slechts een vragende blik op de overheid richten. Wat de maatregelen betreft, denk ik b.v. aan het Advanced Placement programma. Dit roept voor ons land de gedachte aan een meer gedifferentieerd schoolprogramma op, waardoor het onze begaafde leerlingen mogelijk zou worden gemaakt om een modern georiënteerde school of schoolafdeling te volgen, die in zwaarte en prestige gelijk staat aan het huidige gymnasium B. Ten aanzien van de activiteiten, nl. de cursussen en het doen samenstellen van studiemateriaal dat voor de leraren door zijn leesbaarheid aantrekkelijk is, ligt hier duidelijk een taak voor de subsidiërende overheid. Tenslotte de experimenten: we kunnen beginnen zodra de overheid de aanwezige belemmeringen wegneemt; dit laatste kan zonder enig bezwaar onmiddellijk gebeuren.

Wanneer dit alles gaat geschieden, zal ik er best vrede mee hebben als eventuele fantasieën over cursussen per televisie en teaching machines bij ons voorlopig alleen maar gerealiseerd worden, b.v., in de studio's van Marten Toonder.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

XLIX. *De som der afstanden van een punt tot de hoekpunten van een driehoek.*

Van een eindexamenopgave kan soms een merkwaardige stimulans uitgaan. In 1959 werd voor de hogere burgerscholen de oplossing gevraagd van het volgende vraagstuk. Gegeven is de driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel (fig. 1). Voor welk punt

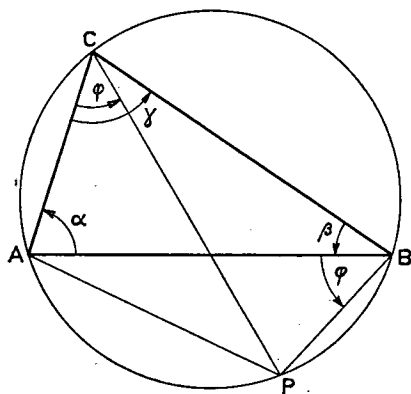


Fig. 1.

van de boog AB is $V(P) = PA + PB + PC$ zo groot mogelijk? Daarbij was de driehoek zeer eenvoudig gekozen: α , β en γ waren respectievelijk 60° , 30° en 90° . Van deze bijzonderheden maken wij ons hier vrij door een willekeurige driehoek te kiezen. Het blijkt dat de opgave daardoor heel wat ingewikkelder wordt. Voorts willen wij ons niet tot de boog AB beperken, maar $V(P)$ op de gehele omtrek beschouwen. Ook dat geeft een essentiële verzwarende van de gestelde vraag. Immers de functie $V(P)$ is op de cirkel overal continu maar de afgeleide heeft in de punten A , B en C een discontinuïteit. Men ziet dat onmiddellijk in door b.v. op een X -as de functie $f(P)$ te beschouwen die de afstand is van P tot de oorsprong. Dan is $f(P) = |x|$, een functie die in 0 de rechterafgeleide 1 en de linkerafgeleide -1 heeft. In onze opgave hebben de termen PB en PC in A een continue afgeleide, maar die van PA en dus die van $V(P)$ vertoont in A een sprong. Ten einde het generalis-

seerde vraagstuk op te lossen bepalen wij het punt P op AB door de boog $AP = 2\varphi$, zodat dus $0 < \varphi < \gamma$. Dan is $PA = 2R \sin \varphi$, $PB = 2R \sin (\gamma - \varphi)$, $PC = 2R \sin (\beta + \varphi)$ en men heeft

$$\begin{aligned} V(P) &= 2R \{ \sin \varphi + \sin (\gamma - \varphi) + \sin (\beta + \varphi) \} \\ &= 2R \{ (1 + \cos \beta - \cos \gamma) \sin \varphi + (\sin \beta + \sin \gamma) \cos \varphi \} \quad (1) \end{aligned}$$

Is s de lengte van de van A af gemeten boog, dan is $s = 2R\varphi$, en dus

$$\frac{dV}{ds} = \frac{1}{2R} \frac{dV}{d\varphi} = (1 + \cos \beta - \cos \gamma) \cos \varphi - (\sin \beta + \sin \gamma) \sin \varphi \quad (2)$$

Op de boog AB kan deze afgeleide blijkbaar hoogstens éénmaal nul worden. Om na te gaan of een extreme waarde voor V wordt bereikt, bepalen wij de afgeleide in de uiteinden, dus voor $\varphi = 0$ en voor $\varphi = \gamma$; de antwoorden zijn respectievelijk

$$1 + \cos \beta - \cos \gamma, - (1 + \cos \alpha - \cos \gamma) \quad (3)$$

De overeenkomstige waarden voor de bogen CA en BC worden door cyclische verwisseling gevonden. Stellen wij $\phi_{23} = 1 + \cos \beta - \cos \gamma$, $\phi_{12} = 1 + \cos \alpha - \cos \beta$ enz. dan hebben wij: de linker- en de rechterafgeleide van V in het punt A zijn $-\phi_{32}$ en ϕ_{23} , in B : $-\phi_{13}$ en ϕ_{31} , in C : $-\phi_{21}$ en ϕ_{12} . In A vertoont de afgeleide een sprongsgewijze toename van $\phi_{23} + \phi_{32} = 2$, zoals verwacht werd en hetzelfde doet zich voor in B en in C .

Voor het gedrag van $V(P)$ op de cirkel worden nu van belang de tekens der zes grootheden ϕ_{ij} . Wij mogen daarbij zonder bezwaar $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ veronderstellen, dus $\cos \alpha \leq \cos \beta \leq \cos \gamma$. Dan zijn ten duidelijkste ϕ_{31} , ϕ_{32} , ϕ_{21} en ϕ_{23} positief. De linker-afgeleide van V in A is dus negatief en de rechterafgeleide positief, dus V heeft altijd een minimum in A , het hoekpunt van de grootste hoek. Voorts is op de boog BC de afgeleide in B positief, nl. ϕ_{31} en in C negatief, nl. $-\phi_{21}$; de conclusie is: V heeft altijd een maximum op de boog BC .

Het gedrag van V in de twee andere hoekpunten en op de twee andere bogen hangt af van de tekens der grootheden ϕ_{12} en ϕ_{13} . Daarbij is steeds $\phi_{12} \geq \phi_{13}$. Beide getallen zijn zeker positief als

de driehoek scherphoekig of rechthoekig is. Is $\alpha > \frac{\pi}{2}$, dus $\alpha = \pi - 2\delta$, waarbij $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$, dan voldoet β aan de ongelijkheden $\delta \leq \beta < 2\delta$ en γ aan $0 < \gamma \leq \delta$. Voorts is

$$\phi_{12} = 1 + \cos \alpha - \cos \beta = 2 - 2 \cos^2 \delta - \cos \beta$$

en

$$\phi_{13} = 1 + \cos \alpha - \cos \gamma = 2 - \cos^2 \delta - \cos \gamma$$

waaruit de volgende ongelijkheden volgen:

$$\begin{aligned} 2 - \cos \delta - 2 \cos^2 \delta &\leq p_{12} < 3 - 4 \cos^2 \delta \\ 1 - 2 \cos^2 \delta &\leq p_{13} \leq 2 - \cos \delta - 2 \cos^2 \delta \end{aligned} \quad (4)$$

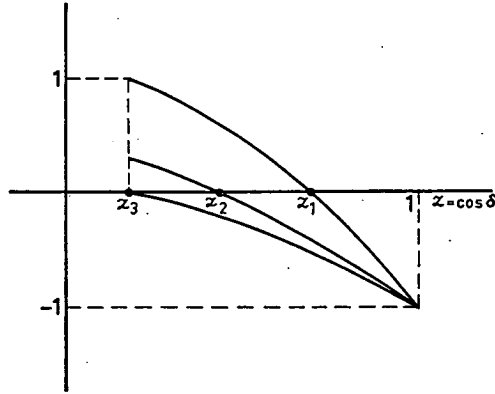


Fig. 2.

Tekent men in een diagram (fig. 2) de drie in deze betrekkingen voorkomende kwadratische functies van $z = \cos \delta$ en wel in het bijzonder voor $\frac{1}{2}\sqrt{2} < z < 1$, dan ontstaan drie parabolen, die de z -as resp. snijden in $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17})$ en $z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De corresponderende waarden van α zijn resp. $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$ ($= 120^\circ$),

$\alpha_2 = \arccos \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$ ($= 102^\circ 40'$) en $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$). Uit (4)

blijkt dat p_{12} tussen de beide bovenste en p_{13} tussen de beide onderste parabolen ligt. Bedenken wij dat bij gegeven α een der hoeken β of γ (binnen de gestelde grenzen) willekeurig kan worden gekozen, dan vinden wij: voor $\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_2$ is $p_{12} > 0$ en p_{13} positief, nul of negatief; voor $\alpha_2 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ is p_{12} positief, nul of negatief, maar p_{13} negatief; voor $\alpha > \frac{2\pi}{3}$ zijn p_{12} en p_{13} negatief.

Terugkerend naar de betekenis van p_{12} en p_{13} trekken wij de volgende conclusies.

Als $p_{12} < 0$, $p_{13} < 0$ dan zijn de linker- en de rechterafgeleide in B beide positief en in C beide negatief. De functie V heeft alleen een minimum in A en een maximum op BC (fig. 3).

Als $p_{12} > 0$, $p_{13} < 0$ dan is er bovendien een minimum in C en een maximum op CA (fig. 4).

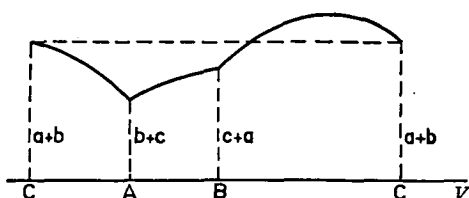


Fig. 3.

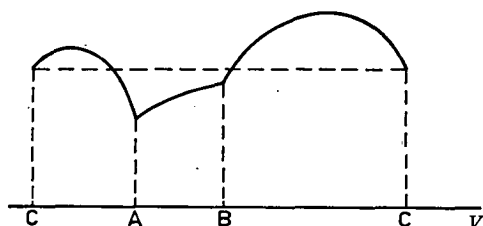


Fig. 4.

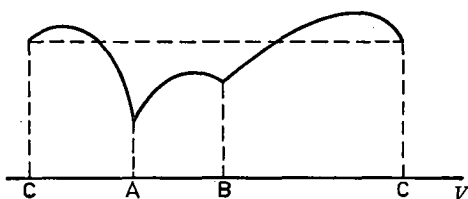


Fig. 5.

Als $p_{12} > 0$, $p_{13} > 0$ dan heeft V een minimum in elk der drie hoekpunten en een maximum op elk der drie bogen (fig. 5).

De gevallen waarbij een der getallen p_{12} en p_{13} nul is, dan wel beide nul zijn, geven geen verdere moeilijkheden. In het laatste geval is $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \gamma$.

Wij wijzen nog op een interpretatie van de functie V in de mechanica. De afstand PA is blijkbaar de potentiaal van een kracht, die in elk punt naar A is gericht en de grootte 1 heeft. Hieruit volgt: V is de potentiaal in dat krachtveld waar de veldsterkte F in een willekeurig punt P de resultante is van drie eenheidskrachten, gericht langs PA , PB en PC . Deze veldsterkte is in de punten A , B en C onbepaald; het singuliere karakter van deze punten was ons reeds gebleken. De boven gevonden resultaten kunnen nu in het licht van deze beschouwingswijze als volgt worden geformuleerd. Als een punt zich in het vlak bewegen kan, maar gedwongen wordt op de omgeschreven cirkel te blijven, dan is het in evenwicht daar waar $V(P)$ een uiterste waarde heeft. Het evenwicht is stabiel in een minimum, labiel in een maximum van V . Er is dus voor elke driehoek een evenwichtsstand in A ; deze is stabiel: plaatst men

het bewegend punt even buiten A op de omgeschreven cirkel dan ondervindt het door het samenspel der drie attracties een naar A gerichte kracht. In sommige driehoeken is ook C een evenwichtsstand, in andere (b.v. alle scherphoekige) zijn zowel B als C evenwichtsstanden. Op de boog BC ligt altijd een punt waar de resultante der drie aantrekkende krachten langs de straal van de omgeschreven cirkel valt: het betrokken evenwicht is labiel enz. Een bijzonderheid is nog dat de *grootte* van veldsterkte F voor alle punten van de boog BC dezelfde is en hetzelfde geldt voor de bogen AB en CA . Voor BC is het kwadraat van deze constante waarde gelijk aan $1 + 8 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma$.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

53. Gegeven een cirkel met middellijn AB en een punt P binnen de cirkel en niet op de middellijn. Construeer de loodlijn uit P op AB door uitsluitend gebruik te maken van een liniaal.

54. Waarom verwisselt een spiegel wel links en rechts, maar niet onder en boven?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorig nummer)

51. Het gevraagde is niet mogelijk. In elke in aanmerking komende stand bevat B één driehoek met een punt naar boven en één met een punt naar beneden, terwijl de figuur A 33 driehoeken van de eerste en 31 van de tweede soort bevat.

52. *Eerste oplossing* (van de inzender de heer A. F. van Tooren):

De spelers van team I noem ik $a_1, a_2, \dots$

De spelers van team II noem ik $b_1, b_2, \dots$

Onder A_i versta ik de verzameling der b 's, waar a_i tegen speelt in de loop van de match. Analooft B_i .

Gegeven I: indien $i \neq j$, dan bevat $\cap (A_i, A_j)$ precies één b en $\cap (B_i, B_j)$ precies één a .

Gegeven II: indien $i \neq j$, dan is $\cup (A_i, A_j)$ een „echte” deelverzameling van II en $\cup (B_i, B_j)$ een echte deelverzameling van I („echte” deelverzameling in de zin van: complement is niet leeg).

Te bew.: Alle A 's en B 's bevatten evenveel elementen.

Bewijs, eerste fase.

1) Kies een a_i en een b_j , zodat $b_j \in A_i$ niet juist is (dit kan op grond van gegeven II). Vanzelfsprekend is dan $a_i \in B_j$ eveneens onjuist.

2) Ik beeld nu B_j af in A_i op de volgende manier: als a_k een willekeurige element is van B_j , dan is $\cap (A_k, A_i)$ zijn beeldelement in A_i (immers $k \neq i$, volgens 1ste alinea, zie verder gegeven I).

3) Bij deze afbeelding geldt: verschillende elementen van B_j hebben verschillende beelden in A_i . Indirect bewijs hiervoor: Als a_k en a_l twee verschillende elementen van B_j zijn met gemeenschappelijk beeld b_m in A_i , dan geldt:

$$b_m \in A_k \text{ en } b_m \in A_l; \quad b_j \in A_k \text{ en } b_j \in A_l.$$

Dus $\cap (A_k, A_l)$ zou méér dan één element bevatten, n.l. b_m en b_j . Dit is in strijd met gegeven I.

4) Uit 3) blijkt: aantal elementen van $B_j \leq$ aantal elementen van A_i . Notatie hiervoor: $[B_j] \leq [A_i]$.

5) Herhaling van 2), 3), 4) in de andere richting, b 's en a 's verwisselen dus, geeft $[A_i] \leq [B_j]$.

6) Nu geven 4) en 5) samen: $[A_i] = [B_j]$.

Tweede fase.

1) Beschouw a_i, a_j en A_i, A_j , waarin $i \neq j$.

Volgens gegeven II bestaat er dan een b_n , die geen element van A_i en ook geen element van A_j is.

Volgens eerste fase is nu $[A_i] = [B_n]$ en $[A_j] = [B_n]$.

Conclusie: $[A_i] = [A_j]$.

2) Hieruit leiden we af: alle $[A]$'s zijn even groot.

3) Letterverwisseling geeft: ook alle $[B]$'s zijn even groot.

4) In fase I zagen we, dat er een $[A]$ is, die even groot is als een $[B]$.

2), 3) en 4) houden samen het gestelde in.

Tweede oplossing.

We vertalen de opgave in meetkundige termen. Gevraagd wordt uit het axiomastelsel:

1. Door elke twee punten gaat één lijn.
 2. Elke twee lijnen hebben één punt gemeen.
 3. Bij elke twee punten bestaat een lijn, die niet door elk van deze punten gaat.
 4. Bij elke twee lijnen bestaat een punt, dat niet op elk van deze lijnen ligt.
- af te leiden de stelling:

Door elk punt gaan evenveel lijnen en op elke lijn liggen evenveel punten; deze twee aantallen zijn gelijk.

De spelers van de ene ploeg corresponderen dan met de lijnen, die van de andere met de punten en de relatie speelt met correspondeert met de relatie ligt op resp. gaat door.

Het bewijs is eenvoudig. Triviaal is, dat geen enkele wedstrijd gespeeld wordt. Beide aantallen zijn dan 0. Onderstel nu, dat wel gespeeld wordt. Kies twee lijnen l en m en een punt P , dat op beide niet ligt. Onderstel op l liggen n punten $A_1, A_2, \dots, A_n$. De lijnen $PA_1, PA_2, \dots, PA_n$ snijden dan alle de lijn m in verschillende punten $B_1, B_2, \dots, B_n$. Op m liggen dus minstens evenveel punten als op l . Daar analoog op l minstens evenveel punten liggen als op m , liggen op beide lijnen evenveel punten. Op alle lijnen liggen dus evenveel punten. Volgens het dualiteitsprincipe gaan door elk punt dan ook evenveel lijnen. Bovendien zijn deze aantallen gelijk, omdat door P niet meer lijnen kunnen gaan dan er punten op l liggen.

BIJ EEN „VERSCHEIDENHEID”

door

Dr. J. T. GROENMAN

Groningen

1. In het novemnummer van Euclides¹⁾ poneert Prof. Bottema het volgende vraagstuk.

Indien van vlak α de doorgangen samenvallen en de projecties van een lijn l daarmee identiek zijn, welke is dan de maximale waarde van de hoek φ , die l met α maakt?

2. Dit vraagstuk geeft aanleiding tot de volgende stereometrische beschouwingen. (Zie figuur 1).

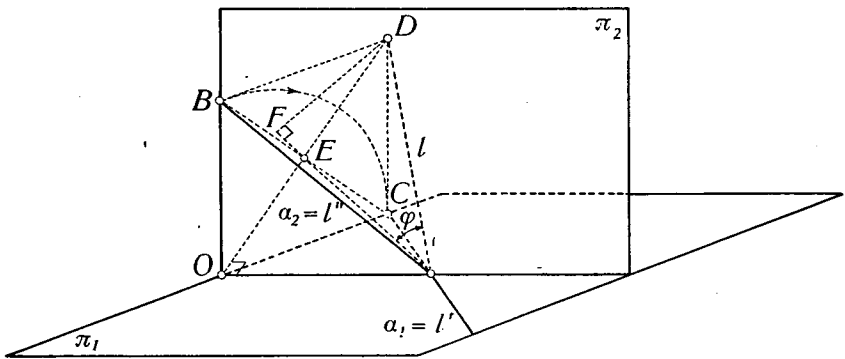


Fig. 1.

Bij het snijpunt van α en de as ontbreekt de letter A.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = l' = l''$$

$$\left. \begin{array}{l} OB = OC \rightarrow AB = AC \\ BE = CE \end{array} \right\} AE \perp BC \quad (1)$$

Voorts geldt

$$OD \perp BC \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

$$BC \perp AOD \quad (3)$$

¹⁾ Euclides, jg 36, blz. 77.

Wij trekken

$$DF \perp AE. \quad (4)$$

Uit (3) volgt

$$DF \perp BC \quad (5)$$

Uit (4) en (5) volgt $DF \perp ABC$, zodat AE de projectie van l op α is en $\angle EAD$ de hoek, die l met α maakt (φ).

3. Het planimetrisch vraagstuk wordt dus als volgt (figuur 2).

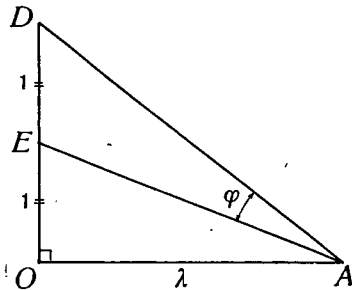


Fig. 2.

Gegeven: $OE = ED = 1$

$$\angle DOA = \frac{\pi}{2}$$

$$OA = \lambda.$$

Gevraagd: Bepaal de maximale waarde van φ , als λ varieert. Zij deze waarde φ_m .

4. Wij maken dit vraagstuk algemener op de volgende wijze. (Zie figuur 3).

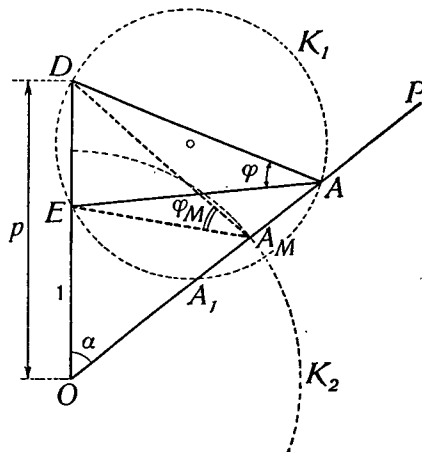


Fig. 3.

Gegeven: $OE = 1$.

$$OD = p > 1$$

$$\angle DOA = \alpha$$

$$OA = \lambda.$$

Gevraagd: Bepaal de maximale waarde φ_m van φ als λ varieert. (α en p constant).

Wij vinden bij A_1 dezelfde waarde voor φ als bij A . De punten op het segment AA_1 geven een grotere waarde voor φ , die buiten dit lijnsegment op OP een kleinere. De maximale waarde voor φ treedt dus op als de cirkel K_1 , die door D en E blijft gaan, aan OP raakt. Zij het raakpunt A_M met $OA_M = \lambda_M$, dan geldt

$$\lambda_M^2 = 1 \times p. \quad \boxed{\lambda_M = \sqrt{p}} \quad (6)$$

Wij hebben ons beperkt tot O op het verlengde van DE , dus $p > 1$. Voor O op DE wordt het vraagstuk triviaal. T.a.v. α kunnen wij volstaan met de waarden $0 \dots \pi$.

$$\left. \begin{aligned} EA_M^2 &= p + 1 - 2\sqrt{p} \cos \alpha \\ DA_M^2 &= p^2 + p - 2p\sqrt{p} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{DA_M : EA_M = \sqrt{p} : 1} \quad (7)$$

Zowel uit (6) als uit (7) volgt, dat bij constante p en variërende α de verzameling der punten A_M een cirkel K_2 wordt. (met middelpunt O en straal $\sqrt{p}$.)

In $\triangle DEA_M$ geeft de cosinusregel:

$$DE^2 = (p - 1)^2 = DA_M^2 + EA_M^2 - 2DA_M \cdot EA_M \cdot \cos \varphi_M.$$

Na substitutie van de gevonden waarden van DA_M en EA_M komt er:

$$\boxed{2\sqrt{p} \cos \alpha \cos \varphi_M - (p + 1)(\cos \varphi_M + \cos \alpha) + 2\sqrt{p} = 0} \quad (8)$$

Noemen wij $\cos \alpha = u$ en

$\cos \varphi_M = u_1$, dan heeft de vergelijking de gedaante:

$$\boxed{2\sqrt{p} u \cdot u_1 - (p + 1)(u + u_1) + 2\sqrt{p} = 0} \quad (8')$$

Deze vergelijking is die van een *involutie*. Toegevoegde elementen worden door de dekelementen harmonisch gescheiden.

De bij die dekelementen behorende waarden u' en u'' vindt men uit:

$$2\sqrt{p}u^2 - 2(p+1)u + 2\sqrt{p} = 0 \quad \text{waaruit}$$

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{p} \\ u'' &= \frac{1}{\sqrt{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(u, u_1; \sqrt{p}, \frac{1}{\sqrt{p}} \right) &= -1 & (9) \\ \left(\cos \alpha, \cos \varphi_M; \sqrt{p}, \frac{1}{\sqrt{p}} \right) &= -1 & (9') \end{aligned}$$

Omdat $p > 1$ is u kleiner dan 1; alleen deze waarde kan door een cosinus worden aangenomen. Er is dus bij veranderlijke p één en slechts één hoek $\bar{\alpha}$, waarbij $\varphi_M = \bar{\alpha}$

Voor $p = 2$, is $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{4}$

en voor $p = 4$ is $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{3}$

Bij gegeven p is de hoek α gemakkelijk te construeren (zie figuur 4)

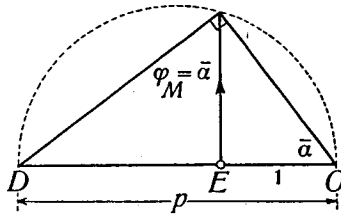


Fig. 4.

$$\cos \bar{\alpha} \text{ moet } = \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ zijn}$$

Dat is inderdaad zo in de figuur 4.

Uit (9') volgt:

Doorloopt $\cos \alpha$ de waarden $-1 \dots +1$, dan $\cos \varphi_M$ de waarden $+1 \dots -1$.

En: doorloopt α de waarden $\pi \dots 0$, dan φ_M de waarden $0 \dots \pi$.

φ_M is een monotone functie van α . (p constant gedacht).

5. Terugkerende tot het vraagstuk, dat door Prof. Bottema werd gegeven, merken wij op, dat daar $p = 2$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$(9') \text{ geeft nu: } \left(0, \cos \varphi_M; \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1.$$

$$\cos \varphi_M = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\sin \varphi_M = \frac{1}{3}.$$

$$\text{In figuur 1 is } \operatorname{tg} BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

De lijn $\alpha_1 = \alpha_2 = l' = l''$ maakt dan een hoek van $\frac{\pi}{4}$ met de as van projectie.

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

*Notulen van de Ledenvergadering op zaterdag
4 februari 1961 te Utrecht in Hotel Smits.*

Om ruim 15.00 uur opende de voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin, de vergadering. Hij sprak een welkomstwoord tot de vele aanwezigen en in het bijzonder tot de vertegenwoordigers van Wimecos (de heren J. D. de Jong, J. F. Hufferman en Dr. Joh. H. Wansink) en Velebi (de heren J. Jensma en Dr. J. C. van der Steen), het erelid Dr. D. J. E. Schrek, de heer A. M. Koldijk, redactie-secretaris van Euclides, en de sprekers, Prof. Dr. A. W. H. van Herk en de heer A. J. Th. Maassen.

Het voorstel om een telegram te sturen aan Inspecteur Dr. Doornenbal, die wegens ziekte niet aanwezig kon zijn, werd bij acclamatie aangenomen.

De notulen van de vorige ledenvergadering werden goedgekeurd.

Daar de leden van de kascommissie niet aanwezig waren en er ook geen bericht van hen was binnengekomen, werd de penningmeester onder voorbehoud gedechargeerd.

Tot leden van de kascommissie werden benoemd de heren J. Griffioen en G. J. Steemers. Voor de rondvraag gaf niemand zich op, zodat hiermee het huishoudelijk gedeelte afgewerkt was.

Daarna werd de vergadering voor het wetenschappelijk gedeelte gesplitst in twee secties.

In de sectie natuurwetenschappen sprak Prof. Dr. A. W. H. van Herk over: De biochemie en het V.H.M.O.

In de sectie wiskunde hield Drs. A. J. Th. Maassen een voordracht, waarvan de titel werd gewijzigd in: Verzamelingen, afbeeldingen, relaties en functies. De tekst van deze lezing zal in Euclides worden gepubliceerd. Nadat nog enkele vragen waren gesteld en beantwoord, dankte Dr. Wansink voor de ontvangen uitnodiging en sloot de voorzitter de vergadering.

De secretaris,
D. Leujes

C.J. ALDERS

Wiskunde- boeken voor M.O. & V.H.O.

Algebra (3 delen) — Planimetrie
Stereometrie — Goniometrie
Driehoeksmeting — Inleiding tot de
Analytische Meetkunde

11e - 45e drukken. Prijs per deeltje gemid-
deld f 2.50

„Beknopt, helder, degelijk!

Voorzien van overvloedig oefenmateriaal, met alle ballast overboord”

Aldus beoordeelde de heer J. Koksma in
„Chr. Gymn. en M.O.” de Alders-serie
in haar totaal.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Herdrukken van wiskunde-schoolboeken voor V.H.M.O.

DR. H. STREEFKERK, **Nieuw meetkundeboek voor M.O. en V.H.O.**
deel II - 4e druk f 3,50; deel III - 3e druk f 3,75

DR. D. J. E. SCHREK, **Beknopte analytische meetkunde.** 3e druk f 3,90,
geb. f 4,60. (Met de eindexamenopgaven 1960 der gymnasia.)

P. WIJDENES en DR. P. G. VAN DE VLIET, **Algebra en financiële reken-
kunde** voor de H.B.S.-A. 9e druk f 3,50. (Met eindexamenopgaven)

P. WIJDENES en H. PLEYSIER, **Algebra voor examens in handelsrekenen.**
6e druk f 5,90

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Logaritmen- en rentetafels -
uitgave G (schooluitgave van tafel E).** 7e druk-gec. f 2,75

NOORDHOFF's **Logaritmentafel** in vier decimalen en **rentetafels** in acht
decimalen. 24e druk-gec. f 1,90

250 OPGAVEN, samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de
Wimecoscommissie door C.J. Alders, Dr. L. N. H. Bunt, A. Hol-
werda, Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. Joh. H. Wansink.

6e druk f 1,90

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Zojuist verschenen:

Prof. Dr. M. A. Krasnosel'skiĭ

Prof. Dr. Ya. B. Rutickiĭ

Convex functions and Orlicz spaces

Translated from
the first Russian
edition by
Leo F. Boron

CONTENTS

Chapter I:

Special classes of
convex functions

Chapter II:

Orlicz spaces

Chapter III:

Operators in Orlicz
spaces

Chapter IV:

Non-linear integral
equations

Summary of fundamental
results — Bibliographical
notes — Literature — Index

The reader will find that this book, written by two recognized authorities in this branch of mathematics, is a rather complete study of convex functions (in a form convenient for the classifications of Orlicz spaces) and of Orlicz spaces. Some results, due to the authors, appear here in complete form for the first time. In the third chapter of the book, conditions for continuity and complete continuity of some operators from one Orlicz space into another are investigated — first for linear integral operators, then for simple non-linear operators, and finally for non-linear integral operators. Orlicz and Luxemburg norms are discussed. Other topics taken up are the Fréchet derivative, the Gâteaux gradient, and the gradient of the Luxemburg and Orlicz norms. Special attention is given to the Uryson and Hammerstein operators. The monograph is quite readable and will be useful to students of functional analysis and research-workers in this field.

The student who has studied Natanson's *Theory of functions of a real variable* and Zaanen's *Linear analysis* (the sections dealing with Orlicz spaces) will find this volume accessible.

xii 249 blz. - f 18,—, gebonden f 20,—

Andere Russische wiskundige werken, vertaald door Leo F. Boron, zijn:

M. A. Naimark, *Normed Rings* - gebonden f 48,75

A. V. Pogorelov, *Differential Geometry* - f 14,50, geb. f 16,50

A. O. Gelfond, *The Solution of Equations in Integers* - f 3,75

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

De in dit nummer geadverteerde uitgaven zijn zowel bij de boekhandel als bij de uitgever verkrijgbaar.