EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/1961
X - 15 JULI 1961

INHOUD

J. F. Hufferman: Iets over de niet-euclidische meetkunde . . . 321
Drs. A. B. Menk: De plaats van de wiskunde in de verschillende nijverheidsakten . . . 327
H. C. Vernout: Planimetrie en stereometrie . . . 337
Boekbespreking . . . 343
Wimecos . . . 347
Liwenagel . . . 350
Recreatie . . . 351
Kalender . . . 352

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk. Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

IETS OVER DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE

door

J. F. HUFFERMAN

Zeist

§ 1. *Johann Heinrich Lambert* (1728—1777), één der voorlopers van de grondleggers der niet-euclidische meetkunde, merkt in zijn boek: „Theorie der Parallellinien" op (aangehaald in: Dr. H. J. E. Beth, Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historische grondslag, Noordhoff 1929, pg. 27 en vlg): „Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese (d.w.z. de z.g. hyperbolische meetkunde) komme bei einer imaginären Kugelflache vor".

In het volgende artikel worden nu, uitgaande van de formules voor de gewone rechthoekige boldriehoek, eerst formules afgeleid voor een rechthoekige driehoek op een bol met straal $i = \sqrt{-1}$, volgens Lambert dus trigonometrische formules in de hyperbolische meetkunde, en daarna enige bekende eigenschappen van deze meetkunde.

§ 2. Uitgangspunt zijn de formules voor de rechthoekige boldriehoek (rechte hoek in C):

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} c \cos B \text{ (resp. } \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A) \\ \sin a &= \sin c \sin A. \end{aligned}$$

Met a, b en c worden dan de zijden, met A, B en C de hoeken aangeduid (beide in graden gemeten).

Zijn nu de booglengten van de zijden a, b en c en is R de straal van de bol, dan vinden we (de zijden zijn nu dus in radialen omgerekend):

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{R} = \operatorname{tg} \frac{c}{R} \cos B$$

$$\sin \frac{a}{R} = \sin \frac{c}{R} \sin A;$$

substitueren we nu $R = \mathrm{i} = \sqrt{-1}$, dan gaan deze over in:

$$\begin{aligned}\cos(c\mathrm{i}) &= \cos(a\mathrm{i})\cos(b\mathrm{i})\\ \operatorname{tg}(a\mathrm{i}) &= \operatorname{tg}(c\mathrm{i})\cos B\\ \sin(a\mathrm{i}) &= \sin(c\mathrm{i})\sin A.\end{aligned}$$

Toepassend (zie bv. Prof. Dr. Hk. de Vries, Leerboek der differentiaal- en integraalrekening I, 2e druk, Noordhoff 1924):

$$\begin{aligned}\sin(\mathrm{i}x) &= \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,x\\ \cos(\mathrm{i}x) &= \mathrm{ch}\,x\\ \operatorname{tg}(\mathrm{i}x) &= \mathrm{i}\,\mathrm{th}\,x,\end{aligned}$$

verkrijgen we ten slotte:

$$\mathrm{ch}\,c = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b \tag{1}$$
$$\mathrm{th}\,a = \mathrm{th}\,c\cos B,\ \text{resp}\ \mathrm{th}\,b = \mathrm{th}\,c\cos A \tag{2}$$
$$\mathrm{sh}\,a = \mathrm{sh}\,c\sin A,\ \text{resp.}\ \mathrm{sh}\,b = \mathrm{sh}\,c\sin B \tag{3}$$

Vergelijk hiermee de formules door Prof. Dr. J. C. H. Gerritsen afgeleid in zijn boek „Niet-euclidische Meetkunde" (Noorduyn, Gorinchem 1942) § 32 pg. 180/181. De stelling uitgedrukt in (1) wordt door hem een analogon genoemd van de stelling van Pythagoras. Zie echter ook § 6 van dit artikel.

De formules (1), (2), (3) gelden dus voor de *rechthoekige* driehoek in de hyperbolische meetkunde.

§ 3.

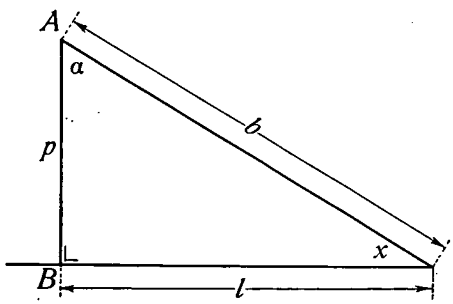

Fig. 1.

Laat uit A de loodlijn p op l neer en trek uit A een lijn b, die l snijdt. De hoek tussen b en p noemen we α.

Nu zien we, volgens (2):

$$\begin{aligned}\mathrm{th}\,p &= \mathrm{th}\,b\cos\alpha\\ \mathrm{th}\,l &= \mathrm{th}\,b\cos x,\end{aligned}$$

dus

$$\cos x = \frac{\operatorname{th} l}{\operatorname{th} b} = \frac{e^l - e^{-l}}{e^l + e^{-l}} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{e^b - e^{-b}} .$$

Laat nu $l \to \infty$, $b \to \infty$, dan krijgen we

$$\cos x = \lim_{\substack{l\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{e^l - e^{-l}}{e^l + e^{-l}} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{e^b - e^{-b}} = 1$$

dus $x \to 0$
en verder:

$$\operatorname{th} p = \lim_{b\to\infty} \operatorname{th} b \cos \alpha \to \operatorname{th} p = \cos \alpha. \tag{4}$$

Maar wanneer $l \to \infty$, kunnen we de lijn b een *parallel* noemen, en wordt α de *parallelhoek* behorende bij de afstand p, die altijd wordt voorgesteld door $\pi(p)$.
(4) wordt dan

$$\cos \pi(p) = \operatorname{th} p. \tag{4a}$$

Daar $\operatorname{th} x$ een toenemende functie van x is en $p \neq 0$, hebben we

$0 < \cos \pi(p) < 1$, dus $\frac{\pi}{2} > \pi(p) > 0$.

§ 4.

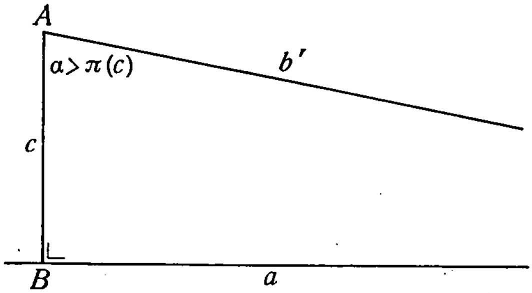

Fig. 2.

Richt in het punt B van a de loodlijn AB op; $AB = c$. Zet bij A een hoek α af met $\pi/2 > \alpha > \pi(c)$. Veronderstel dat er een snijpunt is van b' met a, dan geldt:

$$\operatorname{th} c = \operatorname{th} b' \cos \alpha \to \operatorname{th} b' = \frac{\operatorname{th} c}{\cos \alpha} .$$

volgens (4a) is

$$\operatorname{th} c = \cos \pi(c) \to \operatorname{th} b' = \frac{\cos \pi(c)}{\cos \alpha} .$$

Maar $\alpha > \pi(c)$, dus dan th $b' > 1$, maar er is geen enkele waarde van b' die hieraan voldoet: de lijn, die met AB een hoek $\alpha > \pi(c)$ maakt, heeft geen snijpunt met a($0 < \operatorname{th} x < 1$ voor $0 < x < \infty$). Combinerend met § 3 krijgen we dus door A 3 typen lijnen t.o.v. a:

I lijnen, die a snijden,
II twee lijnen, parallel met a (§ 3),
III lijnen, die a niet snijden (§ 4).

§ 5. Natuurlijk geldt steeds de betrekking:

$$\begin{aligned}
\cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\
&= \frac{\operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\operatorname{th}^2 c} - \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c} \qquad \text{(wegens (2) en (3))} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 c}\left[\operatorname{th} a \operatorname{th} b \operatorname{ch}^2 c - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b\right] \\
&= \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c}\left[\frac{\operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b} - 1\right] \\
&= \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh}^2 c}\left[\operatorname{ch} c - 1\right] \qquad \text{(wegens (1))}.
\end{aligned}$$

Daar nu ch $x = 1$ voor $x = 0$ en ch x voor $x > 0$ een toenemende functie is van x, is dus voor $c \neq 0$ steeds $\cos(A + B) > 0$ d.w.z. $A + B < \frac{\pi}{2}$ omdat de formules gelden voor een rechthoekige driehoek met rechte hoek in C, is dus

$$A + B + C < \pi. \tag{5}$$

Gemakkelijk kan men aantonen, dat deze betrekking nu in **elke** driehoek moet gelden.

§ 6. Uit (3) en (2) volgt:

$$\sin A = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \text{ en } \cos A = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}.$$

Nu is

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sh}^2 a}{\operatorname{sh}^2 c} + \frac{\operatorname{th}^2 b}{\operatorname{th}^2 c} = 1$$

of

$$\operatorname{sh}^2 a + \operatorname{th}^2 b \operatorname{ch}^2 c = \operatorname{sh}^2 c$$

of wegens (1)

$$\operatorname{sh}^2 a + \operatorname{ch}^2 a \operatorname{sh}^2 b = \operatorname{sh}^2 c,$$

welke door zijn vorm herinnert aan de stelling van Pythagoras.

§ 7.

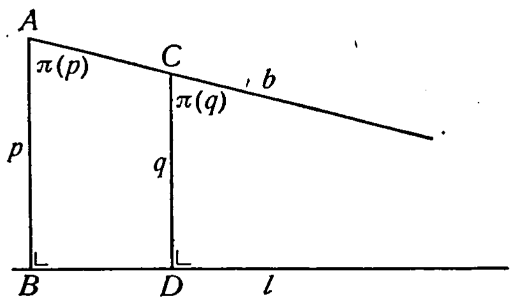

Fig. 3.

We trekken door een punt A buiten de lijn l, één der parallellen (b) met l, zodat A dus de parallelhoek $\pi(p)$ is.

Laten we nu uit een tweede punt C van b de loodlijn CD op l neer, dan volgt i.v.m. (5):

$$\pi(p)+\{\pi-\pi(q)\}+\pi<2\pi$$

of $\pi(p)-\pi(q)<0 \rightarrow \pi(p)<\pi(q) \rightarrow \cos\pi(p)>\cos\pi(q) \rightarrow \operatorname{th} p>\operatorname{th} q$.

Nu is $\operatorname{th} x$ een toenemende functie van x, dus $p>q$, d.w.z. *de parallel is niet equidistant.*

§ 8.

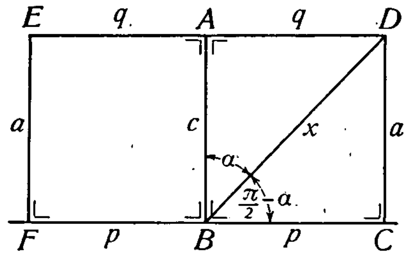

Fig. 4.

Beschrijving van fig. 4 (z.g. Saccheri-vierhoek).

Richt in een punt B van de lijn CF, de loodlijn AB op.

Trek de lijnen AD en AE in A beide $\perp AB$, zodat EAD dus een gestrekte hoek wordt. ED behoort dus tot de lijnen, door A getrokken, die FC niet snijden (§ 4). Verder is $BC = BF = p$; richt in C en F weer loodlijnen op (op FBC). Denk de figuur nu omgevouwen om AB, nu valt BC op BF, CD langs EF, AD langs

AE, dus D op $E \to AD = AE(=q)$; $CD = EF(=a)$. Trek $BD = x$.

Nu is

$$\operatorname{th} q = \operatorname{th} x \cos D_1 \qquad \operatorname{th} c = \operatorname{th} x \cos \alpha$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} x \cos D_2 \qquad \operatorname{th} p = \operatorname{th} x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{th} x \sin \alpha.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\operatorname{th} q}{\operatorname{th} p} = \frac{\cos D_1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Nu is (§ 5) $D_1 + \alpha < \frac{\pi}{2}$ dus $D_1 < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Dus $\cos D_1 > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \to \frac{\operatorname{th} q}{\operatorname{th} p} > 1 \to q > p$.

Ook is $D_2 + \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \to D_2 < \alpha$,

dus $\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} = \frac{\cos D_2}{\cos \alpha} > 1 \to a > c$ m.a.w.

Van 3 collineaire punten E, A en D, waarvan er 2 nl. E en D op gelijke afstanden liggen van de rechte FC, ligt het derde punt A niet op diezelfde afstand van FC dus:

de meetkundige plaats der punten die alle op gelijke afstand van een rechte lijn FC liggen kan niet uit (twee) rechten bestaan.

§ 9. We beschouwen nog eens (4a): $\cos \pi(p) = \operatorname{th} p$.
Nu is

$$\operatorname{th} p = \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}} = 1 - \frac{2e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$$

$$\cos \pi(p) = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\pi(p) \to \sin^2 \tfrac{1}{2}\pi(p) = \frac{e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$$

$$\cos \pi(p) = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\pi(p) - 1 \to 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\pi(p) = 1 + \cos \pi(p) =$$

$$1 + \operatorname{th} p = 2 - \frac{2e^{-p}}{e^p + e^{-p}} = \frac{2e^p}{e^p + e^{-p}} \to \cos^2 \tfrac{1}{2}\pi(p) = \frac{e^p}{e^p + e^{-p}}.$$

Hieruit:

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\pi(p) = e^{-2p} \to \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\pi(p) = e^{-p},$$

dit is de formule van **Lobatschewsky** voor de parallel hoek (vgl. Prof. Dr. J. C. H. Gerritsen, Niet-eucl. meetkunde 1942 pg 174).

Nemen we nog $p = 1$; dan is $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, waarmede de *absolute lengte-eenheid* in deze meetkunde gegeven is (id. pg. 173).

DE PLAATS VAN DE WISKUNDE IN DE VERSCHILLENDE NIJVERHEIDSAKTEN

Drs. A. B. MENK
Utrecht

In de Nederlandse Staatscourant van 13 mei j.l. is gepubliceerd het „Reglement toelatingsexamens voor scholen uitgaande van het Nederlands Genootschap tot opleiding van leerkrachten voor het Nijverheidsonderwijs.''

In aansluiting aan deze publikatie in de Staatscourant wil ik hier gaarne een overzicht geven van de plaats, die de wiskunde in de verschillende nijverheidsakten inneemt.

De akten, die ik hier achtereenvolgens zal noemen, en die het recht geven onderwijs te geven aan inrichtingen van lager technisch onderwijs zijn in te delen in twee grote groepen, nl.:

1e: Praktijkakten en de Theorie-akte NI,
2e: Theorie- en Tekenakten.

Groep 1 omvat de akten:

Nb — timmeren en machinale houtbewerking.
Nc — metselen.
Ne — schilderen.
Nf — meubelmaken en fijne houtbewerking met inbegrip van de machinale houtbewerking.
Nh — vuur-, plaat- en constructiebankwerken,
Ni — elektrisch en autogeen lassen en constructiebankwerken,
Nj — metaalbewerking, toegepast in de werktuigbouw,
Nk — fijnmetaalbewerking,
Nu — elektrotechnische montage,
Nw — motorrijtuighersteller,
Nz — fitten, koper-, lood- en zinkwerken.
NI — rekenen, wiskunde, natuurkunde en mechanica.

Groep 2 omvat de akten:

NIIa — lijntekenen, handtekenen en technisch schetsen.
NIII — vaktekenen, technisch schetsen en de theoretisch-technische vakken aan de vakrichting timmeren, metselen en bouwkunde.

NIV — vaktekenen, technisch schetsen en de theoretisch-technische vakken aan de vakrichtingen metaalbewerken, fijnmetaalbewerken, fijnmechanische techniek en werktuigkunde.

NV — vaktekenen, technisch schetsen en de theoretisch-technische vakken aan de vakrichting elektrotechniek.

NX — meubeltekenen, technisch schetsen, kennis van meubelen en betimmeringen.

De opleiding tot deze akten, bestaat, voorzover men ingeschreven is aan één der scholen onder beheer van het Nederlands Genootschap tot opleiding van leerkrachten voor het Nijverheidsonderwijs uit drie delen, nl.

a. de basisopleiding, duur 2 jaar.
b. de voortgezette opleiding, duur 2 jaar.
c. de afsluitende opleiding.

De examens zijn schoolexamens, onder toezicht van gecommitteerden. De opgaven, tenminste die voor de wiskundevakken, worden centraal gemaakt, en zijn dus gelijk voor alle scholen.

Bovendien kan men zich nog via allerlei schriftelijke cursussen voor de diverse akten bekwamen, en dan als extraneus examen doen.

Voor zover het de wiskunde betreft, zijn de examens zowel schriftelijk als mondeling.

Voor alle akten moet eenzelfde examen worden afgelegd aan het eind van de basisopleiding.

Voor de wiskunde omvat dit examen:

1. *Algebra*: nl., het leren opstellen en lezen van grafieken van functies met vergelijking $y = ax + b$, $y = a/x$, $y = ax^2 + bx + c$. Het oplossen van vierkantsvergelijkingen door middel van ontbinding in factoren en met behulp van de *abc*-formule, het oplossen van eenvoudige ingeklede vergelijkingen. Eigenschappen en aard van de wortels van een vierkantsvergelijking, al of niet bestaanbaarheid van de wortels, eigenschappen van som en produkt van de wortels. Oneigenlijke machten als voorbereiding voor de logaritmen. Logaritmen. Berekeningen met logaritmen van eenvoudige opgaven met behulp van een tafel in vier decimalen.

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. Gegeven de functie $y = 2x^2 + 4x + 7$.
   a. Onderzoek of de grafiek van de gegeven functie de coördinaatassen snijdt èn zo ja, bereken de coördinaten van die snijpunten.
   b. Verklaar dat de functie een minimum heeft en bereken dat minimum.

c. Stel de vergelijking op van de as van symmetrie.
d. Teken de grafiek voor $-4 \leqq x < 2$.

2. Twee getallen verschillen 6.
De som van hun kwadraten vermeerderd met hun produkt is 309. Bereken de getallen, die hieraan voldoen.

3. a. Bereken zonder log. tafel de waarde van x uit:
$\log x = 3 \log 2 + 2 \log 3 - \log 7$.
b. Bereken met log. tafel de waarde van x uit:
$$x = \frac{10^{0,01494} - 1}{0,01494}.$$

2. *Stereometrie*: nl. definities en algemene beschouwingen over punten, lijnen en vlakken in de ruimte. Evenwijdigheid van lijnen en vlakken. Loodrechte stand van lijnen en vlakken. Hoek tussen lijnen en vlakken. Definities en eigenschappen van piramiden. Definities en eigenschappen van prisma's, kegels, cilinders en bol. (Geen oppervlakken en inhouden van de delen van de bol).

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. Van een piramide TABCD is het grondvlak een parallellogram met zijden AB = 8 cm en AD = 4 cm. Hoek DAB is gelijk aan 60°. De ribbe TD staat loodrecht op het grondvlak en is 8 cm lang. Een vlak V door het midden P van AB en evenwijdig aan AD en TC verdeelt de piramide in twee delen.
a. Maak een duidelijke tekening van de piramide en de doorsnijding van de piramide met het vlak V.
b. Bereken de inhoud van de piramide.
c. Bereken de inhoud van de delen, waarin de piramide door het vlak V wordt verdeeld.

2. De uitslag van de kegelmantel van een rechte cirkelkegel is een cirkelsector met een middelpuntshoek van 216° en een straal van 10 cm.
a. Bereken de inhoud van de kegel (π laten staan).
b. Bereken de oppervlakte van de ingeschreven bol (π laten staan).

3. *Beschrijvende Meetkunde*: nl. orthogonale projectie van punten en lijnen in de eerste ruimtehoek op de drie projectievlakken. De doorgangspunten van rechten. Ware lengte van lijnstukken. De doorgangen van een plat vlak.
Van de grondconstructies: snijlijnen van twee vlakken, lijnen in een vlak, punten in een vlak, lijnen evenwijdig aan een vlak, lijnen loodrecht op een vlak, afstand van punt tot vlak, vlak door een punt en evenwijdig aan een gegeven vlak. De grondconstructies moeten kunnen worden toegepast in eenvoudig geplaatste lichamen als piramide en prisma.
Het neerslaan van een vlak, met daarin liggende figuren in het

horizontale projectievlak. Bepalen van de ware gedaante van deze figuren. Doorsnijding van prisma en piramide met platte vlakken. Ware gedaante van de doorsneden. Projectie van cilinder en kegel. Doorsnijding van cilinder en kegel met platte vlakken: constructies punt voor punt. Geen ingewikkelde kegelsnedeconstructies, ten hoogste in eenvoudige gevallen de assen bepalen.

De opgaven voor het examen 1957 waren:

Neem in beide vraagstukken de X-as evenwijdig aan de lange zijden van het opengeslagen papier op een afstand van 18 cm van de onderzijde en neem de oorsprong 0 op 1 cm van de linkerzijde van het papier.

1. Gegeven:
   Punt A(4, 1, 0) en punt B(12, 4, 0). AB is de zijde van een vierkant ABCD, dat vóór de X-as in het horizontale projectievlak ligt. ABCD is het grondvlak van een regelmatige piramide TABCD, die met dit grondvlak op het horizontale projectievlak rust, en waarvan de hoogte 12 cm is. Een vlak α snijdt de ribben TA, TB, TC en TD resp. in de punten P, Q, R en S. De afstanden van P en Q tot het horizontale projectievlak zijn beide gelijk aan 5 cm, terwijl R 3 cm boven dit projectievlak ligt. De piramide TPQRS wentelt om PQ tot de top T boven de X-as in het verticale projectievlak ligt.

   Gevraagd:
   Teken de 1e en de 2e projectie van:
   a. de piramide TABCD;
   b. de doorsnede van α met TABCD;
   c. de gewentelde piramide TPQRS.

2. Gegeven:
   Punt M(7, $4\frac{1}{2}$, 0) is het middelpunt van een cirkel met een straal van $4\frac{1}{2}$ cm, die ligt in het horizontale projectievlak. Deze cirkel is het grondvlak van een rechte cirkelkegel, die op het horizontale projectievlak staat en waarvan de hoogte 12 cm is. Deze kegel wordt gesneden door een vlak α. De eerste doorgang van α maakt met de X-as een hoek van 30° (onder de X-as en opening naar rechts). Deze doorgang raakt de grondcirkel in het punt A. Het punt A is verder van de X-as verwijderd dan het middelpunt M. Het vlak α maakt met het horizontale vlak een hoek van 45°.

   Gevraagd:
   a. Teken de 1e en de 2e projectie van de kegel;
   b. Teken de horizontale doorgang van α en de 1e en 2e projecties van het snijpunt P van α en de as van de kegel;
   c. Construeer de assen van de horizontale projectie van de doorsnede van α en de kegel;
   d. Schets de horizontale projectie van deze doorsnede.

Voor zover men de lessen volgt aan één der scholen van het Genootschap krijgt men gedurende de basisopleiding bovendien nog les in planimetrie en goniometrie. Hierin wordt echter geen examen afgenomen. Diegenen, die het examen als extraneus afleggen, moeten echter wel examen doen in de planimetrie en de goniometrie.

De examenstof omvat:

Planimetrie: evenredigheid van lijnstukken, gelijkvormigheid, eigenschappen van de rechthoekige driehoek, projectiestellingen, berekening van lijnstukken in de driehoek (alleen de hoogtelijnformule moet worden gekend), constructie van lijnstukken met behulp van de stelling van Pythagoras, constructie van de vierde evenredige, vergelijken van oppervlakken, de cirkel, hoeken en bogen, raaklijn, evenredigheid van lijnen in de cirkel, constructie van raaklijn aan cirkel en gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels, constructies middelevenredige, meetkundige plaatsen (cirkel, middelloodlijn en bissectrice), om-, in- en aangeschreven cirkels van de driehoek, koorden- en raaklijnen-vierhoek, regelmatige veelhoeken (van de regelmatige 3-, 4-, 6- en 8-hoek de constructie en het uitdrukken van de zijde in de straal), oppervlak en omtrek van de cirkel.

Goniometrie: goniometrische verhoudingen, opzoeken van rechtstreekse waarden in de tafel, rechthoekige driehoeken, herleiden van hoeken in verschillende kwadranten, voor zover nodig voor de behandeling van de grafieken van de goniometrische verhoudingen, formules voor de som en het verschil van twee hoeken, formules voor de dubbele hoeken (geen formules van de gedaante $\sin p + \sin q$), sinus-, cosinus- en tangens-regel en uitsluitend directe toepassingen hiervan, berekeningen in de driehoek, ook met logaritmen, oppervlak van de driehoek.

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. De bissectrice van $\angle$ C van driehoek ABC snijdt de basis AB in D en de omgeschreven cirkel in E.
   Bewijs: $BE^2 = CE \times DE$.
2. Van de scherphoekige driehoek ABC is de basis AB = 16 cm. De hoogtelijn CD = 12 cm.
   $\angle B = 53°12'$.
   Bereken BD en $\angle$ ACB.
3. Bewijs:
   $$\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Diegenen, die opgeleid worden voor één der praktijkakten, of voor de akte N1, leggen hun tweede examen af aan het eind van de voortgezette opleiding, terwijl degenen, die opgeleid worden voor de theorie- en tekenakten, een examen moeten afleggen aan het eind van het eerste jaar van de voortgezette cursus en een examen aan het eind van het tweede jaar van de voortgezette cursus.

De wiskunde komt na de basisopleiding alleen nog maar voor in het leerplan voor de akten NI, NIIa, NIV en NX.

Voor de akte NI moet examen worden afgelegd in:

1. *Rekenkunde en Algebra*:

Rekenkunde: getalbegrip (natuurlijk getal, positieve en negatieve getallen, breuken, wortels, irrationele getallen, imaginaire getallen). Begrip deelbaarheid, priemgetallen, ontbinden in factoren, G.G.D. en K.G.V. Kenmerken van deelbaarheid voor delers van 10^n, voor 9, voor 11 en combinaties hiervan. Verhoudingen en evenredigheden.
Afhankelijkheid van grootheden. De verklaringen van de bewerkingen moeten worden gekend.

Algebra: Eenvoudige behandeling van de logaritmische en exponentiële vergelijkingen. Van de rekenkundige en de meetkundige reeks de formules voor de laatste term, de som van de termen en het interpoleren. De meetkundige reeks ook met oneindig veel termen. Mede in verband met de oneindig voortlopende meetkundige reeks een zeer eenvoudige behandeling van het limietbegrip. Van de limieten verder enige toepassingen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} \quad \text{en} \quad \lim_{x\to a}\frac{(bx+c)(x-a)}{(px+q)(x-a)}.$$

Begrip rechthoekige coördinaten. Functiebegrip. Vergelijking van de rechte lijn (algemene vergelijking, vergelijking van de rechte bepaald door een punt en de richting van de lijn, vergelijking van de rechte bepaald door twee punten). Het bepalen van een snijpunt van twee rechten (hierbij het verband met het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden). Hoek tussen twee rechten (loodrechte stand). De vergelijking van de cirkel met het middelpunt in de oorsprong. Het bepalen van de snijpunten van een rechte lijn met een cirkel (raaklijn door een gegeven punt en evenwijdig aan een gegeven rechte). Bespreking van de functies $y = ax^2 + bx + c$ (hierbij de uiterste waarde behandelen),

$$xy = c^2 \quad \text{en} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. Van een reeks stelt t_k de $k$de term voor en s_k de som van de eerste k termen: Gegeven is: $t_k = 3 \times 2^{-k}$.
   a. Bewijs: t_k is de $k$de term van een meetkundige reeks.
   b. Bereken s_k en leid hieruit af $\lim\limits_{k \to \infty} s_k$.
   c. Bereken hoeveel termen men minstens moet nemen in de reeks, gevormd door de omgekeerden van de termen van de gegeven reeks, opdat hun som groter is dan $2 \,.\, 10^6$.

2. Van de vergelijking:
$$(p - 2)x^2 - 2(2p - 3)x + p + 6 = 0$$
zijn x_1 en x_2 de wortels.
   a. Voor welke waarden van p zijn x_1 en x_2 reëel?
   b. Voor welke waarden van p zijn x_1 en x_2 beide positief?

3. $y = 3 \,.\, 2^{x-1} - 4 \,.\, 2^{x-1} + 3$
   a. Bereken y als $x = 0$ en als $x = 1$.
   b. Bereken x als $y = 4$.

2. *Planimetrie*: Vermenigvuldiging en gelijkvormigheid. Berekening van lijnstukken in een driehoek. De cirkel. Hoeken en bogen, evenredigheid van lijnstukken in de cirkel. Constructies. Om-, in- en aangeschreven cirkels van de driehoek. Regelmatige veelhoeken. Omtrek en oppervlakte cirkel. Het begrip macht van een punt t.o.v. een cirkel; het begrip machtlijn. Verdeling in uiterste en middelste reden.

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. In driehoek ABC snijdt de bissectrice van hoek A de buitenbissectrice van $\angle$ B in het punt S.

   Gevraagd:
   a. Te bewijzen, dat de meetkundige plaats van het punt S, als van driehoek ABC de basis AB en de tophoek C constant zijn, een cirkelboog is.
   b. Te bewijzen, dat het middelpunt N van de cirkel, waarvan deze boog een deel is, op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt.

2. Gegeven is een parallellogram ABCD, waarvan de zijden BC en CD resp. 39 en 27 cm lang zijn en de diagonaal BD 30 cm lang is. Men beschrijft de cirkel, die door A, C en D gaat en men verlengt AB tot hij deze cirkel snijdt in E.
   a. Bereken de macht van het snijpunt S van AC en BD t.o.v. deze cirkel.
   b. Bereken de lengte van BE.

3. *Goniometrie*: Daar in de basisopleiding de behandeling niet heel uitvoerig is geweest en het bovendien een jaar geleden is, moet het basisprogramma hier geheel worden herhaald. Goniometrische formules van de enkele hoek. Het herleiden van gonio-

metrische verhoudingen van hoeken uit andere kwadranten tot goniometrische verhoudingen van hoeken uit het eerste kwadrant. Formules voor de goniometrische verhoudingen voor de som en het verschil van twee hoeken, voor dubbele en halve hoeken, voor sommen en verschillen van twee sinussen en twee cosinussen. Logaritmen van goniometrische verhoudingen. Sinus-, cosinus- en tangensregel. Berekening van elementen in een scheefhoekige driehoek. Berekening van de hoogtelijn en de stukken, waarin de hoogtelijnen elkaar verdelen. Formules voor de oppervlakte van de driehoek. Formules voor om-, in- en aangeschreven cirkel. Probleem van Snellius. Goniometrische vergelijkingen van de typen: $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, en $a \sin x + b \cos x = c$.

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. a. Bereken de waarden van x tussen 0° en 360°, die voldoen aan:

$$\sin (3x - 40°) = \cos (20° - 3x)$$

Controleer (door substitutie) de grootste gevonden waarde van x.

b. Los x op uit:

$$2 + \cos 2x = \sqrt{3} \cdot \sin x$$

2. Van de scherphoekige driehoek ABC is H het hoogtepunt en M het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

a. Bewijs:
De afstanden van H en M tot AC zijn resp.:

$$2R \cos \alpha \cdot \cos \gamma \quad \text{en} \quad R \cos \beta.$$

b. Bepaal de goniometrische betrekking, die er tussen α en γ bestaat, als HM evenwijdig is aan AC.

c. Verminder R met de som der afstanden van M tot de zijden van driehoek ABC en herleid deze vorm tot een produkt.

4. *Stereometrie*: Het begrip drievlakshoek en pooldrievlakshoek en het verband daartussen. Eenvoudige uitslagen van drievlakshoeken. Van de meetkundige plaatsen: middelloodvlak, bissectricevlak en bissectriceloodvlak. Eenvoudige eigenschappen van prisma, piramide, rechte cirkelcilinder, rechte cirkelkegel en bol. De cirkeldoorsneden van een scheve cirkelkegel. Oppervlakte en inhoud van prisma, piramide, afgeknotte piramide, prismoïde, rechte cirkelcilinder, rechte cirkelkegel, afgeknotte cirkelkegel, bol en boldelen (bolsegment, bolschijf, bolsector en bolschil).

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. De piramide T. ABCD is regelmatig; TA is AC.

Op AT ligt een punt E en CT een punt F, zodat AE : ET = CF : FT = 1 : 2. Het vlak door B, E en F snijdt DT in G.

a. Construeer in de stereometrische figuur de doorsnede van het vlak door B, E en F met de piramide.
b. Bewijs, dat G het midden is van DT.
c. Bewijs, dat DT loodrecht staat op het vlak van doorsnede.
d. Bepaal de ligging van het middelpunt van de bol, die aan de opstaande ribben en aan het grondvlak van de piramide raakt.

2. Van een rechte cirkelkegel is M het middelpunt van de grondcirkel en T de top; het apothema is 6 cm en de halve tophoek 30°. In het vlak van de grondcirkel ligt een punt P, zodat PM = 6 cm. De beide raakvlakken door P aan de kegel hebben de beschrijvenden TA en TB met de kegel gemeen.

a. Bereken de totale oppervlakte en de inhoud van het lichaam, dat binnen de drievlakshoek P.TAB en buiten de kegel ligt.
b. Construeer de ware grootte van de standhoek van de tweevlakshoek door de beide raakvlakken gevormd en bereken die hoek.

5. *Beschrijvende Meetkunde*: De doorsnijding van twee prisma's, prisma en piramide, twee piramides, twee cirkelcilinders, cirkelcilinder en cirkelkegel, twee cirkelkegels, waarvan de grondvlakken samenvallen met het horizontale projectievlak. Doorsnijding van deze lichamen met bollen en van twee bollen onderling.

Scheve parallelprojectie. Projectiedriehoek. Projectie van een punt. Projectie van een rechte lijn in het grondvlak, loodrecht op het grondvlak, loodrecht op het tafereel, in een willekeurige stand.

Projectie van enkele eenvoudige lichamen, begrensd door platte vlakken. Projectie van een cirkel evenwijdig met het tafereel, evenwijdig met het grondvlak en loodrecht op het grondvlak. Projectie van een omwentelingscilinder met de as loodrecht op het grondvlak, loodrecht op het tafereel.

De opgaven voor het examen 1957 waren:

1. *Rechthoekige projectie.*

Neem de X-as evenwijdig aan de korte zijden van het papier op 18 cm afstand van de onderzijde. De oorsprong 0 ligt 1 cm rechts van de linkerzijde van het papier.

Gegeven:
Een viervlak ABCD rust met het zijvlak ABC op het horizontale projectievlak. A(16, 1, 0); B(16, 15, 0); C($1\frac{1}{2}$, 1, 0); D(11, 1, 11).
Een bol met het middelpunt M rust op het horizontale projectievlak en raakt aan het zijvlak ABD van het viervlak. De eerste projectie van M is het punt (11, 4, 0).

Gevraagd:
a. Teken de eerste en de tweede projectie van het viervlak en van de bol.

b. Teken de eerste en de tweede projectie van de doorsnijding van de bol met het zijvlak ACD.
c. Construeer de assen van de ellipsen, die de eerste en tweede projecties zijn van de doorsnede van de bol met zijvlak BCD.
d. Construeer van bovengenoemde ellipsen de punten welke op de schijnbare omtrek van de bol liggen.
e. Schets de eerste en de tweede projectie van de doorsnijding van de bol met het zijvlak BCD.

2. *Scheve projectie.*

Neem de X-as evenwijdig aan de korte zijden van het papier op een afstand van 10 cm van de onderzijde. De oorsprong O ligt 2 cm rechts van de linkerzijde van het papier. De projectierichting is de rechte die bepaald is door de punten A(0, 5, 0) en B(2, 1, 2).

Gegeven:
Het punt M($7\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 0) is het snijpunt van de diagonalen van een vierkant, met zijden van 5 cm, dat in het horizontale projectievlak ligt. Twee zijden van het vierkant lopen evenwijdig aan de X-as. Dit vierkant is het grondvlak van een kubus, die op het horitontale projectievlak staat. Op deze kubus staat een rechte cirkelcilinder, waarvan de grondcirkel raakt aan de ribben van het bovenvlak van de kubus. De hoogte van de cilinder is 5 cm. Gevraagd:
a. Teken de scheve projectie van de kubus.
b. Construeer de assen van de scheve projectie van de grondcirkel van de cilinder.
c. Geef de punten aan waar de scheve projectie van deze grondcirkel raakt aan de scheve projectie van de ribben van het bovenvlak van de kubus.
d. Voltooi de scheve projectie van de cilinder.

De wiskunde, die nog gegeven wordt in de voortgezette opleiding voor de akten NIIa, NIV en NX is alleen de Beschrijvende Meetkunde. Het examen, dat hierin moet worden afgelegd aan het eind van het tweede jaar van de voortgezette opleiding is gelijk aan dat voor de Beschrijvende Meetkunde voor de akte NI aan het eind van de voortgezette cursus.

PLANIMETRIE EN STEREOMETRIE

door

H. C. VERNOUT
Haarlem

Inleiding

In Euclides 34, X van juli 1959 schrijft Prof. Dr. H. Freudenthal: „The problem of solid geometry should be seriously reconsidered by all those who are interested in teaching geometry. Some teachers hold that early acquaintance with solid geometry is the best preventive against the usual difficulties experienced by many children when deductive solid geometry starts. They are afraid of exclusive plane geometry killing spatial imagination.''

Hij zegt dit n.a.v. een vergelijking van de verschillende internationale rapporten over de methode, die gevolgd moet worden ter inleiding van de planimetrie.

Eerder al merkt Freudenthal op: „The question whether the pupil should be acquainted with threedimensional space as a substrate for solid geometry at a very early stage is crucial.'' De vraag is er dus. In dit artikel wil ik die vraag nu uitbreiden. Moeten stereometrie en planimetrie niet verweven worden tot één vak: meetkunde? We zullen deze vraag nader bezien.

Historie

Stereometrie direct in de eerste klas gelijk op behandelen met planimetrie zou in de vorige eeuw voor ieder en zal nu voor velen nog een ondoenlijke opgaaf zijn. [1]) Stelt men zich immers op het standpunt, dat men de meetkunde met axioma's moet beginnen, dan krijgt men voor de jeugdige leerlingen een veel te groot arsenaal om mee te beginnen. Men houdt zich dan dus bij de planimetrie en volgt het „leerboek'' van Euclides. De invloed hiervan is bijzonder groot geweest, vooral o.a. in Engeland. We lezen b.v. in „Teaching

[1]) De gedachte van een fusie der vakken planimetrie en stereometrie is verre van nieuw. Althans niet in het buitenland (Duitsland, Oostenrijk, Italië). Het oudste schoolboek dat de bedoelde fusie doorvoerde, is van de hand van R. de Paolis (Italië), en verscheen in 1884. (Redactie).

Mathematics in Secondary Schools", p. 7: „One result of an enormous amount of work was that by 1888 Oxford and Cambridge allowed proofs other than Euclid's, provided that Euclid's order was not violated, but there was no further relaxation for fifteen years." En in 1902 zijn de examencommissies bereid „to accept any proof of the proposition which appears to the Examiners to form part of a systematic treatment of the subject instead of the standard Euclidean proof."

En ook in ons land bleven we bij Euclides. Andere stelsels als van Hilbert waren immers veel te ingewikkeld om mee te beginnen. Men heeft daarbij over het hoofd gezien, dat Euclides helemaal niet de bedoeling had een leerboek voor twaalfjarigen te schrijven. Reeds de Franse wiskundige Clairaut schreef (zie eerder genoemd rapport „Teaching Mathematics, p. 67): „Euclid proved many propositions which seem obvious to the young, but he had to convince obstinate sophists who refused to admit even the most evident truths." En zelfs de alfa-gymnasiasten kunnen dit nu constateren in het leerboek van Bunt, p. 112. Waar te lezen staat: „De inhoud van het werk voldoet aan de door Plato gestelde eis, dat de wiskunde los gemaakt dient te worden van het gebied van het materiële."

Plato heeft echter nooit beweerd, dat dit reeds op zo jeugdige leeftijd moet gebeuren en hierin ligt dan meteen de veroordeling besloten van de Euclidische methodiek in de lagere klassen. Hierover zijn we het tegenwoordig wel eens en het nieuwe leerplan schrijft dan ook kortweg voor: inleiding in de meetkunde.

Zo'n inleiding kan echter op verschillende wijzen gegeven worden.

Van Hiele's standpunt

Hoe het dan wel zou kunnen zegt Dr. P. M. van Hiele in zijn dissertatie: „De problematiek van het inzicht." In hoofdstuk 15 meent hij, dat we ons moeten richten op ontwikkeling van het inzicht in het eerste jaar. Doen we dat, dan zal ons meetkundeonderwijs

a. moeten aanknopen bij bekende ruimtelijke ervaringen,

b. nieuwe ervaringen bij de leerling moeten opwekken,

c. de leerling moeten helpen bij het omzetten van deze ervaringen in de wiskundige taal.

In hoofdstuk 16 leidt het dan volgens Van Hiele geen twijfel meer, of men moet met driedimensionale figuren beginnen in de meetkunde. Maar, zo vraagt hij op p. 177: „Is het zinvol, dat in het v.h.m.o. de vakken planimetrie en stereometrie zo volledig van elkaar gescheiden zijn? Is deze onderscheiding er slechts op grond van de traditie of heeft die nog een diepere betekenis?"

Hij vindt het rationeler, als men „bij de ordening van de aanschouwelijke ruimte de planimetrie en de stereometrie niet scheidt en men de demonstratie van een logisch deductief systeem beperkt tot dat van de stereometrie."

Ik zou nu dit standpunt nog verder willen doorvoeren door te poneren: Planimetrie en stereometrie moeten als één vak meetkunde behandeld worden. De beste planimetrische toepassingen zijn in de stereometrie te vinden. Ik sluit mij aan bij wat in eerder genoemd rapport „Teaching Mathematics", p. 70 wordt opgemerkt. Ik citeer:

„Solid Geometry should of course form a large part of stage A, for it should not be separated from Plane Geometry; indeed the child's earliest geometrical perceptions are of solid figures, and plane figures are an abstraction. Probably the first geometrical notion unconsciously acquired is the space-filling property of rectangular bricks and beginners in Geometry will usually imagine plane rectilineal figures as thin tiles rather than as mere bounded surfaces. Every opportunity should be taken to work in three dimensions. Many elementary notions and facts in Plane Geometry have their counterparts in Solid Geometry and lead to profitable discussions. The neglect of Solid Geometry is largely due to the necessity to have the help of a model, at least in the early stages. But the construction of a model is a valuable exercise in itself, and with a few exercises on the drawing of plans and elevations the power of visualisation is so developed that a pupil soon learns to make drawings of solid figures that he can understand and use."

Streefkerk's standpunt

In Euclides 34, IX van juni 1959 trekt Dr. H. Streefkerk van leer tegen de stereometrie. (p. 275). Men geeft stereo, zegt hij, om de deductieve methode eens goed tot zijn recht te laten komen. Maar die komt evengoed tot zijn recht bij nieuwe onderwerpen als vectormeetkunde en lineaire algebra, die Streefkerk wil invoeren.

Akkoord, maar om deze reden geef ik geen stereo. Dat doe ik, om aan te sluiten bij de ruimtelijke ervaring van de leerling; om deze ervaring een zekere structurering te geven en om dan uit ruimtelijke figuren de vlakke figuren te kunnen abstraheren. Wanneer we dan in hogere klassen relatienetten tussen deze figuren tot stand brengen en deze relaties in hun onderlinge samenhang bezien, dan vinden we juist in de stereometrie weer de duidelijkste toepassingen hiervan. Om enkele voorbeelden te noemen: Zo is de opgave: „Als van een viervlak de vier zijvlakken evengroot oppervlak hebben, dan zijn ze congruent" misschien een zinvolle toepassing van de regel: „twee driehoeken zijn congruent, als hun hoogtelijnen twee aan twee congruent zijn." Het vinden van de snijpunten van een bol met de ribben van een lichaam doet de machtstelling functioneren. Het berekenen van de straal van een ombol laat de noodzaak van het gebruik van Pythagoras zien.

In de tweede plaats, zegt Streefkerk, kan de bevordering van de kennis van het ruimte-inzicht evengoed bij de vectormeetkunde tot zijn recht komen. Ook akkoord, maar wij willen juist bij de ruimtelijke ervaring aansluiten en daarvoor is in de eerste klas de vectormeetkunde niet geschikt.

Ten derde, zegt Streefkerk, willen we feitenkennis bijbrengen aangaande vaste lichamen. Deze feitenkennis bestaat hoofdzakelijk uit inhouds- en oppervlakteformules en die kan men evengoed bij de integraalrekening behandelen. Ook hiermee ga ik akkoord, wat betreft de meeste lichamen. Ik zou echter enkele eenvoudige inhouden, als die van kubus, blok en prisma bij de oppervlakken willen laten aansluiten. De inhoud van een piramide zou men dan misschien „voorlopig" kunnen invoeren. Alders doet dat in zijn Stereometrie al heel eenvoudig. Hij begint zijn hoofdstuk: De inhoud van een veelvlak met de bepaling: De inhoud van een viervlak is het derde deel van de oppervlakte van het grondvlak, vermenigvuldigd met de lengte van de hoogte. Dat komt wel wat erg uit de lucht vallen. Dan voel ik meer voor het aardige sommetje van Van Hiele: Een kubus is op te vullen met 8 prisma's of met 24 piramides, dus de inhoud van zo'n piramide is $\frac{1}{3}Gh$; we zullen later aantonen, dat dit voor elke piramide geldt.

„Verder bevat de stereometrie zeer veel dood hout" zegt Streefkerk kort, maar duidelijk. Inderdaad, maar een gedeelte ervan zouden wij weer tot leven kunnen brengen, wanneer we steeds de analogie met de vlakke meetkunde in het oog houden. Resumerend ben ik het dus eens met Streefkerk, behalve dan, dat ik de stereometrie niet wil uitbannen, maar met de vlakke meetkunde wil verweven om de didactische voordelen te kunnen gebruiken.

Eindexamenvak?

Moet stereometrie een eindexamenvak blijven? Ik geloof het niet. Wel kan men bij de integraalrekening op enkele toepassingen ingaan, zodat er toch een klein stokje achter de deur blijft. Evenzo leent de analytische meetkunde zich voor het toepassen van planimetrische relaties en de — misschien toekomstige — vectormeetkunde kan zeker op beide meetkunden teruggrijpen.

Door de invoeging van een deel van de stereometrie in de vlakke meetkunde zal men een uitgebreider programma krijgen. Het zal daarom wenselijk zijn, dat de nieuwe meetkunde tot en met de voorlaatste klas wordt voortgezet. Hierin ligt zeker tevens een tijdsbesparing. Niet door eerst de vlakke meetkunde te bekijken en daarna te bezien, welke uitbreiding in de ruimte mogelijk is, maar door juist vanuit het ruimtelijk begrip te werken en dan de eigenschappen in het platte vlak als bijzonder geval te zien. We passen dan dus een abstractie toe als het ware.

Het programma

Het is duidelijk, dat er bij ons geen sprake kan zijn van een intuïtieve inleiding, gevolgd door een systematische cursus. Wij onderkennen bij zo'n inleiding een duidelijk gevaar, n.l. het geschikt maken van een systematische inleiding door het wegstrepen van de bewijzen en/of de axioma's.

Om dit toe te lichten, sla ik een meetkundeboekje op, dat „aangepast is aan het nieuwe leerplan". Op de eerste bladzijden vinden we uitsluitend begrippen toegelicht als snijdende en evenwijdige lijnen, cirkel enz., hoeken, graden, loodlijn e.d. Dan komt eindelijk stelling 1: overstaande hoeken zijn gelijk. Het bewijs wordt geleverd, door een hoek op te meten en dan de overstaande hoek te berekenen. Tot slot dan „Blijkbaar geldt de belangrijke regel, dat twee overstaande hoeken altijd gelijk zijn". Dit is een gevaarlijke tendens: het algemeen geldig verklaren van concrete voorbeelden.

Even verder worden de grondconstructies middelloodlijn en bissectrice zonder enig commentaar aangeleerd, terwijl pas daarna de verplaatsingen genoemd worden.

We gaan dus liever uit van de ruimtelijke ervaring en brengen hierin een eerste ordening aan met behulp van de kubus. Dan kunnen we ons bijv. bezig houden met het achtvlak. Hieruit halen we symmetrie-eigenschappen. Het (natuurlijk regelmatig) achtvlak is veel symmetrischer, dan menige leerling denkt. Vraag een eerste klasser naar het aantal vierkanten in zo'n lichaam en hij zal er één zien. De beide andere (verticaal staande) ontdekt hij nauwelijks. Tevens zal dit lichaam kunnen dienen, om hieruit het vierkant te halen en dan de ruit te bespreken. Deze doet ons tevens de constructies van middelloodlijn en bissectrice aan de hand, welke constructies weer nodig zijn bij de symmetrie.

We kunnen nu overgaan tot een eerste behandeling van de axiale symmetrie. We sluiten hierbij aan bij de opmerkingen van Freudenthal betreffende de transformatietheorie in eerder genoemd artikel. Hij wijst op het gevaar, dat de leerlingen een transformatie gaan zien als de verplaatsing van een figuur, terwijl we toch eigenlijk het hele vlak verplaatsen. Begint men met translaties, dan wordt men zich dit gevaar niet bewust. Heel somber verklaart hij: „Niettemin is er nog enige hoop". Hij ziet dit sprankje hoop in 't beginnen met de axiale symmetrie en daarna de invoering van de rotaties en translaties als produkten van symmetrie. Natuurlijk zullen we het in de eerste klas niet zo deftig zeggen.

De axiale symmetrie nu zou in te voeren zijn aan de hand van de regelmatige *n*-zijdige piramide. Deze piramide kan tevens aanleiding geven tot invoering van de loodrechte stand in de ruimte en in het platte vlak. Daarna zou men kunnen overgaan tot het blok en de evenwijdigheid. Misschien kunnen hier translaties worden ingevoerd.

Officieel zou men met de congruentie moeten wachten, totdat rotaties en translaties afgehandeld zijn, maar dat is niet doenlijk. De congruentie zal dus eerder moeten komen. Wij kunnen dit doen, zoals het zo vaak gebeurt, n.a.v. de constructiemogelijkheden van een driehoek. Misschien hebben we hier een mogelijkheid er op te wijzen, dat wij hierbij niets bewijzen, maar dat wij aan de hand van een geval gaan generaliseren.

Ik zal nu niet verder de meetkunde op de voet volgen, maar wel wil ik nog enkele punten noemen, waar planimetrie en stereometrie gezamenlijk behandeld kunnen worden:

a. Meetkundige plaatsen.

We kunnen beginnen met punten, die gelijke afstand hebben tot twee punten. Dat levert het middelloodvlak en de middelloodlijn. Misschien is hier reeds een discussie mogelijk over de vraag, wat er bewezen moet worden. In de eerste plaats, dat punten in dat vlak gelijke afstand hebben; in de tweede plaats, dat punten met gelijke afstand in dat vlak liggen. Dat punten buiten het vlak ongelijke afstand hebben, komt niet ter sprake. Ik zou trouwens de relatie tussen de zijden van een driehoek: $a + b > c$ voorlopig niet onder de loep willen nemen. Het is voor iedere eerste klasser duidelijk, dat $a + b > c$ en dat tegenover de grootste zijde de grootste hoek ligt. Dan kunnen we nog enkele, eenduidig bepaalde verzamelingen bespreken, als bol, cirkel enz. De nieteenduidige verzamelingen, zoals lijnen, die gelijke hoeken maken met lijn of vlak, moeten tot een later tijdstip bewaard worden.

b. Oppervlakken en inhouden, voorzover die niet in de integraalrekening ter sprake komen, kunnen gecombineerd worden. Ik sprak reeds over de invoering van de inhoud van de piramide.

c. De machtstelling voor een cirkel kan onmiddellijk tot de bol worden uitgebreid. De onderlinge ligging van cirkels en bollen kan gelijktijdig worden behandeld.

d. Als nuttige toepassing van Pythagoras, kan men stralen van omcirkel en ombol en andere bollen laten berekenen. De formule $R = abc : 4O$ zou ik willen verbannen. Het lijkt me trouwens van veel belang, de leerlingen duidelijk te laten zien, dat Pythagoras een fundamentele betrekking is en dat men daarmee allerlei lijnen, als hoogtelijn, zwaartelijn, bissectrice enz. kan berekenen. Formules voor deze lijnen alsmede Stewart e.d. moeten niet meer behandeld worden. Zij hebben slechts nut bij het vak „invulkunde".

Misschien zouden we op deze wijze kunnen komen tot minder versnippering. Het lijkt mij, dat het voor de leerlingen in de hogere klassen ook veel beter is, dat de wiskunde niet tot vier of vijf vakken versnipperd wordt, zodat elk vak praktisch een één-uurs vak wordt. Om dit te vermijden, volg ik reeds jaren in de examenklassen het recept: veertien dagen alleen algebra, dan veertien dagen alleen stereo enz. en dat bevalt me uitstekend.

Dit artikel beoogt niet een sluitend betoog te zijn. Daartoe zou nog veel geëxperimenteerd moeten worden. Het zijn slechts enkele ideeën, die misschien om uitwerking vragen.

BOEKBESPREKING

Dr. A. J. E. M. Smeur, *De Zestiende-eeuwse Nederlandse Rekenboeken.* Martinus Nijhoff, 's-Gravenhage, 1960. 167 blz. f 20,00.

De inhoud van dit boek is die van het proefschrift, waarop de heer Smeur op 24 oktober 1960 aan de Rijksuniversiteit te Utrecht promoveerde. De promotor was Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis. Het bijvoeglijk naamwoord „Nederlands" in de titel betekent: in Nederland gedrukt en uitgegeven; de taal waarin de bedoelde reken boeken zijn gesteld is: Latijn, Nederlands, Frans, Duits of Spaans.

De zestiende eeuw is belangrijk voor de ontwikkeling van het rekenen. De boekdrukkunst en de invoering van de „arabische" cijfers geven nieuwe mogelijkheden, het belang, dat de handel bij het praktische rekenen heeft, stelt nieuwe eisen. In plaats van de getallenleer en getallenmystiek der middeleeuwen komt nu: „Die maniere om te leeren cyffren na die rechte conste Algorismi. Int gheheele ende int ghebroken", zoals het uit 1508 daterende oudste bekende rekenboek in de Nederlandse taal heet. Dikwijls wordt speciaal gewezen op het nut van de rekenkunde: „tot nut ende oorbaer van alle coopliedê." (Raets 1580).

Ook na de zestiende eeuw verschijnen er nog vele soortgelijke rekenboeken, maar het kenmerkende van dit genre is ook reeds in de zestiende eeuw aanwezig. Daarom heeft de schrijver zich terecht een wijze beperking opgelegd.

Het eerste deel van het boek bevat een bibliografie van alle 16-de eeuwse Nederlandse rekenboeken, die de schrijver bij zijn speurtocht door de bibliotheken in ons land en in naburige landen heeft kunnen achterhalen. Naast het beroemde rekenboek van Gemma Frisius met vele herdrukken en de boeken van Simon Stevin, vinden we tal van minder bekende titels vermeld. Het is een indrukwekkende rij geworden: tweemaal zoveel titels als er in de bestaande lijsten van Bierens de Haan en de Amerikaan D. E. Smith worden aangetroffen. Bovendien konden allerlei onjuistheden in vroegere vermeldingen nu worden gecorrigeerd.

In deel twee wordt de inhoud van de rekenboeken systematisch behandeld. Dit gedeelte is voor wiskundeleraren met historische belangstelling bijzonder belangwekkend. Misschien treft U wel eens een leerling aan, die tussen teller en noemer de breukstreep weglaat. Blijkbaar denkt zo'n leerling: „eñ men mach tusschē beyde een scrabbekē maken die wilt." Wat is het heerlijk om tegen een jongen te kunnen zeggen: „Wil jij 47 maal 123 met logaritmen gaan berekenen? Doe dat toch liever bericocoli." Want zo heet het thans nog gebruikelijke „onder elkaar" vermenigvuldigen. En hoe instructief is het om eens een galea-deling op het bord te zetten, inplaats van de thans gebruikelijke „italiaanse" staartdeling. Heel interessant is ook het hoofdstuk over de algebra, toen nog als „regel coss" een der regels van het praktisch rekenen. Dat op blz. 100 in het schema voor de derdemachtsworteltrekking de bijbehorende machten van 10 zijn weggelaten, vermeld ik slechts om aan te geven, dat het boek mij tot in zijn details heeft geboeid. Op blz. 101 is bij de berekening dit foutje trouwens al weer hersteld.

In dit tweede gedeelte komt steeds een boek naar voren, dat uitblinkt door helderheid en duidelijke algebraïsche notatie. Het is het boek van Gieles Vanden Hoecke uit 1537, met een zeer lange titel, die begint met: „Een sonderlinghe boek . . ." Jammer, dat het enige exemplaar van de eerste druk en de drie exemplaren van de tweede druk, die nog bekend zijn, zich alle in het buitenland bevinden. Het zou van belang zijn, dit boek wat meer toegankelijk te maken. De microkaarten, die het Math. Centrum in Amsterdam en de T.H. in Delft vervaardigen geven een praktische mogelijkheid, maar iemand moet natuurlijk het initiatief nemen.

Tot slot wil ik Dr. Smeur van harte gelukwensen met deze fraaie studie, waarvan de lezing aan iedere belangstellende kan worden aanbevolen.

R. Troelstra

Prof. dr. A. D. Fokker, *Tijd en ruimte, traagheid en zwaarte*; Academische Bibliotheek, W. de Haan N.V., Zeist, 1960; 162 blz., 43 figuren; ƒ 13,50.

Wie zou in Nederland beter een inleiding tot de theorie van Einstein (de schrijver wil het z.i. verouderde woord relativiteitstheorie vervangen door chronogeometrie) kunnen schrijven dan prof. Fokker, die jarenlang zijn colleges over dit onderwerp in Leiden heeft gegeven en die reeds in 1929 zijn grote boek over de relativiteitstheorie schreef? De schrijver toont zich in zijn nieuwe boek de theoretische fysicus in hart en nieren. Hij gebruikt de wiskunde op bewonderenswaardige wijze, leidt de lezer met vaste hand de vier-dimensionale, niet-euclidische meetkunde binnen, brengt hem een stuk vector- en tensor-analyse bij (noodzakelijk om de ontwikkeling van de theorie te kunnen volgen) en leert hem, op welke wijze de kromming in de voorvallen wiskundig tot uitdrukking kan worden gebracht. Toch blijft de wiskunde in het gehele boek de dienaresse van de fysica; de wiskundige beschouwingen zijn dan ook zo eenvoudig mogelijk gehouden. Voortdurend interpreteert de schrijver zijn langs wiskundige weg verkregen resultaten. Dit geeft aan het boek een grote levendigheid. De lezer wordt in vrijwel ieder hoofdstuk in aanraking gebracht met gebieden uit de fysica, waar de theorie kan worden toegepast. Fundamenteel zijn de beschouwingen over de dynamische betrekkingen, de dynamische tensor, de vergelijkingen van de elektronentheorie en de vergelijkingen van voorvallen in een algemeen zwaarteveld. De schrijver besluit het boek met enkele toepassingen van de theorie in een bolvormig zwaarteveld; hij leidt de precessiebeweging van het perihelium van een planetenbaan af, de afbuiging van lichtstralen in het zwaarteveld van de zon, de verroding der spectrale lijnen in spectra van massieve sterren en de geodetische precessie.

De schrijver is er in geslaagd een voortreffelijke inleiding te geven. Wie de moeite neemt om dit boek te bestuderen wordt beloond met nieuwe inzichten, zowel wat betreft de voortreffelijke hulp die de wiskunde biedt om de geheimen van de natuur te ontsluieren, als in het voor velen toch in wezen gesloten gebied van de relativiteitstheorie, waar men slechts op de hoogte is van de resultaten, maar waar men niet weet op welke wijze die resultaten konden worden afgeleid.

Prof. Fokker is niet alleen origineel in zijn behandelingswijze, hij propageert tevens het gebruik van een aantal nieuwe woorden: durende vlakken en rechten, tegelijktes, telehapses en telethignata worden door hem ingevoerd. Reeds bestaande woordcombinaties worden gewijzigd, bijv. tot krommende voorvallen, versnellende coördinaten en versnellende lift. Het is de vraag of het aanbeveling verdient ieder voorgesteld woordgebruik na te volgen. Speciaal over de voorgestelde vormen van een aantal adjectiva dient nader van gedachten te worden gewisseld. Hetzelfde geldt voor woorden als: „snelle parameter" en „snelle aanwezigheidsvector"; zouden hier „snelheidsparameter" en „snelheids-aanwezigheids-vector" niet beter op hun plaats zijn? Nu we het toch over het taalgebruik hebben: op bladz. 18 staat als opschrift van een paragraaf „meter en klok". Is het niet beter om van „meetlat en klok" te spreken, omdat in de fysica het woord meter als eenheidsbenaming en niet als instrument-aanduiding wordt gebruikt? Het woord geleidraad (blz. 102) voor geleidingsdraad is minder geslaagd.

Op blz. 89 en 90 komen verstoffelijking en ontstoffelijking van voorvallen ter sprake. Voor de schrijver is eindige massa „stof". Hij merkt op dat massa een simpele kwaliteit van een voorval is, die om zo te zeggen de inhoud daarvan als een hoeveelheid gebeuren weergeeft, en voegt hieraan toe: als een hoeveelheid stof. De moeilijkheid is, wat hier onder „stof" moet worden verstaan. Wordt „stof" alleen door de kwaliteit „massa" bepaald? Hoe staat het met de positonen en negatonen (elektronen); behoren zij tot het „stof"? Waarom komen juist deze deeltjes bij de op blz. 89 beschreven verstoffelijking van onstoffelijke stralende energie en hoeveelheid van beweging tevoorschijn? Is hier het ontstaan van twee deeltjes met elektrische ladingen essentiëel? Kunnen alleen een positon en een negaton zich samen „ontstoffelijken" tot twee fotonen? Kan een deeltje, gekarakteriseerd door de kwaliteiten „massa" en „lading", tot een derde categorie behoren, naast de „stof" en de onstoffelijke fotonen?

In de hoofdstukken X en XI, bij de opbouw van de theorie van de gekromd verlopende voorvallen, is op enkele plaatsen niet duidelijk vermeld dat bepaalde termen worden verwaarloosd. Het benaderingskarakter van de algemene theorie dient stellig naar voren te komen. De grondslag van hoofdstuk XII wordt gevormd door de identiteit van Bianchi; jammer genoeg is deze identiteit niet afgeleid. De lezer wordt hierover uitvoeriger geïnformeerd in het boek „Relativiteitstheorie" van de schrijver.

Het drukken van een tekst met een groot aantal formules, waarvan vele met covariante en contravariante indices, vereist niet alleen nauwgezetheid maar ook geoefendheid. Voor een drukker die zich in dit opzicht niet heeft gespecialiseerd is het gereedmaken van het boek van prof. Fokker geen eenvoudige opgave geweest. De lezer staat nu voor de taak om een vrij groot aantal drukfouten uit de formules te halen. Hopelijk wordt de tekst in dit opzicht bij de bewerking van een volgende druk gezuiverd.

Wij wensen het boek een uitgebreide lezerskring toe.

W. J. Claas

Dr. L. A. van Wijk, *Elementaire Statistiek*, J. B. Wolters, Groningen, 1960. IX + 142 blz., *f* 6,25.

Het boek bestaat uit twee delen: het eerste deel (55 blz.) is gewijd aan de beschrijvende statistiek, het tweede deel (46 blz.) aan de wiskundige statistiek. Daarna volgen de vraagstukken en de antwoorden. Het eerste deel heb ik met buitengewoon veel genoegen gelezen. Er worden tal van onderwerpen in behandeld: trend, Z-chart, frequentiepolygoon, ogive, histogram, bevolkingspiramide, modus, mediaan, gemiddelde, standaarddeviatie, kwartielen. Steeds zijn de onderwerpen toegelicht aan voortreffelijke aan de praktijk ontleende voorbeelden en is de beschrijving van deze voorbeelden levendig en boeiend geschreven.

Helaas verminderde mijn enthousiasme snel bij het lezen van het tweede deel. Het begint met een beschouwing over permutaties, combinaties, binomium en kansrekening. Deze is samengeperst in iets meer dan zes pagina's en is, voor zover het de kansrekening betreft, onverteerbaar moeilijk. De schrijver ziet dit blijkbaar zelf ook in, want dit gedeelte is in klein lettertype gedrukt en bij de verdere behandeling van de stof wordt er geen gebruik van gemaakt. Het gevolg daarvan is, dat de erop volgende behandeling van de normale verdeling geschiedt met behulp van enkele summiere opmerkingen over kansen, waardoor het een moeilijk te begrijpen geheel vormt. Een beter toegankelijke (en niet axiomatische!) invoering van het kansbegrip had hier veel kunnen redden. Het volgende hoofdstuk over steekproeven, dat gebaseerd is op de normale verdeling, voldoet beter, al mis ik hier de levendigheid van het betoog in het eerste deel. Meer toelichting aan de hand van de praktijk was in deze beide hoofdstukken op zijn plaats geweest. Ten slotte wordt nog in een kort hoofdstuk de correlatierekening behandeld, maar op zo summiere wijze, dat dit onderwerp niet tot zijn recht komt.

Bij de vraagstukken heb ik tevergeefs gezocht naar vraagstukken over kansrekening. Blijkbaar is dit, toch stellig niet te moeilijke onderwerp bewust geheel verwaarloosd. Hoe men echter enig inzicht in statistisch denken kan verkrijgen zonder iets van de elementaire beginselen van de kansrekening te begrijpen, is mij een raadsel. Maar mogelijk zou de auteur me, als hij de gelegenheid had zich te verdedigen, van mijn ongelijk kunnen overtuigen.

P. G. J. Vredenduin

J. Hoepman en drs. A. Yntema, *Planimetrie deel III*. J. B. Wolters, Groningen 1960. Ing. *f* 3,50; geb. *f* 4,25.

Na de bespreking van deel I en II in „Euclides" 36, I, kan die van deel III nu kort zijn. Dit deel bevat de leerstof vanaf de cirkel. De behandeling is duidelijk en het boek ziet er keurig verzorgd uit.

In een „aanvulling" wordt iets behandeld van de axiomatische opbouw der planimetrie en wordt het begrip „onmeetbaar" nader behandeld. M.i. te beknopt. Verder voel ik niet veel voor de wijze waarop in § 54 een voorbeeld van het rekenen met logaritmen gegeven wordt. Ik vind dit geen verbetering t.o.v. de gebruikelijke manier.

J. F. Hufferman

Dr. G. K. Braun. *Het belang van metatheoretisch onderzoek voor de toegepaste wiskunde.* Rede gehouden bij de officiële aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de toegepaste wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Groningen Wolters, 1960. Prijs *f* 1,50.

Deze rede verschilt wel zeer van die door andere hoogleraren in de toegepaste wiskunde gehouden. Houden deze zich bezig met de toegepaste wiskunde van de werkdag, de boven aangekondigde rede houdt zich bezig met de toegepaste wiskunde van de zondag.

Volgens spr. omvat de toegepaste wiskunde drie activiteiten: a) de problem-shooting, het oplossen van wiskundige detailproblemen; b) de wiskundige ontwikkeling van gemathematiseerde theorieën; c) de axiomatisering en het structureel onderzoek van bestaande theorieën, hulp en medewerking bij het opbouwen van nieuwe theorieën en bezinning op de principes van theory-building.

De activiteiten onder a) en b) noemt spr. nu toegepaste wiskunde van de werkdag; die onder c) toegepaste wiskunde van de zondag.

In deze lange rede worden besproken: de begrippen axiomatisering en formalisering van een theorie; de overgang van de experimentele feiten naar een formeel systeem; het beschrijven van de realiteit met wetenschappelijke en benaderingsmodellen. Bij de behandeling van het begrip „wetenschappelijke modellen" stelt spr. de vraag of volledige constitutie van een gehele theorie mogelijk is, d.w.z. dat theoretische grootheden daaruit verdwenen zijn. Spr. beantwoordt deze vraag ontkennend.

Dan wordt nog gesproken over enkele metamathematische begrippen als consistentie en volledigheid, en wordt nog gewezen op de betekenis van filosofisch-epistemologische eisen van verschillende aard; hierbij wordt geponeerd: „Gebrek aan overeenstemming in theoretische vragen van de kennisleer kan leiden tot verschil van mening in de toegepaste wiskunde. Een geestige inleiding gaat aan de rede vooraf. De rede is niet eenvoudig: de lezing ervan vergt enige belangstelling voor filosofische vragen; zij is echter rijk aan inhoud.

J. F. Hufferman

WIMECOS

Door het bestuur van Wimecos werden enige brieven verzonden welke we hier afdrukken, zodat de leden er kennis van kunnen nemen.

Zeist, 7 februari 1961.

Aan Zijne Excellentie
de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten
en Wetenschappen,
's-Gravenhage.

Excellentie,

Aanvaarding door de Staten-Generaal van wetsontwerp 6155 zal het leervak mechanica als zelfstandig leervak van het programma van de hogereburgerschool-B doen verdwijnen, waardoor dit vak tevens zal ophouden eindexamenvak te zijn.

Deze feiten geven het Bestuur van Wimecos, vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie, aanleiding, Uwe Excellentie te wijzen op problemen, die door deze wetswijziging rijzen en U ten aanzien van de oplossing van deze problemen voorstellen te doen die naar onze mening door het belang van het natuurwetenschappelijk onderwijs op de hogereburgerschool worden vereist.

We hebben ons standpunt ten aanzien van de afschaffing van de mechanica en de daardoor nodig wordende integratie van dit vak in de natuurkunde in onze brief aan U van 15 november 1960 naar aanleiding van het Koninklijk besluit 390 uitvoerig uiteengezet. Het zij ons vergund er de aandacht op te vestigen, dat de vier bezwaren, die destijds door ons werden aangevoerd tegen een premature samenvoeging van de vakken natuurkunde en mechanica hun betekenis blijven behouden bij het vaststellen van de maatregelen, die thans nodig worden bij het totstandkomen van de wetswijziging 6155.

We dringen er bij Uwe Excellentie op aan:

a. de integratie van de mechanica in de natuurkunde van het eindexamen niet voor 1963 te doen ingaan;
b. de door de afschaffing van de mechanica vrijkomende vier roosteruren een zodanige bestemming te geven, dat deze uren voor de wiskundige en natuurwetenschappelijke vorming behouden blijven.

Wij stellen er prijs op dit dubbele verzoek kort toe te lichten.

Wij hebben met voldoening kennis genomen van Uw nota van wetswijziging op wetsontwerp 6155 (nr. 4 van 2 december 1960), waarbij de inwerkingtreding van de wetswijzigingen, voorzoverre deze de mechanica betroffen, werd opgeschort tot een nader door de Kroon vast te stellen datum.

Wanneer de maatregelen ter integratie van de mechanica in de natuurkunde alle vóór 1 september 1961 worden genomen en aan de scholen zullen zijn bekendgemaakt, zal het mogelijk zijn vanaf 1 september 1961 de mechanica als onderdeel van de natuurkunde door de natuurkundeleraren vanaf de vierde klassen van de hogereburgerschool te laten doceren en dus voor het eerst niet vóór 1963 door die natuurkundeleraren te doen examineren. Zou dit laatste reeds een jaar eerder gebeuren, dan zou in tal van gevallen de controle van het thans in de vierde klassen geleerde moeten worden opgedragen aan de natuurkundedocent, terwijl het onderwijs gegeven werd door de voor mechanica bevoegde wiskundeleraar. Dit lijkt ons met het oog op de structuur en de geest van een schoolexamen niet gewenst.

Bij het opnemen van de mechanica in de natuurkunde zal de leerstof voor de natuurkunde zodanig moeten worden herzien en uitgebreid, dat de mechanica-onderwerpen die voor het natuurkunde-onderwijs van wezenlijk belang zijn, voldoende tot hun recht kunnen komen. Een vermeerdering van het aantal roosteruren wordt daardoor een onafwendbare eis.

Mochten bij de wijziging van de urentabel niet alle vier vrijkomende uren aan de natuurkunde worden toegewezen, dan dringen we er bij Uwe Excellentie op aan het daarheen te leiden, dat deze uren toch aan de groep der wis- en natuurkundige vakken blijven toebedeeld. In deze periode van toenemende betekenis van de natuurwetenschappen voor de maatschappij en van de toegepaste wiskunde voor de maatschappij lijkt het ons niet toelaatbaar in een nabije toekomst aan de exacte vakken gezamenlijk op de hogereburgerschool B een geringer gewicht toe te kennen dan op dit ogenblik het geval is.

Mocht het aantal uren voor natuurkunde niet met twee in de vierde klasse en met twee in de vijfde klasse worden uitgebreid, dan lijkt het ons van belang te letten op de wenselijkheid en mogelijkheid aan het uit een oogpunt van algemene vorming zo belangrijke en in het onderwijs zo dikwijls in verdrukking komende vak cosmografie één uur meer toe te kennen. En voorts op de mogelijkheid één uur meer voor de wiskunde uit te trekken. De programmawijziging van 1958 waarbij aan de wiskundeleraar werd opgedragen begrippen uit de mechanica als snelheid, versnelling, arbeid, energie en potentiaal te onderwijzen, geeft voor de toewijzing van dit extra uur een gerede aanleiding.

Van de mogelijkheden die voor overweging in aanmerking komen, bevelen we in het bijzonder de volgende in de welwillende aandacht van Uwe Excellentie aan:
in de vierde klasse: 1 uur natuurkunde en 1 uur cosmografie extra;
in de vijfde klasse: 1 uur natuurkunde en 1 uur wiskunde extra.

Maar primair blijft voor ons van betekenis dat de vier uren die thans in de urentabel voor het onderwijs in de mechanica zijn uitgetrokken ook in de toekomst dienstbaar gemaakt zullen worden aan het onderwijs in de exacte vakken op de natuurwetenschappelijk georiënteerde hogereburgerschool-B.

Namens het Bestuur van Wimecos:
(Dr. Joh. H. Wansink), voorzitter,
(J. F. Hufferman), secretaris.

Arnhem,
15 mei 1961.
Zeist,

Aan Zijne Excellentie
de Minister van Onderwijs,
Kunsten en Wetenschappen,
's-Gravenhage.

Excellentie,

Met voldoening heeft het Bestuur van Wimecos, vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie kennis genomen van de Memorie van Antwoord op wetsontwerp 5350, waaruit is gebleken, dat het overwegend filologisch gericht onderwijs aan de B-leerlingen in de bovenbouw van het Gymnasium door een meer cultuurgericht onderwijs zal kunnen worden vervangen.

Deze voldoening hangt samen met onze overtuiging, dat in de huidige maatschappij het onderwijs in de wis- en natuurkundige vakken tot een hoger niveau moet kunnen worden opgevoerd dan thans in het v.h.m.o. mogelijk is. En dit niveau zal beter te bereiken zijn bij het toekomstige Atheneum dan bij het Gymnasium, doordat deze laatste school aan het talenonderwijs uiteraard een ruimere plaats zal moeten blijven inruimen dan voor het Atheneum noodzakelijk is te achten.

Er zal echter voor moeten worden gewaakt, dat niet de maximale tijd die op het Gymnasium voor de wis- en natuurkundige vakken zal kunnen worden vrijgemaakt tevens de bovenste grens betekent voor de mogelijkheden, die er ten aanzien van de exacte vakken op het Atheneum zullen blijken te bestaan.

Tot onze voldoening is in artikel 27(5) de mogelijkheid geopend het onderwijs in de bovenbouw van de scholen te differentiëren in verband met de persoonlijke belangen van de leerlingen.

Indien de Wetgever erin slaagt door voldoende differentiatie-mogelijkheden in de bovenbouw van de scholen de gelegenheid te geven tot een grondiger voorbereiding voor de studie der wis- en natuurkundige vakken op hogeschool en universiteit dan thans bij ons v.h.m.o. mogelijk is, zal hierin enige compensatie worden geboden voor het jaar tijdverlies, dat ontstaat door het zesjarig maken van het Atheneum.

Wat de leerprogramma's en de urentabellen betreft die voor de diverse schooltypen gegeven zullen moeten worden, merken we op, dat er tal van onderwerpen uit het gebied van wis- en natuurkunde zijn die voor alle aanstaande studenten in deze vakken van belang zijn te achten, onderwerpen uit de moderne wiskunde bijvoorbeeld, die zich lenen voor een behandeling aan leerlingen van het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs, maar die door gebrek aan tijd op de tegenwoordige schooltypen voor v.h.m.o. niet aan de orde kunnen komen. Om misverstand te weren wijzen we er echter op, dat de in het wetsontwerp voorziene keuzemogelijkheden ook mede moeten brengen, dat b.v. aanstaande medici die de B-richting kiezen de speciale wiskunde door biologie vervangen.

Naar onze mening zal op het Gymnasium voor de B-leerlingen hoogstens een toestand geschapen kunnen worden, waarin het gewicht der exacte vakken dat der talen in evenwicht houdt.

De betekenis van de wis- en natuurkunde voor de tegenwoordige maatschappij brengt echter mede, dat op een schooltype van uitgesproken exacte signatuur het aantal uren voor wis- en natuurkunde dat voor de talen dient te overtreffen.

Zodra er voor het Atheneum-B een volwaardig programma voor wis- en natuurkunde tot stand is gekomen, verdient het aanbeveling om een zo groot mogelijk gedeelte van dit programma ook voor een deel van de B-leerlingen van het Gymnasium bereikbaar te maken. Dit is o.i. mogelijk geworden door het in de Memorie van Antwoord geopperde laten vervallen van het Grieks.

We dringen er bij Uwe Excellentie op aan bij de voortgezette behandeling van het Wetsontwerp 5350 en bij de te treffen uitvoeringsbepalingen de belangen van het onderwijs in de wis- en natuurkunde door het scheppen van voldoende differentiatiemogelijkheden in de hoogste klassen van de scholen voor voorbereidend wetenschappelijk onderwijs veilig te stellen.

Met verschuldigde eerbied,
namens het Bestuur van Wimecos,
dr. Joh. H. Wansink, voorzitter,
drs. J. F. Hufferman, secretaris,
Charlotte de Bourbonlaan 64,
Zeist.

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op vrijdag 1 september 1961 om 14.30 uur in het Eykmanhuis te Driebergen.

Agenda.

1. Opening.
2. Notulen. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 31 van 14 april 1961.)
3. Bespreking van de wiskundeopgaven van het schriftelijk eindexamen gymnasium-B in 1961 door de heer C. J. Alders, Haarlem.
4. Pauze.
5. Voordracht door de heer Dr. C. P. Koene, Heemstede, over: Natuurwetenschappen op de gymnasiale A-afdelingen.
6. Rondvraag.
7. Sluiting.

De secretaris,
D. Leujes

HET SCHRIFTELIJK EINDEXAMEN-1961

De collega's, die op- of aanmerkingen hebben op de eindexamenvraagstukken wiskunde of mechanica, wordt verzocht deze in te zenden aan de secretaris van Wimecos, de heer J. F. Hufferman, Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

49. Een kop koffie koelt af in een mate, die evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Aan de koffie moet nog een kannetje koude room toegevoegd worden. Men wil de koffie zo lang mogelijk warm houden. Wanneer moet men dan de room toevoegen?

50. Men heeft een glas rode wijn en een glas witte wijn; in beide zit even veel. Men schept een lepeltje van de rode wijn in de witte en roert goed om. Daarna schept men een lepeltje uit de (dus iets met rood verontreinigde) witte wijn en doet dit bij de rode en roert weer. Dit doet men drie keer (er wordt dus zes keer een lepeltje overgeschept). Welke wijn is nu het meest met de andere verontreinigd?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

48. Noem de aantallen stemmen resp. $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Dan moet

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 &> a_2 + a_4 + a_6 \\ a_1 + a_2 + a_6 &> a_3 + a_4 + a_5 \\ a_2 + a_3 + a_4 &> a_1 + a_5 + a_6. \end{aligned}$$

Of, anders gerangschikt:

$$\begin{aligned} (a_1 - a_4) + (a_3 - a_6) &> a_2 - a_5 \\ (a_1 - a_4) + (a_2 - a_5) &> a_3 - a_6 \\ (a_2 - a_5) + (a_3 - a_6) &> a_1 - a_4. \end{aligned}$$

Stel nu

$$a_1 = a_4 + k_1, \quad a_2 = a_5 + k_2, \quad a_3 = a_6 + k_3.$$

Dan moet

$$k_1 + k_2 > k_3, \quad k_2 + k_3 > k_1, \quad k_3 + k_1 > k_2.$$

Hieruit volgt (door optelling van twee ongelijkheden), dat k_1, k_2 en k_3 positief zijn. Het gaat dus om het zoeken van drie positieve getallen, waarvan elk kleiner is dan de som van de andere twee. Deze zijn gemakkelijk te vinden. Daarna zijn de getallen $a_1, \ldots, a_6$ zonder moeite te vinden. In ons voorbeeld was $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ en $k_3 = 2$. (Als het totaal aantal stemmen oneven resp. even is, moet $k_1 + k_2 + k_3$ uiteraard ook oneven resp. even zijn.)

De oorzaak van de paradox is daarin gelegen, dat men geen rekening gehouden heeft met de mate van voorkeur.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand.

VAKANTIECURSUS MATHEMATISCH CENTRUM

De vakantiecurses voor leraren in de wiskunde en andere belangstellenden zal worden gehouden op maandag 28 en dinsdag 29 augustus 1961 te Amsterdam in het Geologisch Instituut, Nieuwe Prinsengracht 130. Centraal onderwerp is *„De moderne Algebra"*.

Programma

maandag 28 augustus:

10.30 uur	Opening Prof. Dr. F. Loonstra (TH-Delft): „Zin en Methode van de Moderne Algebra"
14.00—16.00 uur	Dr. J. P. Murre (R.U.-Leiden): „Toepassingen van de Algebra in de Meetkunde"

dinsdag 29 augustus:

10.00—12.00 uur	Prof. Dr. Ph. Dwinger (Purdue Univ., Lafayette, U.S.A.): „Boole'se Algebra's"
14.00—16.00 uur	Drs. P. C. Baayen (M.C.-Amsterdam): „Het Tensorproduct" Sluiting.

De deelnemerskosten bedragen *f* 2,50, waarin begrepen de kosten van de syllabus, die van de lezingen vervaardigd wordt en welke op de cursus aan de deelnemers zal worden uitgereikt.

Zij die wensen deel te nemen aan deze vakantiecursus, gelieven zich zo spoedig mogelijk en wel liefst *vóór 1 augustus a.s.* op te geven bij de administratie van het Mathematisch Centrum, door middel van overschrijving van *f* 2,50 op postgirorekening nr. 462890, dan wel Gemeente-Girorekening nr. M2138 t.n.v. het Mathematisch Centrum, onder vermelding van „Vakantie-cursus 1961", of door middel van schriftelijke aanmelding.

Wederom worden voorbereidingen getroffen voor een gezamenlijke lunch tegen een matige prijs. Met het oog op de voorbereiding hiervan, worden de deelnemers verzocht bij hun aanmelding (bij giro-overschrijving op het girostrookje) tevens op te geven of zij wel of niet geïnteresseerd zijn in deze lunch.