

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/1961

VI - 1 MAART 1961

INHOUD

Prof. Dr. H. J. A. Duparc: Welke gevolgen brengt de ver- anderde plaats der wiskunde in de maatschappij met zich mede?	177
J. Wichers: Over het oplossen van een vergelijking met een onbekende	201
Boekbespreking	205
Recreatie	207
Kalender	208

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

WELKE GEVOLGEN BRENGT DE VERANDERDE PLAATS DER WISKUNDE IN DE MAATSCHAPPIJ MET ZICH MEDE?¹⁾

Prof. Dr. H. J. A. DUPARC

Delft

I. *Inleiding.*

Wie zich bezint op de titel van deze voordracht, komt al spoedig tot de ontdekking dat deze op diverse manieren kan worden uitgelegd. Mijn eerste reactie was, dat het veranderen van de plaats der wiskunde in de maatschappij het op zijn geweten heeft dat vele afgestudeerde wiskundigen niet meer hun heil in het leraarsambt zoeken, maar bij instellingen van hoger onderwijs (zowel met een docerende taak, als voor wetenschappelijk onderzoek) dan wel bij de industrie. Het antwoord op de gestelde vraag is dan ook direct duidelijk: De veranderde plaats is voor een vrij groot deel oorzaak van het lerarentekort. Waar deze voordracht juist gehouden wordt op een Vakantiecursus van het Mathematisch Centrum kon het niet anders, zo leek het mij toe, of juist dit was de bedoeling van de samenstellers van het programma van deze cursus geweest. Gelukkig was de titel niet nog omvangrijker en werd mij niet gevraagd er op in te gaan hoe die gevolgen waren op te vangen of te compenseren. In dat geval zou ik stellig niet de moed hebben gehad om hier als spreker op te treden, een moed die zelfs een Minister van Onderwijs enz. zou hebben ontbroken — hoe ernstig hij ook naar de oplossing van dat netelige probleem streeft.

Korte tijd later ontving ik van de Raad van Beheer van het Mathematisch Centrum een verder schrijven, waarin mij nader werd toegelicht op welke wijze ik het bovengenoemde onderwerp — globaal gesproken — zou kunnen behandelen. En toen bleek mij, dat mijn eerste interpretatie van het onderwerp totaal verkeerd was geweest. Andere punten hadden de heren voor ogen gestaan; tot mijn vreugde: want over die punten spreek ik veel liever. De bedoelde interpretatie bleek te zijn: Welke gevolgen zou de veranderde plaats der wiskunde in de maatschappij voor het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs kunnen (of zelfs: moeten) hebben?

¹⁾ Voordracht Vakantiecursus 1960, Mathematisch Centrum.

Wie zich tot het denken hierover zet wordt inderdaad besprongen door een wijd spectrum van vragen en wensen. Kennelijk handel ik dus in de geest van mijn opdrachtgevers als ik hierover uitweid.

Nu hebben op de cursus reeds meer sprekers voor u gesproken en uiteraard is er onderling overleg geweest. Eén der punten die daarbij duidelijk tot uiting kwam was de reserve van een hunner ten aanzien van de onontkoombaarheid van zijn conclusies. Met zijn opmerking dat wellicht de verschillende sprekers door hun uiteenlopende instelling tot verschillende, misschien zelfs strijdige conclusies zouden komen, ben ik het volkomen eens. Voor u toehoorders heeft dit het voordeel, dat u ziet dat hier eerlijk en vooral onbevangen en zonder onderlinge beïnvloeding of afspraakjes over de materie is nagedacht, hetgeen mijns inziens de waarde slechts kan verhogen. Voor uw sprekers is er het voordeel dat zij zich niet door elkaar van de wijs behoeften te laten brengen. Ten slotte spreken wij hier niet over wiskunde (waar dergelijke eventuele contradicties funest zouden zijn) maar over het doceren ervan en speciaal de selectie (en anti-selectie) der te doceren onderwerpen.

Bovendien zijn er aan het onderwerp wel meer publikaties en lezingen gewijd geweest; het is dan ook prettig om gerechtigd te zijn enige evenmin daarmede concordante conclusies te mogen maken. Het heeft voorts het voordeel, dat men later kan verwijzen naar uiteenlopende visies van diverse personen op eenzelfde onderwerp, hetgeen ieder, die zich ermee verder bezig houdt, onvermijdelijkerwijze zelf tot denken dwingt.

II. *Doel van het onderwijs in de wiskunde.*

Maar voorbijgaande aan de eventuele bedoelingen van het onderwijs in de wiskunde op de scholen van voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs, zie ik drieërlei richting, waarvan dit onderwijs de basis moet geven:

1. Allereerst dient het een begin te zijn voor hen, die later, gedreven door een pure liefde voor het vak, verder in dit vak willen gaan. Die liefde komt natuurlijk niet van zelf, die kan er pas zijn, als men eerst kennis neemt van het bestaan van de wiskunde. Zo kan het gebeuren, dat er onder uw leerlingen een enkele is, die reeds na enkele maanden het onderricht in de wiskunde te hebben genoten (en ervan te hebben genoten) het pertinente plan heeft opgevat om later wiskunde te gaan studeren. De charme van het vak, gevoegd bij zijn nieuwsgierigheid „hoe het verder gaat” (een nieuwsgierigheid die menselijk is en feuilletons hun bestaansrecht geeft), hebben hem te pakken. Als geen pragmatische redenen hem van zijn ideaal af-

houden, zal hij tijdens en na zijn schooltijd met onverflauwde aandacht het vak bestuderen.

En passant merk ik even op, dat hier een zware taak op de docenten rust: zij dienen deze enkelingen aan te moedigen (tenzij zij dat om pragmatische redenen alweer niet toelaatbaar achten) en zeker iets meer te geven dan in de gewone schoolboeken staat. In dankbaarheid herinner ik mij mijn eigen wiskundeleraar, dr. G. van Hasselt, die kans zag om mij in zes gymnasiumjaren wel een hoeveelheid van twaalf jaar wiskundestof bij te brengen. Ik weet niet of ieder docent zich hierop heeft ingesteld, maar mijns inziens is het zijn (of haar) plicht; Nederland heeft behoefte aan wiskundigen en ieder die daar het zijne toe bijdraagt, dient ons land in hoge mate. Meer nog dan aan veel wiskundigen (en ingenieurs) heeft het behoefte aan goede en geestdriftige wiskundigen (en ingenieurs).

Ik wijs erop, dat ook om niet-pragmatische redenen een wiskundestudent wel eens geleidelijk gaat afwijken van het wiskundepad en overloopt naar de physica, die met allerlei heerlijkheden als atoombommen, raketten en ruimtevaartuigen een groter attractie blijkt te zijn. Men beseffe, dat ruimtevaart niet mogelijk is zonder kennis der ruimte en die wellicht weer niet zonder ruimtebegrip en -inzicht. Misschien ligt hier een nieuw vak voor ons: de toegepaste stereometrie. Merkwaardig is dat voor mijn gevoel de concurrentie der physica in de jaren der relativiteitstheorie minder groot was. Wellicht omdat die te wiskundig van inslag was, ofwel te moeilijk.

2. Ik kom nu tot een tweede groep, zonder daarmee te willen zeggen, dat de drie te noemen groepen strikt disjunct zijn. Dat ik de groep apart noem, is veeleer omdat die groep ook haar speciale eisen stelt aan ons onderwijs: het is de groep der toekomstige docenten in de wiskunde bij alle soorten onderwijs aan leerlingen die van de lagere school zijn gekomen en nog niet in de maatschappij of op een instelling van hoger onderwijs zijn beland.

De a.s. docenten in de wiskunde komen ten dele voort uit de leerlingen van het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. (Dat er in Nederland naast de universitaire opleiding tot leraar ook nog een M.O.-opleiding bestaat, waarvan de leerlingen niet noodzakelijk een gymnasium of H.B.S. behoeven te hebben doorlopen, is een apart punt, dat echter bij onze opsomming wel buiten het kader valt.)

Het is m.i. van groot belang, dat men eenmaal als leerling grondig kennis heeft genomen van de stof, die men later zal doceren. Hoe een toekomstig leraar dat zal doen hangt er in niet onbelangrijke mate van af hoe hem de stof in zijn schooljaren is gegeven.

3. In de laatste tientallen jaren wordt er in de industrie, de techniek en ook op tal van gebieden van wetenschap in steeds groter veelvuldigheid een beroep op de wiskunde gedaan. Iedereen weet, dat hier een nieuw vak is ontstaan, dat de wonderlijke naam van toegepaste wiskunde draagt. Het curieuze is, dat een stelling uit de wiskunde, die nodig is voor het bewijs van een andere stelling uit de wiskunde, niet tot de toegepaste wiskunde komt te behoren. Dat geschiedt veelal pas, als die stelling haar toepassing vindt in een ander gebied dan de wiskunde zelf.

Dat de wiskunde zich leent (en zich ertoe leent) om te worden gebruikt bij andere vakken is een oeroud verschijnsel. Voor een groot deel is de wiskunde zelfs tot ontwikkeling gekomen door de haar gestelde problemen in andere vakgebieden. Om wat recentere punten te noemen: de technische hogescholen, de economische hogescholen, de landbouwhogeschool en tal van studierichtingen op de universiteiten, zelf niet tot de faculteit der wis- en natuurkunde behorend, hebben in hun onderwijsprogramma een groter of kleiner aantal uren uitgetrokken voor de wiskunde. (Ik doel hier niet op het feit dat bij de studie in de economie een apart docent de van de H.B.S.-A afkomstige leerlingen eerst moet leren vierkantsvergelijkingen op te lossen; een voor het hoger onderwijs mijns inziens onwaardige aangelegenheid, die nu eenmaal voortvloeit uit het feit, dat H.B.S.-A goed genoeg werd geacht om toelating te geven tot de examina in de economie — blijkbaar zonder goed genoeg te zijn. Ik denk wel aan de statistische en econometrische vakken bij genoemde studie, die een steeds belangrijker plaats gaan innemen.)

Dat de huidige toegepaste wiskunde nu veel hoger eisen stelt aan haar beoefenaren dan in de oudheid spreekt wel van zelf. Mede hierdoor ontmoet men nu niet meer één persoon, die meester is in alle natuurwetenschappen én de wiskunde (en eventueel de filosofie, d.w.z. bij voorbeeld de natuurfilosofie); maar is allereerst specialisatie in de vakken afzonderlijk opgetreden en nadien specialisatie in onderdelen der vakken. Enigermate tussen wiskunde en natuurkunde is daarbij de toegepaste wiskunde ontstaan in de vorm waarin men haar thans kent. Er is echter ook een toegepaste wiskunde aan het ontstaan tussen wiskunde en b.v. economie; en ten slotte is er een soort toegepaste wiskunde ontstaan, die staat tussen de wiskunde en het rekenen. Verre van denigrerend te willen oordelen over de huidige rekenmachines en hun ontwerpers zou men kunnen opmerken dat ze in bovengegeven gedachtengang komen te staan (althans in een enkel aspect van hun gebruik) tussen de „wiskunde” der lagere school en die der verdere scholen. Dat hierover

nog wel menig ander aspect te noemen is, zal in het vervolg wel blijken.

Ik kan niet nalaten de bovengenoemde drie aspecten van de wiskunde, waarvoor het onderwijs op gymnasia en H.B.S.-en de kiem moet leggen, te vergelijken met die bij het onderwijs in een taal. Laat ik, niet alleen gedreven door persoonlijke sympathie, daarvoor het Engels nemen. Het eerstgenoemde aspect, dat van het wetenschappelijk onderzoek, vindt men reeds in zijn allereerste begin bij het onderwijs in de taal, in haar structuur, in haar grammatica, zelfs bij het Engels, en syntaxis. Evenmin als bij het onderwijs in de wiskunde de aandacht aan stellingen (en hun bewijzen) mag verslappen, kan men het zich permitteren om bij het taalonderwijs de grammatica te verwaarlozen.

Dat het onderwijs in het Engels mede stimulerend moge zijn om leerlingen tot de studie in dit vak te doen besluiten, spreekt van zelf. Hier gaat de parallel met het bovengenoemde tweede aspect wel volledig op.

En dat er naast de toegepaste wiskunde ook een toepassingsmogelijkheid van het op school geleerde Engels bestaat, is een ieder duidelijk, die maar even over onze grenzen kijkt (in westelijke richting), of . . . hij kijkt slechts hier in het eigen land rond en leest in zijn Nederlandse courant over verleidelijke heerlijkheden als shows met stars, al of niet in het weekend of top seizoen, of hij kan in show rooms van zijn dealer zijn keuze doen, terwijl de babysitter zich thuis met de beste long drinks op de been tracht te houden. Dit laatste soort onontbeerlijke kennis van het Engels stel ik op één lijn met die toegepaste wiskunde, die ons in het dagelijks leven beweringen „die voor 70 % waar zijn” grif doet geloven (of verwerpen).

Bij de taalstudie (en ook al het schoolonderwijs) is er ook nog een litterair aspect; hiervan zie ik een pendant in het wiskundeonderwijs, waarbij onze leerlingen (voorzover zij ervoor gevoelig zijn) ook wel eens mogen worden geïmponeerd door de schoonheid der wiskunde.

Dat ten slotte het hierboven als toegepast aangeduide Engels zijn nut heeft voor de toegepaste wiskunde, waarvan vele boeken en artikelen in het Engels zijn geschreven, is een belangrijke bijkomstigheid.

Ik zie nog een geheel andere parallel, die zoals het een vergelijking past, natuurlijk mank gaat. Naast de niet-Euclidische meetkunde is er het Amerikaans. En misschien zie ik tal van meer meldenswaardige punten van analogie over het hoofd.

Dat ik in het bovenstaande de hoofdpunten, waarvoor het wis-

kunde-onderwijs moet dienen naar voren heb gebracht, geschiedde mede omdat men zich bij eventuele wijzigingen dient te beraden welke nieuwe onderwerpen moeten worden toegevoegd en welke weggelaten om voor de nieuwe onderwerpen de nodige plaats te maken.

Dat er aanleiding kan zijn om wijzigingen voor te staan dient echter eerst te worden gemotiveerd. Daartoe is het voldoende dat men zich realiseert, dat het onderwijs in de wiskunde (ook het hoger onderwijs) vroeger voornamelijk diende voor de groepen 1 en 2 (opleiding tot wetenschappelijk onderzoeker; opleiding tot docent); thans echter is er de groep 3, die meer en meer de aandacht vraagt. Dat wij hier met reële feiten te maken hebben, is op zichzelf al duidelijk. Toch moge ik het accentueren door op te merken, dat vóór de oorlog iemand, die in de wiskunde was afgestudeerd, bijna steeds bij het onderwijs terecht kwam, althans als hem dat gelukte, en maar een heel klein percentage bij een instituut van onderzoek. Dit laatste percentage is thans gegroeid door de grote uitbreidingen der mathematische instituten van universiteiten en hogescholen en ook door het in ruimer mate toekennen van stipendia voor wetenschappelijk onderzoek. Het eerste percentage is dus gedaald. Maar de daling is nog scherper door de opkomst van de derde groep. De industrialisatie van ons land heeft mede ten gevolg gehad dat heel wat industrieën gaarne een wiskundige in dienst nemen, die daar naast de ingenieurs, nog een ruime taak toebedeeld krijgt. De speciale opleiding der toegepast-wiskundigen en mathematische ingenieurs heeft op haar beurt weer een speciale uitbreiding der mathematische instituten van de instellingen van hoger onderwijs nodig gemaakt, die ook weer met tal van krachten moeten worden bemand.

Op zich zelf motiveert dit groeiend aantal toegepast-wiskundigen nog niet een wijziging in het schoolprogramma der wiskunde. Men zou kunnen zeggen, dat dit uitsluitend een zaak is van het hoger onderwijs. Toch meen ik dat er wel enkele punten zijn, die reeds in een vroeger stadium kunnen worden behandeld. Daarover wil ik in het volgende het een en ander noemen.

III. *Het onderwijs in de algebra.*

Het lijkt mij interessant toe om de accentverschuivingen bij de behandeling van een onderwerp eens aan een concreet voorbeeld te volgen. Daarbij denk ik aan, wat ik zou willen noemen, de vierkantsvergelijking door de eeuwen heen. Ik kan dan aansluiten aan mijn eerder gemaakte opmerking, dat voorgestelde wijzigingen niet bindend zijn. U zult met een glimlach u realiseren hoe dingen die eens als unieke ontdekkingen golden, die voor eeuwig het onderwijs zouden

dienen, nu met een nonchalant gebaar als bijkomstig op de achtergrond worden geschoven. Interessant is het ook te zien wat in ons onderwijs daarvan is blijven hangen.

Omdat ik geenszins volledig wilde zijn (en ook niet aankondigde de vierkantsvergelijking door alle eeuwen heen te willen behandelen) begin ik maar eerst eens met de Griekse tijd.

Bij de Grieken werd de vierkantsvergelijking meetkundig opgelost: men zocht twee lijnstukken te vinden (= construeren), waarvan som (of verschil) en produkt (hetzij in de vorm van een middel-evenredige, hetzij in de vorm van een oppervlakte) waren gegeven. Het zou een belediging zijn u uiteen te zetten hoe men dat kan doen. Nog steeds wordt dit onderwerp wel behandeld (niet in de algebralen, maar bij de meetkunde). Wie in de praktijk een vierkantsvergelijking moet oplossen, doet het thans echter anders. Immers wij beschikken nu over een fraaie formule, de zgn. *abc*-formule. Het prettige van die formule is, dat er een wortelvorm in voorkomt, die tot uitgebreide series vraagstukken aanleiding geeft, uiterst geschikt om de intelligentie (of gebrek eraan) bij de leerlingen vast te stellen. Veelal is men allang vergeten dat die formule eigenlijk diende om de vergelijking op te lossen. Ik zou bij het schoolonderwijs welhaast het tegendeel willen verdedigen. De vierkantsvergelijkingen op onze scholen hebben meestal zo mooie coëfficiënten, dat men ze uit het hoofd moet kunnen oplossen en menig docent wordt terecht wrevelig als een leerling zo'n mooie vergelijking te lijf gaat met die ingewikkelde formule.

Dat zoek naar getallen met gegeven som (of verschil) en produkt is al aangeleerd bij het ontbinden in factoren, een bezigheid die nauw blijkt samen te hangen met het oplossen van vergelijkingen. Helaas wordt bij de vierkantsvergelijking via de *abc*-formule aangetoond dat een veelterm van de tweede graad ontbindbaar is in lineaire factoren. De reststelling, zelfs in haar thans nog toegelaten geamputeerde vorm van factorstelling, laat dat ook wel zien, evenzeer voor veeltermen van hogere graad.

De wortelvorm in de *abc*-formule geeft nog aanleiding tot verdere opmerkingen. Naast de discussie over het teken van de discriminant, waaraan vastgeknoopt wordt het bestaan van snijpunten van allerlei soorten krommen en rechten, is er de vaak verwaarloosde vraag naar de waarde van die vorm in het geval dat die discriminant positief is, maar geen volkomen vierkant. Reeds in de meetkunde komt dit probleem bij de toepassing van de stelling van Pythagoras ter sprake. Men leert dan de leerlingen de rechtstreekse methode van vierkantsworteltrekking. Of ze het begrijpen of onthouden is de

vraag. Au fond is dit echter een fundamentele kwestie. Het is de eerste keer, dat de leerlingen in aanraking komen met niet-rationale getallen. (U zult tegenwerpen dat het niet de eerste keer is. Dan denkt u stellig aan vraagstukken van de lagere school, die handelen over rollende wielen. Mag ik ertegen in brengen, dat „op de lagere school het getal π rationaal is”, nl. precies $3\frac{1}{7}$?) Het is de eerste keer dat men erop dient te wijzen, dat hier — net als bij de invoering der negatieve getallen en der breuken — een nieuw soort getallen wordt ingevoerd, waarmede het overigens veilig rekenen is. En vooral blijkt het van belang te zijn, dat de leerlingen horen, dat zo'n getal, net zo goed als men dat maar wil, te benaderen is door rationale getallen. Daartoe dient dan ook bovengenoemd rekenprocédé. Anders gezegd: op de getallenrechte is plaats voor de irrationale getallen; ze gedragen zich als tegenprestatie hoffelijk door zich aan de normale spelregels te houden. Ik ga hier op dit punt daarom wat nader in, omdat men hier in feite de eerste problemen uit de toegepaste, met name de numerieke, wiskunde ontmoet. In de 17e eeuw hebben diverse wiskundigen zich met het probleem beziggehouden van het benaderen van wortelvormen (en ook wel algemenere uitdrukkingen) door decimale breuken.

Het is curieus hier en passant op te merken, dat juist in Groot-Brittannië, waar men toch allermint van een voorliefde voor decimale stelsels kan spreken, zovele rekenende meesters woonden: ik noem hier slechts de namen van Newton, Napier, Briggs (die voor de logaritmen zowaar het getal 10 als grondtal nam), Taylor, Mac Laurin, terwijl ook de ontwikkeling van het moderne rekenen met de rekenmachines juist in de Angelsaksische landen werd ingeluid.

In de praktijk komen vrijwel nooit vierkantsvergelijkingen voor met mooie coëfficiënten, laat staan met mooie wortels. Men zal dan steeds naar efficiënte approximatie-methoden voor de optredende wortelvorm zoeken. Is het dan eerlijk, dat wij op school zoveel aandacht geven aan de uitzonderlijke mooie gevallen? Dat van dit besef wel iets aanwezig is, blijkt bij de behandeling der wortelvormen. Men zet uiteen, dat de wortels uit de noemer moeten worden verdreven. De enige motivering die ik ken, is dat als deze uitsluitend in de teller staat, een schatting van de nauwkeurigheid van het antwoord bij approximatie van de wortelvorm volgens een of ander procédé tot een bepaald aantal decimalen mogelijk is. Het voorschrift „Geen wortelvormen in noemers” voert tot een uitgebreide groep van vraagstukken. Ik betwijfel of het een leerling wel helder voor ogen staat, dat dit au fond geschiedt om de nauwkeurigheid van een approximatie van het antwoord (die hij waarschijnlijk wel nooit zal

uitvoeren) te bepalen en niet om hem nog wat bezig te houden (hoe nuttig dat overigens ook is) met half vergeten merkwaardige produkten of andere methoden, die dat voorschrift helpen verwezenlijken.

Overigens blijkt merkwaardigerwijze dat dat voorschrift te verwezenlijken vlt. Dat dit principieel het geval is wordt natuurlijk niet voor alle gevallen aangetoond. Gelukkig kan de moderne algebra ons dit leren, waaruit tevens blijkt dat wij hier in een aspect van de theorie zitten dat uit later eeuwen dateert.

Algemeen is een gebroken rationale functie van een wortel van een vierkantsvergelijking te schrijven als een lineaire functie van die wortel. Hierop berusten talloze min of meer ingenieuze vraagstukken, waarmee men stellig de intelligentie der leerlingen kan peilen, maar hen niet nader brengt tot het eigenlijke oorspronkelijke doel: het bepalen der wortels van een vierkantsvergelijking. Dat dit principieel niet zo kan zijn is ook wel duidelijk uit de theorie der hogere-machtsvergelijkingen. Rationale functies van een wortel van een vergelijking van de graad n zijn te schrijven als veeltermen van die wortel, die ten hoogste van de graad $n - 1$ zijn. Hoe mooi dit ook is, het leert ons niets over de approximatieve waarde van zo'n wortel. En dat heeft men bij toepassingen nodig.

Hier komen wij aan een m.i. ernstig tekort, zowel bij het school-onderwijs als bij verder wiskunde-onderwijs bij tal van instellingen. Mede door het schoolonderricht moeten de leerlingen wel gaan geloven, dat bij vergelijkingen van hogere graad dan de tweede ook wel ingewikkelde functies der coëfficiënten bestaan, die de wortels geven: een soort gegeneraliseerde *abc*-formules dus. Om onnaspeurlijke redenen heeft men hun die niet geleerd, noch op school, noch nadien. Het gevolg is, dat ze bij de eerste de beste kubische vergelijking vastlopen, tenzij — men is consequent in het misleiden — alweer bijzonder fraaie oplossingen optreden bij de eventuele met zorg (waarvan de leerlingen zich natuurlijk niets bewust zijn) voor hen uitgekozen vergelijkingen.

Ik zou zeer graag zien, dat men bij het schoolonderwijs iets meer aandacht schonk aan deze kwesties en desnoods schetste hoe men een wortel kan benaderen, zowel bij een vergelijking van de tweede als bij een van hogere graad. Ik ben er voorstander van dat ook in het propaedeuse-onderwijs bij de technische hogescholen hieraan wat verdere aandacht wordt besteed, hetgeen dan met behulp van de methode van Newton wat uitgebreider kan gebeuren.

In dit verband kan ik niet nalaten nog iets naar voren te brengen, dat met het bovenstaande samenhangt, zij het dat het niet op de

schoolwiskunde direct betrekking heeft: In de integraalrekening besteedt men geruime tijd aan de behandeling der integratie van rationale functies. Na enige tijd is men zover, dat men durft te beweren dat dus iedere gebroken rationale functie integreerbaar is. Wat moeten de arme slachtoffers wel ondervinden, die een dergelijke functie krijgen met een irreducibele kubische noemer en een teller, die daarvan niet toevallig de afgeleide is of een veelvoud ervan? Het enige concrete dat ik er bij hen tegenover durf te stellen is dat ook hier geschikte numerieke approximatiemethoden zijn voor bepaalde integralen: een trapeziumregel of regel van Simpson moet ons dan uit de impasse helpen.

De kritiek, die ik dus heb — mede op grond van de toepassingen — op de behandelingswijze van vergelijkingen op de scholen wordt niet te niet gedaan als men meent het woord „adjunctie” als verlossend geluid te moeten laten horen. Daarmee zijn wij aan een vinding uit de 19e eeuw toegekomen, die van fundamenteel belang is, maar voor concrete numerieke problemen geen uitkomst biedt. Natuurlijk kan het van nut zijn om eens te spreken over de begrippen algebraïsch getal en transcendent getal (waarvan dan als voorbeelden — zonder bewijs — mogen worden genomen $\sin 20^\circ$, $\log 2$, π), veel meer dan een mededeling kan het m.i. op de scholen niet zijn. En de numerici hebben nauwelijks meer nodig.

Aan het feit dat ook logaritmen uitkomst zouden kunnen bieden om wortelvormen te approximeren wil ik hier voorbij gaan. Over de logaritmen kom ik verderop nog te spreken.

De charmante theorie der symmetrische functies, tevens in haar strengheid een geschenk van de moderne algebra, leeft op de scholen voort bij de theorie der vierkantsvergelijkingen. Gezien haar toepassingen in enkele delen der analytische meetkunde en vooral het feit dat zij niet aanleiding kan geven tot een scheve voorstelling van zaken, wil ik er gaarne een lans voor breken dat deze, met mate, wel blijft gehandhaafd in het schoolprogramma.

Uit het bovenstaande is het wel duidelijk geworden dat ik als principiële methode van de twintigste eeuw voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen (en evenzeer voor die van hogere graad) de numerieke zie. Het curieuze is dat deze methode veelal terugvalt op reeds lang bestaande andere methoden, die in de hoogtijdagen der algebraïsche adjunctie in het vergeetboek dreigden te raken: ik denk aan de eeuwenoude methoden van Newton, Horner en de regula falsi. De laatste, waarbij eigenlijk een rechte moet worden gebracht door twee bekende punten, geeft een mooie aansluiting op het nu ook op middelbare scholen ingevoerde vak de analytische meetkunde.

Wiskundige werken van **Wijdenes**

Algebra

Algebra voor M.U.L.O.	I	64 en 65e druk	f 2,90
IIA	21e druk	f 3,25	IIB 22e druk f 4,50
Nieuwe leerstof voor B.		3e druk	f 1,25
Tekenschrift voor de grafieken		3e druk	f 0,30
Klein leerboek der Algebra	I	5e druk	f 2,10
	II	3e druk	f 2,90
Beknpte Algebra	I	15e druk	f 3,40
	II	14e druk	f 3,90
Functies en grafieken			f 1,30
Grafiekenschrift		14e druk	f 0,75
Tekenbladen voor grafische voorst. 30 losse bladen 2 mm papier. In port.		6e druk	f 1,25
Algebraische vraagstukken	I	10e druk	f 2,65
II	10e druk	f 2,30	III 8e druk f 1,85
Nieuwe School-algebra I, 22e druk f 4,25, IIB		21e druk	f 3,60
IIIB	21e druk	f 3,80	IVB 14e druk f 5,90
Deel IVA voor Gymnasium A		2e druk	f 3,25
Algebra en financiële rekenkunde v. d. H.B.S.A.		8e druk	f 3,25

Voor hoger gaande studies:

Lagere Algebra	I	8e druk	f 9,75
	II	7e druk	f 12,75
Middel-Algebra	I	6e druk	f 17,—
	II	6e druk	f 17,—
Uitgewerkte mond. examens hogere algebra		2e druk	f 6,30

Voor vakstudie:

Algebra voor Middelbare Handelsscholen	I	12e druk	f 3,50
	II	9e druk	f 3,60
Algebra voor examen in Handelsrekenen		5e druk	f 5,90
Wiskunde voor accountants I Algebra			f 8,25
Algebra voor het Nijverheidsonderwijs		10e druk	f 2,50

Rekenen

Rekenboek voor de H.B.S.	I	25e druk	f 3,50
	II	14e druk	f 2,50
Nieuw Rekenboek	I	10e druk	f 1,60
	II	8e druk	f 2,25
Beknpte Rekenkunde		4e druk	f 3,25
Beginnels van de getallenleer		2e druk	f 8,25
Rekenboek voor het Nijverheids- onderwijs	I	8e druk	f 1,90
	II	7e druk	f 1,90

Meetkunde

Meetkunde voor M.U.L.O. (18e druk) in
geheel nieuwe bewerking door
Frederik en Van Os, „Langzaam omhoog”

I 2e druk	f 3,50	II f 3,75	III	f 3,90
Beknopte Meetkunde	I	12e druk	f 2,75	
	II	9e druk	f 2,60	
Planimetrie	I	8e druk	f 2,90	
<i>een eenvoudig schoolboek</i>	II	8e druk	f 3,90	
Nieuwe Schoolmeetkunde	I	3e druk	f 3,50	
	II	3e druk	f 3,50	
Toelichting hierbij		2e druk	f 3,50	
Kegelsneden voor het M.O.		2e druk	f 1,75	
Stereometrie, bew. A. A. Lucieer		12e druk	f 5,—	
Beknopte Stereometrie		7e druk	f 3,25	
Werkschrift bij de Stereometrie			f 1,90	
Oefenbladen bij de beschrijvende Meetkunde	I	10e druk	f 1,90	
	II	8e druk	f 2,25	
Handleiding		7e druk	f 2,50	
Prikmallen 35 ct. per paar; min. 10 paar		2e druk		

Voor voortgezette studie:

Wijdenes Vlakke Meetkunde	2e druk	f 13,—
Molenbroek, Leerboek der Vlakke Meetkunde	12e druk	f 18,50
Molenbroek, Leerboek der Stereometrie	13e druk	f 14,50

Voor vakstudie:

Meetkunde voor het Nijverheids- onderwijs	I	7e druk	f 2,25
	II	6e druk	f 1,90

Driehoeksmeting

Beknopte driehoeksmeting	A	13e druk	f 1,50
Goniometrie	B	14e druk	f 3,25

Voor voortgezette studie:

Leerboek der Gonio- en Trigonometrie	10e druk	f 12,50
Boldriehoeksmeting	9e druk	f 9,50

Voor vakstudie:

Practische driehoeksmeting	6e druk	f 3,50
--------------------------------------	---------	--------

Bij alle boeken behoren antwoordenboekjes. Inlichtingen over keuze van boeken en tafels gratis en franco bij P. Wijdenes, Jac. Obrechtstraat 88 - Amsterdam (Z) Tel. 020-727119

Aanvragen om zichtzendingen en pres. ex. bij invoering aan
Noordhoff — Groningen

Leraren, die met een of meer van de tafels 1-12 wenssen kennis te maken, gelieven een present-exemplaar aan te vragen

LOGARITMEN- EN RENTETAFELS

- | | |
|---|---|
| <p>Scholen, waar men geen
goniometrie leert.</p> | <p>1. Log.- en Rentetafel A, 5 dec., 9de druk, gec. . f 1,35
Inhoud: Aanwijzingen, Gewone log. Log. van constan-
ten. Log. van rentefactoren. Rentetafels I $(1 + i)^n$;
II $(1 + i)^{-n}$ voor de procenten 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$,
5, $5\frac{1}{2}$ en 6. Machten, wortels en omgekeerden.</p> |
| <p>Midd-
Handels-
scholen
Wisk.
L.O.</p> | <p>2. Log.- en Rentetafels B, 5 dec., 14de druk, gec. f 1,50
Inhoud als A en bovendien Rentetafel III $\Sigma(1 + i)^n$;
IV $\Sigma(1 + i)^{-n}$; V Annuïteitentafel.</p> |
| <p>M.U.L.O.
Kweekschool
H.B.S. 3
U.T.S.</p> | <p>3. Log. tafel C, 5 dec., 5de druk f 1,10
Inhoud als A, maar zonder rentetafels en aanwijzingen.</p> |
| <p>Examens in
Handelsrekenen;
voor banken, kantoren
accountants, actuaris</p> | <p>4. Rentetafel D, 8 dec., 5de druk f 1,—
De rentetafels I, II, III, IV en V onder A en B hier-
boven genoemd, met 50 termijnen.</p> |
| <p>Handels-
scholen
H.B.S. A.</p> | <p>5. Log.- en sinustafel H, 4 dec., 9de druk f 1,50
Gewone log.; siunstafel; $(1 + i)^n$ en $(1 + i)^{-n}$; mach-
ten, wortels en omgekeerden:</p> |
| <p>Middelbaar en Gymasiaal
Onderwijs. Hogere Technische
Scholen</p> | <p>6. Logaritmentafel K, 4 dec. f 0,30
Inhoud als H zonder de sinustafel.</p> |
| | <p>7. NOORDHOFF'S Kleine log. tafel voor kweekscholen;
4 dec. f 0,75
P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET,</p> |
| | <p>8. Log.- en Rentetafel E, 9de druk, gec. met hulp-
boekje f 4,90
gebonden f 6,50
Deze bevat de gewone log. en de vijf tafels voor samen-
gestelde interest, verder de vijf overeenkomstige voor
samengesteld disconto in 100 termijnen en procenten
van $\frac{1}{2}$ tot 8 met $\frac{1}{2}$ % opklimmende. Tafel I, II en V
met $\frac{1}{4}$ % opklimmende.</p> |
| | <p>9. P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET,
Logaritmen- en rentetafel uitgave G, Schooluitgave
van tafel E voor de H.B.S. A, 6de druk . . . f 2,75</p> |
| | <p>10. NOORDHOFF'S SCHOOLTAFEL; 5 dec.; 2 kleu-
ren in slap linnen band, 17de druk, 112 blz. . f 2,50
I Gewone logaritmen.
II Logaritmen Sinustafel.
III Sinustafel (de goniometrische verhoudingen).
IV Goniometrische verhoudingen, hoeken in radialen¹⁾
met herleidingstafels.
Geen moeilijkheden bij de interpolatie; in tafel II
twee volle graden naast elkaar; in tafel III zelfs
vier.</p> |
| | <p>11. NOORDHOFF'S Tafel in 4 decimalen, 24ste druk,
96 blz., in twee kleuren; volledige rentetafels. Ook
gen. verhoudingen van hoeken en radialen¹⁾
geb. f 2,—</p> |

¹⁾ Onmisbaar op scholen, waar men differentiaalrekening geeft.

V.H.M.O.
H.T.S.

12. Dr. B. GONGGRIJP; Beknopte log. en gon. tafels
A 4e druk f 2,25
idem en bijtafels
B 6e druk f 3,—
Log. en gon. tafels en bijtafels
D 12e druk f 5,50
Alle in 5 dec.; groot lettertype.

Ex. Wiskunde
Un., Delft; Lab.
Mil. Ac., enz.

13. NOORDHOFF'S Wiskundige Tafels; in 5 dec., 6de
druk van Tafel H, 268 blz., geb. f 9,50
in drie kleuren; voorbericht en de nodige aanwijzingen
in 6 talen: Nederlands, Indonesisch, Frans, Engels,
Duits, Spaans.
I. Wit: Gewone log. II, Rose: Log. van gon. verh.; III
Omzettingen. IV. Wit: De gon. verh.; gr. en min.; ook
radialen. V. Groen: Bijtafels.

Landmeters
Pub. Werken

14. Five place tables; 5 dec. Log.; log. and natural values
of trig. functions in the **Decimal system** (rechte hoek
= 100 gr., onderverdeeld in deci-, centi-, milli- en
decimilligr., opv. dgr, cgr, mgr, dmgr).
Third edition, bound f 7,50

De beste meetkundeboeken voor het M.U.L.O. en andere
scholen met beperkt wiskunde-program zijn

MEETKUNDE IN TAKEN

door

F. Henneman en E. Steenberg

Intuïtieve inleiding:

Vorbereiding 2e druk	90 blz. 175 fig. 24 taken
Deel I	90 blz. 175 fig. 22 taken
„ IIA	112 blz. 155 fig. 21 taken
„ IIB	118 blz. 146 fig. 22 taken

Antwoorden en vele uitwerkingen bij elk deeltje.

Vorbereiding 8 blz., 1 fig.; bij I 10 blz., 18 fig.;
bij IIA 15 blz., 26 fig.; bij IIB 26 blz., 40 fig.

en

LANGZAAM OMHOOG

door

C. F. Frederik (†) en A. van Os

I Met een intuïtieve inleiding 2e druk

120 blz. 150 fig. Met II voor M.U.L.O. A

II 112 blz. 131 fig.

III 120 blz. 124 fig. voor M.U.L.O. B

Eén antwoordenboekje voor de drie deeltjes; met veel uit-
werkingen; 36 blz. met 20 fig.

Ik meen hier aan de hand van een concreet probleem te hebben laten zien, hoe het accent van de diverse behandelingsmethoden van eenzelfde probleem door de eeuwen heen is verschoven. Stellig zal het nu niet gefixeerd blijven; als het Mathematisch Centrum over 100 jaar nog eens een vakantiecursus over dit onderwerp uitschrijft, zal deze voordracht voor de dan optredende sprekers misschien slechts stof tot hoon en minachting opleveren. Nu echter weet ik er niets beters over te zeggen.

Zonder alle volgende punten dermate historisch te bezien als het hier behandelde wil ik nog wel enkele andere onderwerpen uit het algebra-onderwijs noemen, waar in het kader van deze voordracht aandacht aan dient te worden gegeven.

Bij het hoger onderwijs kan men als enige voorloper van de infinitesimaalrekening op de scholen het vak zien, dat op school algebra heet. Naast het zo even gepropageerde (numerieke) rekenen meen ik dat het van blijvend belang is dat men ook in de algebra vlot leert „rekenen”. Met dit laatste denk ik aan hetgeen in de laagste klassen wordt behandeld van het gewone routinewerk van formeel-algebraïsche aard; ook de behandeling der breuken dient hierbij niet te worden vergeten. Het gebrek aan routine hierbij heeft reeds menig a.s. ingenieur parten gespeeld, als hij zijn tijd moest verdoen aan het opsporen van rekenfouten. Helaas schijnt het soms in de mode te zijn om prat te gaan op het niet kunnen rekenen, zowel in de hier bedoelde algebraïsche zin als met betrekking tot het rekenen, zoals men dat op de lagere school leert (of had moeten leren). De praktijk eist dat men kan rekenen, zelfs met gezond verstand. Het is trouwens — gelukkig — ook nog niet in de mode om fout te spellen.

Dit laatste blijkt met name ook bij het onderwijs in de statistiek. De spot die conclusies van statistici wel eens opwekken vindt niet alleen zijn oorzaak in een verkeerde interpretatie der gegevens maar ook wel in cijferfouten. In de praktijk moet men bij dit vak kunnen rekenen, tellen en turven, en dat zelfs vlot. En wie intelligent rekt, komt niet tot domheden die ik ergens eens las: Het ging om vier groepen personen met bepaalde eigenschappen. Er waren prognoses gemaakt voor de percentages die elke groep uitmaakte van het totaal; dat onder diverse omstandigheden. Men toonde zich verbaasd dat het wel voorkwam dat 4, 3 of 2 dier percentages afweken van de voorspelde, maar vrijwel nooit dat er maar één percentage daarvan afweek . . .

Misschien is het te betreuren dat het formeel algebraïsch leren rekenen wordt gedoceerd in de laagste klassen, dus aan leerlingen, die nog niet voldoende doordrongen zijn van het ernstige feit dat

hun dit voor eeuwig wordt bijgebracht. Eenzelfde bezwaar geldt natuurlijk evenzeer voor het onderwijs in de meetkunde in dit stadium. Ik zie overigens geen oplossing voor dat probleem. In de praktijk probeert men terecht door veel en veelvuldig herhalen in later jaren een eventueel vroeger tekort aan kennis te doen inhalen.

Aansluitend aan de gemaakte opmerkingen over de approximatie van wortelvormen valt op te merken, dat het limiet-begrip steeds aan belangrijkheid wint. Juist een effectieve approximatiemethode kan als een prachtige illustratie dienen voor hetgeen met een limiet wordt bedoeld. Waar ik persoonlijk wat huiverig ben om het limiet-begrip op de scholen in zijn volle strengheid te behandelen (trouwens zonder een enigszins redelijke behandeling van het reële getal lijkt mij dat onmogelijk), acht ik een aanloopje van de geschetste numerieke zijde een goed substituut. Men mag aan het limietbegrip nu eenmaal niet voorbijgaan, nu de infinitesimaalrekening op het schoolprogramma vastere voet heeft gekregen.

Voor de toegepaste wiskunde is deze eerdere kennismaking met de infinitesimaalrekening zeker nuttig. Men hoede zich ervoor dat dit opnieuw leidt tot het africhten tot een groep trucjes. Behandeling van extrema van eenvoudige vormen kan illustratief zijn. Persoonlijk irriteert het mij nogal dat iedere leerling thans wel de indruk moet hebben gekregen, dat iedere bepaling van een extreem met het tovermiddel van afsplitsen van kwadraten of nul laten worden van discriminanten van vierkantsvergelijkingen uitvoerbaar zou zijn. Realiseren zij zich wel waarom men geen derde machten pleegt af te splitsen ofwel geen vierde machten? U ziet, dat ik ook hier de overheersende rol van de kwadratische functie en haar verdere hebbeligheden graag wat zag teruggebracht opdat men tijd vrij krijgt voor behandeling van uiteenlopende meer algemene zaken.

De behandeling van de infinitesimaalrekening staat en valt met die van het functiebegrip. Terecht treedt dit meer en meer op de voorgrond. Ik hoop echter niet dat dit zal gaan ten koste van de hierboven als onmisbaar geschetste rekenvaardigheid. Het arsenaal der op de scholen behandelbare functies is uiteraard beperkt. Gelukkig bood het begrip absolute waarde wat verruiming! Ik wijs ook nog op wat men in de abstracte algebra het substitutierecht noemt. Bij het functiebegrip is het van belang vele keren concrete berekeningen te laten maken door substitutie van bepaalde waarden voor de onafhankelijk veranderlijke. Misschien is het goed de leerlingen dan tevens af te leren om $f(x)$ uit te spreken als f maal x ; als „ $f x$ ” te moeilijk is acht ik „ f van x ” een waardig substituut, dat stellig geen verwarring kan geven.

Nog eenmaal kom ik terug op het limietbegrip. Vroeger had men dat maar op één plaats nodig: bij de behandeling van de oneindig voortlopende meetkundige reeks. De theorie der reeksen vond haar oorsprong wellicht in die van de berekeningen over samengestelde interest en annuïteiten. Deze voor sommige groepen stellig nuttige onderwerpen staan m.i. maar in een zeer ver verwijderd verband met hetgeen thans op de eindexamina aan vraagstukken over reeksen wordt gegeven. Evenals bij de theorie der vergelijkingen vraag ik mij af of de behandeling der reeksen zich vrijwel tot de twee bekende typen van rekenkundige en meetkundige reeks moet beperken. Menigmaal meent een leerling, dat een reeks die niet rekenkundig is, alleen maar meetkundig kan zijn. Misschien is het nuttig om iets algemenere dingen over reeksen te zeggen, mede omdat ze toch eigenlijk dienen om anders moeilijk te vangen grootheden weer te geven. Althans daartoe dienen ze in de analyse en numerieke wiskunde, met name ook bij het berekenen van zekere bepaalde integralen en van oplossingen van zeker type differentiaalvergelijkingen. Men realiseere zich dat $3,141592653589 \dots$ een korte schrijfwijze is voor een reeks; die reeks convergeert, maar is overigens noch meetkundig noch rekenkundig. In diverse Engelse algebraboeken voor „secondary schools” ziet men een verder gebruik van reeksen dan in onze schoolboeken. Men kijke eens in de overigens wellicht verouderde leerboeken van Hall en Knight. Ook hier verloochenen de Engelsen hun numerieke inslag niet door (via de binomiaalreeks) uitdrukkingen als b.v. $\sqrt{7}$ te laten uitrekenen (approximeren).

Ik wil ook nog op een schijnbare controverse wijzen in het onderwijs in de algebra en analytische meetkunde. Het ware te wensen dat de leerlingen beter beseffen dat een grafische voorstelling in de algebra en een kromme van de analytische meetkunde feitelijk dezelfde begrippen zijn. Er zijn geen twee soorten parabolen: die uit de algebra en die uit de analytische meetkunde. Er is er maar één soort: die uit de wiskunde. Tot hun ideeën komen de leerlingen echter onvermijdelijkerwijze. In de algebra leert men dat men van een functie zoveel meer kan zien door haar in beeld te brengen. In de meetkunde leert men dat men nimmer conclusies uit een figuur mag trekken. Er moet steeds een bewijsvoering zijn, die tot de begeerde conclusies leidt; in de analytische meetkunde wordt die bewijsvoering door een berekening gegeven. Schijnbaar werken dus algebra en analytische meetkunde op essentieel verschillende manieren. Nu komt het bij toepassingen vaak voor, dat men van een of ander verschijnsel een grafiek maakt en daaruit conclusies wenst te trekken. Mijns inziens is zo'n heuristische werkwijze wel attractief en zeker niet zonder

resultaat, maar ik gevoel mij pas veilig als een strenge berekening de vermoedens bevestigt. Moge het mogelijk zijn ook reeds bij het schoolonderwijs hier een brug te slaan tussen de beide vakken. Wellicht durft men dan ook de resultaten der infinitesimaalrekening toe te passen op de krommen der analytische meetkunde, met name het bepalen van de raaklijn in een punt aan de cirkel of ellips enz.

Zo even sprak ik over de binomiaalformule. Persoonlijk betreur ik het zeer bij de eindexamina te moeten vaststellen, dat die niet meer algemeen bekend is bij de leerlingen (ik doel slechts op het geval dat de exponent een natuurlijk getal is). Men heeft er in de praktijk veel gemak van als men die formule kent. Ook voor verdere theorie is de formule nuttig. Enerzijds treedt ze (gedeeltelijk) op bij de bepaling van de afgeleide van de functie x^n , anderzijds zijn de binomiaalcoëfficiënten van belang in de combinatoriek.

Ik kom daarbij op een geheel ander terrein. Hier denk ik aan de wensen van mijn collega's docenten in de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Verre van te propageren dat deze vakken bij het gymasiaal of middelbaar onderwijs moeten worden gegeven zijn de docenten in deze vakken ermee gediend als hun studenten reeds een voorkennis hebben van de begrippen combinatie, permutatie enz.; en natuurlijk niet alleen een voorkennis doordat ze eens de definities hebben gehoord, maar ook doordat ze er wat routine mee hebben opgedaan. Men vermijdt dan tevens dat een leerling of student zou menen dat het begrip combinatie een typische vinding is van de waarschijnlijkheidsrekening.

Als ik het wel heb heeft vroeger op het gymnasiumprogramma de waarschijnlijkheidsrekening gestaan. Ik vind het niet erg, dat dat onderwerp nadien is geschrapt om plaats te maken voor zaken die belangrijker schijnen. Ik meen ook niet dat de tijd nu reeds rijp is om de waarschijnlijkheidsrekening te gaan invoeren op de gymasia of middelbarescholen. Wil men toch iets invoeren van deze onderwerpen, dan acht ik dat wat betreft de zwaarte van het onderwerp wel mogelijk. Het beginonderwijs in de waarschijnlijkheidsrekening behoeft niet boven het bevattingsvermogen der gemiddelde leerlingente liggen. De praktijk des levens, die zelfs afgezien van Gallup referenda, meer en meer van statistische uitspraken wordt doordrongen, zou het kunnen motiveren. Persoonlijk geloof ik echter dat de hierboven aangeduide desiderata op het gebied der numerieke analyse de voorrang verdienen.

Er zijn enkele gymasia waar een proef wordt genomen met de vakken geschiedenis der wiskunde en waarschijnlijkheidsrekening voor de alpha-leerlingen. Het eerste juich ik gaarne toe. Mijns inziens wordt hier eindelijk eens een brug geslagen tussen het onderwijs in

de klassieken en dat in de wiskunde. Men dient de leerlingen te door-
dringen van de enorme waarde van de beschaving der Grieken, niet
alleen om de uitvinding van hun democratie, evenmin alleen door
hun bouwkunst, evenmin door enige gewonnen oorlogen, maar ook
— en dat zeker niet in de laatste plaats — door de basis die zij heb-
ben gelegd voor ons natuurwetenschappelijk denken. Grote samen-
werking, die ik helaas lang niet overal constateerde, tussen de do-
centen in de klassieke talen en in de wiskunde is daarbij ten zeerste
gewenst. Ik dwaal af: ik behoefde dit ene punt der proefneming niet
te releveren (toch wil ik nog wel even zeggen, dat ik het de bèta-leer-
lingen ook wel graag gegund had); ik was bezig met het andere. Ik
vrees dat de proef met de waarschijnlijkheidsrekening voor de
alpha's een minder groot succes is. Zeker, ze zullen wel enige kunstjes
hebben geleerd gewillig als ze zijn bij het vernemen dat ze speciaal
voor hen uitgelezen wiskunde in een speciaal programma krijgen;
maar weldra blijkt juist bij dit vak dat er moeilijke achtergronden
zijn en dat nog zo gewillige honden (let wel: dit is slechts beeld-
spraak) niet te dressereren zijn tot al te ingewikkelde kunststukjes.
Persoonlijk ben ik overigens benieuwd, maar mij heeft de mogelijk-
heid ontbroken om dat ooit na te gaan, of een in deze vakken ge-
trainde alpha-leerling zich later nooit meer zal bezondigen in het
vermelden van percentages als de bovengenoemde 70 % als hij iemand
de waarheid aanprijst van een gerucht van twijfelachtig gehalte.

Aanknopende aan een eerder gemaakte opmerking over leren re-
kenen met gezond verstand denk ik aan een gebeurtenis, die ge-
durende mijn studietijd op een natuurkundepracticum hier ter stede
plaatsvond. Daar verkondigde een student dat zijn meetresultaat
2,56 was met een fout van 1,8739 %. Ik vrees dat vele jaren van
onderwijs in waarschijnlijkheidsrekening en foutentheorie op school
of universiteit aan deze persoon verspild zouden zijn. Ik signaleer
nog slechts dat de studenten in hun eerste studiejaar op de diverse
practica al in aanraking komen met foutenberekeningen. De practi-
canten wordt dan al direct ingeprent, dat bij elke meting een per-
centage van de fout (ontstaan door onnauwkeurigheid bij aflezen of
waardoor dan ook) in rekening dient te worden gebracht. Men heeft
zelfs rekenregels over absolute en relatieve fouten. Hoewel dit alles
direct aan het begin van de universitaire studie in de natuurweten-
schappen optreedt, blijf ik erbij dat dit niet een voldoende motief op-
levert om de waarschijnlijkheidsrekening op de scholen in te voeren.
Mede grond ik deze opvatting daarop dat er de nodige nuttige onder-
werpen zouden moeten vervallen en dat ik persoonlijk dan aan an-
dere in te voegen onderwerpen de voorrang wens te geven, terwijl

het hier toch gaat om vrij simpele met gezond verstand snel aan te leren rekenregels.

U zult wel hebben begrepen, dat ik tot dusverre nog vrijwel steeds heb gesproken over het schoolonderwijs in de algebra. Dit toch is wel de voornaamste pijler, waarop het onderwijs in de belangrijkste vakken der toegepaste wiskunde rust. Ik ben echter nog niet gereed met die bespreking. Er is nog één zeer belangrijk onderdeel, dat trouwens reeds zijdelings al even ter sprake kwam. Het is de theorie der logaritmen en alles wat daarmee samenhangt.

Ik weet niet met absolute zekerheid te zeggen, waarom die op de scholen is ingevoerd: misschien wel om zonder de bekende tabellen de machten van 1,04 te kunnen bepalen, heel misschien ook wel (althans dat had zo kunnen zijn) om vast te stellen dat de limiet van a^n voor een echte breuk a bij tot oneindig naderende n nul is. Stellig heeft bij de invoering de gedachte voorgezeten, dat men ermede enerzijds vlugger kon rekenen en anderzijds meer dingen kon vinden dan tot dusverre het geval was.

Met dat vlugger rekenen is het soms maar droevig gesteld: $3,5 \times 2,8$ moet men, zo dunkt mij, vlugger uit het hoofd doen dan met een tafel. En er zijn er gelukkig ook, wie het met een tafel meer moeite kost dan erzonder. Dat logaritmen gemakkelijk zijn bij het bepalen van gedurige produkten is en blijft een winstpunt. Dat men ermede derde- en hogere-machtswortels kan trekken eveneens. Ook in de goniometrie doen ze nuttig werk; de landmeters kunnen er evenmin reeds buiten.

Tot zover de historie der zeventiende, achttiende en negentiende eeuw, met alle gevolgen, voor ons onderwijs, van dien. In deze eeuw kwam de moderne rekenmachine op, die de problemen in een geheel ander licht stelt. In principe is dit de grote concurrent van de logaritmen; tal van berekeningen die vroeger logaritmen vereisten, worden nu door de machine op een of andere wijze rechtstreeks verricht. Op den duur zal men onder ogen dienen te zien of deze verschuiving van invloed moet zijn op ons schoolprogramma. Het zal stellig nooit zo kunnen zijn, dat de logaritmen geheel kunnen verdwijnen. De analyse voert hier en daar tot de integraal van $1/x$ en het aantal priemgetallen onder een zekere grens n is in eerste approximatie gelijk aan $n/\ln n$. Bovendien blijven de logaritmen voor ieder, die niet in het gelukkig bezit is van een ARRA, X1, ENIAC of ZEBRA e.d. en evenmin een eenvoudig handrekenapparaatje bezit, een nuttig hulpmiddel voor het uitvoeren van sommige der boven geschetste berekeningen. De tijd zal het leren of deze motieven blijvend gelden om de behandeling der logaritmen op de scholen te rechtvaardigen.

Ten slotte, om op een der punten even in te gaan, wordt daar ook niet de $\log$ behandeld, hoewel er zonder de functie $1/(x^2 + 1)$ in de reële analyse niet integreerbaar is. Wel meen ik dat nu reeds het accent iets minder zwaar zou kunnen wegen. Het berekenen van bij voorbeeld de derde machtswortel uit 2 kan door een iteratief procédé (au fond de methode van Newton, toegepast op de vergelijking $x^3 - 2 = 0$) of met behulp van de binomiaalreeks heel goed zonder logaritmen worden gedaan. Ik noem hier iteratieve procédés. Juist deze spelen veelal een rol in de moderne berekeningsmethoden, in het vak approximatietheorie. De opkomst der rekenmachines heeft een en ander bevorderd. Ik geloof dat de scholen hier nog niet aan mogen beginnen. Liever zag ik dus de vrijgekomen tijd besteed aan enkele aspecten uit de analyse en approximatietheorie, die ik aan het begin aanroerde (benaderen van wortels van algebraïsche vergelijkingen e.d.).

Dat er tijd kan vrijkomen lijkt mij duidelijk: de behandeling der logaritmische en exponentiële vergelijkingen kan worden beknot. De neiging daartoe bespeur ik al geruime tijd. Een exponentiële vergelijking mag nog wel worden behandeld; ze treden ten slotte ook in de praktijk op, b.v. bij de berekeningen van halveringstijden van radio-actieve elementen (en bevolkingen van steden?) of verdubbelingstijden van de aardbevolking in het algemeen (en hun kapitalen). Ik vind echter bij de cultus die op de scholen vroeger van dit onderwerp werd gemaakt iets oneerlijks: de leerlingen beginnen erdoor te geloven dat in principe elke logaritmische of exponentiële vergelijking oplosbaar is met de hun gegeven middelen. Ik beweer dat bijna elke onoplosbaar is en dat de slimheid der samenstellers dier problemen, die met een fijn gevoel de oplosbare typen in rijke variatie weten te vinden, hen ten enen male ontgaat.

Ook is misschien de tijd aangebroken dat men iets minder tijd kan besteden aan het logaritmisch maken van vormen, bij voorkeur goniometrische. Afgezien van de goede routine, die het omzetten van zulke vormen aan onze scholieren kan bieden, zie ik nog steeds niet in waarom men $\sin A + \sin B + \sin C$ (waarbij A , B en C de hoeken van een driehoek zijn) niet vlugger rechtstreeks door opzoeken en optellen kan vinden dan na een omzetting tot een produkt en gebruik van een andere tafel.

De eerder gesignaleerde aantrekkingskracht, die van zekere nieuwgelanceerde theorieën of raketten kan uitgaan, vindt men ook weerspiegeld in de belangstelling die iedereen ineens voor rekenmachines heeft. Soms is de vreugde al gesmoord als men niet in staat blijkt het gebruikelijke beginverhaal over het tweetallige stelsel te

begrijpen. Persoonlijk wil ik er wel een lans voor breken, dat er eens iets over die machines wordt verteld bij het onderwijs in de algebra, van welke gelegenheid men dan tevens gebruik kan maken om iets te vertellen over talstelsels. Heel merkwaardig is het, dat dat onderwerp ook in ons onderwijs doordringt bij die gymnasia die de geschiedenis der wiskunde in hun programma hebben staan. In verband met de schrijfwijze der getallen bij diverse volkeren rond de Middellandse Zee is dit onderwerp hier ingelast. Zo ziet men dat de modernste theorieën en ontwikkelingen samenhangen met de allereerste, waarmee de kring rondom ons algebra-onderwijs mijns inziens meteen voldoende gesloten mag worden geacht.

IV. *Het onderwijs in de meetkunde.*

Terwijl de toegepaste wiskunde wel speciaal berust op de analyse en die weer op de schoolalgebra (althans voor onze studenten) voortbouwt, neemt de meetkunde (waarbij ik gelijkelijk het oog heb op de planimetrie, stereometrie en ten dele ook op de analytische meetkunde) daar een veel minder belangrijke plaats in. Wie dan ook heel radicaal is zou misschien de gehele meetkunde willen bannen van ons schoolonderwijs. Ik kom hier ten sterkste tegen op om heel verschillende redenen. Hoewel juist hierover door de vorige sprekers wel het nodige is gezegd, geef ik er graag mijn eigen visie bij, al moge die hier en daar iets afwijken van de hunne.

Bij het beginonderwijs in de wiskunde neemt de meetkunde een vooraanstaande plaats in. Het streng-deductieve element speelt (na een aarzelend begin) reeds na enkele maanden de hoofdrol. Redeneringen die gebruik maken van wat men in een figuur meent te zien, verkrijgen pas hun waarde als het „geziene” wordt aangetoond. Hoewel dit streng-deductieve eigenlijk ook bij elke andere tak van wiskunde de boventoon zou moeten voeren, is dit om begrijpelijke redenen niet het geval bij de algebra. (Men kan de arme leerlingen nu eenmaal niet van meet af aan abstracte algebra geven). Toch blijkt die wiskundige strengheid in de analyse haar essentiële rol te spelen, zodat het mijns inziens goed en zelfs nodig is, dat de leerlingen in een zo vroeg mogelijk stadium hiermede kennis maken. Zij zien dan in wat een bewijs is (of hoort te zijn) en ze dienen te leren dat wiskunde geen empirie is, al is in een later stadium een heuristische werkwijze wel eens instructief.

Eigenlijk doet een ingenieur vaak hetzelfde als een schooljongen, die naar het bewijs van een meetkunde-eigenschap zoekt. Hij tekent een figuur, merkt wat op en accepteert dat pas na een bewijs. Maar zonder die figuur had hij dat alles niet gevonden.

Dit dooreenlopen van intuïtie, aanschouwing en een zakelijke redenering vindt men bij de ingenieur terug, die zijn ruw ontwerp niet voldoende basis voor de constructie van zijn object acht en dan een strakke berekening opzet, die hem de construeerbaarheid en de details ervan onthult.

Het meetkundeonderwijs nu kan naast het belang dat het nog steeds op zichzelf heeft, dit type gedachtengang op een prachtige wijze aan de leerlingen bijbrengen.

Verder dient de meetkunde toch ook om de lengten van allerlei lijnstukken in bepaalde figuren te berekenen, iets dat in de praktijk voorkomt en zal blijven voorkomen. Veelal wordt dit door de ingenieurs, los als zij al weer wat van hun schooljaren zijn komen te staan, niet op de kortste of elegantste wijze gedaan. Wellicht is dat voor hen bijzaak.

Er zijn nog heel wat meer argumenten naar voren te brengen om het meetkundeonderwijs zijn ruime plaats te blijven gunnen. Ik ga hier eens in op één, dat misschien niet direct spreekt, maar wel van indirecte importantie is. De gehele westerse cultuur vindt haar bakermat in de Griekse. Onze manier van redeneren in de wiskunde, met name in de meetkunde, maar uiteindelijk toch ook in andere onderdelen der wiskunde, is er een bijzonder duidelijk voorbeeld van. Ik acht het alleen daarom al fout om die kiem geheel te negeren. Het doet mij enigmatischer aan of men een fraai gebouw zijn fundamenten ontnemt, waarna het wankel of zeker topzwaar wordt. Dat neemt niet weg dat een enkel fundament wel eens revisie behoeft of zelfs wel eens vermolmd blijkt te zijn. Het leeuwendeel van dit gebouw is thans nog volkomen gaaf intact en heeft nog steeds zijn oorspronkelijke attractie en nut. Om dezelfde reden zou ik het onderwijs in het Grieks op de gymnasia en lycea niet willen beknotten. Maar daarover heb ik niets te vertellen.

Men heeft wel eens de opmerking gemaakt, dat het algebraonderwijs ongeveer het peil der ontwikkeling van de 18e eeuw benadert en het meetkundeonderwijs dat van op zijn minst 20 eeuwen eerder. „Dus het is verouderd”, wil men er op deze hatelijke wijze aan vastknopen. Ik zou het tegendeel willen beweren: juist die 22 eeuwen oude meetkunde doet aan charme en aan doorwrochttheid niet onder voor die 3 eeuwen oude analyse of andere nieuwe vakken.

Behalve een enkel fundament is er inderdaad wel hier en daar ook een ornament dat ik in het meetkundegebouw zou willen bijwerken. Als onbelangrijk voorbeeld geloof ik de koordenvierhoek te mogen noemen, waarvan de berekening der lengten der diagonalen uit die der zijden sneller met behulp van een twee maal toepassen van de

cosinusregel kan geschieden dan met Euclides' methode. Omgekeerd is de afleiding op school van de s -formule voor de driehoek een onaangenaam gecijfer, uiteindelijk gegrond op de stelling van Pythagoras en haar uitbreiding. Misschien zou men zich hier beter aan de Grieken kunnen spiegelen en Hero's fraaie methode de eer gunnen, die haar toekomt.

In het bovenstaande had ik het vooral (in gedachten althans) over de vlakke meetkunde. Veel van wat ik noemde geldt echter evenzeer voor de stereometrie. Helaas heb ik wel wat meer kritiek op de manier waarop dit vak wordt gegeven. Althans in eerste instantie richt ik deze op de jaarlijkse eindexamenopgaven, die wel enigermate de richting van het onderwijs in de stereometrie bepalen. Ik stel met leedwezen vast, dat men in de stereometrie zich meer en meer beperkt tot speciale figuren. De grootheden $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ zijn in die opgaven niet van de lucht; kubussen zijn welkom en de ontmoete piramiden wedijveren met elkaar in regelmatigheid (en dat nog wel terwijl de regelmatige veelhoeken in een hoekje worden teruggedreven!). Al dat speciale is natuurlijk wel een fraai mozaïek en menig kunstenaar kan erdoor worden geïnspireerd. Maar bij de planimetrie beperken wij ons toch ook niet tot vierkanten en gelijkzijdige driehoeken, maar durven wij wel degelijk vraagstukken over willekeuriger figuren aan. Dat diene men bij de stereometrie ook te proberen. Ik geef toe, dat men daarin helaas niet al te ver kan gaan; de stereometrie is natuurlijk een dimensie moeilijker dan de planimetrie. De berekening van de inhoud van een willekeurig viervlak, waarvan de lengten der zes ribben gegeven zijn, voert, hoewel er netwerkconstructies worden gegeven voor het vinden van de hoogte uit deze elementen, helaas veel te ver. De mooie formule van von Staudt voor de lengte van de straal van de omgeschreven bol van een viervlak valt zeker ook buiten het programma. Het enige dat men mag vragen is, dat de constructie ervan bekend is. Mijns inziens moet dan toch wel onvermijdelijkerwijze bij een leering wel eens de vraag opkomen of hetgeen geconstrueerd kan worden, ook niet te berekenen is. Toch vind ik dat men tegenwoordig wel veel te weinig ver gaat.

U zult bij uzelf vaststellen dat ik hier alweer buiten mijn boekje ben gegaan en over onderwerpen praat, waarover de andere sprekers meer gefundeerde opmerkingen kunnen maken en mogen maken. Er is echter een belangrijk argument, dat het voorafgaande rechtvaardigt. In de praktijk is het vak vectoranalyse van groot belang evenals de vectoralgebra, haar voorloper. Beide vakken, evenals tal van toepassingen, vergen van de beoefenaren een redelijk ruimtelijk inzicht. Het is mijn mening dat men dat niet alleen kan verkrijgen

door op speciale stereometrische figuren te letten, maar pas als men evenzeer algemenere figuren onderzoekt.

Het is hier tevens het ogenblik om nog op enkele eigenaardigheden in de manier van redeneren te letten, die bij een bepaald onderdeel om de hoek komt kijken. Dat is de theorie der meetkundige constructies en tevens die der algebraïsche vergelijkingen (welk laatste onderwerp uit de algebra ik nog expres even achterwege had gelaten). Bij de meetkundige constructies is het gewoonte om een analyse te maken. Veelal is de leerling dan ook nog wel in staat om de constructie zelf aan te geven (al doet hij dat lang niet altijd correct). Ruimte (figuurlijk gesproken) voor een bewijs of discussie ontbreekt bijna steeds. Hetzelfde ziet men in de algebra bij het oplossen van b.v. twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. De methode van optellen en aftrekken leert, dat als er een oplossing is, die na de gebruikelijke welbekende manipulaties is te verkrijgen. Dit leert ons eigenlijk nog niets over het aantal oplossingen (en met name of het positief is, dus over de existentie van een oplossing). Wie dit niet helder voor de geest heeft komt bij het trachten op te lossen van strijdige lineaire vergelijkingen tot een relatie van het type $1 = 0$. Tweeërlei conclusie is nu mogelijk: óf de wiskunde deugt niet (dit als men rotsvast ervan overtuigd was, dat het stelsel oplosbaar is); óf het stelsel heeft geen oplossingen. Het is goed om én in de meetkunde bij de theorie der constructies én in de algebra bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen te letten op de omkeerbaarheid der redeneringen: Als een punt aan deze of gene eigenschap moet voldoen, dan bezit het de volgende verdere eigenschap; *en omgekeerd*, als het punt die verdere eigenschap bezit dan voldoet het aan de oorspronkelijk gestelde.

Wie dit beter, ook in de algebra, en vooral dus precieser behandelt, staat ook niet meer voor verrassingen over de aantallen oplossingen van differentiaalvergelijkingen, een probleem waarvan ik de belangrijkheid waarlijk niet voor u behoef uiteen te zetten.

Het uitstapje naar de stelsels lineaire vergelijkingen zetten wij nog even voort. Ook dit is een probleem dat voor de praktijk van ongekend belang is. De strijdvraag of men die vergelijkingen met of zonder determinanten moet oplossen valt buiten het kader van onze beschouwingen. Het oplossen volgens de schoolmethode is voor de problemen, die men in de wiskundevraagstukkenboeken op school en universiteit ontmoet vaak voldoende. Numeriek doet men het toch weer anders (vooral bij meer vergelijkingen met meer onbekenden; dan zijn iteratieve methoden te prefereren). Het is goed dat op de scholen het probleem is aangeroerd en één methode van oplossen is

gegeven. Het verband met de analytische meetkunde worde vooral goed gegeven. In de analytische meetkunde der ruimte (nauw verwant in haar begin aan de vectoralgebra) ontmoet men het op-nieuw; dit vak, dat m.i. niet in de schoolwiskunde thuishoort, kan als een verrassende herontdekking van de grondeigenschappen der stereometrie dienen en een en ander kan zo gegeven worden dat het het ruimtelijke inzicht zeer ten goede komt. Dat hier niet alle optredende vectoren onderling gelijke componenten hebben, accentueert nogmaals mijn grief tegen de „mozaïekstereometrie”, die ik hierboven uitte.

Het is hier verder op zijn plaats om iets te zeggen over niet-lineaire zaken. In techniek en praktijk heeft men de kegelsneden wel degelijk nodig en komen veel problemen voor, waar zich analoge gevalsonderscheidingen voordoen als bij de drie typen kegelsneden ellips, parabool en hyperbool in de planimetrie. Ik vind het dan ook erg prettig, dat deze onderwerpen nu in het schoolonderwijs worden opgenomen. De (concrete) lineaire algebra kan dan direct — hierop geënt — bij het eerste jaar van het hoger onderwijs worden gegeven. Ik acht het niet gewenst dat deze ook al op het schoolprogramma verschijnt. De klassieke analytische meetkunde sluit m.i. prachtig aan bij de planimetrie. Nuttig is de analytische meetkunde ook al, omdat de leerlingen zien, dat men eigenschappen van krommen, die men niet met één slag kan tekenen met passer of lineaal, streng kan bewijzen. Dat dit nodig is, kan ik b.v. illustreren met een tegenwerping die ik eens kreeg, toen ik iemand iets vertelde over de eigenschappen van de driehoek van Morley. Het overigens niet eens geheel juiste commentaar dat ik al direct ontving was: „Maar die figuur is toch niet te construeren” en de bereidheid om het betoog aan te horen was „dus” weg.

Hoewel men de analytische meetkunde veelal laat ophouden zodra de theorie der tweedegraads-krommen c.q.-oppervlakken is behandeld, wil het mij voorkomen, dat mede voor de praktijk het van belang is toch wel verdere dingen toe te laten. Hier geldt het bij de vergelijkingen reeds genoemde: Er zijn dingen die ook voor vergelijkingen van hogere graad dan de tweede gelden; men behoeft die niet allemaal te negeren. Persoonlijk vind ik het voorts jammer, dat de theorie der bundels in de analytische meetkunde op de achtergrond dreigt te raken. Het is een belangrijk aspect van lineaire algebra, dat in tal van andere gebieden optreedt en dat bovendien in de analytische meetkunde zelf een machtig en handig hulpmiddel kan zijn.

Van de beschrijvende meetkunde heb ik te weinig verstand, dan dat ik de moed heb om te trachten het tanen van haar roem te

stuiten. De gouden bergen, die men zich bij de opkomst van dit vak dacht en die juist 5 jaar geleden op een vakantiecursus van het Mathematisch Centrum door Prof. Seidel met een zeker gevoel van spot zijn gereleveerd, vielen bij nadere exploratie wat tegen. Wellicht kan dit vak, indien het niet ontardt in kunstjes op een zo vlak mogelijk vel tekenpapier, ook het ruimtelijk inzicht ten goede komen. Ik geloof evenwel dat de lineaire algebra, zoals men die op de instellingen van hoger onderwijs dient te geven, tezamen met de stereometrie der gymnasia en middelbare scholen voldoende die rol kan overnemen. Die groepen studenten, die het vak speciaal nodig hebben, kunnen het wel ter plaatse leren. De analytische meetkunde, waarvoor het op de scholen heeft plaats gemaakt, acht ik belangrijker, zeker in het huidige rekentijdperk.

V. *Slotopmerkingen.*

Na deze opmerkingen over de meetkunde wil ik nog een enkele algemene opmerking maken. Bij het onderwijs in de algebra treden de zgn. ingeklede vergelijkingen op. Veelal wordt dit onderdeel maar heel summier behandeld. Stellig zal er wel een groot aantal argumenten zijn aan te voeren die dat rechtvaardigen. Toch zij men niet al te snel met het trekken van deze conclusie.

In de toegepaste wiskunde ontmoet men analoge problemen steeds meer. Men heeft dan te maken met een of ander probleem uit de praktijk en moet het (althans dat acht men dan nuttig) omzetten in een mathematisch probleem. Men probeert dan te komen tot een aantal vergelijkingen (veelal differentiaalvergelijkingen) die enkele kenmerkende grootheden (waaraan dus blijkbaar een getalwaarde kan worden toegekend) vastleggen. Dit probleem eist een enorme routine en een juist gevoel om vast te stellen wat essentieel en wat bijkomstig is. Men moet trouwens in de praktijk vaak een aantal effecten verwaarlozen wil de te verkrijgen vergelijking nog handelbaar zijn. Soms zijn dergelijke simplificaties alleen al nuttig ter wille van een voorlopige oriëntering op de situatie.

Hier treedt dus een analoog probleem op als bij de welbekende vraagstukken die men al in de rekenboekjes van de lagere school aantreft (zij het dat ze dan niet met algebraïsche hulpmiddelen mogen worden aangepakt). Die problemen zijn lang niet altijd eenvoudig; hun pendant in de toegepaste wiskunde, zowel bij meer fysische als bij meer statistische problemen is het evenmin. Onwillekeurig denk ik terug aan de vraagstukken over honden, die hazen achtervolgden met ongelijke spronglengten en sprongfrequentie. Iemand die meent het probleem pas grondig te hebben aangepakt door eerst de poten

van hond en haas te bestuderen om dan iets meer over hun sprongen te kunnen zeggen, acht u op de verkeerde weg. Natuurlijk vindt u dat allen een uitgemaakte zaak en popelt u al van ongeduld om te vertellen hoe het probleem wèl moet worden opgelost. U stelt een der onbekende grootheden x en rekent er dan op de gebruikelijke manier op los. De keuze van de grootheid, die u x wil noemen, berust op een zekere „feeling” (dezelfde feeling waarvan het bezit bij andere minder onschuldige toepassingen iemand tot een goed toegepast-wiskundige maakt). Wie het onhandig doet krijgt wellicht een ingewikkelder becijfering te maken dan degene, die intuïtief een snellere weg vindt. Maar wat als blijkt dat de hond na $7\frac{1}{4}$ sprong de haas heeft gevangen? Dan dient men waarlijk het gebeuren bij die laatste kwartsprong iets verder onder de loop te nemen. Misschien komt het dan toch nog zover dat men de poot-en-sprong-deskundigen moet raadplegen. Zonder dat levert een globale oriëntatie reeds een globaal antwoord, in casu 7, op. Soms is het de moeite niet waard om veel energie aan te wenden om het precieser te vinden. Juist dat doet zich in de echte praktijk ook zo vaak voor: eerst met een ruwe methode (met op oordeelkundige wijze ingevoerde vereenvoudigingen van het probleem) een voorlopig globaal antwoord, later een verdergaande berekening die tot een precieser resultaat voert.

Enige routine bij het bedoelde soort problemen kan men ook reeds opdoen bij het maken van natuurkundevraagstukken. Het is dan ook m.i. fout om de natuurkunde op de scholen al te kwalitatief te geven. Onze mensheid heeft nu eenmaal door haar manier van denken ook dit vak kwantitatief gemaakt. En dat is dan ook de diepere oorzaak, waardoor de wiskunde haar rol bij beoefening der fysica kan spelen. Het toenemen van de omvang der problemen maakt het vanzelf nodig dat steeds meer verfijnde numerieke methoden worden gebruikt om de steeds moeilijker problemen te kunnen oplossen. Waar ook de numerieke kant in de andere richting der toegepaste wiskunde, de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek van fundamenteel belang is, geloof ik wel dat mijn eindconclusie moet zijn, dat het gewenst is, dat van die numerieke wiskunde hier en daar iets doordringt in het schoolonderwijs. Ik hoop in het bovenstaande summier te hebben aangegeven bij welke onderwerpen dat kan en ook dat dit dient te geschieden zonder dat men de structuur van de wiskunde en van het onderwijs daarin aantast en dat daarbij dan tevens enkele onderwerpen in een passender licht komen te staan.

OVER HET OPLOSSEN VAN EEN VERGELIJKING MET EEN ONBEKENDE ¹⁾).

door

J. WICHERS

Amsterdam

Bij het oplossen van een vergelijking met één onbekende gaat men als volgt te werk: men vervangt de vergelijking door een eenvoudiger vergelijking, die precies dezelfde wortels heeft, m.a.w. door een ermee gelijkwaardige vergelijking. De nieuwe vergelijking wordt door een nog eenvoudiger, maar weer ermee gelijkwaardige vergelijking vervangen, enz. Dit proces gaat door, totdat men een vergelijking heeft gevonden, waarvan men de wortel(s) direct kan zien.

Er zijn dus twee essentiële kwesties te onderzoeken, nl.:

1°. welke herleidingen voeren een vergelijking over in een ermee gelijkwaardige?

2°. van welke vergelijkingen kan men de wortel(s) direct opschrijven?

1. De herleiding.

Het schijnt voor de hand te liggen, dat een vergelijking in een ermee gelijkwaardige overgaat, als men één van de leden vervangt door een daarmee identieke functie. Of dit juist is, hangt echter af van de definitie van het begrip „identiek”. Zou men bijvoorbeeld

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad 0$$

identiek noemen, dan is de bedoelde bewering zeker *niet* juist. Bijvoorbeeld:

$$x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 3x$$

heeft alleen 3 als wortel, terwijl

$$x^2 = 3x$$

zowel 3 als 0 tot wortel heeft.

¹⁾ Wij beperken ons in dit artikel tot rationale vergelijkingen.

Wij definiëren nu:

I. Twee functies heten *identiek*, als zij:

1°. gedefinieerd zijn voor dezelfde waarden van x , en

2°. voor al deze waarden van x gelijk zijn.

Voorbeelden van identieke functies:

$(x + 1) \cdot (x - 1)$ en $x^2 - 1$.

$$\frac{1}{x} \text{ en } \frac{7}{7x}, \quad 1 + \frac{1}{x} \text{ en } \frac{x+1}{x}, \quad \frac{x^3}{x^2} \text{ en } \frac{x^4}{x^3}.$$

II. Twee functies heten *semi-identiek*, als:

1°. zij gelijk zijn voor alle waarden van x , waarvoor zij beide gedefinieerd zijn, en

2°. er een eindig aantal waarden is, waarvoor slechts één der functies gedefinieerd is.

Voorbeelden van semi-identieke functies:

$$x \text{ en } \frac{x^2}{x}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \text{ en } 0, \quad \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)} \text{ en } \frac{x-2}{x-3}.$$

(Een merkwaardige consequentie hiervan is, dat het verschil van twee identieke functies niet identiek gelijk aan 0 behoeft te zijn.)

Men kan nu gemakkelijk bewijzen:

STELLING I. *Een vergelijking gaat over in een ermee gelijkwaardige, als men een van de leden vervangt door een daarmee identieke functie.*

In het bijzonder volgt hieruit, dat men breuken onder één noemer kan brengen, als men het kleinste gemene veelvoud van de noemers als gemeenschappelijke noemer neemt.

Bij het vervangen van een der leden door een semi-identieke functie is de gelijkwaardigheid niet verzekerd.

STELLING II. *Een vergelijking gaat over in een ermee gelijkwaardige, als men een term van het ene lid naar het andere overbrengt met verandering van teken.*

Dus:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

is gelijkwaardig met

$$f(x) - h(x) = g(x).$$

Het beruchte „wegschrapen” is hiermee zeker *niet* gerechtvaardigd! Uit

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

volgt:

$$x^2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 1,$$

maar niet:

$$x^2 = 1,$$

want deze laatste heeft een wortel 1, die de eerste niet heeft.

STELLING III. *Een vergelijking gaat over in een ermee gelijkwaardige, als men de leden vermenigvuldigt met of deelt door eenzelfde, van nul verschillend, getal.*

Past men bij het oplossen van een vergelijking alleen deze drie stellingen toe, dan is er geen gevaar voor het „invoeren” of „verduisteren” van wortels. (Zou het niet beter zijn, deze twee woorden helemaal niet te gebruiken? Is het niet wat zonderling, om een gemaakte fout een schijn van wettigheid te geven, door hem een speciale naam te geven?)

2. De herleide vergelijking.

Als men de vergelijking kan herleiden tot één van de volgende typen, dan kan men de wortels direct zien:

TYPE I:

$$x - a = 0$$

De enige wortel is a .

TYPE II:

$$(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) = 0.$$

De wortels zijn a , b en c . Want substitueert men bijvoorbeeld $x = a$, dan is één van de factoren gelijk aan 0 en dus ook het produkt. Dus a is een wortel. Substitueert men voor x een getal, dat niet gelijk is aan a , b of c , dan wordt geen der factoren gelijk aan 0, en het produkt dus ook niet. Dus: a , b en c zijn de enige wortels.

TYPE III.

$$\frac{(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)}{(x - p) \cdot (x - q)} = 0.$$

Nulpunten teller: a , b en c ;

nulpunten noemer: p en q .

De wortels van de vergelijking zijn de nulpunten van de teller, die niet tevens nulpunt van de noemer zijn.

TYPE IV: De vergelijking $f(x) = f(x)$. Hieraan voldoet ieder getal, waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is.

TYPE V: De valse vergelijkingen, bijv. $f(x) = f(x) + 1$ en $f^2(x) + 1 = 0$. Hieraan voldoet geen enkel getal.

VOORBEELD I.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-3}$$

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-3} = 0 \quad (\text{stelling II})$$

$$\frac{(x-4) \cdot (3x-5)}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = 0 \quad (\text{stelling I})$$

Nulpunten teller: 4 en $\frac{5}{3}$,

nulpunten noemer: 1, 2 en 3,

dus wortels van de vergelijking: 4 en $\frac{5}{3}$.

VOORBEELD II.

$$\frac{x+1}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{x^2-25} = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$$

$$\frac{x+1}{(x+1) \cdot (x-2)} + \frac{x+5}{(x+5) \cdot (x-5)} - \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x-1)} = 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)(x+5)(x-5) + (x+5)(x+1)(x-1)(x-2) - (x-2)(x+1)(x+5)(x-5)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+5) \cdot (x-5)} = 0$$

$$\frac{(x+1)^2 \cdot (x+5) \cdot (x-3)}{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+5) \cdot (x-5)} = 0$$

Nulpunten teller: -1 , -5 , $+3$,

nulpunten noemer: -1 , $+1$, $+2$, -5 , $+5$,

wortel van de vergelijking: $+3$.

BOEKBESPREKING

Dr. Ir. F. Timmers. — *Functioneleer en Nomografie voor administratie en handel*. N.V. Uitgeverij v/h G. Delwel, den Haag 1960, 50 blz., Prijs f 5,—.

Het is de bedoeling van de schrijver diegenen die loonadministratie, kostprijs-calculationen, rendementberekeningen verzorgen of markt- en investeringsproblemen aanpakken, erop te wijzen dat in de vrij eenvoudige (lagere) wiskunde een hulpmiddel voor hun werk aanwezig is. In elk opzicht voldoet dit boek aan dat doel. De taal is duidelijk, de voorbeelden zijn sprekend en voor vermeerdering van kennis doelmatig zonder schools te zijn. Het boek kan bijdragen tot vergroting der efficiency op kantoren, mits de gebruiker (die volstrekt geen mathematicus behoeft te zijn) „zin” voor wiskunde heeft. Bij het tekenen is een grote nauwkeurigheid noodzakelijk. (We vergeven de schrijver gaarne een foutje in tekening 130: punt C op de T.W-lijn een streepje lager — of vergis ik mij? —). De koopman zal, indien hij van dit werk kennis neemt, vertrouwen krijgen in de hier beschreven methode. Ik hoop dat in ieder daarvoor in aanmerking komend bedrijf dit boek onder de aandacht van het kantoorpersoneel wordt gebracht en ik wens de schrijver en de N.V. Uitgeversmaatschappij v/h G. Delwel, bij wie de verzorging in goede handen is geluk met dit boek en een grote vraag.

Söhngen

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen: *Analytische meetkunde*. J. B. Wolters, Groningen 1960; 138 blz., Prijs: ing. f 3,90; geb. f 4,50.

Dit boek bevat de voorgeschreven leerstof met inbegrip van lijnen en cirkelbundels. Een aanhangsel, waarin de klassificatie der kegelsneden wordt behandeld, is voor hen, die daaraan behoefte hebben los te verkrijgen voor f 0,75.

De theorie wordt beknopt en duidelijk gegeven. Het viel mij op, dat de toepassing van de differentiaalrekening (bij de afleiding van de raaklijn in een punt van de kegelsnede), hoezeer ook toe te juichen, toch wel wat afbreuk doet aan de eenheid van de methode. Een grote hoeveelheid vraagstukken van goede kwaliteit siert dit boek. Daardoor vooral is het een uitstekend leerboek geworden.

R. Troelstra

Drs. D. K. F. Heyt, *Goniometrie voor het Voorbereidend hoger en middelbaar Onderwijs, B.*, bovenbouw; veertiende druk van Wijdenes Beknopte Driehoeksmeting B; 94 blz., ing. f 3,25, geb. f 4,—; 1960. P. Noordhoff, Groningen.

Deze nieuwe druk is grondig gewijzigd, ten einde zoveel mogelijk aanpassing te verkrijgen aan het nieuwe programma. Zo zijn er 29 grafieken in uitgewerkt, terwijl van de differentiaalrekening een ruime toepassing wordt gemaakt. De schrijvers hebben willen waken tegen een te enge toepassing van het K.B., maar zijn m.i. nu omgekeerd iets te ver gegaan. Het is toch stellig niet de bedoeling, dat nu nog uitvoerig over lijnstukken in een driehoek gesproken wordt, terwijl ook geen oefening meer gewenst is in het werken met de z.g. „omkeerformules” ($2 \sin p \cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q)$ enz.).

Ongelijkheden worden met de eenheidscirkel opgelost; waarom niet met de grafieken? Een schrijfwijze als $x = -9^{\circ}14' + (h' + \frac{3}{4})\pi$ kan ik niet bewonderen. Aan het eind van het boek zijn tafels toegevoegd van de gon. verhoudingen, als de hoeken in radialen zijn uitgedrukt en verder omzettafels van graden in radialen en omgekeerd.

Alles bijeen een degelijk boek, dat bovendien typografisch uitstekend verzorgd is.

P. Bronkhorst

Dr. A. van Haselen: *Differentiaalrekening en Integraalrekening*. J. B. Wolters, Groningen; 1960; 83 blz. Prijs: ing. f 2,50; geb. f 3,10.

Een duidelijk, goed boek, dat voldoet aan alle eisen, die men aan een boek voor de middelbare school mag stellen. De theorie van de differentiaalrekening maakt een weloverwogen indruk. Zo worden bijvoorbeeld de uiterste waarden terecht zonder hulp van de tweede afgeleide bepaald. Ook de behandeling van de integraalrekening is zorgvuldig en helder. De praktijk zal uitwijzen of de hoeveelheid vraagstukken voldoende is, maar ik heb de indruk, dat ook dit precies is afgepast.

De laatste hoofdstukken geven enkele onderwerpen, die niet tot het examenprogramma behoren. Het getal e wordt ingevoerd door de eis te stellen, dat de grafiek van a^x voor $x = 0$ een raaklijn met richtingscoëfficiënt 1 heeft. Dit is erg interessant, hoewel ik de invoering via de integraal van $1/x$ nog fraaier vind. De machtreksen van $\sin x$, $\cos x$ en e^x worden afgeleid, waarbij wordt aangenomen, dat deze functies in convergente machtreksen ontwikkeld kunnen worden. Bovendien wordt dan nog het verband tussen $\sin x$, $\cos x$ en e^{ix} gegeven.

R. Troelstra

Dr. W. A. M. Burgers, *Goniometrische vraagstukken voor de hoogste klassen V.H.M.O.* Uitg. J. B. Wolters Groningen 1960, 32 blz. f 1,10.

In het voorwoord attendeert de schrijver er op, dat deze verzameling, die als herhaling is bedoeld, het gedachteloos toepassen van formules dient te voorkomen. Hoe b.v. direct in te zien, dat voor geen driehoek geldt $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Waarom is voor een scherph. driehoek zeker een der hoeken $\geq 60^\circ$ en een andere groter dan 45° , dus waarom zal de driehoek stomphoekig zijn als $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq 1,5$ is? Vragen als: hoe zonder herleiding op te lossen de verg.: $(1 - \cos x)^{\cot x} = \frac{1}{\sin x}$ ($0 < x < 2\pi$). Waarom is de verg. $(1 + \cos x)^{\cos x} = (1 - \sin x)^{\sin x}$ vals, lichten m.i. de bedoeling van de schrijver voldoende toe en stimuleren tot het aanschaffen van deze keurige collectie van 200 vraagstukken, die men natuurlijk niet achter elkaar dient door te nemen. Hier volgen nog enige correcties

no. 4 interval $(x, x + 2x) \rightarrow$ interval $(x, x + \Delta x)$ no. 20 1ste regel $\angle(a, b) = \varphi$;

4de regel luide: Q_k is de projectie van P_k op b , P_{k+1} de projectie van Q_k op a ;

5de regel: Druk: $\overline{P_1 Q_1} + \overline{P_2 Q_2} + \dots + \overline{P_n Q_n}$ uit in x en φ , $\overline{OP_1} = x$;

no. 24: 1ste regel wederom $\angle(a, b) = \varphi$;

5de regel: Druk $\overline{A_1 B_1} + \overline{A_2 B_2} + \dots + \overline{A_n B_n} + \dots$ uit in x , ($OA_1 = x$) en φ ;

6de regel: Wat op te merken van de limiet van deze som; als $\angle \varphi \rightarrow 0$?

no. 31: aan het slot: wat nu op te merken van deze limiet als $\angle \varphi \rightarrow 0$?

no. 149 2de regel er moet staan:

$$\frac{\sin^6 x}{p^3} + \frac{\cos^6 x}{q^3} = \frac{1}{(p+q)^3}$$

$$(\text{ik zou trouwens prefereren } \frac{\sin^6 x}{p^2} + \frac{\cos^6 x}{q^2} = \frac{1}{(p+q)^2};$$

no. 157 de functie $-\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha$ is positief, als α scherp is, maar negatief, als α stomp is;

no. 156 zesde regel van onderen: *vier* in plaats van drie;

no. 165: Hoe zonder herleiding?

no. 166 zou ik voorzien van een aanwijzing als: welke identiteit wordt dus opgeleverd door uitwerking van $\lg(\alpha + \beta + \gamma)$.

O.

H. Schubert en R. Haussner, *Vierstellige Tafeln und Gegentafeln*, 3., neubearbeitete Auflage von J. Erlebach; 156 blz.; DM 3,60; Band 81 van de Sammlung Götschen; Walter de Gruyter, Berlin.

Deze handige tafel onderscheidt zich van de Nederlandse tafels van gelijke omvang in de volgende opzichten:

- a. de tafel is in twee kleuren gedrukt; alle getallen die voor het logaritmisch rekenen dienst doen, zijn rood gedrukt, de overige zwart;
- b. er zijn tafels opgenomen ter berekening van $\log(a + b)$ en $\log(a - b)$;
- c. er zijn tafels opgenomen van natuurlijke logaritmen, voor omrekening van graden in radialen, voor overgang van het sexagesimale stelsel op het decimale stelsel;
- d. men vindt er sterftetafels in en diverse rentetafels;
- e. tabellen van geografische, fysische, chemische en astronomische grootheden zijn toegevoegd.

Door deze vele bijtafels kan dit boekje van bescheiden omvang voor de gebruiker tot een waardevol bezit worden.

Joh. H. Wansink

Dr. Fr. O. Ringleb, *Mathematische Formelsammlung*. Siebente Auflage, 318 blz, DM 5,80; Band 51/51a van de Sammlung Götschen; Walter de Gruyter, Berlin, 1960.

Het compendium der wiskunde dat in dit boekje wordt aangeboden, overschrijdt de grenzen der schoolwiskunde verre. Ook de differentiaal- en integraalrekening (met inbegrip van Fourierreeksen en elliptische integralen) de differentiaalmeetkunde en de differentiaalvergelijkingen, de functietheorie en de conforme afbeelding zijn er in opgenomen. Een waardevol bezit.

Joh. H. Wansink

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

41. Iemand bezit één gulden. Hij gooit deze in het water en krijgt van de bank aftelbaar oneindig veel guldens terug. Hiervan gooit hij er 1 in het water en krijgt er weer aftelbaar veel terug, enz. Aan de herhaalbaarheid van het procédé is geen enkele principiële grens gesteld. Verder is er een wet, die bepaalt, dat de guldens in volgorde van ontvangst weer gebruikt worden om in het water geworpen te worden. Wordt gevraagd, of het langs deze weg mogelijk is voor degeen, die de guldens ontvangt en in het water gooit, zijn bezit tot hogere machten dan de aftelbare uit te breiden.

Als U het vraagstuk ingewikkeld vindt, probeert U het dan met 1 gulden weggooiën en 2 ontvangen, een eveneens principieel ongelimiteerd aantal keren (d.w.z. dit aantal is niet aan een bepaalde getalklasse gebonden). Kan hij zo ooit een oneindig aantal guldens verkrijgen?

42. Gegeven is een serie hokjes, genummerd

0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

Op drie, niet noodzakelijk verschillende, hokjes wordt een pion gezet. Twee spelers spelen hiermee het volgende spel. Degene, die aan de beurt is, mag één pion een willekeurig aantal vakjes naar links verzetten; daarna is de ander aan de beurt. Winnaar is hij, die door zijn zet bereikt, dat de drie pionnen in hokje 0 terecht komen (dus degeen, die de derde pion op 0 zet). Er wordt gevraagd, wat de beste speelwijze is.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

39. Dit is altijd mogelijk. Een eventuele snijkromme voldoet aan het gevraagde. Is er geen snijkromme, dan kan men één der oppervlakken altijd aan een translatie onderwerpen, zodat er een snijkromme ontstaat (die men bij de tegengestelde translatie „mee terug kan nemen”).

40. Ja. Het wordt groter. Is de dienst onregelmatig, dan ontstaan er grotere en kleinere tussenpozen. In een grotere tussenpoos zal men meer verkeerde bussen te zien krijgen, in een kleinere tussenpoos minder. Deze effecten heffen elkaar niet op, omdat de kans, dat men in een grotere tussenpoos bij de bushalte arriveert groter is dan de kans, dat men in een kleine tussenpoos arriveert.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*”, in het M.C., 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O op woensdag 29 maart 1961: Prof. Dr. L. Kuipers: „*De transformatie van Schwarz-Christoffel en toepassingen*.” Aanvang 20 uur.

WISKUNDE WERKGROEP W.V.O.

Bijeenkomst op zaterdag 18 maart 1961 in Mathematisch Instituut, Boothstraat 17, Utrecht. Spreker: W. J. Brandenburg: „*De plaats van de wiskunde (in het bijzonder de algebra) tussen de andere schoolvakken*”. Aanvang 15 uur. Ook niet-leden zijn welkom. Inlichtingen over de werkgroep bij Drs. H. C. Vernout, van Nouthuysstraat 11, Haarlem (tel. 02500-57288)

EXAMENCOMMISSIE WISKUNDE M.O.

Het ligt in de bedoeling om op dinsdag 14 maart a.s. 's avonds te Utrecht een bijeenkomst te organiseren waarop door enkele leden van de examencommissie wiskunde m.o. A en B een nadere uiteenzetting gegeven zal worden over de stof die tot de examenprogramma's behoort.

Deze bijeenkomst is bedoeld voor hen die als opleiders voor deze examens werkzaam zijn.

Er zal gelegenheid zijn tot het stellen van vragen.

Opleiders, die deze bijeenkomst wensen bij te wonen, kunnen zich daartoe tot uiterlijk 1 maart a.s. wenden tot de voorzitter van de examencommissie, Prof. H. Th. M. Leeman, Comeniusstraat 677, Amsterdam W3, waarna zij een uitnodiging voor deze bijeenkomst zullen ontvangen.

Dr. D. VAN HIELE-GELDOF

DE DIDAKTIEK VAN DE MEETKUNDE IN DE EERSTE KLAS VAN HET V.H.M.O.

ing. f 9.50

*Twee baanbrekende
werken op het terrein
van de
wiskunde-didactiek*

De centrale probleemstelling
van dit boek is als volgt te
formuleren:

„Is het mogelijk door materiaal-
aanbieding een didactiek te volgen,
waarbij het aanschouwelijke denken
van het kind continu wordt
ontwikkeld tot het abstracte den-
ken, dat vereist is voor het
logische systeem van de meetkunde?”

*„Naar mijn mening kan deze vraag, na bestu-
dering van dit werk, positief beantwoord worden”,*
zo schreef de heer Chr. Boormeester in een
uitgebreide bespreking, opgenomen in VER-
NIEUWING van november 1957.
Onderstaande aanhaling is eveneens aan
deze recensie ontleend.

Dr. P. M. VAN HIELE

DE PROBLEMATIEK VAN HET INZICHT

gedemonstreerd aan het inzicht
van schoolkinderen in
meetkunde-leerstof

ing. f 9.50

In de didactiek der wiskunde

blijkt de betekenis van het
„inzicht” zo fundamenteel te zijn,
dat door bestudering van
dit begrip de structuur van
die didactiek voor een groot
deel ontwikkeld kan worden.

In opdracht van de
STICHTING ONDERWIJS
ORIENTATIE
uitgegeven door:

J. M. MEULENHOF,
Amsterdam

P. NOORDHOFF N.V.,
Groningen

J. MUUSSES, Purmerend

N.V. Uitg. NIJGH &
VAN DITMAR, Den Haag

SPRUYT, VAN MANTGEM
& DE DOES N.V., Leiden

„Beide werken steunen op de modernste
inzichten van de denkpsychologie (Selz,
De Groot, Van Parreren, enz.). De hier
beschreven werkwijze wordt gekenmerkt
door intense exploratie van het aanschouwe-
lijke veld, en daardoor dus ook door een
grote mate van zelfwerkzaamheid, manuele
motoriek en inschakeling der inventiviteit.
Wie zou menen, dat deze leergang zich zou
beperken tot wat gezellig knippen, plakken
en tekenen, vergist zich terdege. Na dit aan-
vangsonderwijs zal blijken dat het meet-
kundig denken ten volle in gang is gezet.

Het is te hopen dat alle wiskundeleer-
krachten, zowel bij het V.H.M.O. als bij
het U.L.O., grondig kennis nemen van
deze beide werken.”

(Chr. Boormeester in Vernieuwing)

Besteladres: Postbus 39, Groningen. Ook via de boekhandel verkrijgbaar.

Zojuist verschenen:

C. J. ALDERS / D. W. OORT

Planimetrie, Gonio- en Trigonometrie

voor de Kweekschool

Ing. f 4,50, geb. f 5,40

Bij het samenstellen van dit boekje is gestreefd naar een zodanige vorm, dat enige voor de gemiddelde leerling uit de eerste leerkring nieuwe begrippen uit de planimetrie worden behandeld. Hierbij wordt tevens de belangrijkste stof gerepeteerd, zonder dat de leerling zich deze herhaling te zeer bewust wordt. De laatste hoofdstukken geven uitbreiding aan de kweekschoolstof voor zowel planimetrie als gonio- en trigonometrie en handelen o.m. over macht en lijnmacht en over de Stellingen van Menelaos en De Ceva. Hierdoor kan dit boekje ook in de tweede leerkring bij het keuzevak wiskunde gebruikt worden.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN



„Een uitstekend boek voor het V.H.M.O. in elk mogelijk opzicht!”

(Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde)

Dr. D. J. E. SCHREK

Beknpte analytische meetkunde

(bekorte uitgave van de 13e druk van „Beginselen der analytische meetkunde” van dezelfde auteur)

155 blz., 46 fig., appendix met 53 formules

met afzonderlijk antwoordenboekje f 3,90, geb. f 4,60

De 1e druk van deze beknpte uitgave verscheen in het voorjaar van 1959; de 2e druk in december 1959. In deze druk werd rekening gehouden met de nadere toelichting van de Inspecteurs op het nieuwe leerplan.

„De degelijkheid die het oorspronkelijke werk sierde, valt ook op bij deze beknptere uitgave”

(Weekblad van de A.V.M.O.)

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN