

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/1961

VII - 1 APRIL 1961

INHOUD

Dr. P. G. J. Vredenduin: De toekomst van het algebra-onderwijs in de onderbouw	209
C. J. Alders: Functies en grafieken	215
Dr. W. J. Bos: De ontwikkeling van het algebra-onderwijs	221
Dr. P. M. van Hiele: De gewenste ontwikkeling van het algebra-onderwijs in de eerste vier klassen van het V.H.M.O.	228
Prof. Dr. M. Minnaert: Het onderwijs in de algebra in de vier lagere klassen	232
Dr. J. H. Wansink: Bij het zilveren feest van de „Wiskunde werkgroep”	239
D. Leujes: Wiskunde in de leerlingenbibliotheek II	241
Programma van het examen voor de akte wiskunde M.O. B	245
Uit de openingstoespraak van de voorzitter van Wimecos tot de algemene vergadering van 28 december 1960	247
Boekbespreking	251
Ontvangen boeken	254
Recreatie	255

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE TOEKOMST VAN HET ALGEBRA-ONDERWIJS IN DE ONDERBOUW ¹⁾

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Arnhem

Dit onderwerp is vanuit vele standpunten te belichten. Ik wil me tot een enkel standpunt beperken en me afvragen: welke wijzigingen zal het algebra-onderwijs in de onderbouw ondergaan ten gevolge van veranderingen in de structuur van het onderwijs in de bovenbouw? Hoe het onderwijs in de bovenbouw zal worden, is nog moeilijk te zeggen. Wel kunnen we constateren, dat allerwegen de eis naar voren komt meer de nadruk te leggen op algebraïsche structuren en op de logische structuur van het wiskundig denken. Het ligt voor de hand, dat men in de onderbouw ter voorbereiding reeds zoveel mogelijk aandacht aan deze denkwijzen zal schenken.

Een eenvoudig voorbeeld ter toelichting. Zullen we bij het aanvangsonderwijs in de algebra aandacht schenken aan de hoofdeigenschappen van de optelling en de vermenigvuldiging of deze bekend onderstellen? Het ligt voor de hand wel bij deze eigenschappen stil te staan en zelfs er een intuïtief bewijs voor te geven. Zullen we $a + b = b + a$ door middel van verzamelingen (cardinaalgetallen) bewijzen of door middel van de getallenrechte? Het eerste is het eenvoudigst, omdat we dan de stelling eigenlijk cadeau krijgen. Toch verdient de tweede methode de voorkeur, omdat hij ook voor gehele, voor rationale en voor reële getallen van toepassing is. We geven dus b.v. een „bewijs”, dat het gemakkelijkst door de volgende figuur te illustreren is.

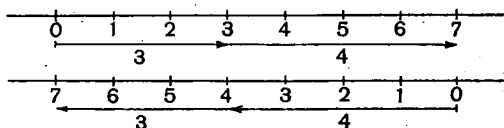


Fig. 1

¹⁾ Voordracht op de W.V.O. conferentie van 12 november 1960 te Amersfoort.

Doordat in deze figuur de pijlen recht onder elkaar komen, zien we in, dat $3 + 4 = 4 + 3$ en ook, dat deze geldigheid onafhankelijk is van de keuze van de beide termen. We noemen al direct deze eigenschap de commutatieve eigenschap, omdat we van meet af aan op het belang ervan de nadruk willen leggen. Analooq behandelen we de overige fundamentele eigenschappen van de hoofdbewerkingen.

Bij de uitbreiding van het getalsysteem gaan we ervan uit, dat de structuur van de hoofdbewerkingen ongewijzigd blijft. We komen dan vanzelf tot de regels voor optellen en vermenigvuldigen b.v. bij invoering van de negatieve getallen. Deze methode is uiteraard semi-wetenschappelijk, maar voldoet wel.

Van veel belang is om een juist inzicht te krijgen in het belang van commutatieve, associatieve en distributieve eigenschap, dat men ook eens in contact komt met bewerkingen, waarvoor deze eigenschappen niet gelden.

We kunnen er al direct de nadruk op leggen, dat de machtsverheffing en de aftrekking niet commutatief en niet associatief zijn. Zo geldt niet $(a^b)^c = a^{(b^c)}$ en evenmin $a - (b - c) = (a - b) - c$.

Een voorbeeld van het niet gelden van de commutatieve eigenschap wordt verder geleverd door de meetkundige transformaties. De rotaties om een vast punt bezitten de commutatieve eigenschap. Twee rotaties om twee verschillende punten A en B zijn echter niet commutatief.

Een bewerking, die wel commutatief, maar niet associatief is, is de vorming van het gemiddelde, immers $\frac{1}{2}\{a + \frac{1}{2}(b + c)\} = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(a + b) + c\}$ geldt niet.

De vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling, maar de optelling is niet distributief t.o.v. de vermenigvuldiging, omdat in het algemeen $a + bc \neq (a + b)(a + c)$. Toch zijn er wel paren bewerkingen te vinden, waarvoor beide distributieve eigenschappen juist zijn. Stel de bewerkingen voor door $\circ$ en $\square$, dan moet dus

$$\begin{aligned} a \circ (b \square c) &= (a \circ b) \square (a \circ c), \\ a \square (b \circ c) &= (a \square b) \circ (a \square c). \end{aligned}$$

Nemen we voor $\circ$ de logische verbinding „of” en voor $\square$ de verbinding „en”, dan blijken beide uitspraken juist te zijn (formules van De Morgan). Ook binnen het terrein van de elementaire algebra zijn dergelijke bewerkingen te vinden, b.v. $a \circ b$ stelt het maximum van a en b voor en $a \square b$ het minimum. Of $a \circ b$ stelt de g.g.d. van a en b voor en $a \square b$ het k.g.v.

Ook is het instructief erop te wijzen, dat een normale optelling en

vermenigvuldiging, waarvoor dus alle hoofdeigenschappen geldig zijn, geen inverse bewerking behoeft toe te laten. Zo is bij het rekenen met restklassen modulo n de vermenigvuldiging niet altijd omkeerbaar, nl. niet indien n geen priemgetal is. Vatten we de natuurlijke getallen op als cardinaalgetallen en vullen we ze aan met het cardinaalgetal a (aftelbaar), dan blijkt de aftrekking niet ondubbelzinnig te zijn. We zien dit, als we proberen $a - a$ uit te rekenen.

Ook kunnen we gemakkelijk onderzoeken, waarom een poging het getalsysteem zo uit te breiden, dat de deling altijd mogelijk wordt, dus ook de deling door 0, moet stranden. Het meest voor de hand ligt dan, twee nieuwe getallen toe te voegen, ∞ en $-\infty$. De rekenregels gaan nu niet meer door. Zo heeft de vergelijking $3x + 7 = x + 9$ drie wortels, namelijk 1, ∞ en $-\infty$. Trekken we van beide leden x af, dan ontstaat de vergelijking $2x + 7 = 9$. Nu zijn echter twee wortels verduisterd, nl. ∞ en $-\infty$.

Dat de moeilijkheid essentieel is en niet slechts onhandig aangepakt, ziet men als volgt:

$$a + 0 = a \rightarrow (a + 0)b = ab \rightarrow ab + 0b = ab \rightarrow 0b = 0.$$

Uitgaande van de geldigheid van de eigenschap, dat 0 het neutrale element is van de optelling, van de distributieve eigenschap en van de ondubbelzinnigheid van de aftrekking hebben we bewezen, dat $0b = 0$, d.w.z. dat delen door 0 onmogelijk is. Wil men het getalsysteem zo uitbreiden, dat delen door 0 wel mogelijk wordt, dan is dat niet mogelijk, als men tevens de andere drie genoemde eigenschappen wil laten gelden.

Het meer aandacht schenken aan logische structuren zal zich o.m. daarin uiten, dat het begrip verzameling in het brandpunt van de belangstelling komt te staan. Verzameling is geen typisch mathematisch, maar een logisch begrip. Als we opschrijven „ x is een man en x heeft bruin haar”, dan staat er nog geen oordeel; er ontstaat echter een oordeel, zodra we voor x een persoon substitueren. We spreken daarom van een propositionele functie. Een dergelijke propositionele functie bepaalt een verzameling, nl. de totaliteit van alle objecten, die voor x gesubstitueerd een waar oordeel doen ontstaan.

Bevat een propositionele functie twee variabelen, zoals „ x is deelbaar door y ”, dan noemen we haar een relatie. Aan een relatie voldoen geordende paren. Met de relatie correspondeert dus een verzameling van geordende paren. Een voorbeeld van een relatie, die buiten de huidige schoolstof valt, maar er zeer goed in kan wor-

den opgenomen, is $(\exists z) z^2 + x + y < x^2 + 2y$ ($(\exists z)$ moet gelezen worden: er is een z zo, dat). De variabele z telt hier niet mee als echte, zg. vrije variabele, omdat voor z geen getallen kunnen worden gesubsitueerd. Het maken van een grafiek van deze relatie zou zeer instructief zijn.

Een bijzonder geval van de relaties vormen die relaties, waarbij aan een waarde van x slechts één waarde van y is toegevoegd. In de corresponderende verzameling van paren komt elk eerste element dus in slechts één paar voor. Een dergelijke relatie is een functie. (Het is een „functie met y ”; de „functies zonder y ” laten we hier buiten beschouwing.)

Verzamelingen komen we tegen bij het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en bij het zoeken van meetkundige plaatsen. Bij het oplossen van een vergelijking vragen we b.v. naar de verzameling van getallen x , waarvoor geldt $x^3 = x$, bij het oplossen van een ongelijkheid naar de verzameling getallen x , waarvoor $x^3 > x$, en bij het zoeken van een meetkundige plaats naar de verzameling punten x , waarvoor geldt, dat de afstand van X tot l en tot m gelijk zijn. We kunnen verder gaan en vragen naar de verzameling van de punten, die gelijke afstand hebben tot drie rechten. Volgens het spraakgebruik is hier sprake van een constructie. In wezen is de opgaaf gelijksoortig met de voorgaande.

Nu gaat het er steeds om verzamelingen tot een eenvoudige gedaante te herleiden. De verzameling getallen, waarvoor geldt $x^3 = x$, is de verzameling, die uit de drie elementen $-1, 0$ en 1 bestaat. De verzameling getallen, waarvoor $x^3 > x$, is de vereniging van de twee intervallen $-1 < x < 0$ en $x > 1$. De beide meetkundige voorbeelden leveren een tweetal rechten resp. een viertal punten op in het algemeen. Wat hier onder „een eenvoudige gedaante” moet worden verstaan, is moeilijk te definiëren, maar dit levert in de praktijk van het onderwijs geen moeilijkheden op, evenmin als men bij het gebruik van de term „herleid” op moeilijkheden stuit.

Bij het oplossen van het vraagstuk gaat men dus steeds van een verzameling op een daaraan gelijke verzameling over, totdat de eindvorm bereikt is. Zo is de verzameling getallen, waarvoor $x^3 = x$, gelijk aan de verzameling, waarvoor $x = 0$ of $x^2 = 1$, en is deze op haar beurt gelijk aan de verzameling, waarvoor $x = 0$ of $x = -1$ of $x = 1$. Hiermee loopt parallel, dat voor elke x

$$x^3 = x \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 = 1, \\ x = 0 \quad \text{of} \quad x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{of} \quad x = -1 \quad \text{of} \quad x = 1.$$

Het overgaan van een verzameling op een daaraan gelijke wordt

gefundeerd in een oordeel, waarin een gelijkwaardigheid wordt uitgesproken.

Het komt soms voor, dat de dubbele pijl niet geldt, maar wel alleen de pijl naar rechts of naar links. Men heeft dan wortels ingevoerd resp. verduisterd. Men zegt wel eens, dat dit niet mag en dat men er dus niet over spreken moet. Ik zou daartegenin willen gaan met de opmerking, dat het onderzoeken van de mogelijkheid wortels in te voeren of te verduisteren van groot belang is voor het krijgen van een helder inzicht in implicatie en gelijkwaardigheid. De pijl naar rechts wil zeggen, dat de linker verzameling een deel is van de rechter, de pijl naar links, dat de rechter verzameling een deel is van de linker, en de dubbele pijl, dat de verzamelingen gelijk zijn.

In dit verband is het van groot belang nauwkeurig in te gaan op de betekenis van „en”, „of” en „volgt uit”. Ik wil hier nu niet nader op ingaan.

Het begrip „functie” is in het voorgaande ietwat formeel naar voren gekomen. Bij het behandelen van de functies zal duidelijk naar voren moeten komen het toevoegingskarakter, dat aan functies inhaerent is. Als y een functie is van x , dan wordt aan elke waarde van x een bepaalde waarde van y toegevoegd. Dit typische karakter van functies bepaalt zich niet tot toevoegingen van reële getallen aan reële getallen, maar heeft een veel wijder terrein van toepassing, zowel binnen als buiten de wiskunde. Zo zijn de meetkundige transformaties een bekend voorbeeld van functies. Een ander voorbeeld vormen de grafieken, die zelf eigenlijk functies zijn. Op drie manieren kan men b.v. $y = x^2$ in grafiek brengen. De meest simpele is het plaatsen van een x -as en een y -as boven elkaar en het toevoegen van punten van de y -as aan die van de x -as door pijlen (fig. 2). Deze methode is simpel, maar onoverzichtelijk. Beter is het op de bekende manier (fig. 3) toevoegen aan een punt op de x -as van een punt in het platte vlak (of het verticale lijnstuk). Ten slotte kan men de beide assen loodrecht op elkaar plaatsen, aan een punt op de x -as een punt op de y -as toevoegen en aan dit puntenpaar een punt in het platte vlak (fig. 4). Deze grafiek heeft het nadeel zelf een samengestelde functie te zijn.

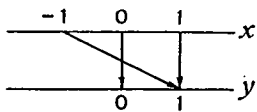


Fig. 2

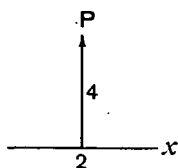


Fig. 3

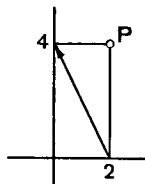


Fig. 4

Tot slot een enkel woord over de betekenis van de variabele in de algebra. Het probleem laat zich in één regel oplossen: een variabele stelt altijd een willekeurig getal voor. Ter verduidelijking het volgende. We gaan uit van de formule $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Dit is nog slechts een propositionele functie en geen oordeel. Willen we hier een oordeel van maken, dan moeten we beweren, dat het voor elke x geldt. Dus

$$(\forall x)(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1. \quad (1)$$

(($\forall x$) wordt uitgesproken: voor alle x geldt.)

Lossen we een vergelijking op, b.v. $x^3 = x$, dan schrijven we

$$x^3 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x^2 = 1.$$

Ook dit is nog slechts een propositionele functie. We dienen eigenlijk te schrijven

$$(\forall x)(x^3 = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x^2 = 1). \quad (2)$$

Hierin stelt x dus een willekeurig getal voor en niet b.v. een nog onbekend getal.

Uit (1) en (2) zien we, dat de oordelen, die te pas komen bij het oplossen van vergelijkingen een ingewikkelder logische structuur hebben, dan de oordelen, die te pas komen bij gewone herleidingen. Ik zou er op deze grond voor willen pleiten met het systematisch behandelen van vergelijkingen te wachten, totdat de herleidingen behandeld en goed begrepen zijn.

FUNCTIONIES EN GRAFIEKEN ¹⁾

door

C. J. ALDERS

Haarlem

Met enige schroom heb ik de uitnodiging van uw bestuur om hier een inleiding te houden, aangenomen. Ik ben nu niet bepaald revolutionair; in dit gezelschap ben ik min of meer een vreemde eend in de bijt, en ik vrees dan ook, dat ik u niet veel nieuws zal vertellen.

Velen van U hebben de vorige week in Euclides het artikel van Vredenduin gelezen over functies en relaties. Ik heb het ook gelezen, zelfs met veel plezier en belangstelling. Maar eerlijk gezegd zou ik er niet gelukkig mee zijn, als deze stof binnenkort in ons onderwijs ingevoerd zou worden. Erger nog: ik zie niet in, dat deze stof voor onze aankomende eerste-jaars studenten de kennismaking met de wiskunde zal vergemakkelijken. Deze openhartige bekentenis zal u duidelijk maken, dat ik inderdaad niet revolutionair ben. Toch hebben z.g. klassieke beschouwingen uit de gewone dagelijkse school-praktijk in dit milieu nog wel enige zin, al is het alleen maar dat ze u prikkelen tot verzet.

Prof. J. de Groot in A'dam klaagde er op z'n college o.a. over, dat er op de middelbare school te weinig grafieken getekend worden, en ik geloof dat dat juist is.

Toch is er op dit punt wel een grote vooruitgang, meen ik. Het is goed te bedenken, dat pas 30 jaar geleden de functies en grafieken op de middelbare school ingevoerd zijn. Er wordt dikwijls (en terecht) geklaagd over de achterstand van de school-wiskunde bij de levende wiskunde, maar in dit geval is er toch wel een gezonde evolutie. Zelfs tien jaar geleden waren wortel-functies; en absolute waarden nog vrijwel onbekend in de school-wiskunde, en nu zijn ze zelfs op het gymnasium A algemeen ingevoerd. Hiertegen is bij mijn weten vrijwel niet door leraren geprotesteerd; men kan dus veilig de conclusie trekken, dat deze onderwerpen als nuttig en nodig gezien worden. Ik acht mij dan ook ontslagen van een pleidooi hiervoor,

¹⁾ Voordracht op de W.V.O. conferentie van 12 nov. 1960 te Amersfoort.

maar toch wil ik straks graag wijzen op de redenen, waarom deze functies een plaats in het onderwijs verdienen.

De eerste vraag: „wanneer moet het functie-begrip ingevoerd worden hangt samen met de vraag: hoe definiëren we een functie? Het is u bekend, dat deze laatste vraag ons direkt al in het strijdgewoel brengt. De discussies die in de vorige jaargang van Euclides gevoerd zijn over de vraag of x^2 een functie is van x , dan wel $y = x^2$, zullen de meesten van ons wel met gemengde gevoelens gevolgd hebben. Ik voel ervoor om voorlopig (d.w.z. in de derde klas van de h.b.s. en de derde en vierde van het gymnasium) x^2 een functie van x te noemen. Ik geloof niet, dat de behoefte aan de letter y in dit stadium groot genoeg is, om de invoering daarvan te rechtvaardigen. Ik heb hier vroeger wel anders over gedacht, maar nadat ik nu enkele jaren die y weggelaten heb (geleid door Dr. Koksma's artikel in Euclides), meen ik, dat dit beter is. Zo geeft het weglaten van de y -as bij de grafiek van b.v. $(x - 1)^2$ en $x^2 - x - 2$ een veel duidelijker figuur. En de ervaring bewijst, dat de introductie van die y -as in de 4e klas bij de analytische meetkunde totaal geen moeilijkheden geeft. Misschien ligt dit gedeeltelijk aan het feit, dat de leerlingen in de natuurkunde-lessen al vertrouwd zijn met twee assen, maar dat accepteren we dan dankbaar.

Als voorlopige definitie wil ik dus geven: elke algebraïsche (of goniometrische) vorm, die de letter x bevat, heet een functie van x . Deze is niet in strijd met een later te geven algemene definitie, en heel geschikt om de rol van een variabele te introduceren en uit te bouwen. Ik meen, dat de rijpheid van de leerlingen ons niet toestaat hiermee eerder te beginnen dan in de derde klas of in het laatste trimester van de tweede klas. De functies $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ en $\sqrt{ax + b}$ (dat zijn dus de functies, die in het programma voorgeschreven zijn) geven voldoende oefenstof.

Ongetwijfeld geeft de schoolstof over de kwadratische functie aan vele wiskundigen reden tot ergernis en hilariteit. Toch geloof ik, dat er na de beperking in het nieuwe programma niet veel meer af kan. Natuurlijk maken we nog heel wat vraagstukken, die wiskundig weinig of geen waarde hebben, maar ik geloof, dat er door deze vraagstukken toch een training in het functie-begrip ontstaat, die moeilijk op een andere minder gezochte wijze tot stand kan komen, en die de nodige herhaling van vroeger geleerde zaken oplevert.

Ik meen echter, dat met de bedoelde functies ook in de derde klas de kous niet af is. Zo is het instructief erop te wijzen, dat $x - \sqrt{x}$ (door $\sqrt{x} = p$ te stellen) een minimum $-\frac{1}{4}$ heeft voor $x = \frac{1}{4}$, maar $x + \sqrt{x}$ heeft een minimum 0 voor $x = 0$, omdat $\sqrt{x}$ niet

negatief kan zijn. De grafieken van beide functies geven dan geen moeilijkheden. Ook de functie $\sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ kan elementair behandeld worden. De extrema vindt men zonder differentiëren door te vragen of er waarden van x zijn, waarvoor de functie de waarde p aanneemt. Door kwadrateren vindt men dan gemakkelijk, dat $2 \leq p \leq 2\sqrt{2}$, en de grafiek tekenen we dan weer zonder moeite. Het minimum van $x - \sqrt{x-2}$ vindt men door $\sqrt{x-2} = y$ te stellen; er komt dan $y^2 - y + 2$, en met het gevonden minimum is dan ook hier de grafiek weer eenvoudig. Al deze en dergelijke functies kan men in een of twee lessen doen. Ook een functie als $x\sqrt{4-x^2}$ geeft weinig moeilijkheden.

Als de leerlingen in de vierde klas het vinden van horizontale en verticale asymptoten gehad hebben, dan zijn er (buiten de afgegraasde functies) nog genoeg aardige voorbeelden. Het is voor de meeste leerlingen een verrassing, dat b.v. de grafiek van $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ twee horizontale asymptoten heeft, omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ voor positieve waarden van x gelijk is aan $+1$, en voor negatieve -1 .

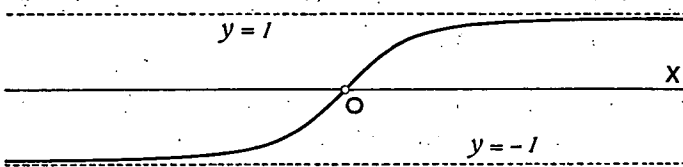


Fig. 1. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Ook de grafiek van

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$$

is verrassend. Ook hier weer twee horizontale asymptoten, bovendien nog een geïsoleerd punt.

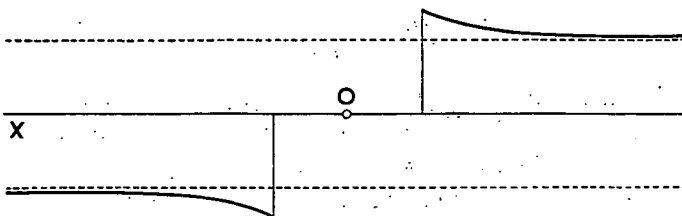


Fig. 2. $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$

Op een ding wil ik nog even wijzen. Ik heb vroeger bij de rekenkundige rij ook wel de grafiek getekend van t_n als functie van n ,

maar dit sloeg nooit goed aan. Ik denk, dat de leerlingen meer moeite hebben met een functie van een natuurlijk getal, dan van een continue variabele. Ik meen dan ook, dat we in de derde klas bij de rekenkundige rij alle vraagstukken over t_n en s_n als functie van n gerust overboord kunnen gooien. Een deel ervan kan men misschien in de 4e klas doen bij algemene beschouwingen over rijen, maar nodig vind ik het niet. (Deze opmerking is bedoeld als bijdrage tot het antwoord op de vraag: wat kan er van de schoolstof zonder schade verdwijnen?).

Hoe moet nu in de B-afdeling het functie-begrip verbreed worden? Ik zou de voorkeur geven aan de definitie van Prof. Kuiper op de vakantie-cursus van het M.C.: in de verzameling van alle geordende getallen-paren heet elke deelverzameling daarvan een relatie. Een relatie is een functie, als elk getal in een paar hoogstens één keer als eerste voorkomt. Ik vrees, dat het op het ogenblik een beetje te vroeg is om deze definitie te geven, maar ik geloof, dat we met de modernisering van het wiskunde-onderwijs een eind op streek zijn, als deze definitie in de gegeven leerstof zou passen, en het lijkt mij vruchtbaar om na te gaan, wat daarvoor nodig is.

Voorlopig houd ik het op de volgende: een functie van x is een voorschrift, waardoor aan elk element uit een verzameling (x) één element van een andere verzameling is toegevoegd. Men kan er, en dit vind ik beslist nodig, de functie $E(x)$ mee bespreken, waarvan de grafiek door de eindige sprongen weer nieuwe gezichtspunten geeft. Aansluitend hiermee moeten de grafieken van

$$x + E(x); x - E(x); xE(x) \text{ en } E(x):x$$

besproken worden. Ook het vraagstuk: het aantal wortels van $x^2 - ax + a = 0$ is p ; teken p als functie van a , is instructief, al is het alleen maar omdat het functie-gebied hier bestaat uit de getallen 0, 1 en 2.

Een ander voorbeeld is

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1}.$$

De grafiek hiervan is de lijn $y = 1$ zonder het punt $(1, 1)$. Dit kan men zo laten, maar ik geloof, dat dat niet goed is. Men kan erop wijzen, dat men door de aanvullende afspraak $f(1) = 1$ de functie voor $x = 1$ continu kan maken, maar dat men b.v. ook kan definiëren $f(1) = 3$, en dan komt er weer wat anders. Zonder meer is echter $f(1)$ onbepaald.

Ook kan men voorbeelden geven van functies, die in bepaalde intervallen verschillend gedefinieerd zijn, b.v.

$$f(x) = -x \text{ voor } x < 0; \quad f(x) = \sin x \text{ voor } 0 \leq x \leq \pi; \\ f(x) = x \text{ voor } x \geq \pi.$$

Natuurlijk is het verleidelijk om bij deze dingen steeds verder te gaan, en daardoor loopt men de kans de zaak te gaan overtrekken, en over de hoofden van de leerlingen heen te praten. Maar dat is met elk onderwerp zo. Ik geloof, dat elke leraar hier zijn leerlingen iets kan meegeven dat wiskundig van meer waarde is dan de helft van de stereometrie die ze meekrijgen.

Op de vakantie-cursus is door Prof. Duparc nog een ander punt aangeroerd, dat een oude liefde van mij is, nl. het benaderen van wortels van een vergelijking door middel van grafieken. Ook voor andere wetenschappen lijkt mij dit nuttig, en zonder nu direct over toegepaste wiskunde te willen spreken, is het toch goed hier iets aan te doen. De jongens vinden het ook wel leuk om

$$2^x = 2x; \log x = x - 2; \sin x = \frac{1}{2}x \text{ enz.}$$

op te lossen, d.w.z. de wortels te benaderen, en achteraf met de tafel te controleren. Ik vind het al belangrijk, dat ze uit de grafiek leren zien, dat b.v. $3^x = x$ geen wortels heeft; ze doen dan met zo'n grafiek iets meer dan alleen maar tekenen.

Al in 1895 leerde Felix Klein ¹⁾ de benadering van de wortels van

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (c \neq 0)$$

door de snijding van de krommen

$$y = x^2 + ax + b \quad \text{en} \quad y = -\frac{c}{x}.$$

Ik wil nu geen propaganda maken voor dit speciale vraagstuk, maar ik meen wel, dat er op dit gebied nuttige dingen gedaan kunnen worden.

Tenslotte zou ik de voorgeschreven leerstof willen uitbreiden met de cyclometrische functies en met de functie e^x .

Het is u ongetwijfeld ook overkomen, dat een wanhopige eerstejaars student bij u kwam vragen: meneer, wat is nou zo'n bg sin of arc sin. Op de universiteit wordt deze functie bekend ondersteld, of zo terloops besproken, dat niemand er wat aan heeft. Alleen al hierom vind ik opname in de B-stof gewenst. Maar bovendien geeft het ons in de integraal-rekening wat meer armslag; het aantal primitieve functies dat nu bereikbaar is, is te klein.

¹⁾ Felix Klein: Famous problems in elementary mathematics — Dover pub. \$1,—
Een alleraardigst boekje!

Door beide leden van $\sin y = x$ naar x te differentiëren kan men eenvoudig de afgeleide van $\arcsin x$ vinden, evenzo van $\arccos x$ en $\arctg x$. We kunnen er een beetje mee jongleren (de leerlingen kennen de kettingregel) en zo komen ze beter voorbereid naar het hoger onderwijs. Om uitwassen te voorkomen is het echter beter deze functies voorlopig niet imperatief voor te schrijven. De twee lessen, die ik hieraan besteed, zijn voldoende, en sommige leerlingen hebben er veel plezier van.

Ook de functie e^x hoort op ons programma, zoals vrijwel overal in het buitenland al gebeurd is. De toepassingen in de natuurkunde en in de biologie maken deze functie belangrijk, en ook hier geldt weer, dat een kennismaking op de middelbare school heel wat moeilijkheden bij verdere studie uit de weg ruimt. Er zijn al verschillende pogingen gedaan om deze functie op didactisch en wiskundig verantwoorde wijze in te voeren, en het lijkt me de moeite waard om dit probleem eens ernstig en in groter verband te bestuderen.

De vervulling van deze wensen kost tijd. In de algebra-stof zie ik niet veel kans tot beperking, dus moet het van andere vakken komen, en dat zal dan wel de stereometrie zijn. Het beste zou echter zijn dat de wiskunde-leraar in de hoogste twee klassen twee facultatieve uren krijgt, waarin alleen aan „liefhebbers” iets extra's gegeven wordt. Zelfs in de bestaande onderwijs-wet is daarvoor op de h.b.s. een mogelijkheid, als men de twee uren, die nu òf aan handelswetenschappen òf aan tekenen besteed worden, ook (facultatief) voor wiskunde kan gebruiken.

DE ONTWIKKELING VAN HET ALGEBRA-ONDERWIJS ¹⁾

door

Dr. W. J. Bos

Wassenaar

I *Motivatie*

Wij moeten naar mijn mening bij het algebra-onderwijs veel meer aandacht besteden aan de *motivatie* van de leerlingen. Laat ik eerst enkele voorbeelden geven:

1) Na het herleiden van produkten (en de merkwaardige produkten) kan men het ontbinden in factoren aan de orde stellen. Dat is gewoon het omgekeerde. *Wat* er gebeurt, is voor de leerlingen begrijpelijk, maar *waarom* gebeurt dit? Waarom gaat men na al maar haakjes wegmaken nu ineens juist „haakjes maken”. Het lijkt mij beter de ontbindingen direct in verband te brengen met het vereenvoudigen van breuken. Dan heeft dit ontbinden direct een functie, dan is het *zinvol*.

2) Men kan definiëren wat een vergelijking is en het oplossen van vergelijkingen behandelen. Ik geloof dat dit zo kan dat de leerlingen goed begrijpen wat er gebeurt. Maar *waarom* vergelijkingen? Welke functie hebben ze? Het lijkt mij meer zinvol om b.v. te beginnen met getalraadsels, die zonder algebra opgelost kunnen worden, om dan geleidelijk te komen tot raadsels waarbij wel algebra nodig is, en zodoende tot vergelijkingen. Vergelijkingen dienen om problemen op te lossen.

3) Het begrip relative fout. Men kan de rel. fout definiëren en de eigenschap van de rel. fout in een produkt bewijzen en vervolgens toepassen. Dit kan begrepen worden en het begrip rel. fout krijgt daarmee reeds een duidelijke zin. Maar waarom kan men bij een produkt niet, zoals bij een som of verschil, volstaan met absolute fouten (wat trouwens natuurlijk mogelijk is)? Het lijkt mij daarom beter te beginnen met het schatten van produkten. Bij het schatten van b.v. $80030 \times 1,013$ mogen we wel de 30 maar niet de 0,003 verwaarlozen. Als de leerlingen dit inzien, dan hebben we een goede motivatie van het begrip rel. fout.

¹⁾ Voordracht op de W.V.O.-conferentie van 12 nov. 1960 te Amersfoort.

Bij deze voorbeelden is het zo dat de leerling niet slechts „begrijpt” („Ja, dat is zo, de redenering is juist, de regel snap ik”), maar dat bovendien de leerstof voor hem zinvol wordt, zinvol binnen zijn verworven ervaring. Nu ligt het niet op mijn weg lang stil te staan bij de vele problemen die de motivatie ongetwijfeld oproept. Misschien echter kunnen wij het erover eens zijn dat *een noodzakelijke voorwaarde voor een goede motivatie is dat de leerlingen de zin van de begrippen en problemen duidelijk wordt*. Dit houdt in dat enthousiast-bezig-zijn nog geen bewijs is voor een goede motivatie. Juist in de lagere klassen hebben de leerlingen veel plezier in het maken van reeksen eenvoudige opgaven. Daar is niet veel op tegen, maar men zal zich daarbij dan toch steeds moeten afvragen of deze activiteit voldoende gericht is *op het leerobject zelf* en op het invoegen van de stof in een groter geheel. Zeer vaak blijkt immers korte tijd later dat dergelijk routinewerk, dat „zo goed ging”, toch niet het eigendom van de leerlingen is geworden. Maar zelfs als ook de *zin* van de stof duidelijk is geworden, blijft het nog de vraag of de motiverende krachten zo groot zijn dat de leerling geboeid raakt, zich werkelijk richt op het vak, na gericht-te-zijn op het vak. Dit zal van vele andere factoren afhangen: individuele en sociale en niet in de laatste plaats van de persoon van de docent!

Men kan van mening verschillen over de vraag of de motivatie alleen door de docent of ook door het leerboek gegeven moet worden. In ieder geval zal men aan het leerboek de eis moeten stellen dat het een goede motivatie niet belemmert (b.v. door direct een formeel-wiskundige behandeling te geven).

Het doen ervaren van de zin kan gebeuren:

a) *Expliciet*, met behulp van argumenten (b.v.: om de aftrekking altijd mogelijk te maken voeren we negatieve getallen in.)

b) *Impliciet*, doordat de voorgelegde problemen zelf aan het onderwerp een zin geven (b.v.: via getalraadsels tot vergelijkingen).

De argumenten kunnen van verschillende aard zijn:

1) zuiver *wiskundige* overwegingen (om de aftrekking...)

2) ze kunnen ontleend zijn aan het *rekenen* (om iets eenvoudiger te kunnen uitrekenen), aan het *dagelijks leven* of de *natuurkunde* (negatieve temperatuur als argument voor de invoering van negatieve getallen).

Het zal duidelijk zijn dat speciaal bij het begin van de algebra een goede motivatie van belang is. Wat is algebra? Wat wordt ermee beoogd? Wat betekenen die letters? Ik vraag mij af of het algebra-onderwijs juist op dit punt geen grote gebreken vertoont. Men begint vaak (op blz. 1) te vertellen dat we in de algebra met letters

$y = \cotg x$. De volgorde is hier NOZ en nog eens NOZ; we hebben nl. 2 congruente stukken, die bij verschuiving over π kunnen samenvallen. Wil men $\tg x$ en $\cotg x$ ook voor $\frac{5}{12}\pi$, $1\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{12}\pi$ en $1\frac{7}{12}\pi$ hebben, plak dan boven en onder 4 cm aan het grafiekenblad.

Hierna leveren de grafieken van $y = a \sin x$ en dergelijke geen moeilijkheden op. De oreillons op OM en op het verlengde van OM zijn opv. de middelpunten voor $a = \frac{1}{2}$, $a = 1\frac{1}{2}$, $a = 2$ en $a = 2\frac{1}{2}$; de halve cirkels bij elke a raken de y -as in O.

Evenmin zijn er moeilijkheden bij $y = \sin bx$ en dergelijke. Voor $b = \frac{1}{2}$ is het nodig, dat men rechts een blad aanplakt, waarvan OY dan de lijn $x = 2\pi$ bedekt; een volle periode is nl. 4π .

Voor $b = 2$ is de abscis van het eind van een periode π , zodat we tot het eind van de x -as tweemaal een zelfde kromme krijgen.

Wordt tenslotte de grafiek gevraagd van $y = 1 + \cos x$, dan tekent men eenvoudig de grafiek van $y = \cos x$ en laat de x -as 1 zakken; op het stelsel (O_1X_1 , O_1Y) heeft dezelfde kromme de vergelijking $y = 1 + \cos x$.

Grafieken van functies als $y = \sin(x + a)$ krijgt men uit die van $y = \sin x$ door verschuiving van deze laatste; we geven geen regel. Denk zo: voor $x = -a$ is $y = 0$ en dus wordt de sinuslijn a naar links verschoven.

$y = \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$; bij $x = \frac{1}{6}\pi$ is $y = 1$; dus gaat de cosinuslijn $\frac{1}{6}\pi$ naar rechts.

Nog even iets over het voorbeeld, dat de inspecteurs gaven, nl. $y = (1 - \cos x)^{-1}$; eerst $y = -\cos x$ (ZONNOZ): de x -as 1 laten zakken; op het stelsel $O_1(X_1, Y)$ dus $y = 1 - \cos x$. Nu deze omkeren; ook dat gaat eenvoudig; *zonder gereken, zonder tafel van omgekeerden*. We werken het uit in afl. I van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde jg. 49 (1961/'62). In afl. IV van jg 48 (1960/'61) vindt men de grafiek van $y = (2 \cos^2 x)^{-1} = (1 + \cos 2x)^{-1}$ op een soortgelijke manier behandeld.

Amsterdam, maart 1961.

Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES

WIJDENES-HEYT

GONIOMETRIE A voor de onderbouw;

14e druk van Beknopte driehoeksmeting A; 44 blz., 51 fig., 20 uitgewerkte voorbeelden; f 2,—.

GONIOMETRIE B voor de bovenbouw;

14e druk van Beknopte driehoeksmeting B; 94 blz., 64 fig., waarvan 31 met zuivere grafieken; 44 voorbeelden; f 3,50.

GRAFIEKENBLADEN BIJ DE GONIOMETRIE

15 bladen in envelop f 0,75; 100 bladen los f 4,—.

Leraren, die kennis willen maken met deze boeken en met de bladen gelieven een ex. aan te vragen aan de uitgever NOORDHOFF of aan WIJDENES.

Grafiekenbladen voor de Goniometrie

Het K.B. van 30 aug. 1958 noemt als onderdeel van het wiskunde-programma voor de bovenbouw van het V.H.M.O.: grafieken van de functies $y = \sin ax$, $y = \cos ax$, $y = \operatorname{tg} ax$, $y = a \sin x + b \cos x$. Volgens de wiskundige inspecteurs moet men aan dit K.B. niet te enge uitlegging geven: ze noemen b.v. ook $y = (1 - \cos x)^{-1}$ (EUCLIDES jg. 35 1959/60, nr. 1).

Het tekenen van grafieken van goniometrische functies stelt andere eisen aan het afbeelden dan die van algebraïsche functies, waarvoor gewoon grafiekenpapier met een verdeling in kleine, doch zichtbare, vierkantjes, het aangewezen hulpmiddel is.¹⁾

In WIJDENES-HEYT, *Goniometrie B* voor de bovenbouw, wordt op het belang van een wiskundig verantwoorde afbeelding van goniometrische functies sterk de nadruk gelegd en een methode ontwikkeld, waardoor men de vereiste zuiverheid langs meetkundige weg kan bereiken, *zonder gerekend en zonder dat men in de tafel waarden hoeft op te zoeken*.

We geven hier een beschrijving van wat er gedaan moet worden voor $y = \sin x$. Zie deze bladen: de assen OX en OY; de eenheidscirkel raakt de y -as in O; de deelpunten op de kwadranten ON en OZ (N = noord, Z = zuid), waardoor de lijnen $\parallel$ OX; OX = 2π eenheden, hier $2\pi \times 28 \text{ mm} = 176 \text{ mm}$; π gerekend op $\frac{22}{7}$, waarvan de betreffende fout $< \frac{1}{2000}$ is; de verdeling op de x -as; 22 mm, 44, 66, geven $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ enz.; daarna van nul tot $\frac{1}{4}\pi$ en verder elk interval van $\frac{1}{4}\pi$ met de steekpasser of op het oog in drie gelijke delen verdelen; stip het snijpunt aan van de 1e horizontale en de 1e verticale lijn (de assen niet meegerekend); 2e en 2e, 3e en 3e, . . . , telkens naar het overstaande hoekpunt van het rechtsboven liggende rechthoekje. Binnen de minuut heeft men 24 punten van $y = \sin x$; nog een minuut voor de kromme lijn.

Het maken van een geraamte (wat ook bij het gebruik van de tafel nodig is voor het uitzetten van de ordinaten) kost 8 minuten, mits men met twee driehoeken werkt en een geoefend tekenaar is. Klassikaal is het een groot tijdverlies met pover resultaat. *Als men zo'n grafiek vraagt op het eindexamen (en dat gebeurt zeker), dan is het gewenst de grondfiguur erbij te geven, opdat niet de tijd versleten wordt met het tekenen van het geraamte*.

Tijdsparing in de les of bij huiswerk is niet het enige voordeel van de grafiekenbladen; we wijzen ook op de gelijke uitvoering, op de duidelijkheid en netheid van het werk van alle leerlingen; net als bij het gebruik van de Oefenbladen voor de B.M. en van het Werkschrift bij de Stereometrie.

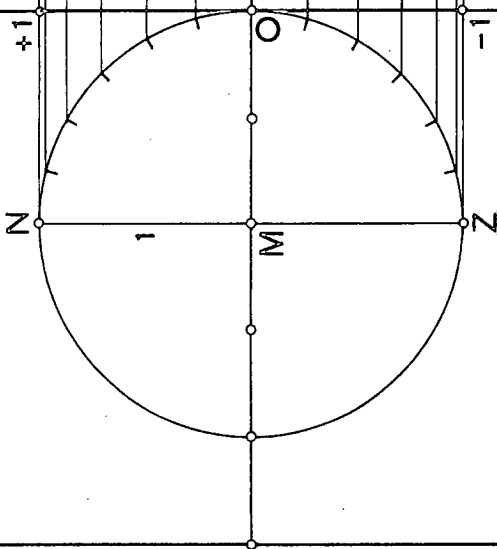
We hebben het ontstaan van $y = \sin x$ geschetst; nu de volgende.

$y = \cos x$. Door de deelpunten op de bogen NOZON dezelfde lijnen evenwijdig met de x -as; ook weer met aansluitende rechthoekjes, beginnend bij (0; 1), dalend tot (π ; -1); daarna rijzend.

$y = \operatorname{tg} x$. Trek door M en de 4 deelpunten boven O op het 1e kwadrant en de 4 onder O op het 4e kwadrant de lijnen naar de y -as; dan door de snijpunten van die lijnen met de y -as lijnen evenwijdig met OX; richting ON-ZON-ZO. De lijnen $x = \frac{1}{12}\pi$, $x = \frac{1}{6}\pi$, enz. zijn opzettelijk naar boven en naar onder doorgetrokken.

¹⁾ Zie P. WIJDENES **Grafiekenschrift 14e druk**; ruitjes $2\frac{1}{2}$ bij $2\frac{1}{2}$ mm: 30 blz. ruitjes en 30 blz. gelinieerd. Uitgave Noordhoff.

Y



X

$1\frac{1}{2}\pi$

π

$\frac{1}{2}\pi$

O

N

1

M

-1

Z

werken die getallen voorstellen (soms zonder argument), om dan (op blz. 2) te vragen: „Bereken $a + b$, als $a = 2$ en $b = 3$ ”. Waarom dan letters, waarom dan niet gewoon: bereken $2 + 3$? Welke zin heeft het substitueren van getallen op deze wijze?

Ook vindt men vaak al heel in het begin het volgende soort opgaven: „Iemand koopt a kg koffie voor p gulden per kg. Hoeveel moet hij betalen?” Welk probleem wordt hier eigenlijk gesteld? Wordt hierdoor de algebra op zinvolle wijze gekoppeld aan ervaringen uit het dagelijks leven? Enigszins anders ligt het als men begint met formules zoals $W = V - I$ (voor de winst) en $O = lb$ (voor de oppervlakte van een rechthoek), enz. Men moet daarbij echter wel bedenken dat de leerlingen hierbij nog niets over de zin van algebra leren, want dit zijn niets anders dan afkortingen van hun reeds lang bekende relaties waarbij geen algebra nodig is.

Geheel anders wordt het als men nieuwe formules voorlegt en de leerlingen zin en inhoud daarvan doet inzien. Zo beleef ik elk jaar weer veel genoeg van de formule voor de draagkracht van een hijsbalk:

$$G = 80 \frac{bh^2}{l}$$

Door substituties kunnen de leerlingen gaan inzien dat deze formule praktische betekenis heeft en overeenstemt met hun ervaringen (over het breken van latjes). Niet alleen het werken met letters wordt op deze wijze zinvol, maar ook het substitueren in formules en daarmee ook het substitueren in vormen, die immers steeds opgevat kunnen worden als rechterlid van één of andere formule (waarbij we ons dus losmaken van de betekenis van de verschillende letters). De vraag: door welke andere vormen kan men een bepaalde vorm vervangen (eventueel om hem gemakkelijker te kunnen uitrekenen), voert op zinvolle wijze tot de identiteiten.

Ik heb hier zeer kort aangegeven hoe naar mijn mening een goede motivatie van het begin van de algebra verkregen kan worden door uit te gaan van de formules. Nu ben ik bepaald niet van mening dat dit de enige manier zou zijn om een goede motivatie te krijgen. Het is b.v. ook mogelijk uit te gaan van het gewone rekenen en de letters zinvol te laten gebruiken om eigenschappen algemeen te formuleren. Maar wel komt het mij voor dat *wiskundige* argumenten in het begin geen motiverende kracht kunnen hebben, eenvoudig omdat „wiskunde” dan nog onbekend is! „Om elke aftrekking mogelijk te maken voeren wij negatieve getallen in.” Maar waarom zouden we? Dit zijn beweringen die wel begrepen worden, maar niet als *argument* beleefd worden. „Om elke deling uitvoerbaar te maken voeren we breuken in”. Né, denkt één leerling, was dat dan de reden waarom

we vroeger op de lagere school breuken leerden? Ik dacht: omdat er nu eenmaal breuken „zijn”!!

Op den duur zal de waarde van de wiskundige argumenten groter worden en zal de zin van de begrippen duidelijk moeten worden uit de wiskundige samenhang. Impliciete motivatie zal ook dan naar mijn mening een veel grotere rol moeten spelen dan meestal het geval is.

II *Het getalbegrip*

Welke plaats moet het getalbegrip in ons onderwijs innemen? Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat ik het onnatuurlijk vind om met natuurlijke getallen te beginnen, dat ik bij de invoering van de negatieve getallen de aanleidingen hiertoe uit het dagelijks leven van groot belang acht, dat ik een formele invoering van de breuken als getallenparen niet voorsta, dat ik de invoering van reële getallen en wortels met behulp van getalrijen niet kan bewonderen. Ik wil er echter niet veel over zeggen, omdat ik er geen ervaring mee heb. Als ik de boeken zie waarin de formele weg bewandeld wordt, dan krijg ik ernstige minderwaardigheidsgevoelens, omdat ik weet dat ik niet in staat zou zijn mijn leerlingen te laten begrijpen wat daar gebeurt.

Natuurlijk kan men per definitie orderrelaties tussen breuken vastleggen, maar ik vraag mij af of er geen snuggere leerling zou zijn die meent dat $\frac{6}{11} > \frac{5}{11}$ geen afspraak kan zijn, omdat hij meent dat hij dit kan „begrijpen”.

De wiskundige opvatting dat getallen er eerst „zijn” nadat ze ingevoerd zijn, is naar mijn mening voor de algebra in de lagere klassen even onbruikbaar als axiomatic voor de meetkunde. Nieuwe getallen worden „ontdekt”; de getallenrechte kan men naar links voortzetten, de zijde van een vierkant met een oppervlakte van 2 cm^2 „heeft” een bepaalde lengte. (Wel zou er in de bovenbouw tijd moeten zijn voor een grondige herhaling van het getalbegrip.)

Een ander punt houdt mij in dit verband bezig: lukt de invoering van de negatieve en irrationale getallen eigenlijk wel? Hebben de leerlingen de invoering wel meegemaakt? Ik bedoel dit: na een invoering vermelden de boeken: „Voortaan stellen de letters rationale, resp. reële getallen voor”. Het leerboek gaat dan verder en slechts hier en daar worden bij coëfficiënten eens breuken, resp. wortels gebruikt. Is dit voldoende nazorg? Waar denken de leerlingen bij $a + 3b$ aan? Ook aan negatieve getallen, wortels, getalrijen? Of menen zij dat b.v. $+a$ positief is en $-a$ negatief?

Een belangrijk punt heb ik overgeslagen: hoe zijn de breuken op de lagere school verwerkt? Nu heb ik niet de illusie dat b.v. het delen

door een breuk goed begrepen is, maar ik vraag mij, eerlijk gezegd, wel eens af of het zo erg is als een enkele bewerking eigenlijk onbegrepen blijft, min of meer een kunstgreep blijft. Waarschijnlijk vervult U dit met afgrijzen en ik voel mijn geweten dan ook wel knagen. Maar . . . het feit dat de leerlingen van breuken niet veel begrepen hebben is een sterk argument *tegen* een formele behandeling, eventueel wel vóór een intuïtief-begripsmatige behandeling!

III *Functies*

In het begin van mijn inleiding heb ik uiteengezet waarom ik het formule-begrip belangrijk acht; het zal U dan ook niet verbazen dat ik het functie-begrip en de grafieken veel meer op de voorgrond zou willen plaatsen dan nu het geval is. Grafieken en functies horen naar mijn mening reeds in de eerste klas aan de orde te komen. De algebra moet gezien worden als een *leer der kwantitatieve relaties*. Dit acht ik gewenst terwille van een goede motivatie. Bovendien meen ik dat de leerlingen zo spoedig mogelijk de letters als *variabelen* moeten kunnen zien (zie het voorbeeld van de hijsbalk). Ik heb de indruk dat de grote nadruk die de vergelijkingen krijgen in de lagere klassen, vaak tot gevolg heeft dat de letters alleen als onbekenden (als vaste getallen) gezien worden, en dat daardoor grote moeilijkheden ontstaan bij het parameter-begrip, de ongelijkheden, het functie-begrip en de analytische meetkunde. Dat de identiteiten gelden voor alle getallen, of beter voor elk element van een verzameling, geeft voor een inzicht in het begrip variabele niet veel steun.

Aan een „statische” opvatting van het begrip variabele, als willekeurig element van een verzameling, zijn de leerlingen nog niet toe. Wij leven in de tijd, gebeurtenissen brengen andere gebeurtenissen met zich mee. Eerst veranderingen maken verbanden tussen de „dingen” zichtbaar. „Dynamische” termen als „toenemen” en „afnemen” kunnen aanvankelijk niet gemist worden. Voor de functie als *afbeelding* moeten de leerlingen rijp gemaakt worden.

Bij de vraag *hoe* de functies behandeld moeten worden, kan ik niet nalaten even stil te staan bij de bijzonder merkwaardige discussies en beschouwingen over de Y-as.¹⁾ Het is een soort kip-Y probleem. Een functie ontstaat door verschillende bewerkingen uit te voeren op de X, het is dus een soort X-en produkt, zoals een Y een kippe-produkt is. De wiskundige kippenfokker wenst het wiskundige kippe-produkt, de functie, niet te zien als zelfstandige grootheid; als Y, maar slechts als aanleiding voor nieuwe kippetjes (afgeleide functie, primitieve functie, enz.) Waarom? Dat zal ik trachten U duidelijk te maken. Ten eerste moet U dan weten dat in een andere branche,

¹⁾ Verg. Euclides 33, X. en 34, IV.

de analytische meetkunde, in dit verband vertegenwoordigd door firma's als Albert Heyn, kip of Y niets uitmaakt (het gaat om de winst). Verder is er dan ook nog de arme consument, dat is de man voor wie een Y een Y is. Deze consument, de fysicus, ziet wel degelijk het Y als kippeprodukt, maar ook als zelfstandige grootheid! De bekende kippenfokker Vredenduin zegt tegen consument natuurkunde: met jou heb ik niets te maken, als jij een Y een Y wil noemen dan moet je dat zelf maar uitzoeken.

Nu is de hele gang van zaken met de Y-as een duidelijk voorbeeld van dictatuur van een bedrijfschap. Ten eerste heeft het bedrijf-schap, waartoe de kippenfokkers behoren, verordend dat *geen* kippeprodukt de naam Y mag dragen. Nu is het grappige dat de bedrijfschap geen zeggenschap heeft over A. H. die rustig zijn eieren blijft aanbevelen. Ten tweede poogt de bedrijfschap gedaan te krijgen dat de eieren (die dus geen Y mogen heten) niet aan A. H. geleverd mogen worden. Begrijpt U waarom? Dat zou verwarring kunnen geven. Volgens de wiskundige kippenfokkers mag de grafiek van de eerstegraads functie (dat krielei) niets te maken hebben met de rechte lijn in de analytische meetkunde! Tot zover het pluimvee-nieuws.

Wat de *behandeling* van de functies betreft, geloof ik dat er maar één mogelijkheid is. Het functie-begrip kan alleen begrepen worden als uitgegaan wordt van grootheden waartussen verband bestaat. Begonnen moet worden, liefst op de lagere school, met grafieken van empirische grootheden (temperatuur afhankelijk van de tijd, enz.) Daarna voorbeelden zoals het volgende: Van een rechthoekige plaat moet een goot gemaakt worden. De oppervlakte van de doorsnede hangt af van de hoogte van de rand. Uit de grafiek van dit verband is o.a. af te lezen hoe de goot gemaakt moet worden om zoveel mogelijk water af te kunnen voeren. Dan grafieken van andere formules (functionale verbanden). Steeds moet de achtergrond zijn: een grootheid p hangt af van een grootheid q en deze p en q hebben op zichzelf betekenis. Welke betekenis is voor de algebra zonder belang. Dit dus in de eerste klas. Pas later, daarin hebben de kippenfokkers gelijk, komen problemen waarbij de Y-as beter weggelaten kan worden (voor welke waarden van x is de functie . . .)

IV Vaardigheid

De stof van de lagere klassen moet met grote vaardigheid toegepast kunnen worden; de leerlingen moeten er mee vertrouwd zijn en er met vertrouwen mee werken; ze moeten de stof ter beschikking hebben. Wat die vaardigheid, van psychologisch standpunt, nu

precies betekent, wil ik buiten beschouwing laten. In ieder geval moet ze naar mijn mening niet neerkomen op een zuiver automatisme, evenmin echter op een steeds-weer-bewust-toepassen van regels. Ze moet voortkomen uit een vertrouwdheid die op inzicht gebaseerd is. Men zou kunnen zeggen: *ze moet met inzicht doorschoten zijn*. Het merkwaardige produkt $(A + B)(A - B)$ b.v. moeten de leerlingen blijven zien als de herleiding van een produkt van twee tweetermen waarbij de binnenste termen tegen elkaar wegvallen. Dat kan alleen als niet te snel op beheersing wordt aangestuurd!

Terwille van de selectie worden vaak complicaties behandeld die voor het verdere onderwijs geen betekenis hebben. Dit hangt, meen ik, nauw samen met de gewoonte om de verschillende onderwerpen direct in één hoofdstuk *geheel* te behandelen. Men stelt zich niet tevreden met een voorlopige oriëntatie op een bepaald gebied om er later, eventueel nog enige keren, in ander verband op terug te komen. Doet men dit laatste, dan zijn betrekkelijk eenvoudige opgaven, ook voor de selectie, veel beter geschikt. Ik zou in dit verband nog willen pleiten voor *hoofdalgebra*, waarbij veel beter gecontroleerd kan worden op welk niveau en met hoeveel begrip de vraagstukjes opgelost worden.

V De toekomst

Tot besluit zou ik mij willen wagen aan een voorspelling t.a.v. de toekomst van het algebra-onderwijs in de lagere klassen.

1) De algebra in de lagere klassen zal zich steeds meer ontwikkelen tot een leer der kwantitatieve relaties.

2) De begrippen formule, betrekking en functie zullen daarbij de centrale plaats innemen.

3) Voortdurend zal aandacht besteed worden aan een goede motivatie.

4) De formeel-wiskundige beschouwingen zullen niet direct aan de orde komen (ik denk hierbij niet alleen aan het getalbegrip, maar ook aan bijzonderheden als valse vergelijkingen, delen door nul, invoeren van wortels, enz.)

5) De vergelijkingen zullen meer op de achtergrond raken en de wortelvormen nog verder beperkt worden.

6) Er zal veel meer aandacht besteed worden aan de betekenis van de verkregen resultaten (b.v. wat betekent het als een letter niet meer voorkomt in een uitkomst?).

7) De leerling zal het gevoel krijgen een „instrument” ter beschikking te hebben, dat wel vaak weerbarstig is, maar waarmee hij toch vertrouwd is, en waarvan hij begrijpt hoe hij er kwantitatieve problemen mee tot een oplossing kan brengen.

DE GEWENSTE ONTWIKKELING VAN HET ALGEBRA- ONDERWIJS IN DE EERSTE VIER KLASSEN VAN HET V.H.M.O. ¹⁾

Volgens Dr. P. M. VAN HIELE

Bilthoven

1. Ofschoon de grafieken reeds meer dan dertig jaar geleden officieel in het onderwijs werden ingevoerd, kan men nog steeds niet zeggen, dat zij overal een integrerend deel van het algebra-onderwijs vormen. Velen menen nog, dat aan grafieken geen bewijskracht kan worden toegekend, daarbij over het hoofd ziend, dat alles wat uit de grafiek wordt afgelezen, reeds eerder op correcte wijze bewezen kan zijn. De grafiek is slechts het middel om dat alles snel te overzien. Het gevolg is, dat in vele leerboeken de grafieken veel te laat komen. Ook ziet men dikwijls, dat de grafieken in één enkel hoofdstuk worden afgedaan.

De grafieken dienen het algebra-onderwijs te illustreren overal, waar dat maar mogelijk is. Reeds zeer in het begin in de eerste klas kunnen getallenrijen grafisch afgebeeld worden. De grafieken dienen op een zodanige wijze behandeld te worden, dat de leraar zonder gekweld te worden door schuldgevoelens, conclusies naar aanleiding van de grafiek kan laten trekken.

2. Het is gewenst van vele onderwerpen, zoals kwadratische functies, vierkantsvergelijkingen, getallenrijen, die delen, welke weinig moeilijkheden opleveren, af te splitsen en veel eerder dan thans gebruikelijk is te behandelen. Dit levert een enorme tijdwinst op, die wij zeer nodig hebben. Bovendien wordt zo de kans groter, dat de leerlingen beter het verband tussen verschillende onderwerpen zullen zien.

3. Het uitvoeren van deze gedachte vereist een andere instelling van de leraar. Hij zal er aan moeten wennen, dat het aansnijden van een nieuw onderwerp nog geenszins met zich meebrengt, dat dit onderwerp geheel zou moeten worden uitgeput. Hij zal zich integendeel er van bewust moeten zijn, dat er nog een tweede en misschien zelfs nog een derde ronde komt. Soms zal men in de eerste ronde

¹⁾ Naar de voordracht op de W.V.O.-conferentie van 12 nov. 1960 te Amersfoort.

zekere onnauwkeurigheden moeten toelaten, omdat een preciezere behandeling dan nog niet mogelijk is. Men behoeft er zich geen zorgen over te maken, dat de correctie van die onnauwkeurigheden in de tweede ronde extra moeite zou geven.

4. Verschillende onderwerpen (zoals de merkwaardige produkten) kan men beter uitstellen tot zij gaan functioneren. De merkwaardige produkten b.v. functioneren voor het eerst goed bij de behandeling van de kwadratische functies. Van een dergelijk uitstel mag men een belangrijke tijdwinst verwachten. Thans verspilt men tijd en energie, doordat de leerlingen zulke leerstof voor een groot deel weer vergeten zijn op het tijdstip, waarop zij haar voor het eerst werkelijk nodig hebben. Leerstof beklijft dan pas goed, wanneer zij als bouwsteen dient voor weer nieuw materiaal.

5. Voorlopig hebben wij weinig behoefte aan nieuwe onderwerpen in de wiskunde. De thans ingevoerde nieuwe leerstof stelt ons reeds genoeg problemen. Maar tal van moderne begrippen kunnen in het huidige programma tot verduidelijking voeren. Tot zulke begrippen reken ik: „verzameling”, „doorsnede”, „vereniging”. Met behulp van deze begrippen kan men zich kernachtiger en eenvoudiger uitdrukken.

6. Een apart nummer wil ik geven aan de zo belangrijke begrippen „en”, „of” en „ekwivalent”. Door de typische wijze, waarop deze begrippen optreden in de algebra, levert de algebra een eigen bijdrage tot het logische denken.

7. Er is in de laatste jaren zeer veel aandacht gewijd aan de betekenis van vraagstukken en rekenoefeningen. Voortdurend wordt er op gewezen, dat de uitwassen onder deze vraagstukken velen beletten voldoende tijd aan nuttige leerstof te besteden. Toch blijve men op zijn qui-vive! Er zijn nog talloze leraren, die geen afstand kunnen doen van de opgaven, waarop zij zo jaren lang met succes getraind hebben. Onder het voorwendsel „inzicht” te willen toetsen, wil men oefeningen behouden, waarvan in de „Wimecos-toelichting” het nut ontkend is. Daarom is het goed, dat iedere leraar bij ieder vraagstuk, dat hij laat maken, zich bewust zij, welke functie dit vraagstuk in het leerproces heeft.

8. Een dergelijke nieuwe aanpak van de algebra zal op den duur belangrijke gevolgen hebben. Zo zal men bij het invoeren van de letter in de algebra meer tijd krijgen om zich op de betekenis van die letter te bezinnen. De algebra zal zich meer ontwikkelen in de richting van een begripvak en wat minder als praxis worden behandeld. Misschien zullen de leerlingen wat meer tijd nodig hebben voor hun sommen, want zij zullen minder automatisch werken en er meer over moeten nadenken, of het zinvol is, wat zij doen.

Dat wil natuurlijk niet zeggen, dat er geen automatismen zullen overblijven. De leraar zal er zich echter op moeten bezinnen, wat geschikt is als automatisme en op welk tijdstip tot automatisering kan worden overgegaan.

9. Verschillende onderwerpen zullen moeten worden bewaard voor de laatste twee jaren van het V.H.M.O. Ik denk daarbij aan nadere beschouwingen over het getalbegrip, over irrationaal, over het limietbegrip enz. Pas in de laatste twee jaar mag men van een wat dieper gaande behandeling enig succes verwachten.

10. De algebra van het V.H.M.O. houdt zich voor een zeer groot deel bezig met de in tekenschrift afgebeelde structuur van het rekenen. Men zal zich dus in het beginonderwijs zekerheid moeten verschaffen, dat de leerlingen met deze structuur bekend zijn. Het onderwijs in de algebra van het eerste jaar zal daarom goed — beter dan tot nu toe — moeten aansluiten bij het rekenonderwijs van de lagere school. De verbetering van deze aansluiting zal van twee kanten moeten komen: van het lager onderwijs en van het middelbaar onderwijs.

11. In de eerste vier klassen van het V.H.M.O. zal men de leerlingen zoveel mogelijk onderwerpen uit de algebra moeten leren kennen. Dit onderwijs zal wel veel diepgang moeten hebben: de leerlingen moeten zich rekenschap kunnen geven van alles wat zij doen. Maar er moeten geen onderwerpen in voorkomen „voor de show”. De leus: „leer het nu maar, later zul je het wel begrijpen” heeft afgedaan, want zij is onwaar gebleken. De kans, dat de leerlingen de moeilijke stof in de beide hoogste klassen wel zullen begrijpen, wanneer zij dan behandeld wordt, is zeer groot, want de leerlingen hebben dan een algemene basis en ze zijn geselecteerd naar de B-richting.

12. Al heeft men reeds vele jaren gesproken over coördinatie van wiskunde met andere vakken, feitelijk heeft men aan dit probleem nog niets gedaan. Men heeft nagegaan, welke onderdelen van de algebra in andere vakken optreden en op welke tijdstippen men over die onderdelen zou willen beschikken. Dit heeft met coördinatie weinig uit te staan. Voor een goede coördinatie zou men uitgebreid overleg moeten plegen. Men zou moeten nagaan, of de behandeling in de algebra toelaat, dat de verlangde onderwerpen op tijd ter beschikking staan. Men zou moeten onderzoeken, of deze onderwerpen in de aanverwante vakken inderdaad noodzakelijk zijn. Misschien kan men het daar met eenvoudiger algebra beter af. Men zou ook moeten hebben aangetoond, dat uitstel van deze toepassingen ongewenst of zelfs onmogelijk is.

13. Meer aandacht dan tot nu toe zal men moeten geven aan de vraag, waar voor de leerlingen de begripsmoeilijkheden liggen. In het bijzonder zal men onderscheid moeten maken tussen moeilijkheden, die voortspruiten uit het leren beheersen van technieken (zoals substitutie in merkwaardige produkten, aanvulling tot een volkomen kwadraat) en moeilijkheden, die verband houden met de innerlijke structuur van de leerstof (wat is eigenlijk het oplossen van een vergelijking, wat is het verband tussen functie en relatie). Hier ligt nog een uitgebreid terrein van onderzoek.

14. Mogelijk zal men in de komende tien jaar enige vorderingen kunnen maken met het probleem van de motivatie (de innerlijke drijfveer tot leren). Er zijn op dit punt nog vele begripsverwarringen. In ieder geval is men er niet mee klaar, wanneer men het kind zo ver heeft, dat het graag aan algebra werkt; het moet op grond van een gezonde motivatie aan algebra werken. Iedere wiskundeleraar behoort er naar te streven, dat de leerlingen op den duur algebra met graagte zullen beoefenen, omdat zij onder de bekoring zijn gekomen van de schoonheid van de logische structuur. Maar wie in de eerste klas al op deze motivatie hoopt te kunnen steunen, loopt een zeer grote kans zijn doel volledig te missen!

(spelling gewijzigd door Redactie-Euclides)

HET ONDERWIJS IN DE ALGEBRA IN DE VIER LAGERE KLASSEN

Samenvatting door

Prof. Dr. M. MINNAERT

Utrecht

In november 1960 organiseerde de Wiskunde-Werkgroep zijn jaarlijkse week-eind conferentie opnieuw in de landelijke omgeving van de Grasheuvel bij Amersfoort. Ditmaal waren de besprekingen gewijd aan een onderwerp waaraan tot dusver niet zoveel aandacht besteed is als aan het onderwijs van de meetkunde. Het bleek wel, dat hier tal van belangwekkende vragen te bespreken zijn, die zich tot gezamenlijk overleg lenen; er waren voldoende verschillende standpunten om tot levendige discussie aanleiding te geven, maar er was ook een ruime basis om tot synthese van de uitgesproken meningen te komen.

De motivatie.

Hoe bieden wij de onderwerpen op zulk een wijze aan, dat de leerlingen erdoor gegrepen worden en naar het vervolg verlangen? De veelgeroemde *logische helderheid* is daartoe niet voldoende. De persoon van de leraar of prettige kleuren in het klaslokaal kunnen het onderwijs aantrekkelijk maken. Maar hoofdzaak blijft toch, dat men zich met enig psychologisch gevoel in de keuze van de stof en in de wijze van aanbieden richt op de leerling zoals hij is, met zijn eigen belangstelling en in zijn stadium van ontwikkeling. We willen ons vooreerst afvragen, hoe het allereerste begin van het algebra-onderwijs ingeleid kan worden, en wel zó, dat de functie van de letter duidelijk wordt. De volgende voorstellen kwamen ter sprake:

- a) Men neemt een eenvoudig getallenvraagstukje van de L.S., werkt dit verschillende malen uit, telkens met andere getallen; laat dan zien, dat met letters een *algemene* oplossing verkregen wordt.
- b) Bos gaat uit van de formule voor de doorbuiging van een horizontale, aan het einde ingemetselde balk:

$$d = c \frac{gl^3}{bh^3}.$$

Hij laat allerlei waarden invullen, voor het belastende gewicht g ; voor de lengte l , voor de breedte b en de zoveel belangrijker hoogte h van de (rechthoekige) doorsnee, voor de materiaalconstante c , en laat telkens de doorbuiging berekenen.

- c) En leuk getallenspel is by Sprengers de aanloop ¹⁾. „Schrijf elk maar eens een *willekeurig* getal van één cijfer op. Tel er 6 bij op. Vermenigvuldig het resultaat met 5. Trek er 15 van af. Vermenigvuldig met 3. Trek er drie af. Deel door 12. Trek er het begingetal af. Er blijft 2". — „Hoe weet u dat? Moet dat of is het toevallig?"

Ook in het verdere onderwijs van de algebra zal men gebruik kunnen maken van het inspirerende getallenvoorbeeld of van het spel-element. Men kan zijn aanloop vinden in de geschiedenis van het vak, of in een anekdote; of in een vraagstelling, bij de vorige les opgekomen. Bijzonder nuttig zijn voorbeelden uit de dagelijkse ervaring, uit het maatschappelijk leven of uit andere vakken waarbij de algebra gebruikt wordt, mits die voorbeelden zonder lange uitweidingen begrijpelijk zijn; zulke ingeklede vraagstukjes zijn echter niet gemakkelijk te bedenken, wil men het gekunstelde vermijden. Meijuffrouw Miedema heeft ervaren, dat de leerlingen best in staat zijn, bij een eenvoudige algebraïsche vergelijking passende voorbeeldjes te verzinnen, ontleend aan het verkeer of andere onderwerpen die de leerlingen interesseren. Het vertalen van bepaalde maatschappelijke of natuurwetenschappelijke wetmatigheden in een wiskundige formulering heeft een grote waarde, met het oog op de toepassingen der wiskunde; het is zeer wenselijk, de leerlingen daarin te oefenen. Zelfs kan men zich afvragen of het geen zin heeft, ook sommige overbodige gegevens bij het vraagstuk te vermelden, om de leerling in dezelfde situatie te plaatsen waarin de onderzoeker tegenover het werkelijke probleem staat.

Een uitvoerige motivatie in het leerboek zou meer hinderlijk dan nuttig zijn, zou de spanning wegnemen en het overzicht storen. Bij Montessorischolen kan er wel aanleiding zijn om de motivatie op te nemen; men zou dan aan het eind van het boek een overzichtelijke samenvatting van het bereikte kunnen geven.

Waardoor wordt de leerstof bepaald?

Verschillende overwegingen spelen een rol: de vorming van de leerling tot een denkend mens, de eisen van het H.O. en de eisen van de maatschappij. Daarentegen lijkt het onjuist, leerstof in te voeren

¹⁾ Zie het Mededelingen-blad van december 1960; ook tal van leerboeken.

teneinde een geschikt selectiemiddel te verkrijgen. Ook zal telkens overwogen moeten worden of de wenselijk geachte stof voldoende aan het opnemingsvermogen van de leerling op een bepaalde leeftijd aangepast kan worden.

Of het gelukken zal, via het onderwijs van de wiskunde meer kritisch en helder denkende mensen te vormen, is nog zeer de vraag. Dit hangt natuurlijk af van de mogelijkheid tot „overdracht” van het formele denken, en we weten dat die mogelijkheid beperkt is. Overdracht zou gemakkelijker worden, als men de wiskundige behandeling ook af en toe toepaste op biologische of maatschappelijke onderwerpen. In elk geval neme men niet zonder meer de overdrachtsmogelijkheid aan!

Het heeft iets aantrekkelijks, enige vrijheid te laten in de keuze der leerstof en in de volgorde. Anderzijds is dit zeer onpraktisch voor parallelklassen en wanneer leerlingen naar andere scholen overgaan.

De beperking van de leerstof.

Sommigen klagen over overlading, anderen zijn tevreden. In elk geval moet er tijd gespaard worden waar het kan, omdat men dan belangrijker onderwerpen aan de leerstof zou kunnen toevoegen. Het zou gevaarlijk zijn, hoofdstukken aan te wijzen, die in hun geheel kunnen vervallen; belangrijker is het, nodeloos moeilijke vraagstukken en toepassingen te vermijden. De vraagstukken en toepassingen moeten niet dienen om de vindingrijkheid te bevorderen, maar om de stellingen tot een levende werkelijkheid te maken.

De vraagstukken met wortelvormen wil men terecht nog meer beperken, bijvoorbeeld het vermenigvuldigen en delen van wortel-

vormen. Zelfs tegen $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ wordt bezwaar gemaakt, wat

misschien ietwat overdreven is. De vele sommen met grafieken hieromtrent zijn nodeloze schoolmeesterij.

Over rijen late men alleen de eenvoudigste vraagstukken maken en houde men zich niet bezig met het interpoleren van termen, enz. Vraagstukken over hogere machtswortels kunnen vervallen. Rekenen met niet-natuurlijke exponenten worde nog verder beperkt; late men zo snel mogelijk naar logaritmen overgaan!

Het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen wil men alleen door substitutie laten uitvoeren, niet door optellen of aftrekken.

Een kleine discussie ontspint zich over de merkwaardige producten $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$. Het schijnt wel nodig, die bij de leerstof te behouden, al was het maar voor de kwadraatafsplitsing,

voor het ontbinden in factoren en met het oog op het binomium van Newton. Hier is ook een aardige geometrische toelichting mogelijk. Het onthouden van deze formules is trouwens geen automatisme; het is automatisme gekoppeld aan begrip. Ook hier echter beperken men zich in de vraagstukken.

Toevoeging van leerstof. Verdieping van de begrippen.

Men zou vooreerst kunnen denken aan het behandelen van de talstelsels, in het bijzonder van het 12-tallige en 2-tallige. Bij nader overleg vond men echter, dat dit geen eigenlijke leerstof dient te worden, ten hoogste zou men er één uur aan kunnen besteden. Zelfs voor het werken met rekenmachines is alleen het fundamentele begrip van belang, aangezien de machine zelf de gewone getallen in de 2-tallige notatie overzet, en omgekeerd.

Het invoeren van de rekenlineaal is een reeds vaak uitgesproken wens, waarvan echter de verwezenlijking vertraagd wordt door de hoge prijs (f 9,—, liever f 12,—). Wellicht is het mogelijk, van de fabrikanten te verkrijgen dat een eenvoudiger soort worde vervaardigd, met slechts 2 schalen, maar niet te klein. Sommigen zouden zelfs de rekenlineaal vóór de logaritmen willen behandelen.

Het behandelen van permutaties, combinaties en eenvoudige kansrekening zou een aardige inleiding kunnen zijn voor hetgeen in de bovenbouw verteld zal worden over frequentiekrommen; steekproeven, correlatie.

De steller van deze samenvatting stelt voor, een gegeven curve te leren benaderen door een kwadratische vorm, hetgeen dan later kan uitgebreid worden tot het voorstellen door een machtreeks. Deze methode is van het grootste belang voor alle interpoleren en ook bij het werken met rekenmachines.

De invoering van het geometrische vectorbegrip, later uitgebreid tot het algebraïsche vectorbegrip en de vectornotatie, schijnt wel wenselijk, maar dient eerst nog didactisch te worden uitgewerkt.

Voor de hogere klassen menen velen dat de e -functie behandeld dient te worden, terwijl men na enige aarzeling de cyclometrische functie minder nodig acht.

Aanbevolen wordt, de begrippen verzameling, doorsnede, vereniging, afbeelding enz. in te voeren, mits dit gebeurt aan de hand van bepaalde, concrete voorbeelden en er gelegenheid is, de nieuwe termen telkens opnieuw te gebruiken. Men zou hier echter in de onderbouw geen systematische behandeling aan willen wijden.

Het is nodig, zich te bezinnen op het begrip „variabele”. In de onderbouw zal dit een dynamisch begrip moeten blijven, aansluitend

bij de natuurwetenschappen, waarin gewoonlijk met continue functies gewerkt wordt. De variabele, opgevat als „willékeurig element van de verzameling”, is niet voldoende aanschouwelijk.

Het begrip limiet wordt duidelijker door de begrippen „omgeving” en „gereduceerde omgeving”.

Er dient beter en consequenter onderscheid gemaakt te worden tussen grootheden en maatgetallen, zowel bij de meetkunde als bij de natuurkunde. Men schrijve dus nooit: $\frac{42 \text{ cm}}{7 \text{ sec}}$, maar $\frac{42 \text{ cm}}{7 \text{ sec}}$ of $\frac{42}{7} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$.

Enerzijds moet begripsverwarring vermeden worden, anderzijds sluite men aan bij het praktische gebruik zonder teveel spitsvondigheden.

In het algemeen wordt de behoefte gevoeld aan een cursus die de leraren inzicht zou geven in de nieuwere ontwikkelingen der wetenschap, daarbij tevens de mogelijke toepassing bij het VHMO voorbereidend. In dit verband worde de aandacht gevestigd op de lessen, in Arlon en Brussel gegeven aan leraren uit België en andere landen; en op de cursussen aan de Universiteiten van Utrecht en Groningen, gehouden voor de Vlaamse leraren in januari 1961.

Het twee-ronden stelsel.

Allerlei onderwerpen lenen zich voor een eerste, niet volledige behandeling in de onderbouw, terwijl een meer systematische behandeling in de bovenbouw volgt, als de leerlingen daar rijper voor zijn. De voordelen van deze twee ronden zijn bekend; en evenzo kennen we het bezwaar, dat de belangstelling bij het tweede stadium verslapt. Daarom lijkt het beter in de tweede ronde geheel andere problemen te behandelen, echter gekozen uit hetzelfde hoofdstuk waarvan al iets in de eerste ronde besproken is. Een dergelijke oplossing werd reeds aan de hand gedaan voor de meetkunde door mevrouw Ehrenfest; men vergelijk ook de behandeling van de optica in twee ronden.

Aansluiting met L.O. en met H.O.

„Het M.O. moet zich niet de wet laten voorschrijven door het L.O.!” — Tegenover deze strijdkreet kan men net zo goed beweren, dat het L.O. niet gegeven moet worden terwille van het daarop volgend M.O. Men zou gaarne een ruime discussie wensen en gemeenschappelijk overleg tussen onderwijzers en leraren, want de aansluiting tussen beide schooltypen is een belangrijke aangelegenheid.

De vraag wordt gesteld, of het werken met gewone breuken, in

het bijzonder het vermenigvuldigen en delen van gewone breuken, wel op de L.S. thuis hoort. Men besloot dat deze onderwerpen in geen geval van het programma van de L.S. geschrapt mogen worden, want ook het beheersen van die rekentechniek is waardevol; wel dient men later na te gaan of de leerlingen begrepen hebben wat ze doen.

Er is geen bezwaar tegen het gebruik van letters op de L.S., mits de onderwijzers het werk met deze symbolen begrijpelijk weten te maken.

Het is wel bezwaarlijk, om de theorie der bewerkingen eerst te moeten beredeneren voor de natuurlijke getallen, dan voor de tiendelige breuken, dan voor de gewone breuken, dan nog weer eens voor algebraïsche grootheden. Dit is vervelend voor de leerlingen, tijdrovend voor de leraar. Eveneens is het gekunsteld, de rekenkundige oplossing van allerlei vraagstukjes van de algebraïsche oplossing te blijven onderscheiden.

Voor wat de aansluiting bij het H.O. betreft, zal men eveneens moeten bedenken dat elk onderwijsstadium zijn eigen doelstelling heeft, en dat er van de V.H.M.O. leerlingen maar een zeer klein gedeelte in de wis- en natuurkunde aan de Universiteit gaat studeren. Zo is het dan ook ten onrechte, dat men vele jaren lang op de H.B.S. de beschrijvende meetkunde gedoceerd heeft in plaats van de analytische, alleen omdat de Technische Hogeschool dit wenste.

Het getalbegrip.

Het ligt voor de hand, aan te sluiten bij het L.O. en achtereenvolgens de natuurlijke getallen te bespreken, de nul, de negatieve getallen, de breuken, de irrationele getallen. De negatieve getallen worden aanschouwelijk gemaakt via de thermometer, ook de breuken worden aanschouwelijk ingevoerd. Langs een „getallenlijn” worden de ingevoerde grootheden door stippen voorgesteld. Het invoeren van formele definities (breuken als getallenparen, enz.) kan slechts in een tweede ronde, en dan nog is het de vraag of daar tijd voor zal zijn. Het interessantste voor de leerlingen zijn natuurlijk de irrationele getallen; daarmee kennis te maken moet een belevenis zijn!

Grafieken en functies.

Deze dienen al in de eerste klas en in allerlei vormen ingevoerd te worden. Ze kunnen betrekking hebben op de bevolkingsstatistiek, de beursprijzen, de landbouw, het verkeer. Auerbach heeft laten zien, hoe vrijwel de gehele natuurkunde in grafieken kan worden

weergegeven, en uit zijn werk zijn vele voorbeelden te halen (Physik in Graphischen Darstellungen).

Langs grafische weg kunnen transcendente vergelijkingen het best worden opgelost.

Het begrip *functie* moet ontstaan aan de hand van praktische bewerkingen van allerlei soort. Het zal slechts in een zeer laat stadium nauwkeuriger gedefinieerd worden.

Algemeen.

Niet genoeg kan naar voren gebracht worden het enorme belang van de concrete handeling, het *doen*, dat dikwijls half intuïtief geschiedt, en waarop later de *bezinning* volgt, die dan pas waarde krijgt. Dit geldt vooral voor de onderbouw. Vrijwel altijd zal men dus van de concrete naar de abstracte behandeling moeten overgaan. Zo zal men in sommige gevallen beginnen met een getallenvoorbeeld, om daarna de algemene theorie uiteen te zetten.

Men wenst meer handigheid in het oplossen van de eenvoudige eerstegraadsvergelijking, b.v. van $3x + 7 = 16$, of van $\frac{8}{3x + 1} = 5$.

Deze vaardigheid, doorschoten met inzicht, bevrijdt ons van allerlei belemmeringen in de verdere delen van de leergang.

Late men niet te hoge eisen van strengheid en abstracte bezinning stellen! De maatschappij heeft grote behoefte aan mensen die met wiskunde praktisch werken kunnen. Het onderwijs in de wiskunde moet door de grote meerderheid van onze leerlingen gevolgd kunnen worden en het geleerde moet actief worden toegepast.

Een andere waarschuwing betreft het misbruik van de „instructieve” en „aardige” stellingen of toepassingen: dikwijls weinig belangrijke en meestal niet-eenvoudige onderwerpen, die aldus in de leergang binnengesmokkeld worden.

De behoefte wordt gevoeld aan een stelselmatig onderzoek naar de begripsmoeilijkheden welke de leerlingen ondervinden bij het beoefenen van de algebra, zoals dit ook op ander gebied geschied is (scheikunde).

De hier gegeven samenvatting is natuurlijk niet volledig, maar vermeldt althans de voornaamste besluiten tot dewelke wij bij deze inhoudsrijke besprekingen gekomen zijn. De lezer gelieve te verontschuldigen, dat ik hier en daar enige persoonlijke kleur aan dit overzicht heb gegeven. Late hij zich ook de mooie omgeving van het conferentieoord voorstellen, het genoegen om goede bekenden terug te zien, de vreugde van de gemeenschappelijke warme belangstelling voor onderwijs en voor wetenschap.

BIJ HET ZILVEREN FEEST VAN DE „WISKUNDEWERK- GROEP”, 1936—1961.

Dr. JOH. H. WANSINK.

De Wiskundewerkgroep van de W.V.O., werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, Nederlandse afdeling van de New Education Fellowship (N.E.F.), bestaat in 1961, evenals de W.V.O. zelf, vijfentwintig jaar.

Dit zilveren feest is voor ons, wiskunde-leraren, een gerede aanleiding even stil te staan bij de activiteiten van de werkgroep en bij de betekenis van deze groep voor het wiskunde-onderwijs in Nederland.

De groep heeft zich gedurende al deze jaren gekenmerkt door een levendige belangstelling voor alle problemen die er op didactisch gebied liggen, door een kritisch non-conformisme voor wat de inrichting van het hedendaags onderwijs betreft, voor een grote bereidwilligheid om met ieder die dat wenst, tot een ernstig gesprek te komen. Voor deelname aan het werk van de groep is het lidmaatschap van de W.V.O. niet verplicht, ieder die dit wil kan zonder verdere formaliteiten „medewerker” worden.

Het is voor het wiskundig leven in Nederland van grote betekenis, dat de Werkgroep sinds 1948 zo goed als ieder jaar een herfstconferentie houdt, waar twee dagen lang brandende problemen worden besproken.

Deze conferenties hebben steeds uitgeblonken door een welverzorgd programma en bij herhaling is de leider der conferenties, Prof. Freudenthal, er in geslaagd buitenlandse sprekers voor de conferentie te winnen. We noemen de namen Dr. Wagenschein, Dr. Kraus, Ronsmans, Prof. Howard Fehr, Prof. Choquet, Dr. Bosteels.

Omdat ik in de 28ste jaargang van Euclides een uitvoerig artikel heb gewijd aan de Werkgroep kan ik hier volstaan met het aangeven van enige namen van centrale thema's op de conferenties aan de orde gesteld: het wiskundeonderwijs aan niet-mathematische richtingen, het aanvankelijk meetkundeonderwijs, het eind-examen, de aansluiting van het rekenonderwijs op de lagere school en het algebraonderwijs op de middelbare school, vernieuwing van

het wiskundeonderwijs door nieuwe programma's en nieuwe didactische methoden, de ontwikkeling van de didactiek van het algebraonderwijs. De „Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique zou op haar internationale werkprogramma 1958—1962 niet het thema „relations entre l'arithmétique et l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques pour les enfants jusqu'à l'âge de quinze ans" hebben geplaatst, als dit niet van te voren een uitvoerige discussie in de bijeenkomsten van de Nederlandse werkgroep had gekregen.

Gelukkig is het voor hen, die niet aan de conferenties deelnamen, mogelijk het gesprokene na te lezen, of in de serie publicaties van de Werkgroep, die bij Muusses in Purmerend verschenen, of in de opvolgende jaargangen van Euclides.

Van groot belang acht ik voorts de maandelijkse bijeenkomsten van de Werkgroep in het Mathematisch Instituut te Utrecht. Hier worden uiteenlopende problemen uit de theorie en de praktijk van ons onderwijs aan de orde gesteld na doorwrochte inleidingen. Hier is èn voor de jonge docent èn voor de leraar met meer ervaring steeds veel te leren. De leiding is sinds 1950 in handen van Prof. Freudenthal, wiens vakkenis, kritische geest en warme didactische belangstelling het gehalte der discussies ten goede doen komen.

Het is jammer dat het Utrechtse voorbeeld niet elders in den lande wordt nagevolgd. Er zijn m.i. redenen genoeg om te overwegen analoge besprekingen ook elders in Nederland te organiseren, zodat men niet zoals thans soms zes uren op één zaterdag moet reizen om een bespreking bij te wonen.

Ter onderstreping van de betekenis van het werk van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. wijs ik de lezers van Euclides speciaal op het werk dat door de groep in de jaren 1948—1952 werd verzet voor de vernieuwing van het wiskundeonderwijs op onze scholen. Zie: „Het Wiskunde-programma voor het V.H.M.O.", uitgave van Muusses, Purmerend. Men zal eruit leren dat het wiskundeprogramma van 1958 op tal van plaatsen door het voorbereidend werk van de groep mede is bepaald.

Wiskundig Nederland mag de Werkgroep en zijn leiders dankbaar zijn voor wat er voor de verbetering van het wiskundeonderwijs door de groep wordt gepresteerd.

We wensen de Werkgroep en zijn leiders van harte geluk met het zilveren feest en we hopen, dat de groep zijn werk nog lang met onverminderde toewijding zal voortzetten ter wille van het welzijn van ons Nederlandse onderwijs.

WISKUNDE IN DE LEERLINGENBIBLIOTHEEK II

door

D. LEUJES

Delft

Een lijst van boeken over wiskunde, die wellicht voor de leerlingenbibliotheek geschikt zijn, is gepubliceerd in *Euclides* 35e jrg., nr. X, blz. 335. Van enkele kanten hebben de redactie en ik aanvullingen ontvangen. Aan de redactie schreven de heren E. Bouqué, Overmere (België), G. H. J. Doorenbosch, Maastricht en Dr. D. Schepel, Haren; ik ontving de boekenlijst van de leerlingenbibliotheek, afdeling wiskunde, van het Arnhemse gymnasium van Dr. Vredenduin en een brief van Dr. D. J. E. Schrek, Utrecht, waarin deze mij o.a. schreef, dat er van Platland een nieuwe Amerikaanse uitgave bestaat. Hij noemde een aantal boeken, waaronder een tiental, opgegeven door Prof. van der Blij op een Studium Generale voor studenten buiten de faculteit der wis- en natuurkunde. Verder is Dr. Schrek zo vriendelijk geweest in de bibliotheek van het Mathematisch Instituut te Utrecht te gaan zoeken naar titels van soortgelijke boeken. Ook dit leverde weer een lange lijst op.

De ontvangen gegevens had ik tot één geheel verwerkt; naar aanleiding van de gegevens, die bij de redactie waren binnen gekomen, had Dr. Wansink ook een artikeltje geschreven, zonder dat wij iets van elkaars activiteit op dit gebied wisten. Dit bleek pas, toen de beide artikelen op de redactietafel lagen. Daar ze elkaar echter gedeeltelijk overlaptten, heeft Dr. Wansink mij gevraagd er een nieuw geheel van te maken.

Omdat dezelfde titel in verschillende lijsten werd genoemd, heb ik nu eenvoudig alle binnengekomen titels alfabetisch naar de schrijvers gerangschikt teneinde een overzichtelijk geheel te krijgen. In tegenstelling tot mijn eerste lijst is in deze zo mogelijk de uitgever genoemd.

Vooraf echter nog een paar opmerkingen.

De heer Bouqué schreef: „In de eerste plaats wens ik te wijzen op een analoge lijst die reeds vroeger in het Belgische zusterblad *Mathematica & Paedagogia* werd gepubliceerd (nummer 13, 1957—

1958). De lijst bevat 39 titels, waarvan er 6 reeds in Euclides voorkomen; 13 andere zijn getrokken uit de merkwaardige serie „Que sais-je”, waarvan de lectuur doorgaans aanbevelenswaardig is”.

De laatste woorden zouden een verkeerde indruk kunnen maken voor wat betreft de hieronder te publiceren lijst. Met nadruk citeer ik uit het artikel van Dr. Wansink: deze lijsten hebben niet de pretentie slechts „aanbevelenswaardige” boeken te noemen; het is alleen de bedoeling elkaar op de hoogte te brengen van wat er op dit gebied is verschenen; van sommige boeken is een recensie in Euclides verschenen, aan een enkel is zelfs een artikel gewijd (zie: Prof. Dr. H. Freudenthal, *Een gevaarlijk boek*, 34e jrg., blz. 188). Plaatsing in onderstaande lijst betekent dus geenszins een aanbeveling voor opname in de leerlingenbibliotheek. Aan een beredeneerde catalogus zijn we thans nog niet toe.

Hieronder volgt dan de lijst.

Abbot, E. A.	Flatland (Dover, New York)
Balser	Einführung in die Kartenlehre (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)
Bell, E. T.	The development of Mathematics (Mc Graw-Hill, New York, Londen)
Bell, E. T.	The magic of numbers (Mc Graw-Hill, New York, Londen)
Beth, E. W.	Symbolische logica (Servire, Den Haag)
Boehm, A. W.	The new world of Math (Dial Press, New York)
Boll, Marcel	Les étapes des mathématiques („Que sais-je”, 42, Parijs)
Bosman, A. E.	Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde (Parcival, Breda)
Bosteels, G.	Het leven der getallen (De Sikkels, Antwerpen)
Boucheny	Curiosités et récréations mathématiques (Larousse, Parijs)
Braun & Los	Op zoek naar het Onbekende (Phoenix-pocket, 33)
Breidenbach	Die Dreiteilung des Winkels (Math.-phys. Bibl. Teubner, Leipzig)
Breidenbach	Das Delische Problem (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)
Beutel, E.	Die Quadratur des Kreises (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)
Clifford, W. K.	The common sense of the exact sciences (Dover, New York)
Colerus, E.	Van Pythagoras tot Hilbert (De Techniek, Antwerpen)

- Dedron & Itard Mathématiques et Mathématiciens
 (Magnard, Parijs)
- Delaruelle, A. Het eeuwige getal
 (Standaard, Antwerpen)
- Dessauer Isaac Newton's Levensreis tot Scheppend Inzicht
 (De Kern, Den Haag)
- Escher, M. C. Grafiek en tekeningen
 (Tijl, Zwolle)
- Gamow 1-2-3-... ∞
 (Van Stockum, Den Haag)
- Gamow-Stern Puzzle-math
 (The Viking Press, New York)
- Gamow-Stern Jeux mathématiques; quelques casse-tête
 (Dunod, Parijs)
- Gardner, M. Mathematics, Magic and Mystery
 (Dover, New York)
- Gerretsen, J. C. H. Niet-Euclidische Meetkunde
 (Noorduijn, Gorinchem)
- Heath, T. L. Euclid in Greek
- Hunger Mathematik und Bildung
 (Georg Westermann Verlag)
- Kasner, Edw. &
 James Newman Mathematics and the Imagination
 (Simon & Schuster, New York)
- Killerer, H. Statistiek
 (Ro-ro-ro-serie, 103, 104)
- Kline, M. Mathematics in Western Culture
 (Allen & Unwin, Londen)
- Kline, M. Mathematics and the Physical World
- Kraitchik, M. Mathematical recreations
 (Dover, New York)
- Kramer, Edna E. The Main Stream of Mathematics
 (Oxford University Press, New York)
- Krbek, von De ontwikkeling der natuurwetenschap
 (Kluwer, Deventer)
- Leeuwen, A. P. van Peinzen en Piekeren
 (Becht, Amsterdam)
- Lietzmann, W. Riesen und Zwerge im Zahlenreich
 (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)
- Lietzmann, W. Der Pythagoreische Lehrsatz
 (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)
- Lietzmann, W. Altes und Neues vom Kreis
 (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)
- Lionnais, F. le Les grands courants de la pensée mathématique
 (Cahier du Sud)
- Marchal, P. E. Histoire de la géométrie
 („Que sais-je“, 109, Parijs)
- Maxwell, E. A. Fallacies in Mathematics
 (Cambridge University Press)

- | | |
|---------------------------------|---|
| Menninger, K. | Mathematik in deiner Welt
(Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen) |
| Menninger, K. | Ali Baba und die 39 Kamele
(Vanderhoeck & Ruprecht, Göttingen) |
| Menninger, K. | Mathematik und Kunst
(Kleine Vanderhoeck-Reihe, 78) |
| Menninger, K. | Zwischen Raum und Zahl
(Ullsteinbücher, 267) |
| Morgan, A. de | Budget of Paradoxes
(Dover, New York) |
| Newman, J. R. | The world of Mathematics; a small library of the
literature of mathematics
(Simon & Schuster, New York) |
| Niklitschek | Tovertuin der Wiskunde
(Thieme, Zutphen) |
| Northrop, E. P. | Riddles in Mathematics; a book of paradoxes
(Hodder & Stoughton, Londen) |
| Os, C. H. van | Getal en Kosmos
(Meulenhoff, Amsterdam) |
| Poortenaar, J. | De gulden snede
(„In den toren", Naarden) |
| Rademacher, H. &
O. Toeplitz | Von Zahlen und Figuren
(Springer, Berlijn) |
| Rademacher, H. &
O. Toeplitz | The enjoyment of mathematics
(Amerikaanse bewerking van het vorige boek)
(Princeton, New York) |
| Reichmann, W. J. | Spelen met cijfers
(Prisma-pocket, 440) |
| Rousseau | Histoire de la Science
(Fayard, Parijs) |
| Sawyer, W. W. | Wiskunde zonder omslag (vertaling van: Mathemati-
cian's Delight)
(Prisma-pocket, 203) |
| Schneider, E. | Van nul tot oneindig
(Ruys, Bussum) |
| Schubert, H. & F. Fitting | Mathematische Mußestunden
(Walter de Gruyter, Berlijn) |
| Smith, D. E. | Number Stories of Long Ago
(Ginn, Boston) |
| Steinhaus, H. | Mathematical Snapshots
(Oxford University Press, New York) |
| Taton, R. | Histoire du calcul
(„Que sais-je", 198, Parijs) |
| Tietze, H. | Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus
alter und neuer Zeit
(Biederstein Verlag, München) |
| Veen, S. C. van | Passermeetkunde
(Noorduijn, Gorinchem) |
| Versluys, J. | 96 bewijzen voor het Theorema van Pythagoras
(Noordhoff, Groningen) |

Weitzenböck, R.	Der vierdimensionale Raum (Birkhäuser, Bazel)
Whitehead, A. N.	An introduction to Mathematics (Oxford University Press, New York)
Zühlke	Konstruktionen in begrenzter Ebene (Math.-phys. Bibl., Teubner, Leipzig)

PROGRAMMA VAN HET EXAMEN VOOR DE AKTE WISKUNDE M.O. B ¹⁾.

N.B. Met het oog op een nauwkeurige omschrijving van de examenstof is deze in het navolgende aangegeven door verwijzing naar zekere leerboeken. Dit houdt niet in dat uitsluitend of in de eerste plaats deze boeken als studieboeken en aanmerking komen.

1. DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING EN DIFFERENTIAAL- VERGELIJKINGEN

Het programma bestaat uit de onderwerpen behandeld in:

R. Courant, Differential and Integral Calculus I en II, terwijl bovendien van de differentiaalvergelijkingen wordt gevraagd: gewone differentiaalvergelijkingen (elementaire integratiemethoden, existentiebewijs van de oplossingen, lineaire differentiaalvergelijkingen) in de omvang als behandeld in:

G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, hoofdstukken I en II en van de partiële alleen degene van de eerste orde die lineair zijn in de afgeleiden. Dit kan men b.v. vinden in:

H. Bremekamp, Partiële Differentiaalvergelijkingen.

2. FUNCTIETHEORIE

De examenstof is te vinden in:

K. Knopp, Funktionentheorie I en II (Göschen) met uitzondering van de hoofdstukken 3, 5, 6 uit deel II.

Voor uitvoeriger behandeling van enkele hoofdstukken uit bovengenoemd boek wordt gewezen op overeenkomstige gedeelten en het oefenmateriaal in:

C. H. van Os, Inleiding tot de functietheorie.

L. V. Ahlfors, Complex Analysis.

Voor de vraagstukken zij bovendien verwezen naar:

K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I en II (Göschen).

¹⁾ Gaarne opgenomen op verzoek van de examencommissie Wiskunde M.O.

Ten overvloede wijst de examencommissie er op dat dit programma, evenals dat van het examen voor de akte wiskunde M.O.A. (Euclides, 36e jaargang, IV, blz. 118—122), niet is het „uitgewerkt programma” bedoeld in art. 3 van het K.B. van 15 sept. 1958, Stb. 452.

3. HOOFDSTUKKEN UIT DE MEETKUNDE

Dit omvat de volgende onderdelen:

A. *Differentiaalmeetkunde*

Zie J. Haantjes, *Differentiaalmeetkunde*, (Noordhoff, Groningen). Hoofdstukken I—IV.

B. *Niet-euclidische meetkunde*

Zie J. H. Barrau, *Analytische Meetkunde*, deel I, hoofdst. I par. 24—26, hoofdst. II par. 35 en 36, en hoofdst. VI par. 152—156 en par. 161.

C. *Axiomatiek der projectieve meetkunde*

Het is de bedoeling dat de kandidaat op de hoogte is van de axioma's die een analytische projectieve meetkunde over een willekeurig lichaam karakteriseren, en een methode om uit de meetkunde het lichaam terug te vinden. Deze stof wordt behandeld o.a. in een syllabus van een door Prof. Dr. A. Heyting gegeven college. Deze syllabus is verkrijgbaar gesteld aan het Mathematisch Instituut van de universiteit van Amsterdam. Voorts wordt de bedoelde stof ook behandeld in een Engels collegedictaat „Projective Geometry” van S. S. Chern (30 bladz.). Dit is verkrijgbaar aan het Mathematisch Instituut te Utrecht; inlichtingen hierover bij Prof. Dr. T. A. Springer, Mathematisch Instituut, Boothstraat 17, Utrecht.

Het examen over dit onderdeel zal beperkt blijven tot een mondeling examen, waarbij rekening wordt gehouden met de literatuur die door de kandidaat is bestudeerd.

UIT DE OPENINGSTOESPRAAK VAN DE VOORZITTER
VAN WIMECOS TOT DE ALGEMENE VERGADERING VAN
28 DECEMBER 1960.

Kenmerkte zich het verenigingsleven van Wimecos in 1959 door een betrekkelijke rust, het jaar 1960 is rijker aan spanningen en verrassingen gebleken, waarbij zelfs het bestaansrecht van onze vereniging als WI-ME-COS in het geding blijkt te komen.

Op 29 januari verschenen de Koninklijke besluiten ter regeling van de eindexamens hogereburgerschool en gymnasium, waarnaar ik op onze vorige jaarvergadering reeds verklaard had verlangend uit te zien. Deze besluiten bevatten voor ons geen element van verrassing.

Onthutst werden we echter door de Koninklijke besluiten 388 en 390 van 27 september 1960, die weliswaar als „noodmaatregel” waren aangekondigd in verband met het dreigend tekort aan gecommiteerden en deskundigen, maar die tal van wijzigingen bleken in te houden die met dat gevreesde tekort geen verband hielden en die naar vrijwel algemene overtuiging in kringen van het onderwijs en erbuiten een aanslag betekenden op de waarde van het mondeling eindexamen. We wijzen hier op de verandering in de status van de mechanica op de hogereburgerscholen, waarmee op komende wetswijzigingen werd vooruitgelopen, op de invoering van schriftelijke examens voor natuur- en scheikunde op het gymnasium, op de invoering van vrijstellingen voor het gymnasium en op de invloed van het lot op de uitslag van het mondeling examen. De alarmtoestand in het onderwijs werd door de mededeling van 14 november 1960, dat de invoering der omstreden Koninklijke besluiten werd opgeschort, plotseling opgeheven.

Vrijwel op hetzelfde ogenblik (15 november 1960) heeft het Bestuur van Wimecos een protest aan de Staatssecretaris doen toekomen, waarvan de inhoud u uit de Weekbladen en uit het decembernummer van Euclides bekend is. In dit adres heeft het Bestuur van Wimecos er zich in hoofdzaak toe bepaald, zijn bezwaren met betrekking tot het mechanicaonderwijs en het examen in de mechanica uiteen te zetten. Wat de wiskunde op de hogereburgerschool betreft vormden de veranderingen in het eindexamen geen bedreiging voor de betekenis en de waarde van het examen.

Ten aanzien van wiskunde was er duidelijke divergentie tussen de inzichten en de waardering van Wimecos enerzijds en Liwenagel anderzijds. Dit komt het sterkst tot uitdrukking in de wederzijdse standpunten ten aanzien van het instituut der vrijstellingen. Liwenagel wenst deze vrijstellingen niet, Wimecos heeft door de aanvaarding van een Rapport inzake herziening van het Eindexamen der hogereburgerscholen (Commissie Buzeman) welk rapport in oktober 1948 werd ingediend en in januari 1949 door onze jaarvergadering werd aangenomen, zich ondubbelzinnig vóór het instituut der vrijstellingen uitgesproken.

De omstandigheid dat Liwenagel zich op 3 november 1960 in een adres aan de Staatssecretaris tegen invoering van de vrijstellingen op de gymnasiale eindexamens had verklaard, is voor het Bestuur van Wimecos aanleiding geworden om zich in zijn adres van 15 november tot kritiek op het KB 390 en daarmee tot het eindexamen van de hogereburgerschool te beperken. Geheel bevredigend was dit alles niet, immers de belangen van het wiskunde-onderwijs op de gymnasia behoren sinds de statutenherziening van 27 december 1956 mede door ons behartigd te worden. Ik kan u echter de verzekering geven dat de besturen van Wimecos en Liwenagel er in de toekomst naar zullen streven in zaken die het wiskunde-onderwijs op het gymnasium betreffen steeds overleg te plegen voor er tot optreden naar buiten wordt overgegaan.

De bedreigde status van de biologie op onze scholen heeft in het afgelopen jaar de diverse verenigingen die de belangen van het onderwijs in de exacte vakken behartigen, tijdelijk samengebracht. Permanente samenwerking tussen alle zusterverenigingen zal in de toekomst een steeds dringender eis worden om in deze toekomst de belangen der exacte vakken veilig te stellen.

De Wet op het Voortgezet Onderwijs zal het straks nodig maken dat allerlei uitvoeringsmaatregelen worden getroffen waardoor het karakter van de onderscheiden schooltypen die deze wet kent zal komen vast te staan. Hier nu ligt voor ons en de zusterverenigingen een belangrijke taak. Wij zullen namelijk niets mogen nalaten wat zal kunnen dienen om de totstandkoming te bevorderen van een schooltype, waar het onderwijs in de exacte vakken sterker zal domineren dan thans op hbs-B en gymnasium-B het geval is.

Ik heb al vaker naar voren gebracht dat in de eerste helft van de 20e eeuw er een tendens valt te constateren tot vermindering van het gewicht dat i.h.b. aan de wiskunde wordt toegekend. Er is een tijd geweest dat Nederland t.o.v. de exacte vakken de

faam genoot zich gunstig van andere landen te onderscheiden. De voorsprong van weleer is echter verloren gegaan, zoals men door kennis te nemen van schoolprogramma's in andere landen zal ontdekken.

In een tijd als deze waarin de opbloei van de exacte vakken een ongekennde vlucht neemt, een tijd, waarin gebruik en misbruik van technische toepassingen voor het welzijn van de maatschappij van niet gemakkelijk te overschatten betekenis worden, dient het onderwijs in de wiskunde en in de natuurwetenschappen de speciale aandacht van de autoriteiten te hebben.

We hebben in het afgelopen jaar, nl op 25 maart onze mening inzake deze materie met de conclusies die er ten aanzien van de organisatie van het voortgezet onderwijs o.i. uit dienen te worden getrokken kenbaar gemaakt aan de Raad van Leraren, nadat een door deze Raad benoemde Commissie van Tien voorstellen had geformuleerd ter nadere uitwerking van het Wetsvoorstel inzake het Voortgezet Onderwijs. Met open oog voor de kwaliteiten die het onderwijs in de klassieke talen voor de algemene vorming van onze leerlingen in de pre-universitaire periode kan bezitten, hebben we in genoemd adres ernaar gestreefd te voorkomen, dat een onjuiste opvatting over anders georiënteerd onderwijs zou kunnen postvatten, nl. de opvatting dat onderwijs in de moderne talen, in de wis-en natuurkunde, in de maatschappelijke vakken principieel niet in staat zou zijn een alleszins verantwoorde voorbereiding tot het volgen van wetenschappelijk onderwijs te geven. We hebben ons in verband hiermee nu beijverd om o.a. een urentabel te maken voor de school, waar wis- en de natuurkunde op de voorgrond dienen te staan. Het karakter van deze school komt o.m. tot uitdrukking door het feit, dat het urentotaal voor de exacte vakken er het urentotaal voor de talen dient te overtreffen. Wij zijn voldoende onder de indruk van de betekenis die juist voor een klein land als Nederland aan het talenonderwijs dient te worden toegekend en hebben daarom voor de talen op het door ons bedoelde schooltype meer uren kunnen uittrekken dan er thans voor dit doel op de hbs-B beschikbaar zijn. Dit is mogelijk geweest doordat de toekomstplannen aan alle schooltypen voor VWO een zesjarige cursus toedenken. Voorkomen dient echter te worden, dat in Nederland alle scholen voor VWO tot talenscholen worden. We hebben om het zo pregnant mogelijk uit te drukken behoefte aan minstens één schooltype van uitgesproken exacte signatuur.

Op 6 december 1960 is aan de Staatssecretaris medegedeeld, dat het Bestuur van Wimecos het zeer op prijs zal stellen, als het

in de toekomst bij de vaststelling van leerplannen, urentabellen, examenregelingen, enz., voorzover deze de wiskunde, de mechanica en de cosmografie betreffen, vooraf geraadpleegd zal worden. Een mededeling van de Staatssecretaris van 14 november 1960, waarin werd aangekondigd, dat met de daarvoor in aanmerking komende instanties en personen binnenkort overleg zou worden geopend over de wijze, waarop de eindexamens der gymnasia en hogereburgerscholen zullen kunnen worden geregeld zonder dat aan de waarde van de diploma's dezer scholen afbreuk wordt gedaan, was voor ons de aanleiding om het vermelde verzoek bij de Staatssecretaris in te dienen.

Het was middelerwijl reeds te laat om nog gekend te worden inzake het wetsontwerp nr 6155, gedateerd 22 oktober 1960, dat ook ons ten zeerste raakt. Eén der voorstellen uit dit ontwerp is nl., om in twee artikelen van de wet op het M.O. het woordje „mechanica” te schrappen, waardoor dit vak expliciet uit het onderwijs en uit het eindexamen verdwijnt.

Dit wetsontwerp 6155 is op donderdag 22 december zonder discussie in de Tweede Kamer aanvaard, d.i. even voor het ontstaan van de huidige kabinetscrisis.

Hiermee is de strijd om de mechanica die minstens een kwart eeuw pennen en gemoederen in beweging heeft gebracht, ten gunste van de opvattingen die b.v. in Velines en in de Ned. Nat. Vereniging naar voren zijn gebracht, beslist. Principieel beslist, want op dit moment is er nog enkel geschrapt; de integratie van de mechanica in de natuurkunde moet nog komen.

Is de dag van de kabinetscrisis daarmee ook voor de mechanica tot een kwade dag geworden?

Uit ons adres aan de Staatssecretaris zal u bekend zijn dat we tegen de samenvoeging van natuurkunde en mechanica geen bezwaar hebben mits er voor een doeltreffend functioneren van deze samenvoeging wordt gezorgd. Dit was in wetsontwerp 390 waartegen in ons adres van 15 november werd geprotesteerd, stellig niet het geval.

Naar onze mening houdt een goed functioneren in, dat er voor de desbetreffende vakken gezamenlijk na de samenvoeging niet minder uren beschikbaar moeten zijn dan er voorheen beschikbaar waren. We wezen er reeds op, dat in het verleden bij herhaling urenafknabbeling te constateren is geweest, tot nadeel van ons onderwijs.

Voorzover mij bekend is er ten aanzien van de vraag wat er met de vier uren die door de afschaffing zogenaamd vrijkomen, moet

gebeuren, nog geen beslissing gevallen. Ik wijs erop dat er enige jaren geleden sprake van geweest is om in de vierde en de vijfde klasse telkens één uur naar de natuurkunde te brengen, waar dan de onderwerpen uit de mechanica, in bescheidener omvang dan we dat thans kennen, aan de orde zouden kunnen komen. In de vierde klasse zou één uur naar de wiskunde gaan in verband met de taak die de wiskunde t.a.v. de wiskundige behandeling van begrippen uit de kinematica en de dynamica speciaal toegewezen gekregen heeft: er is destijds ook nog sprake geweest voor de statistiek een uur, eventueel facultatief, in te ruimen. Van belang was ook het plan van destijds om het uit een oogpunt van algemene ontwikkeling zo belangrijke vak kosmografie, dat in de praktijk te dikwijls in de verdrukking komt, op twee uren in de vijfde klasse te brengen.

Ik hoop dat deze plannen van weleer, waarop velerlei variaties denkbaar zijn, niet in het vergeetboek zullen raken. Ons verzoek van 6 december om geraadpleegd te worden is stellig ook van toepassing op het gebruik dat van de nu vrijgekomen mechanicaïren zal worden gemaakt.

In de hoop dat ik u in dit openingswoord enigszins op de hoogte heb gebracht van de problemen die ons in het jongste verleden hebben beziggehouden en van de problemen die ons in nabije toekomst bezig zullen houden en met de wens dat we ten aanzien van de diverse programmapunten een vruchtbare samenspreking zullen kunnen hebben, verklaar ik deze jaarvergadering voor geopend.

BOEKBESPREKING

Güntsch, *Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten*, 144 blz. Uitg. Walter de Gruyter & Co, Berlijn 1960, DM 24.—.

Het schrijven van een leerboek over programmeren is een moeilijke zaak. De moeilijkheid ligt hierin, dat men een aantal algemene principes heeft, die gemeenschappelijk zijn voor alle digitale rekenmachines, maar dat daarnaast de toelichting met behulp van voorbeelden altijd aan de hand van een bepaalde machine moet gebeuren. In het onderhavige boek geschiedt dit aan de hand van de Zuse Z 22, een betrekkelijk kleine en langzame machine, die in Nederland niet wordt gebruikt. Indien de schrijver de programmering had toegelicht aan de hand van de meer universele taal Algol, waarin over enige tijd althans een aantal machines kunnen worden geprogrammeerd, dan was zijn boek waardevoller geworden. Momenteel is de situatie echter zo dat iedereen die wil leren programmeren dit doet om te zijner tijd programma's voor een bepaalde machine te kunnen schrijven en hij zal het programmeren dus in de eerste plaats willen leren voor die betreffende machine.

In het boek worden een aantal programmeertechnieken beschreven, zoals de organisatie van cyclische programma's, het gebruik maken van subprogramma's, de toepassing van symbolische adressen en de automatisering van adresveranderingen. De schrijver is echter niet op alle punten even duidelijk, bv. niet bij de bespreking van de drijvende komma op blz. 21. Voorts wordt op blz. 17 gezegd dat

de trommel 50 omw./sec. maakt, zodat de gemiddelde wachttijd 5 msec. is. Op blz. 23 vindt men de ongelijkheid $-B^n \leq |z| < B^n$.

A. I. van de Vooren

De Brug: *Handboeken voor wiskunde*. A. Permentier: *Rekenkunde, meetkunde en metriek stelsel*; 300 blz.; prijs ing. 145 belgische franken; 1960. De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen.

In het eerste deel „Rekenkunde” worden de eigenschappen van de hoofdbewerkingen behandeld met talrijke oefeningen in hoofdrekenen en schriftelijk rekenen, alsook bewerkingen met tiendelige getallen en breuken. Dit is dus bij ons stof voor de lagere school.

Het tweede deel is een wel zeer uitvoerige intuïtieve inleiding tot de vlakke meetkunde. Deze bevat veel aardige vondsten, maar ook veel overbodigs. Oppervlakten en inhouds berekenen door niet exact bewezen formules te gebruiken heeft niet veel zin. Alhoewel het boek in zijn geheel dus voor ons middelbaar onderwijs ongeschikt is, bevat het toch een aantal ideeën, waar iedere wiskundeleraar zijn voordeel mee kan doen.

P. Bronkhorst

Prof. Dr. N. H. Kuiper, *Differentiaal- en integraalrekening*. H. Veenman & Zn., Wageningen, 1960; 120 pag., ing. f 10,40.

Het boek is in het bijzonder bestemd voor studenten aan de Landbouwhogeschool. Het is de moeite waard er eens kennis van te nemen, als men het in handen krijgt. De presentatie van de stof, in het bijzonder van het functiebegrip, de continuïteit en de beginselen van de differentiaalrekening is modern. Aardig vond ik de manier, waarop de natuurlijke logaritme ingevoerd wordt. Eerst wordt plausibel gemaakt, dat $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ bestaat. Deze limiet wordt per definitie gelijk aan e gesteld. Dan volgt:

$$„[\log(a+h) - \log a]/h = h^{-1} \log(1+h/a) = a^{-1} \log(1+h/a)^{a/h}”$$

waarna het duidelijk is, dat de afgeleide van $\log x$ gelijk aan $a^{-1} \log e$ is. De moeite waard vond ik ook de praktische toepassingen van differentiaalvergelijkingen.

P. G. J. Vredenduin

Dr. Hans Freudenthal, *Lincos, Design of a Language for Cosmic Intercourse*, Part I. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960; 224 blz., f 22,50.

De vraag, hoe de schrijver een systeem van signalen meent te kunnen construeren, geschikt om door bewoners van andere planeten begrepen te worden, zal ongetwijfeld velen intrigeren. Op aarde communiceren we door middel van woorden, waarvan de betekenis aanvankelijk door aanwijzing duidelijk gemaakt wordt en later uit het zinsverband blijkt of expliciet uitgelegd wordt. Een uitzondering op deze regel vormen de formele systemen, die officieel betekenisloos zijn, doch aan welker oorspronkelijke betekenisloosheid niemand geloof hecht. Deze hebben het voordeel slechts zeer weinig grondbestanddelen te bevatten. Is de betekenis daarvan duidelijk, dan zorgen expliciete definities er in het algemeen voor, dat de betekenis van afgeleide begrippen en relaties ook duidelijk wordt. Het is dan ook geen wonder, dat de schrijver begonnen is met delen van wetenschap over te seinen, die zich aards laten formaliseren, omdat de structuur hiervan betrekkelijk simpel is. Hij begint met een stuk getallentheorie, waarin tevens de logische operatoren verwerkt zijn.

Hij volgt daarbij echter niet de methode van de formele systemen, doch maakt zoveel mogelijk door voorbeelden duidelijk, wat de inhoud van de aritmetische en logische begrippen is, onder vermindering van expliciete definities.

Zo hebben de eerste mededelingen de vorm $\dots > \dots, \dots < \dots, \dots = \dots$, waarbij „ $>$ “, „ $<$ “ en „ $=$ “ door bepaalde seinen gerepresenteerd worden. Door veelvuldige herhaling van dit soort mededelingen wordt de ontvanger ertoe gebracht te begrijpen, wat de bedoeling van de zender is. Enerzijds is de analogie met het aardse taalleren duidelijk; anderzijds blijkt, dat de auteur de formele methode doelbewust verlaat. Hij voert daarna dyadische getaltekens en het plusteken in en seint dan mededelingen als $100 + 1 > 10 + 1$, $100 + 10 > 10 + 10$, enz. om daarna over te gaan tot $100 + a > 10 + a$. De rol van een variabele wordt zo aan de hand van voorbeelden gedemonstreerd. Achtereenvolgens komen nu aan de orde $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neq$, $\vee$, $\wedge$, $-$, $\times$, $/$, exponenten. Daarna worden gelijktijdig de begripsvorming en de relatie $\in$ ingevoerd ($1 \in \text{Num}$, e.d.). Deze gelijktijdigheid van invoering is een bezwaar, maar dat is m.i. niet te ondervangen. Daarna volgen de verschillende getal-soorten, waarbij tot mijn verbazing zelfs de complexe getallen niet vermeden worden. Ook wordt de klassenlogica beoefend, waarbij tevens de al- en de existentiealoperator ter sprake komen.

De betekenis van al deze begrippen wordt aan voorbeelden geëxpliceerd; van de expliciete definitie wordt zo goed als geen gebruik gemaakt. Men zal zich afvragen waarom. De auteur heeft hiervoor een gegronde reden. Zou men b.v. $a \vee b$ definiëren als „niet $a \rightarrow b$ “, dan zou men vooronderstellen, dat de ontvanger gewoon was op een zeer bepaalde manier te denken, terwijl de verduidelijking van de betekenis van de disjunctie aan de hand van voorbeelden niet van dergelijke vooronderstellingen uitgaat. Ook het gebruik van inductieve definities is op dezelfde grond uitgesloten.

Vermeld zij nog, dat het gebruik van haakjes vervangen wordt door het inlassen van pauzès van verschillende lengte.

In het tweede hoofdstuk wordt de tijd behandeld. Tijdsintervallen worden voorgesteld door streepseinen van verschillende lengte. Relaties ertussen worden ontwikkeld, waarbij van de getallentheorie gebruik gemaakt wordt.

Het derde hoofdstuk is getiteld Behaviour, waaronder men menselijk gedrag op intellectueel niveau moet verstaan. Een van de eerste voorbeelden luidt

$Ha \text{ Inq } Hb . ?x . x^{10} = 11001$

$Hb \text{ Inq } Ha . 101 \times 101 = 11001$

$Ha \text{ Inq } Hb \text{ Mal}$

$Hb \text{ Inq } Ha . 101 \times 101 = 11001 . \in \text{Ver}$

$Ha \text{ Inq } Hb . \text{Ver Tan Mal} . \uparrow . x^{10} = 11001 \rightarrow x = 101$

$Hb \text{ Inq } Ha . 101 \wedge - 101$

$Ha \text{ Inq } Hb \text{ Ben.}$

Ik moet nog verraden, dat in deze tekst Ver betekent „waar“, $?x$ „voor welke x is“ en $\wedge$ „zowel ... als“. De rest moet U uit het zinsverband opmaken. Lukt dit, dan is U een supermarsbewoner, want echte hebben een hele serie voorbeelden nodig.

Een lange serie begrippen en zinswendingen wordt op deze manier ingevoerd, steeds door demonstratie van de betekenis.

Het vierde hoofdstuk gaat ten slotte over Space, Motion, Mass. Merkwaardig is de wijze, waarop de ontvanger voor het eerst met het begrip ruimte in contact komt. Dit geschiedt in een tekst, waarvan de Nederlandse vertaling luidt:

A deelt aan B mede, dat er een positieve h is met de eigenschap, dat h sec nadat C aan D p heeft medegedeeld, D bemerkt, dat C even te voren aan D p heeft mede-

gedeeld; B vraagt aan A, waarom h positief moet zijn; A deelt aan B mede: omdat de plaats van C niet dezelfde is als de plaats van D . . . De plaats van C is een deel van de ruimte en de plaats van D is een deel van de ruimte.

Door deze passage wordt duidelijk, waarom het hoofdstuk over menselijk gedrag voorafgaat aan het hoofdstuk over ruimte. Na deze inleiding volgen een groot aantal teksten, die eigenlijk niets anders bevatten dan stellingen en definities uit een gewoon meetkundeboek. De expliciete definitie wordt thans wel gebruikt, en wel op een stellig verantwoorde manier. Bewijzen van eigenschappen vindt men niet.

De auteur schrijft uiteraard in eerste instantie geen leerboek, maar tracht zich slechts verstaanbaar te maken. Op deze eenvoudige meetkundige inleiding volgt een behandeling van de meetkundige principes met behulp van lineaire algebra. Een bespreking van de beginselen van de mechanica vormt de afsluiting van dit eerste deel.

P. G. J. Vredenduin

ONTVANGEN BOEKEN

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw Meetkundeboek* (met eenvoudige inleiding); P. Noordhoff, Groningen, 1960, 97 bladz. f 2,10.

Bestemd voor het U.L.O.-onderwijs.

Het „Nieuw Meetkundeboek I” van dezelfde schijvers is voorzien van een eenvoudige (intuïtieve) inleiding. De rest van het boek behandelt het begin van de meetkunde op traditionele wijze, eenvoudig en duidelijk.

R. Troelstra.

Dr. L. N. H. Bunt e.a., *Van Ahmes tot Euclides*, hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde; J. B. Wolters, Groningen, 1961, 3de druk, 180 blz., ing. f 5,75; geb. f 6,50.

Deze 3de druk is nagenoeg gelijk aan de tweede, een hoofdstuk over de moderne grondslagen van de meetkunde is als aanhangsel opgenomen.

E. J. Wasscher, *Meetkunde I*; J. B. Wolters, Groningen; 2e dr. (herzien door I. Abram), 124 blz., f 3,50.

De intuïtieve inleiding werd ingekort.

E. J. Wasscher, *Nieuw Leerboek der Algebra, III*; J. B. Wolters, Groningen 2e dr. (herzien door I. Abram); 144 blz., f 3,75.

Er is meer aandacht besteed aan de behandeling van de differentiaalrekening en aan het grafisch oplossen van ongelijkheden.

B. Coster, Dr. A. van Dop en Dr. H. Streefkerk, *Nieuwe Algebra voor de onderbouw, deel III*; J. B. Wolters, Groningen; 3e dr., 110 blz., f 2,50.

Deze druk is op enkele redactiewijzigingen na gelijk aan de vorige.

Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. A. van Haselen, *Nieuwe Algebra, deel II*; J. B. Wolters, Groningen, 1960, 5e dr., 96 blz., f 2,40.

De theorie van de gebroken vergelijkingen is verbeterd, die voor functies omgevoerd om een betere aansluiting met deel III te krijgen.

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Stereometrie* voor V.H. en M.O. met tekenatlas; J. B. Wolters, Groningen; 6e dr., 98 blz., f 3,90 (tekenatlas afzonderlijk f 0,75). Deze druk is praktisch ongewijzigd.

Wijdenes en Bruinshoofd, *Meetkunde voor het lager technisch onderwijs en voor eenvoudige technische opleidingen*, I; P. Noordhoff, Groningen, 7e dr., 88 blz., f 2,40.

Birkenhäger en Machielsen, *Algebra voor M.M.S.*; P. Noordhoff, Groningen, 1960, 2e dr., 118 blz., f 3,75.

E. J. Wasscher, *Meetkunde van het platte vlak voor het VHMO, III*; J. B. Wolters, Groningen, 1960; 113 blz., f 3,25. Dit door I. Abram verzorgde deel uit van Thijns wiskundige leergang sluit aan bij de eerste twee delen van de heer Wasscher. Met de richtlijnen van de nomenclatuurcommissie is rekening gehouden.

Dr. J. H. Wansink, *Algebra voor VHMO, III*; J. B. Wolters, Groningen, 1960; 2e dr., 198 blz., ing. f 5,75.

Deze tweede druk blijft bruikbaar naast de eerste. Er is rekening gehouden met een aantal wensen van de Nomenclatuurcommissie.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

43. $2n$ mannen zijn voorzien van de nummers 1 tot en met $2n$. Gevraagd wordt, zoveel mogelijk van deze mannen een hoed op te zetten, als voldaan moet worden aan de voorwaarde, dat van twee mannen met nummers, die relatief priem zijn, hoogstens één een hoed op krijgt.

44. Een vierkant gebouw met voorkant op het oosten, moet worden verrold naar het vierkant aansluitend tegen de westzijde van de huidige plaats en daarbij zo gedraaid worden, dat de voorzijde op het zuiden komt. Men brengt rollen onder de vierhoeken aan en ziet kans het gebouw op de nieuwe plaats te brengen door elk der rolstellen over een rechte rail te bewegen. Hoe moeten de rails daartoe gelegd worden?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

41. In beide gevallen: neen. In het eerste geval wordt elke ontvangen gulden ook t.z.t. weer in het water gegooid. Stel, dat hij in staat was op deze wijze al gooierende alle aftelbare ordinaalgetallen te doorlopen, dan zou hij precies geen enkele gulden meer over hebben. In het tweede geval krijgt men hetzelfde resultaat, als hij al gooierende alle natuurlijke ordinaalgetallen doorloopt.

42. Men vindt de beste speelwijze door de winnende standen op te sporen. Met een winnende stand wordt bedoeld een stand, die men afgeeft en die bij goed spel noodzakelijk tot winst leidt voor degenen, die de stand afgegeven heeft. De winnende standen zijn:

0.0.0	1. 2. 3	2. 4. 6	3. 4. 7	4. 8.12	5. 8.13	6. 8.14	7. 8.15	8.16.24
0.1.1	1. 4. 5	2. 5. 7	3. 5. 6	4. 9.13	5. 9.12	6. 9.15	7. 9.14	enz.
0.2.2	1. 6. 7	2. 8.10	3. 8.11	4.10.14	5.10.15	6.10.12	7.10.13	
0.3.3	1. 8. 9	2. 9.11	3. 9.10	4.11.15	5.11.14	6.11.13	7.11.12	
0.4.4	1.10.11	2.12.14	3.12.15	4.16.20	5.16.21	6.16.22	7.16.23	
enz.	enz.	2.13.15	3.13.14	enz.	enz.	enz.	enz.	
		enz.	enz.					

Het is niet moeilijk deze tabel samen te stellen. Grondprincipe is, dat men, als men de stand *a.b.c* als winnende stand gevonden heeft, elke stand, die hiermee twee getallen gemeen heeft, maar waarvan het derde groter is, tot de verliezende standen rekent. Zo vinden we 2.8.10 door op te merken, dat we de combinaties 2.0, 2.1, ..., 2.7 al tegengekomen zijn; verder verhindert 1.8.9 ons 2.8.9 te kiezen en dus wordt het 2.8.10.

Nu moeten we nog trachten systeem te vinden in de gevonden combinaties. We nemen de groep, die begint met 2^3 tot en met $2^3 - 1$. De tweede kolom bestaat in de eerste vier regels uit 2^3 tot en met $2^3 + 3$. De derde kolom bestaat uit permutaties van $2^3 + 4$ tot en met $2^4 - 1$. Deze permutaties zijn, als we de getallen met 11 verminderen, de kolommen van het volgende schema:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Om nu de permutaties van de getallen in de derde kolom van de combinaties, die met 2^3 tot en met $2^4 - 1$ beginnen, te krijgen, breiden we het schema als volgt uit:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

De verdeling in vierkanten demonstreert de opbouw van de schema's.



Aan het **Cartesius-lyceum** is met ingang van 1 september 1961
te vervullen de betrekking van

- 1. docent(e) NATUURKUNDE (18 uur)**
- 2. docent(e) MECHANICA (8 uur)**
- 3. docent(e) SCHEIKUNDE (11 uur)**

Combinatie van deze betrekkingen is mogelijk.

Vergoeding van reis- of pensionkosten kan overeenkomstig
de geldende verordening worden toegekend.

Nadere inlichtingen bij de rector van het Cartesius-lyceum,
Drs. G. W. Bolkestein, Piet Mondriaanstraat 140,
Amsterdam-W 3, telefoon 82572

*Sollicitaties gaarne zo spoedig mogelijk na het verschijnen van dit blad aan de secretaris
van het Curriculum van het Cartesiuslyceum, Stadhuis, kamer 255, Amsterdam-C.*

Vóór de aanvang van de nieuwe cursus verschijnt:

Algebra voor de kweekschool

door B. Marius en A. C. Valkenaars

De opzet van de auteurs is van het begin af aan, de theorie mede
door middel van vragen en opdrachten aan de leerlingen voor te
zetten. Door een nauwer samengaan van theorie en vraagstukken
hopen zij een hoge rendement aan wiskundige vorming te bereiken.

Verder menen de auteurs, dat met dit boekje het werken in losser
klasseverband mogelijk moet zijn.

Tot de eigenlijke stof van dit boekje behoren de onderwerpen, die
zijn aangegeven in het Kweekschoolbesluit 1953. Deze stof wordt
voorafgegaan door enkele inleidende hoofdstukken, waarin hoofd-
zakelijk datgene behandeld wordt, wat voor een goed begrijpen van
voornoemde stof nodig is

*Van de eerstgenoemde auteur verscheen in ons fonds reeds een viertal andere kweekschool-
werkjes, t.w.:*

Contact, Meetkunde voor kweekscholen (2e druk f 3,50)

Stereometrie voor kweekscholen (3e druk f 2,25)

Natuurkunde voor kweekscholen, m.m.v. J. H. H. Grooten,
in 2 delen (7e drukken, f 3,50, resp. f 4,75)

Natuurkunde-vraagstukken voor kweekscholen, m.m.v.
J. H. H. Grooten, 2 deeltjes (4e drukken, f 0,85, resp. f 0,95)



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Begin mei 1961 verschijnt:

PROF. DR. M. A. KRASNOSSEL'SKIĬ

PROF. DR. YA. B. RUTICKIĬ

Convex functions and Orlicz spaces

Translated from
the first Russian
edition by
Leo F. Boron

CONTENTS

Chapter I:

Special classes of
Convex functions

Chapter II:

Orlicz spaces

Chapter III:

Operators in Orlicz
spaces.

Chapter IV:

Non-linear integral
equations

Summary of fundamental
results — Bibliographical
notes — Literature — Index

The reader will find that this book, written by two recognized authorities in this branch of mathematics, is a rather complete study of convex functions (in a form convenient for the classifications of Orlicz spaces) and of Orlicz spaces. Some results, due to the authors, appear here in complete form for the first time. In the third chapter of the book, conditions for continuity and complete continuity of some operators from one Orlicz space into another are investigated — first for linear integral operators, then for simple non-linear operators, and finally for non-linear integral operators. Orlicz and Luxemburg norms are discussed. Other topics taken up are the Fréchet derivative, the Gâteaux gradient, and the gradient of the Luxemburg and Orlicz norms. Special attention is given the Uryson and Hammerstein operators. The monograph is quite readable and will be useful to students of functional analysis and research workers in this field.

The student who has studied Natanson's *Theory of functions of a real variable* and Zaanen's *Linear analysis* (the sections dealing with Orlicz spaces) will find this volume accessible.

± 288 blz. - $15 \times 22\frac{1}{2}$ cm

Prijs bij intekening vóór verschijnen:

ingenaaid f16,— • gebonden f17,50

Vermoedelijke prijzen na verschijnen: f19,75, resp. f21,50

De inliggende kaart vóór 1 mei a.s. ingevuld op te zenden aan de uitgever:

P. NOORDHOFF N.V. • GRONINGEN