

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/1961

V - 1 FEBRUARI 1961

INHOUD

Prof. Dr. W. Peremans: Het doel van het onderwijs in de wiskunde bij het voorbereidend hoger en Midd. onderw.	145
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	164
Ir. Dr. A. J. Staring: Goed of fout?	169
Ontvangen boeken	171
Boekbespreking	172
Liwenagel	174
Rectificatie	174
Recreatie	175
Kalender	175

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender“ in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET DOEL VAN HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE BIJ HET VOORBEREIDEND HOGER EN MIDDELBAAR ONDERWIJS ¹⁾

door

Prof. Dr. W. PEREMANS

Eindhoven

Toen ik door de voorbereidingscommissie van deze vakantie-cursus uitgenodigd werd om hier over het doel van het middelbaar onderwijs in de wiskunde te spreken, heb ik slechts met schroom hierin toegestemd. Ik twijfelde namelijk nogal aan mijn competentie om dit onderwerp te behandelen. Nu denkt U misschien, dat dit maar een beleefdheidsfrase is, waarmee de spreker zijn valse bescheidenheid ten toon wil spreiden. Ik verzeker U echter dat ik het in alle ernst meen. Inzake de problemen van het middelbaar onderwijs ben ik een volslagen leek. Mijn enige contacten met dit onderwijs zijn geweest, dat ik als leerling middelbaar onderwijs heb genoten, dat ik als gecommiteerde eindexamens heb bijgewoond en dat ik in de aankomende studenten iets heb kunnen constateren van de resultaten van het middelbaar onderwijs in de wiskunde. Zowel van de praktijk van dit onderwijs als van de onderzoekingen, die aangaande dit onderwijs hebben plaatsgevonden, ben ik volslagen onkundig. Daarom ben ik huiverig voor een gehoor van leraren, die toch op zijn minst de praktijk van het middelbaar onderwijs door en door kennen, over een onderwerp te spreken, dat rechtstreeks op dit onderwijs betrekking heeft.

Waarom sta ik hier dan? Welnu, ik heb de zojuist vermelde overwegingen ook aan de voorbereidingscommissie kenbaar gemaakt en daar de duidelijke suggestie aan verbonden maar liever een andere spreker te zoeken. Zij heeft mij desondanks gehandhaafd. Maar bovendien trok het onderwerp me toch wel sterk aan. Ik veronderstel, dat iedere wiskundige wel eens zijn gedachten heeft laten gaan over zin en doel van het middelbaar onderwijs in de wiskunde en ik vorm op die veronderstelde regel geen uitzondering. Het is aantrekkelijk deze zaken nog eens te overdenken, samen te vatten en te formuleren. En nadat ik eerst op snode wijze de verantwoordelijkheid voor het optreden van een incompetent spreker van mezelf op de voor-

¹⁾ Voordracht vakantiecursus 1960, Mathematisch Centrum

bereidingscommissie heb afgewenteld, voel ik me vrij en blij zonder de drukkende zorg iets belangrijks over mijn onderwerp te moeten zeggen. En als U mij straks verwijten wil, dat ik niets interessants heb verteld, dan zeg ik: „U was gewaarschuwd”.

Een ander mogelijk verwijt wil ik hier meteen ook bij voorbaat proberen te ondervangen. Als ik uit mijn beschouwingen als conclusie bepaalde desiderata zal hebben gedestilleerd, zegt de man van de praktijk misschien: „Dit kan alleen iemand zeggen, die er niets van af weet. Dit is niet te verwezenlijken.” Ook daarvan zal ik mij weinig aantrekken onder de verontschuldiging: „Daar weet ik niets van; dat moeten de kenners van de praktijk maar uitmaken”. En wie weet, misschien verniel ik per ongeluk wel een paar heilige huisjes en doe zo bij vergissing toch nog iets goeds.

Om dan nu tot het onderwerp van mijn voordracht over te gaan wil ik eerst enigszins trachten af te grenzen hoever ik de behandeling wil uitstrekken. Sprekende over het doel van het middelbaar onderwijs in de wiskunde wil ik daar ook de beschouwing aan verbinden van de vraag, in hoeverre dit onderwijs, zoals het op het ogenblik is, aan die doelstelling beantwoordt. Dit doe ik om een te ijdel theoretiseren te vermijden; de confrontatie met de concrete situatie dwingt om de doelstellingen zelf ook concreet te formuleren. Het zal U waarschijnlijk niet verbazen te vernemen, dat ik met de huidige situatie niet in alle gevallen tevreden zal zijn, en dat er wel eens wijzigingsvoorstellen uit mijn mond zullen komen. Hierbij mogen we niet vergeten, dat de wiskunde als hulpmiddel bij andere vakken gebruikt wordt. Om nu echter niet te ver van huis te raken zal ik die andere vakken uit het leerplan (U begrijpt natuurlijk wel, dat ik hierbij vooral aan mechanica en natuurkunde denk) als onveranderlijk gegeven aanvaarden en de wenselijkheid van wijziging van het onderwijs daarin buiten beschouwing laten. Het komt me voor, dat we aan de wiskunde alleen al de handen vol zullen hebben.

Onvermijdelijk lijkt het me, alvorens iets zinnigs over het doel van het middelbaar onderwijs in de wiskunde te kunnen zeggen, eerst mijn opvattingen te vermelden over het doel van het middelbaar onderwijs in het algemeen. Hoewel ik hierover slechts enkele algemeenheden ten beste zal geven, geloof ik toch, dat alleen in het kader van zulk een algemene doelstelling een zinvolle beschouwing van het wiskunde-onderwijs mogelijk is. Of anders gezegd, een geïsoleerde behandeling van de wiskunde is in dit geval naar mijn mening onmogelijk.

De doelstellingen van het middelbaar onderwijs, die straks spe-

ciaal voor de wiskunde zullen worden beschouwd, zijn in de volgende drie punten kort samen te vatten.

- 1) Het verschaffen van nuttige kennis en vaardigheden.
- 2) Het geven van een overzicht van de beschaving, waarin wij leven.
- 3) Het oefenen en ontwikkelen van geestelijke vermogens.

Let wel, dat ik niet beweer, dat alle doelstellingen van het middelbaar onderwijs hiermee opgesomd zijn (karaktervorming ontbreekt bij voorbeeld). Het betekent alleen, dat ik slechts deze zal bespreken. Andere zijn weggelaten, omdat ik ze voor de wiskunde niet belangrijk vond, of omdat ik er niets verstandigs over meende te kunnen zeggen, of misschien ook wel omdat ik eenvoudig vergeten heb ze in mijn beschouwingen te betrekken. Dat is uiteraard nogal subjectief, maar dat zal U van hetgeen nog volgen zal wel vaker kunnen zeggen. Het betoog dat ik U voorzet is nu eenmaal arm aan vaststaande en aantoonbare feiten en rijk aan persoonlijke meningen en opvattingen. Laten we dienaangaande de volgende afspraak maken. Het feit, dat een zin, die ik uitspreek, een mededelend karakter heeft, betekent niet, dat ik me er niet van bewust zou zijn, dat er niet van een feitelijke realiteit, maar slechts van een persoonlijke opvatting van mij sprake is. Het is namelijk zo vervelend en op den duur zo vermoeiend steeds weer de zinsnede „naar mijn mening” in te lassen. Ondanks het ontbreken daarvan hoop ik dat U gelooft, dat ik het verschil tussen „dat vind ik” en „dat is zo” beter ken dan sommige bierfabrikanten.

Laten wij dan nu, als eerste oriëntering, de zoëven genoemde punten speciaal met betrekking tot de wiskunde wat nader bezien.

Dat kennis van en vaardigheid in wiskunde voor sommige mensen nuttig is, zal wel nooit betwist zijn. Het venijn zit alleen in het woord „sommige”. Nog niet zo heel lang geleden zou het percentage der scholieren, die rechtstreeks nut van de op school geleerde wiskunde te verwachten hadden, vrij laag zijn aangeslagen. Men dacht hierbij immers slechts aan hen, die zich later zouden bezig houden met enkele vakken uit de fysische en technische sfeer, die traditionele toepassingsgebieden van de wiskunde zijn. Hierbij moet men dan natuurlijk nog die enkelingen voegen, die de wiskunde zelf als bezigheid voor het leven zouden kiezen. Maar zelfs als we de grootte van dit percentage in het midden willen laten, hebben we toch nog te kampen met de moeilijkheid, dat de toekomstige levensloop van de leerlingen niet bekend is. Dit maakt, dat het vrijwel ondoenlijk is vast te stellen, wat de onderwerpen zijn, waar een bepaalde leerling

later nog iets aan zal hebben. Dit geldt voor de lagere klassen natuurlijk nog in sterkere mate dan voor de hogere. Bovendien wordt door de snelle evolutie van wetenschap en maatschappij de onzekerheid nog vergroot: wat wij nu nuttig achten, hoeft niet hetzelfde te zijn als hetgeen de leerling van nu later als volwassene in werkelijkheid goed zal kunnen gebruiken.

Dit alles wekt de indruk, dat de factor „nut” zo ongrijpbaar is, dat het vrijwel ondoenlijk is hierin enig aanknopingspunt te vinden om te bepalen, wat de beoefening van de wiskunde op school dient in te houden. Toch behoort de nuttigheid wel degelijk een belangrijke factor te zijn bij de vaststelling van de te behandelen wiskunde. Natuurlijk spelen ook andere overwegingen een rol, maar daarover straks. Ik zie alleen niet in, waarom we niet, naast deze andere overwegingen, de rechtstreekse bruikbaarheid in de keuze zouden betrekken. Voor hen, die later wiskunde zullen gebruiken, is het wel degelijk belangrijk, dat zij de voor hen bruikbare wiskunde hebben geleerd. Bij hun verdere opleiding wordt daar trouwens op gerekend; dit betekent niet, dat men zich daar niet op een wijziging zou kunnen instellen. Zouden echter essentiële onderdelen wegvallen, dan zou dit verzwarend van die opleiding ten gevolge hebben.

Een verkeerde indruk, die ik door het voorafgaande zou hebben kunnen wekken, wil ik nu trachten weg te nemen. De nadruk, die ik gelegd heb op de keuze van de onderdelen van de wiskunde in verband met het nut, is geen aanwijzing, dat ik in wiskunde een berg feitenkennis zie, waaruit een gedeelte gekozen moet worden. Wiskunde als wijze van denken is natuurlijk eigenlijk veel belangrijker. Men zegt dan ook wel eens, dat het er eigenlijk niet zoveel toe doet aan welk onderdeel van de wiskunde men de habitus van de wiskundige leert kennen en tot op zekere hoogte is dat ook wel juist. Het is zelfs des te meer juist naarmate de wiskunde een grotere rol speelt in ons levenspatroon. De wiskundige van beroep, die de wiskunde in de vingertoppen behoort te hebben, vult een eventueel tekort in zijn feitenkennis spelenderwijs aan. Is trouwens de betrekkelijke onbelangrijkheid van feitenkennis niet een van de grootste charmes van ons vak? Dit alles geldt echter hoe langer hoe minder, naarmate men verder van de wiskunde af staat. Natuurlijk, voor niemand is wiskunde een geheugenvak, en feiten alleen zijn voor ons minder dan waar ook alleen zaligmakend. De man echter, voor wie de wiskunde van de middelbare school de enige of vrijwel de enige wiskunde is, die hij ooit leert, vult tekorten in zijn kennis later niet meer aan, zeker niet als hetgeen hij nodig heeft er heel anders uitziet dan hetgeen hij vroeger geleerd heeft. Hoe minder

handig men is in het hanteren van gereedschap, des te beter moet dit gereedschap aangepast zijn aan het werk dat men te doen heeft.

Het zal U al wel opgevallen zijn, dat ik me tot nu toe nog niet uitgelaten heb over hetgeen nu wel nuttige wiskunde is. Dit heb ik niet gedaan, omdat ik vind, dat dit meer op de weg ligt van andere sprekers in deze vakantiecursus. Dat de groep der gebruikers van wiskunde zich in de laatste tijd aanzienlijk heeft uitgebreid is al zo vaak gezegd, dat het bijna een gemeenplaats is geworden. Hiermee is op natuurlijke wijze een uitbreiding gepaard gegaan van de onderwerpen uit de wiskunde, die op grote schaal gebruikt worden. Door deze ontwikkeling zijn ook mensen met een relatief geringe opleiding in wiskunde tot actieve gebruikers van wiskunde geworden, hetgeen mijn opmerking van zoëven over het passende gereedschap nog meer reliëf verleent. Dit alles is bekend genoeg, maar betekent wel, dat een gedetailleerde uitwerking hiervan belangrijk en actueel is. Graag zou ik erop ingaan, maar het valt niet onder mijn opdracht en ik moet U dus verzoeken tot morgen geduld te hebben.

Nu het tweede punt; het geven van een overzicht van de beschaving, waarin wij leven. Dit streven is voor velen een dekmantel om niet over het nut van het door hen gedoeerde te hoeven spreken, al moet ik daar direct aan toevoegen, dat die velen veeleer buiten dan binnen de wiskunde gezocht moeten worden. Nuttig zijn is toch eigenlijk een tikje vulgair. Ik herinner me in dit verband een voorval, dat ik enkele jaren geleden beleefd heb bij een lunch, die door de curatoren van een gymnasium aan de gecommitteerden bij het eind-examen werd aangeboden. In het gesprek kwam toen ook de rol van de wiskunde bij het onderwijs aan de orde. Toen ik mij daarbij veroorloofde enkele opmerkingen over het maatschappelijke nut van de wiskunde te maken, ondervond ik een reactie alsof ik iets onwielvoeglijks had gezegd. Er viel een pijnlijke stilte en men ging over een ander onderwerp praten. Men mene echter niet, dat ik in het andere uiterste wil vervallen en aan de algemene vorming haar waarde zou willen ontzeggen. Mijn tirade was slechts gericht op hen, die geen ander doel van het middelbaar onderwijs willen erkennen.

Tegen het vormen van specialisten met oogkleppen moeten we ons, zolang het mogelijk is, verzetten. Bij het hoger onderwijs is deze strijd al vrijwel verloren; laten we trachten in het middelbaar onderwijs het beeld van wetenschap en cultuur dat we de leerlingen meegeven zo veelzijdig mogelijk te houden. De mens is nu eenmaal geen geïsoleerde eenling, maar leeft in een gemeenschap, die na een inspanning van eeuwen geworden is wat zij nu is en die zich nog dage-

lijks ontwikkelt. Het is onmiskenbaar, dat de betekenis van de wiskunde in dit cultuurpatroon zowel wetenschappelijk als maatschappelijk heel groot is. De aard van de plaats, die de wiskunde inneemt, moge in de loop der eeuwen vrij aanzienlijk gewijzigd zijn, het blijft een plaats op de voorste rang. Vroeger werd de wiskunde vooral gewaardeerd als een ideaal van zuiver denken dat filosofen tot geestdrift bracht. Tegenwoordig staat haar ongeëvenaarde veelzijdigheid, die toepassing op de meest uiteenlopende terreinen mogelijk maakt en haar onmisbaarheid voor de meest spectaculaire verworvenheden der techniek het meest in de belangstelling. De esthetische waardering, die zij bij haar beoefenaren ondervindt, is onveranderlijk groot geweest.

Het lijkt dus wel op zijn plaats, dat het middelbaar onderwijs kennismaking met de wiskunde als cultuurverschijnsel bevordert. En dit klemmt juist voor degenen voor wie deze kennismaking de enige van hun leven blijkt te zijn. En nu moet het me van het hart, dat de wijdverbreide misvattingen, die er over de wiskunde blijken te bestaan, ook bij hen die middelbaar onderwijs hebben genoten, het sterke vermoeden doen rijzen, dat er met de aard van die kennismaking iets mis is. Een willekeurige leek zal U wiskunde beschrijven als een dor gegoochel met formules, waar hij met afschuw aan terugdenkt. Hij ziet wiskunde als een onvruchtbaar spel met regels, een soort gecompliceerd boter, kaas en eieren en het enige gunstige element, dat zijn oordeel bevat, is de ongeëvenaarde nauwkeurigheid en betrouwbaarheid, die hij aan de wiskunde toeschrijft. Dit blijkt trouwens ook al uit het spraakgebruik. Als U nagaat onder welke omstandigheden de bijvoeglijke naamwoorden „wiskundig” of „mathematisch” worden gebruikt, anders dan om de wiskunde zelf aan te duiden, dan merkt U, dat ze dan vrijwel synoniem zijn met nauwkeurig of betrouwbaar. Neemt U maar een zin als: „Met mathematische zekerheid wist hij zijn doel te treffen”.

Het blijkt dus, dat hetgeen van de wiskunde is blijven hangen, rustig een karikatuur van de wiskunde genoemd mag worden. En ik geloof, dat dit iets is, dat het middelbaar onderwijs zich beslist aan moet trekken. De aversie van wiskunde begint trouwens bij velen al kort na de kennismaking met de wiskunde, dus al tijdens het verblijf op school. En nu kan men wel zeggen, dat dit komt, doordat deze leerlingen het vermogen tot het assimileren van wiskunde missen, maar dat is een te makkelijke manier om zich er van af te maken. Het feit, dat de herinnering aan wiskunde zich voornamelijk richt op de formele kant, op het spel met regels, is een duidelijke aanwijzing, waar de schoen wringt. Men voelt de dressuur van het toe-

passen van vaste regels, zonder gevoel voor de intuïtieve achtergrond.

Nu zal U misschien tegenwerpen, dat dressuur onontbeerlijk is in de strijd tegen de denkslordigheid der leerlingen. Het leren van nauwkeurigheid is nu éénmaal nodig en daarbij moeten de teugels voortdurend strak worden gehouden. Dit mag dan wel zo zijn, maar men schiet hiermee zijn doel ver voorbij. Met onwillige honden is het kwaad hazen vangen en de onwilligheid spruit hier voort uit een gebrek aan interesse voor een vak, dat alleen maar moeilijk is en geen enkel element bevat, dat de belangstelling gaande zou kunnen maken. Vergeet niet, dat slechts weinigen de wiskunde om haar zelfs wil beminnen, maar dat een behandeling, die de plaats der wiskunde in het leven tot zijn recht doet komen en die aantoonst hoe het komt, dat wiskunde toepasbaar is in andere wetenschappen, wel op belangstelling zou kunnen rekenen en ook een waarde geeft aan het wiskunde-onderwijs, die de directe bruikbaarheid te boven gaat.

Nu klinkt dat misschien wat pretentieus, vooral als men aan de fossielen denkt, die nu nog het leerplan sieren. Ik kom hier nog op terug, als de vraag aan de orde komt, wat wiskunde dan wel meer is, dan een formeel spel, maar ik wil nu al wel opmerken, dat als men een getrouw beeld van de wiskunde wil geven, men hiervoor echte, levende wiskunde dient te gebruiken en geen stoffige geraamten uit een rariteitenkabinet, die de indruk van een morsdode wetenschap vestigen.

Ik wil het hierbij voorlopig laten wat het culturele aspect betreft, en ga nu over tot het derde punt: het oefenen en ontwikkelen van geestelijke vermogens. Ik heb de indruk, dat de meeste wiskundigen dit punt verreweg het belangrijkste van de drie vinden. Als ik het goed zie, werd het trouwens tot voor kort vrijwel als enige gebruikt bij de rechtvaardiging van de plaats van de wiskunde in het middelbaar onderwijs. Nu is dat misschien wel een beetje een kwestie van zelfbehoud geweest. Niemand maakt zichzelf graag overbodig en een verwijzing naar het nut van de wiskunde zou vroeger wel eens tot de conclusie hebben kunnen leiden, dat voor het merendeel der leerlingen de wiskunde wel afgeschaft kon worden. Vandaar dus het schermen met de vormende waarde die de wiskunde voor de geesten zou hebben. Nu het argument van het nut, zoals ik eerder heb betoogd, zoveel aan kracht heeft gewonnen, wordt het ook meer gebruikt, en raakt de vormende waarde wat op de achtergrond. Nu is het in werkelijkheid zo, dat deze twee aspecten van het onderwijs vrijwel niet van elkaar te scheiden zijn. Dode kennis van wiskunde

zonder het vermogen om wiskunde te hanteren en te gebruiken en zonder gevoel voor de werkwijze der wiskunde heeft weinig waarde en is dus eigenlijk ook niet nuttig. Kort gezegd: kennen zonder kunnen is uit den boze. En dit kunnen is hetgeen op het ogenblik aan de orde is, waarbij bovendien overwogen moet worden of hiermee vermogens aangekweekt worden, die ook buiten de wiskunde bruikbaar zijn.

We staan dus voor de vraag, wat we leren door wiskunde te leren. De vraag, die hieraan vooraf moet gaan, is: wat is wiskunde? En met een oog op de werkelijkheid de wat onvriendelijk klinkende vraag: is schoolwiskunde wiskunde?

U behoeft niet bang te zijn, dat ik een serieuze poging zou willen ondernemen, de vraag wat wiskunde is volledig te beantwoorden. Dit zou in kort bestek onmogelijk zijn. Ik beperk me tot enkele opmerkingen over enige aspecten van de wiskunde, die voor ons doel van belang zijn. Hiervoor knoop ik aan bij mijn vroegere opmerking over het formele karakter van de wiskunde, dat de meesten als enige herinnering bijblijft. De vraag is dus nu: is de wiskunde inderdaad meer dan een formeel spel en zo ja wat? Hierover wordt meestal weinig gezegd en dit komt, doordat de formele kant van de wiskunde zoveel makkelijker en ook zoveel exacter te beschrijven is dan de andere, meer intuïtieve kant. Want dat wiskunde meer is dan een formeel spel zou ik willen staande houden. Een louter formeel spel zou niet blijvend kunnen boeien en zou ook een geïsoleerd bestaan leiden, dat de toepasbaarheid der wiskunde volkomen onverklaarbaar zou maken. Het is moeilijk het niet formele aspect in woorden te vangen, maar ik wil er toch iets over trachten te zeggen, omdat het voor het onderwijs in de wiskunde van zo eminent belang is.

De begrippen waarmee de wiskunde werkt en waarop het apparaat der logische deductie wordt toegepast, zijn abstract, maar hebben een concrete achtergrond. Iedere wiskundige stelt zich bij de begrippen waarmee hij werkt iets voor. Deze voorstellingen heb ik bij een vorige gelegenheid concrete associaties genoemd. Bij meetkundige begrippen liggen deze associaties tamelijk voor de hand, maar ook bij andere begrippen zijn de voorstellingen, waaruit ze zijn voortgevloeid wel te achterhalen. Deze voorstellingen zijn voor de wiskundige een steun bij het verwerken en vasthouden van wiskundige resultaten en in het bijzonder ook bij het zoeken naar nieuwe resultaten. De beroepswiskundige heeft door oefening geleerd deze behoefte aan concrete associaties tijdelijk te onderdrukken om een zuiver formeel deductief betoog een tijdlang te volgen. Op een gegeven ogenblik echter zal hij de bereikte resultaten in zijn

algemene beeld willen plaatsen en zodoende in zijn voorstellingswereld betrekken. Lukt dat niet, dan vindt hij deze resultaten onbelangrijk, althans voor hem zelf.

De wiskundige weet ook, dat zijn voorstellingen een soms meer, soms minder getrouw beeld geven van het abstracte begrip, maar nooit volledig adequaat zijn en dus ook nooit voor het trekken van geldige conclusies kunnen worden gebruikt. En hiermee raken we het karakteristieke dualisme van de beoefening der wiskunde. Zolang er getast en gezocht wordt, mogen en moeten de concrete associaties hun rol mee vervullen; op een gegeven ogenblik echter moet een vermoed resultaat tot een vaststaand feit gemaakt worden. Dan worden de associaties uitgeschakeld, maar houden we tot ons geluk toch nog een wapen over: het mathematische bewijs, dat bestaat uit het toepassen van logische deductie op slechts door hun definitie vastgelegde begrippen. Ik heb de scheiding overigens zoëven wat te scherp gemaakt: bij het bepalen van de te volgen weg bij het bewijs spelen de concrete associaties nog wel mee, maar ze mogen geen invloed hebben op de geldigheid ervan. Hier ligt het principiële onderscheid tussen wiskunde en natuurwetenschap. Bij de natuurwetenschap berust, ondanks alle toegepaste redenering, de uiteindelijke verificatie in de concrete werkelijkheid. Deze verificatie mist de wiskunde, omdat haar object niet tot de concrete realiteit behoort. Door dit gemis worden de eisen, die aan de betrouwbaarheid der redenering worden gesteld, zo sterk verzwaaard, dat men vaak deze rigoureuze redeneertechniek ten onrechte, onder de naam van mathematische strengheid, als het meest essentiële van de wiskunde beschouwt.

In de zoëven genoemde concrete associaties vinden we nu ook de sleutel tot de toepasbaarheid der wiskunde. Hoewel de wiskundige begrippen zelf abstract zijn, vinden de ermee verbonden concrete associaties hun plaats in de objectieve realiteit. Deze verbinding maakt het mogelijk met wiskundige hulpmiddelen uitspraken over deze realiteit te doen. Als we dit doen, bedrijven we toegepaste wiskunde. Deze verschilt niet principieel van de zoëven beschreven zuivere wiskunde, alleen het uitgangspunt is anders. Om het terrein tussen concreet en abstract te overzien, zetten we onze kijker nu op een andere plaats neer. We beginnen met de concrete situatie. Ter beschrijving hiervan wordt een complex van, uiteraard abstracte, mathematische begrippen opgesteld, die samen een mathematisch model van deze concrete situatie vormen. Soms wordt dit model ontleend aan een bestaande wiskundige theorie, soms wordt ad hoc een nieuw model gevormd. Dit model is natuurlijk nooit volledig

adequaat. U ziet de analogie met de concrete associaties van zoëven; we hebben alleen een ander uitgangspunt gekozen. In het model kan wiskunde worden bedreven, waarbij natuurlijk voortdurend dan wel af en toe aan de bijbehorende concrete situatie kan worden gedacht. Resultaten kunnen weer naar de concrete situatie worden terugvertaald. Zekerheid, dat dit resultaat in de concrete situatie geldig is, hebben we niet, omdat het model niet adequaat is. Toch is deze methode in de meest uiteenlopende situaties waardevol gebleken.

Het dualisme van intuïtief en formeel aspect der wiskunde acht ik uiterst belangrijk, ook voor het onderwijs. Het formele aspect zelf is natuurlijk ook van groot belang, alleen is het minder nodig daar expliciet op te wijzen. Enkele elementen hiervan zijn trouwens al terloops in het voorafgaande genoemd. Het hanteren van abstracte begrippen is er een van, omdat deze nu eenmaal de objecten der wiskunde zijn. Het toepassen van logische deductie is een ander element, omdat dit alleen voldoende zekerheid kan geven bij gebrek aan empirische verificatie. Het gebruiken van een scherpe, doorzichtige en niet voor tweërlei uitleg vatbare taal is ook een belangrijk element ter verhoging van de zekerheid en onontbeerlijk voor feilloze begripsbepaling in definities en vastlegging van het logische argument.

Tot het formele aspect behoren verder nog het toepassen van de axiomatische methode en het gebruik van symbolen voor mathematische objecten en het bijbehorende volgens regels min of meer automatische opereren met deze symbolen. Hierover meer bij de bespreking van de schoolwiskunde.

Uit het beeld dat ik U zoëven van de wiskunde heb gegeven blijkt wel, welke geestelijke activiteiten er aan te pas komen en dus geoefend en ontwikkeld worden. Rest de vraag, of de schoolwiskunde een getrouw beeld van de wiskunde geeft. Mijn indruk is, dat op school de neiging nogal naar de formele kant gaat. Wel blijft bij de schoolmeetkunde de intuïtieve achtergrond steeds meespelen; voor de schoolalgebra geldt dit veel minder. Bovendien is er bij de schoolmeetkunde te weinig scheiding tussen intuïtie en formele redenering.

Wat de toepasbaarheid en de toepassingen betreft stellen de behandelde onderwerpen grenzen aan hetgeen hiervan besproken kan worden. Ook stellen bepaalde toepassingsgebieden, die blijkbaar onontbeerlijk geacht worden, hun eisen betreffende de behandelde wiskunde. De natuurkunde (met inbegrip van de mechanica) is hier de lastigste klant. Zij kan een mathematische beschrijving van de ruimte waarin wij leven, kort gezegd meetkunde, niet ontberen. Het is zelfs zo, dat in de kinematica de grens tussen hetgeen nog

wiskunde heet en hetgeen niet meer tot de wiskunde in engere zin gerekend wordt, tamelijk willekeurig is. Verder is in de natuurkunde essentieel het meten, waarbij haar grootheden door getallen worden voorgesteld. Daar op deze getallen ook infinitesimale processen worden toegepast, heeft men behoefte aan het geordende lichaam der reële getallen en eigenlijk ook aan differentiaalrekening. Deze eisen verplichten ons bepaalde onderwerpen te behandelen, die we misschien van zuiver wiskundig standpunt bezien liever door andere hadden vervangen.

Het is misschien goed om na deze vluchtige opmerkingen over de schoolwiskunde, deze eens wat meer in detail te beschouwen in het licht van de doelstellingen, die ik in het voorafgaande voor het middelbaar onderwijs heb geformuleerd. Ik begin met de meetkunde. In het meetkunde-onderwijs zie ik drie aspecten.

- 1) Het verschaft een voorhof voor mechanica en natuurkunde.
- 2) Het is een voorbeeld van een axiomatische theorie.
- 3) Het is een voorbeeld van modelvorming: van intuïtief ruimtelijke voorstellingen naar mathematisch model.

Deze drie aspecten wil ik nu nader beschouwen. Zoals ik al opgemerkt heb verlangt de natuurkunde een mathematische beschrijving van de ruimte. Dit verlangen is zo sterk, dat, gesteld dat de mathematici plotseling zouden weigeren eraan te voldoen, de natuurkunde zelf voor de verschaffing van dit mathematische model zou moeten zorgen. Nu geloof ik, dat we dit beter in eigen hand kunnen houden. Dit betekent niet, dat de natuurkunde enig verlangen koestert naar de meetkunde in de omvang en gedaante, zoals die nu op school wordt behandeld. Het feit dat de meetkunde axiomatisch wordt opgebouwd, zal haar volledig onverschillig laten. Het gaat haar om de resultaten en het feit, dat die uit bepaalde, zorgvuldig gekozen axioma's afgeleid kunnen worden, is daarbij volslagen irrelevant. Maar bovendien vormen deze benodigde resultaten slechts een klein deel van de gangbare schoolmeetkunde. Essentieel is eigenlijk slechts, dat de ruimte beschreven kan worden als een drie-dimensionale vectorruimte over de reële getallen met een door een inwendig produkt vastgelegde metriek. Nóg korter gezegd: een ruimte waarin de gangbare analytische meetkunde en lineaire algebra kan worden bedreven. Verder is wat kennis van rechte lijnen, platte vlakken, cirkels en bollen, benevens wat goniometrie voldoende. Ik wil niet beweren, dat er in de rest niets bruikbaar zit, maar wel, dat de eisen die de natuurkunde stelt geenszins impliceren,

dat het meetkunde-onderwijs in de huidige omvang dient te worden gehandhaafd.

Ik kom nu tot het tweede punt: de meetkunde als axiomatische theorie. Voor het middelbaar onderwijs is deze onbruikbaar; ik heb er geen goed woord voor over. Om misverstanden te voorkomen: ik vind de axiomatisch opgebouwde euclidische meetkunde een buitengewoon fraai voorbeeld van een axiomatische theorie, maar volslagen ongeschikt voor schoolgebruik. Zij is veel te gecompliceerd.

U kent natuurlijk de historische gang van zaken. Pas aan het einde van de negentiende eeuw is de euclidische meetkunde in een vorm gebracht, die voldoet aan de eisen die aan een axiomatische theorie mogen worden gesteld. En U zal ook wel weten, dat het resultaat nu niet bepaald lichte kost is. Het gevolg is dan ook, dat hetgeen op school aan meetkunde wordt bedreven met een axiomatische theorie alleen het woord axioma gemeen heeft. En dit is in zoverre jammer, dat de axiomatische methode belangrijk is, zo belangrijk, dat ik er straks nog apart op terug zal komen.

Alleen wil ik nu nog even opmerken, dat ik de indruk heb, dat de woorden axiomatisch en deductief wel eens verward worden. In het nieuwe leerplan (K.B. van 30 augustus 1958) lees ik onder het hoofd stereometrie: de deductieve denkwijze, axioma's en grondbegrippen. Hier kan men alleen maar vruchteloos piekeren, waarom die deductieve denkwijze bij de stereometrie is verzeild geraakt. Niet dat zij daar niet op haar plaats is, maar ik had toch altijd gemeend, dat de deductieve denkwijze in de hele wiskunde behoort te worden toegepast en niet alleen bij de stereometrie. Of zou er bedoeld zijn, dat er bij stereometrie les gegeven moet worden over de deductieve denkwijze als verschijnsel, een soort cursus in logica dus? Als men echter „de deductieve denkwijze” vervangt door „de axiomatische methode”, dan wordt alles veel duidelijker. Vindt U het flauw van me, dat ik zo over een term val? Ik vind het ter voorkoming van misverstanden wel gewenst een zuivere terminologie te gebruiken. Helemaal zeker, dat ik de bedoeling correct geïnterpreteerd heb, ben ik namelijk zelfs nu nog niet.

Het derde punt, de modelvorming, geeft me de gelegenheid eindelijk ook eens iets goeds over het meetkunde-onderwijs te zeggen. Ik acht deze overgang van intuïtieve, ruimtelijke (visuele en haptische) voorstellingen naar de mathematische abstracties, die samen het mathematische model der meetkunde vormen, uiterst waardevol. U zal op grond van hetgeen ik eerder betoogd heb wel begrijpen waarom. Hier is een buitengewoon bruikbaar voorbeeld van de verhouding van concrete associaties en formele mathematische theorie

en van concrete voorstellingen en abstracte begrippen. Ik besef ten volle, dat deze overgang een bijzonder moeilijk didactisch probleem oplevert. Maar het is de moeite waard hieraan een grote krachtsinspanning te wijden, omdat het resultaat inzicht geeft in de aard van de wiskunde. Deze didactische moeilijkheden maken, dat ik slechts met een zekere schroom durf te vragen om een wat scherpere scheiding tussen intuïtie en formele redenering. De onjuiste opvatting zou anders kunnen post vatten, dat ruimtelijk voorstellingsvermogen essentieel is voor de beoefening van wiskunde.

Laten we dan nu van de meetkunde overstappen op de algebra en daarbij beginnen onze vriend, de leek, te vragen wat volgens hem algebra is. „O, dat is rekenen met letters” hoor ik hem al zeggen. Daarmee levert hij dan weer eens te meer het bewijs, dat zijn voorstelling van wiskunde van de misverstanden aan elkaar hangt. Feilloos pikt hij uit het algebra-onderwijs een element, dat voor de beoefening van de wiskunde zeer belangrijk is, maar in genen dele karakteristiek voor de algebra. Bedoeld is het gebruik van symbolen om algemene (of variabele) elementen aan te duiden. Dat hierbij aan algebra wordt gedacht, komt waarschijnlijk doordat bij het algebra-onderwijs uitdrukkelijk op het verschijnsel wordt gewezen. Het treedt echter ook op in de meetkunde, evenals trouwens in ieder ander onderdeel van de wiskunde. Het schrijven van $a^2 - b^2$ om het verschil van de kwadraten van twee willekeurige getallen of van ABC om een willekeurige driehoek aan te duiden levert in dit opzicht geen enkel principieel verschil op.

Het gebruik van symbolen is onontbeerlijk om algemene eigenschappen (zoals $a + b = b + a$, de commutatieve eigenschap der optelling) kort en zonder uitvoerige omschrijvingen weer te geven. Nu is het toch niet geheel toevallig, dat bij dit gebruik van symbolen eerder aan algebra dan aan meetkunde wordt gedacht. Een volgende stap is namelijk, dat de symbolische uitdrukkingen een eigen leven gaan leiden en volgens bepaalde regels min of meer automatisch worden gemanipuleerd. Dit nu wordt, althans op school, bij de algebra veel consequenter gedaan dan bij de meetkunde. Laten we dit even met een voorbeeld illustreren.

Nemen we de kwadratische veelterm $ax^2 + bx + c$, dan speelt $2x^2 + 3x + 5$ hiernaast dezelfde rol als een bepaalde, getekende driehoek naast de algemene driehoek ABC. Als men echter een stelling over een driehoek ABC gaat bewijzen, wordt die getekende driehoek tijdens de bewijsvoering voortdurend in het oog gehouden, hetgeen een duidelijke bewustwording van het symbolische karakter

van de letters ABC belemmert. Gaat men echter iets over $ax^2 + bx + c$ bewijzen, bij voorbeeld de geldigheid van de formule voor de nulpunten van dit polynoom, dan worden we tijdens het bewijs niet voortdurend met een speciale veelterm zoals $2x^2 + 3x + 5$ geconfronteerd. Integendeel, de hele manipulatie speelt zich af met de letterveelterm. Uiteraard is dit in wezen slechts een methodisch onderscheid. Het heeft echter nog wel een andere consequentie. In de schoolmeetkunde wordt meer inhoudelijk gededuceerd dan in de schoolalgebra, waar meer het toepassen van regels en voorschriften een plaats heeft gevonden. Heeft dit misschien zelfs iets te maken met de misvatting, dat de deductieve methode meer thuis hoort in de meetkunde dan in de algebra?

Keren we terug tot de schoolalgebra, dan zien we dat daarin is ondergebracht een stuk echte algebra (leer der hoofdbewerkingen en der algebraïsche vergelijkingen) plus een voorhof der analyse (reëel getal en functiebegrip). Bezien we de verhouding van het intuïtieve en het formele aspect nu ook eens voor de algebra, dan moeten we de intuïtieve achtergrond hier blijkbaar zoeken in het getalbegrip. Aan het probleem van de overgang van het intuïtieve getalbegrip naar het formeel opereren met getsymbolen in rekenkunde en algebra wordt in het algemeen veel minder aandacht besteed dan aan dat van de analoge overgang bij de meetkunde. Blijkbaar ontmoet men hier veel minder moeilijkheden. Bovendien is een deel van het werk al gedaan als de leerlingen op de middelbare school aankomen.

Het intuïtieve begrip van het natuurlijke getal vormt zich al in de kleuterjaren. Dit getalbegrip wordt op de lagere school uitgebreid tot de positieve rationale getallen en op de middelbare school aangevuld met de negatieve getallen. De intuïtieve voorstellingen, die hierbij gevormd worden, komen blijkbaar op een natuurlijke wijze tot stand. Maar nu moet er met deze getallen ook nog gerekend worden. En dit geschiedt op de lagere school op grond van niet op hun redelijkheid toegelichte voorschriften en op de middelbare school is dit nauwelijks anders. Het enige verschil is een methodisch verschil. Omdat de middelbare school over lettersymbolen beschikt, kan een voorschrift algemeen worden geformuleerd. De lagere school gaat te werk volgens de methode, die Freudenthal eens de quasi-algemene heeft genoemd: aan een groot aantal concrete voorbeelden wordt de methode zo vaak gedemonstreerd, dat de werkwijze duidelijk is geworden.

Ik herinner me, dat ik als leerling van de eerste klas zeer bevreemd was door het sterke verschil in behandeling van meetkunde en algebra. In de meetkunde onderkende ik een streven om duidelijk

te zeggen, waar men het over heeft en wat de uitgangspunten zijn, hetgeen me sterk bevredigde. In de algebra daarentegen miste ik deze vaste grond onder de voeten; over axioma's werd niet gesproken en er werd maar een regen van regels en voorschriften over mijn hoofd uitgestort, waarvan het begin en het eind niet te overzien was. Nu wil ik niet beweren, dat mijn persoonlijke ervaringen in dezen representatief zijn voor de algemene gang van zaken; ik heb zelfs reden om te veronderstellen, dat dit niet of niet meer zo is. Maar het onderscheid tussen algebra en meetkunde dat ik noemde is toch wel overal aanwezig. Toch is het verschil nu ook weer niet zo erg principieel.

De rekenregels, die in het algebra-onderwijs worden gegeven, komen er ongeveer op neer, in moderne taal gezegd, dat de rationale getallen een lichaam vormen en men zou deze regels zonder bezwaar axioma's kunnen noemen. Nu weten we allemaal, dat het wel zuiniger kan; men kan met de axioma's van Peano voor de natuurlijke getallen beginnen en daar volgt alles uit. Zie de „Grundlagen der Analysis" van Landau. Maar dat loopt allemaal niet zo erg eenvoudig en is dus voor de school niet zo geschikt. Voelt U de analogie met de meetkunde? Het is namelijk een klein kunstje om de axiomatische behandeling van een mathematische theorie eenvoudig te maken. Je stopt maar een voldoende aantal stellingen van de theorie bij de axioma's; bij voorkeur die stellingen, waarvan je de bewijzen kwijt wilt. Van het standpunt der correctheid is er niets op aan te merken, tenzij men expliciet de eis van de onafhankelijkheid der axioma's stelt. Maar het is wel in strijd met de esthetische erecode der mathematici, die een zuinig en toch overzichtelijk stelsel axioma's als norm stelt. Bij de meetkunde trachten we enigszins eervol te leven en durven we het woord axioma in de mond te nemen; bij de algebra kunnen we het woord blijkbaar niet meer over de lippen krijgen. Helemaal duidelijk is het me toch eigenlijk niet. De erecode wordt bij het onderwijs toch al zo vaak geschonden en ik maak er niemand een verwijt van.

Misschien ziet U in het voorafgaande aanleiding over een meetkunde-onderwijs te denken, dat de zuinigheid der axioma's overboord zet in analogie met het huidige algebra-onderwijs. Het woord axioma mag U wat mij betreft ook weglaten, als U het wat belast vindt door zijn verleden. En wie weet wordt er dan door de resulterende vereenvoudiging tijd gewonnen om een axiomatische theorie te behandelen die zo eenvoudig is, dat er geen noemenswaardige offers aan strengheid behoeven te worden gebracht.

Maar ik was nog niet klaar met de bespreking van de intuïtieve

achtergrond van de algebra. Ik ben namelijk expres nog niet verder gegaan dan de rationale getallen. De echte moeilijkheid komt pas bij het reële getal. Hier is een intuïtieve achtergrond pas verkrijgbaar door overgang op een meetkundige intuïtie: de getallenrechte. Een strenge behandeling van het reële getal is moeilijk. Toch berust de mogelijkheid om infinitesimale processen te gebruiken op het reële getal. Deze moeilijkheid speelt ook in het hoger onderwijs een rol, omdat een strenge fundering zelfs hier voor vele studenten te moeilijk is en voor de studenten in wis- en natuurkunde te lang zou duren, daar spoedige vaardigheid in het hanteren van analyse vereist is. Voor deze laatste groep is een axiomatische opzet mogelijk, waarbij de reële getallen als een compleet geordend lichaam worden ingevoerd (dit houdt de geldigheid van de stelling van de bovenste grens in). Voor andere studenten (in de techniek bijvoorbeeld) is zelfs dit te zwaar en moet een meer intuïtieve weg worden gevolgd.

Voor het middelbaar onderwijs geldt dit alles uiteraard nog in versterkte mate. Ontlopen kunnen we het probleem niet, omdat de analyse nu eenmaal de ruggesgraat van de wiskunde is. Vrijwel iedere toepassing heeft analyse nodig, niet alleen de fysische toepassing. Denkt U als voorbeeld maar aan het feit, dat de statistiek, die toch steeds op eindige verzamelingen betrekking heeft, als idealisering het continuüm hanteert om analytische methoden te kunnen gebruiken. Ik juich het dan ook toe, dat de differentiaal- en integraalrekening een plaats gekregen heeft in het nieuwe leerplan, al zie ik de didactische moeilijkheden wel. Maar ook hier geloof ik, dat het overwinnen daarvan de moeite waard is, omdat er iets waardevols mee tot stand kan worden gebracht.

Nu ik een overzicht heb gegeven van de doelstellingen van het middelbaar onderwijs in de wiskunde en de huidige schoolwiskunde in het licht daarvan heb besproken, zou ik mijn taak als geëindigd kunnen beschouwen. U zal echter na mijn afbrekende kritiek op sommige delen van de schoolwiskunde van mij verwachten, dat ik ook nog iets zeg over mijn opvattingen, hoe het dan wel moet. Ik wil niet zo laf zijn me daaraan te onttrekken, al heb ik een geldig excuus om het wel te doen. Het is namelijk eigenlijk meer de taak van de andere sprekers in deze vakantie cursus, om uitgaande van de moderne ontwikkeling van de wiskunde zelf en van de gewijzigde plaats van de wiskunde in de maatschappij een beeld te geven, hoe het wiskunde-onderwijs in de toekomst behoort te zijn. Voor hetgeen volgt vraag ik dus excuus aan mijn opvolgers wegens de grensoverschrijding. Ik kom nog even terug op enkele aspecten van de wiskundebeoefening voor een korte bespreking.

Om te beginnen de modelvorming. Op het belang ervan hoef ik, na alles wat ik erover gezegd heb, niet terug te komen. Voor de vraag welke gevallen voor behandeling in aanmerking kunnen komen, denken we aan mogelijke toepassingen. Nu is aan de mogelijkheid van toepassing van wiskunde in andere wetenschappen in principe geen enkele grens, omdat, naar mijn vaste overtuiging, in iedere wetenschap een substraat is, dat zich voor een mathematisch behandelingsproces leent. Overal waar een proces van logische redenering aanwezig is, kan wiskunde gebruikt worden, dat is dus in iedere wetenschap die het beschrijvende stadium te boven is. Men zegt wel eens, dat bij sommige wetenschappen het proces te gecompliceerd is voor formalisering, bijvoorbeeld bij geschiedenis. Men wijst er dan op, dat bij de formalisering vaak zo drastische vereenvoudiging nodig is, dat veel waardevols verloren gaat (bij voorbeeld bij economie). Dit alles kan echter ook komen, doordat we nog niet het geëigende mathematische apparaat beschikbaar hebben en daarom noodgedwongen tot de procedure van het procrustesbed moeten overgaan. Het is namelijk beslist niet zo, dat alle mathematische modellen alleen ongecompliceerde processen beschrijven; men denke slechts aan de fysica! Uit dit alles blijkt ook de betekenis van de keuze van het juiste model, waarbij aan de ene kant de getrouwe beschrijving van de werkelijkheid en aan de andere kant de hanteerbaarheid, die het behalen van relevante resultaten mogelijk maakt, als polen tegenover elkaar staan.

In het huidige wiskunde-onderwijs zijn de overgang van ruimtelijke voorstellingen naar meetkunde en de overgang van het intuïtieve getalbegrip naar algebra de belangrijkste voorbeelden van modelvorming. Beide acht ik belangrijk en waardevol. Mag ik er een tweetal andere mogelijkheden aan toevoegen? Ten eerste de overgang van de intuïtieve begrippen onzekerheid en kans naar waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Ten tweede de overgang van het intuïtieve verzamelingsbegrip (inclusie, vereniging enz.) naar een verzamelingsleer.

Over het deductieve redeneren en het functiebegrip kan ik kort zijn, omdat ik geloof, dat deze wel voldoende tot hun recht komen. Misschien mag ik alleen betreffende het functiebegrip nog even een lans breken voor een duidelijk onderscheid in de algebra tussen het formele opereren en het functiebegrip: het polynoom kan gezien worden als een symbolische uitdrukking en ook als een functie. Dit onderscheid is van belang voor de abstracte algebra.

Over het gebruik van symbolentaal en het daarmee samenhangende automatische opereren wil ik nog een opmerking maken, die U

misschien wat inconsequent zal vinden. Ik heb namelijk eerder betoogd, dat het formele element wat te sterk bij het middelbaar onderwijs vertegenwoordigd is ten koste van het intuïtieve. Dat neemt niet weg, dat dit formele, automatische opereren een essentieel bestanddeel der wiskunde is. Toch wordt er vaak op neergezien en worden denigrerende betitelingen als „dom rekenen” en „trucjes” gebruikt. Voor het vlot hanteren van het mathematische apparaat is het echter volkomen onontbeerlijk. Bovendien berust alle vooruitgang in de wiskunde op het eenvoudig en automatisch maken van dingen, die vroeger nog „diepdoordacht” waren. Op een hoger niveau kan men dan weer opnieuw met denken beginnen. Ons beperkte vermogen tot het assimileren van complicaties maakt deze ontwikkeling, hoewel principieel misschien niet onvermijdelijk, in de praktijk toch tot de enig mogelijke. Maar ook voor hen, die nimmer een bijdrage tot de vooruitgang van de wiskunde als wetenschap zullen leveren, is een zekere vaardigheid in de „techniek” van de wiskunde zeker waardevol. Ik geloof ook niet, dat hieromtrent veel verschil van mening zal zijn, maar ik heb toch even duidelijk willen vastleggen hoe mijn standpunt ten opzichte hiervan is.

Nogmaals: onbegrepen technische handgrepen kunnen wel een beperkt praktisch nut hebben, maar hebben verder heel weinig waarde. Dit betekent niet, dat men zich te allen tijde zou moeten realiseren, wat de betekenis is van wat men doet, dat men dus nooit „automatisch” te werk zou mogen gaan. Dit zou een onrealistisch beeld geven van de werkelijke wiskundebeoefening. Wel moet men te allen tijde in staat zijn zich de betekenis van wat men doet te realiseren.

Tenslotte nog de axiomatische methode. Het zal U bekend zijn, dat de toepassing van deze methode in de wiskunde van de twintigste eeuw een ongekende vlucht heeft genomen. Dat deze methode in het middelbaar onderwijs tot haar recht komt, lijkt me zeker gewenst. Aan de andere kant ben ik, zoals U gemerkt zal hebben, geen bewonderaar van de klassieke axiomatische euclidische meetkunde in het onderwijs en wel voornamelijk omdat er niets van terecht komt door de te grote moeilijkheid. Het blijft een mengelmoes van aan de intuïtie ontleende redeneringen en werkelijke gevolgtrekkingen uit axioma's. Een van de meest essentiële aspecten van de axiomatische methode komt daardoor niet tot zijn recht: het redeneren in het systeem geheel vrij houden van de voorstellingen die tot de keuze van het systeem geleid hebben.

Er is echter wel een essentieel onderscheid tussen de moderne axiomatische theorieën en de klassieke meetkunde, dat misschien

een didactische moeilijkheid zal opleveren. Een correct axiomasysteem voor de klassieke euclidische meetkunde is categorisch, dat wil zeggen dat alle modellen van dit systeem isomorf zijn. Het is om die reden geoorloofd te spreken over *het* stelsel objecten, dat aan de axioma's voldoet. De moderne axiomasystemen zijn niet categorisch, omdat het juist de bedoeling is, vele uiteenlopende stelsels tegelijk te beschrijven. Dit vereist bij de redenering dus een iets grotere graad van abstractie, omdat men, als men iets aan het afleiden is, niet een vast stelsel in het oog kan houden, waarvoor hetgeen, wat men aan het doen is, geldt. Bij de meetkunde weet men, strikt genomen, natuurlijk ook niet over welk stelsel men het heeft, maar daar merkt men dat niet zo. In hoeverre dit een ernstige didactische moeilijkheid is, vermag ik niet te beoordelen.

Mag ik nog een drietal mogelijkheden om een axiomatische theorie bij het middelbaar onderwijs te behandelen noemen? De verzamelingsleer kan leiden tot de theorie van de algebra's van Boole; eventueel zou dit ook via de formele logica kunnen, maar dat lijkt mij minder geschikt. Verder kunnen het getalbegrip en de hoofdbewerkingen leiden tot de begrippen groep, ring en lichaam. Tenslotte kan men via permutaties en eventueel transformaties ook een toegang tot het begrip groep verkrijgen.

Na al het kwaads, dat ik over het meetkunde-onderwijs heb gezegd, wil U misschien nog van mij horen, hoe ik me dit dan wel gedacht had. Ik moet bekennen, dat me dit nog niet duidelijk voor de geest staat en ik ben van mening, dat dit geen eenvoudige zaak zal zijn. Vast staat voor mij, dat er veel van het bestaande overboord kan; dit levert dan tevens de tijdwinst, die nodig is om belangrijker zaken, die nu niet aan bod komen, te behandelen. De twee elementen, die in het meetkunde-onderwijs behouden moeten blijven, zijn de overgang van intuïtie naar mathematisch formalisme en het voor de natuurwetenschap benodigde apparaat ter beschrijving van onze ruimte. Ik denk aan een behandeling, waarbij goniometrie en vooral ook analytische meetkunde geen aparte vakken meer zijn. Hierbij bedoel ik dan analytische meetkunde in modern vectorieel gewaad. Als we dat als eindpunt zien, geeft ons dit ook wel een baken voor de weg die we dienen te volgen. Meer wil en kan ik er nu niet over zeggen.

Ik wil tenslotte nog proberen enkele korte conclusies aan mijn betoog te verbinden. Het is belangrijk werkelijke, levende wiskunde te geven en geen fossielen; modernisering is noodzakelijk. Bovendien geven sommige moderne theorieën door hun eenvoudige structuur de

gelegenheid de wiskunde ook op school volgens de werkelijke maatstaven van mathematische strengheid te behandelen. De vraag, hoe het komt dat wiskunde toepasbaar is, is uiterst belangrijk. Door steeds de concrete associaties in het oog te houden kunnen we een natuurlijke brug naar de toepassingen slaan. Door het wiskunde-onderwijs hopen we bij te dragen tot zindelijk denken en van vaagheden bevrijd taalgebruik. Een enkele opmerking nog over een kwestie, die ik niet heb besproken. Bij het heuristische element (op school dus onder meer bij de vraagstukken) kunnen ook niet-deductieve vormen van redeneren hun kans krijgen, zoals het denken in analogieën en het inductieve redeneren. Deze elementen van het creatieve werk in de wiskunde blijven bij het onderwijs wat op de achtergrond, omdat dit creatieve werk zelf helaas niet aan bod kan komen. Ik zie echter wel in, dat dit niet anders kan.

Tot één scherpe eindconclusie over het doel van het wiskunde-onderwijs kan ik niet komen, omdat dit doel velerlei is. Als ik erin geslaagd ben U een aantal van deze doelstellingen, waarvan het merendeel U ongetwijfeld bekend is geweest, nog eens voor ogen te stellen dan meen ik de doelstelling van deze voordracht vervuld te hebben.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

XLVIII. Een rekenkundige opgave.

1. In dit tijdschrift bracht de rubriek *Recreatie* onder no. 27 de volgende opgave: *Wat is het kleinste getal dat gehalveerd wordt wanneer het voorste cijfer achteraan wordt geplaatst?* (Euclides, 35, 1959-60, IX, p. 304). De volgende aflevering (X, p. 336) gaf het antwoord, een getal van 18 cijfers:

$$N = 105263157894736842 \quad (1)$$

Beschouwt men dit getal nader dan maakt men al spoedig de (niet geheel vanzelfsprekende) opmerking, *dat het tweemaal zo groot wordt als men het laatste cijfer vóóraan plaatst*. Is N nu ook het *kleinste* getal met deze laatste eigenschap? Aanvankelijk is men gestemd dit te ontkennen, omdat immers $\frac{1}{2}N$, krachtens de eerste uitspraak, een kleiner getal is dat voldoet. Maar bij nadere beschouwing blijkt dat toch alleen maar juist als men dit getal niet met een 5, maar met een nul zou laten beginnen, een situatie die men niet zal bedoelen.

Een variant van onze opgave komt voor in D. Pedoe, *The gentle art of mathematics* (London, 1958), p. 11-16. Men vindt daar onder meer een elegante methode met behulp van repeterende breuken; wij zullen haar op het gestelde vraagstuk toepassen.

Zij

$$N = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad a_1 \neq 0 \quad (2)$$

het gevraagde getal en N' dat wat ontstaat door het laatste cijfer vooraan te plaatsen:

$$N' = a_n a_1 \cdots a_{n-1} \quad (3)$$

Gegeven is dus $N' = 2N$, waaruit volgt $a_n \neq 0$.

Beschouw nu de beide zuiver repeterende breuken, die N , resp. N' tot repetendum hebben:

$$G = 0, \overline{a_1 \cdots a_n} \quad (4)$$

$$G' = 0, \overline{a_n \cdots a_{n-1}} \quad (5)$$

dan is $G' = 2G$.

Verder is

$$\begin{aligned} G + a_n &= \overline{a_n a_1 \cdots a_n} \\ 10G' &= \overline{a_n a_1 \cdots a_n} \end{aligned}$$

zodat

$$G + a_n = 10G'$$

waaruit volgt

$$G = \frac{a_n}{19} \quad (6)$$

Uit het bestaan van een getal N met de gevraagde eigenschap volgt dus de waarde van G , die alleen nog van a_n afhangt. Omgekeerd zal uit (6) het getal N volgen indien zou blijken dat G een zuiver repeterende breuk voortbrengt met a_n als laatste cijfer van een periode. Daar de noemer van G geen factor 2 of 5 bevat en voorts G kleiner dan 1 is (voor de in aanmerking komende waarden $a_n = 1, 2, \cdots 9$) levert G inderdaad een zuiver repeterende breuk. Voorts is het bedoelde laatste cijfer tevens het eerste cijfer bij de ontwikkeling van $G' = 2a_n/19$. Daar $10G' = \frac{20}{19}a_n$ groter is dan a_n , maar kleiner dan $a_n + 1$, begint deze ontwikkeling inderdaad met a_n . Het getal (6) levert dus een repeterende breuk op, waarvan het repetendum een getal is dat aan de vraag voldoet. Er ontstaan zelfs oneindig veel oplossingen, want men mag uiteraard als repetendum ook wel twee of meer opvolgende perioden nemen. Het was trouwens van te voren duidelijk dat uit een antwoord op de gestelde vraag andere antwoorden volgen door de uitkomst enige malen achtereen

op te schrijven. Wij zullen deze oplossingen in het vervolg niet als essentieel verschillend beschouwen. Er zijn dus 9 wezenlijk verschillende antwoorden. Daar echter $\frac{1}{19} < \frac{1}{10}$ geeft $a_n = 1$ een getal N dat met een nul begint en dergelijke (hoewel formeel de vraag beantwoordende) getallen zal men niet bedoeld hebben. Daarentegen is $\frac{2}{19} > \frac{1}{10}$ en dus geven de getallen (6) voor $a_n = 2, 3, \dots, 9$ de oplossingen. *Het kleinste getal N met de gevraagde eigenschap is dus het repetendum van de breuk $\frac{2}{19}$ en men hervindt het getal (1).*

3. Op analoge wijze kan men trachten oplossingen van een vergelijking $N' = mN$ te bepalen. Wij nemen eerst *m geheel*. Voor $m = 1$ is de opgave triviaal; $m = 2$ is zo juist behandeld. Men vindt algemeen

$$G = \frac{a_n}{10m - 1}, \quad G' = \frac{ma_n}{10m - 1} \quad (7)$$

Deze breuken zijn beide kleiner dan 1 en hun noemers bevatten geen factoren 2 of 5; bij ontwikkeling leveren zij zuiver repeterende breuken. Opdat die voor G niet met het cijfer nul zal beginnen moet $10G > 1$ zijn, dus

$$a_n \geq m \quad (8)$$

waaruit volgt $m \leq 9$. De voorwaarde dat de ontwikkeling van G' met a_n begint, luidende

$$a_n < 10G' < a_n + 1$$

is steeds vervuld. Wij krijgen dus: de oplossingen van $N' = mN$ (m geheel, > 1) zijn elk gelijk aan het repetendum bij de ontwikkeling van

$$\frac{a_n}{10m - 1} \quad (a_n = m, m + 1, \dots, 9) \quad (9)$$

Er zijn dus $10 - m$ wezenlijk verschillende oplossingen. De *kleinste* oplossing behoeft echter niet die te zijn, welke bij de kleinste waarde van a_n (dat is $a_n = m$) behoort. Daartoe beschouwen wij de breuken (9) nader. Voor $m = 3, 6, 8$ en 9 is de noemer resp. 29, 59, 79, en 89 en de breuk dus voor elke a_n onvereenvoudigbaar. Hieruit volgt dat voor deze waarden van m de kleinste oplossing verkregen wordt als het repetendum bij de ontwikkeling van $\frac{3}{29}$, $\frac{6}{59}$, $\frac{8}{79}$ en $\frac{9}{89}$; er ontstaan getallen van resp. 28, 58, 13 en 44 cijfers. Voor $m = 4$ is $G = a_n/39$, $4 \leq a_n \leq 9$, d.w.z. dat de breuk voor $a_n = 6$ en $a_n = 9$ vereenvoudigbaar wordt. Daar echter een onvereenvoudigbare breuk met noemer 13, evenals een met noemer 39, een repeterende

breuk geeft met een periode van 6 cijfers, treedt voor $m = 4$ toch als kleinste oplossing het repetendum van $\frac{4}{39}$ op (dat is het getal 102564). Voor $m = 5$, $G = a_n/49$, $5 \leq a_n \leq 9$, is voor $a_n = 7$ vereenvoudiging mogelijk; het repetendum van een breuk met noemer 49 heeft 42 cijfers, een met noemer 7 daarentegen 6 cijfers. De kleinste oplossing is dus het repetendum van de breuk $\frac{1}{7}$ of wel het getal 142857. Voor $m = 7$ tenslotte geeft de ontwikkeling van $\frac{7}{69}$ de kleinste oplossing, daar breuken met noemer 23 een evenlange periode (van 22 cijfers) hebben als breuken met noemer 69.

4. Uit het voorgaande is welgebleken dat $N' = 2N$ een eenvoudig voorbeeld betekende, omdat het dan in de noemer van G optredende getal 19 priem is. Heeft deze noemer echter met de teller een factor gemeen, dan kan zoals het voorbeeld $m = 5$ aantoonde, een nader onderzoek moeten volgen. In het algemeen kan men wel zeggen dat bij vraagstukken van dit soort de periode van een repeterende breuk, als functie van noemer en grondtal, van belang is. Zoals men weet is deze afhankelijkheid niet eenvoudig. Nergens wordt naar mijn weten, uitvoeriger op deze materie ingegaan dan bij Schuh, *Leerboek der elementaire theoretische rekenkunde*, 2e deel (Groningen, 1921) dat van p. 125—374 geheel aan repeterende breuken is gewijd. Men vindt daar ook (p. 221—225) een tafel, aangevende de lengte der periode voor een onvereenvoudigbare voortbrengende breuk met noemer kleiner dan 150 en voor de grondtallen van 2 tot en met 10.

5. Wij bespreken nog de oplossing van $N' = mN$ als m niet geheel is. Blijkbaar komen alleen rationale getallen m in aanmerking. Het geval $m = \frac{1}{10}$ is triviaal en $m < \frac{1}{10}$ geeft geen oplossing. Stel dus $m = p/q$, waarin p en q onderling ondeelbaar zijn en $10p - q > 0$. Dan vindt men

$$G = \frac{qa_n}{10p - q}, \quad G' = \frac{pa_n}{10p - q} \quad (9)$$

Voor de oplosbaarheid der vergelijking is noodzakelijk $G < 1$, $G > \frac{1}{10}$, $a_n < 10G' < a_n + 1$, welk stelsel voorwaarden gelijkwaardig is met

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{10} < a_n < 10 \frac{p}{q} - 1 \quad (10)$$

waaruit, wegens $1 \leq a_n \leq 9$ grenzen voor m volgen:

$$\frac{1}{5} < \frac{p}{q} < 9 \frac{1}{10} \quad (11)$$

Daarnaast is noodzakelijk en voldoende dat G en G' bij ontwikkeling een zuiver repeterende breuk opleveren, dus dat de getallen (9), na eventuele vereenvoudiging, noemers doen zien zonder factoren 2 en 5. Het is duidelijk dat zulks zeker het geval is als q zelf vrij is van deze factoren. Is daarentegen q zowel door 2 als 5 deelbaar dan zal G' ook na eventuele vereenvoudiging zeker een dezer factoren in de noemer houden (daar p geen 2 of 5 bevat en $a_n < 10$). Bevat q een of meer factoren 2 en geen factor 5 of omgekeerd dan is een algemene regel over de oplosbaarheid moeilijk te redigeren, maar men kan in elk concreet geval eenvoudig verifiëren of G en G' tot een breuk gereduceerd kunnen worden, waarvan de noemer vrij is van de factor 2 resp. 5. Daarbij is natuurlijk van belang of de getallen 2, 4, 8 resp. 5 in het door (10) aan a_n toegewezen interval liggen.

Wij geven enkele voorbeelden.

Als $p/q = 2\frac{1}{7}$, dus $p = 15$, $q = 7$ dan volgt uit (10) dat $3 \leq a_n \leq 9$, $G = 7a_n/143$. Daar de noemer geen factoren kleiner dan 10 heeft, is vereenvoudiging van G of G' nimmer mogelijk; de noemer geeft een repetendum van 6 cijfers. De kleinste oplossing is het repetendum van $\frac{21}{143}$, dat is 146853. Stel $p/q = \frac{8}{17}$, dan is $1 \leq a_n \leq 3$; $G = 17a_n/63$ kan voor $a_n = 3$ worden vereenvoudigd maar de noemers 63 en 21 geven beide een periode van 6 cijfers. De kleinste oplossing is het repetendum van $\frac{17}{63}$. Voor $p/q = \frac{10}{19}$ is $1 \leq a_n \leq 4$; $G = 19a_n/81$ kan voor $a_n = 3$ worden vereenvoudigd tot $\frac{19}{27}$, die de kleinste oplossing $N = 703$ geeft. De volgende is het repetendum van $\frac{19}{81}$, n.l. 234567901. Als $p/q = 7\frac{1}{2}$, dan is $G = a_n/74$, $G' = 15a_n/148$, terwijl a_n gelijk aan 8 of 9 mag zijn. Voor $a_n = 8$ worden de noemers oneven. Er is één oplossing, het repetendum van $\frac{4}{37}$, d.i. 108. Voor $p/q = 6\frac{1}{2}$ wordt $G = a_n/64$, $G' = 13a_n/128$; geen enkele a_n kan alle factoren twee uit de noemers annuleren: er is geen oplossing.

Als $p/q = 1\frac{5}{8}$, dan is $G = 4a_n/61$, $G' = 13a_n/122$, $2 \leq a_n \leq 9$. Er zijn vier oplossingen, resp. de repetenda van $\frac{8}{61}$, $\frac{16}{61}$, $\frac{24}{61}$ en $\frac{32}{61}$, getallen van 60 cijfers. Als $q = 5$ dan heeft de vergelijking een oplossing als p een (niet door 5 deelbaar) getal is tussen 2 en 25; voor $p \leq 2$ en voor $p > 25$ is er geen oplossing.

6. Een variant van de opgave is die waarbij men het eerste cijfer van het getal N achteraan plaatst en de voorwaarde stelt dat voor het ontstane getal N'' geldt $N'' = mN$. Het kan op overeenkomstige wijze worden behandeld. De oplossing kan ook verklaren waarom het getal (1) half zo groot wordt als men het eerste cijfer achteraan plaatst. Andere uitbreidingen ontstaan door meer dan één cijfer cyclisch te verplaatsen of door uit te gaan van een ander talstelsel.

GOED OF FOUT?

Kritiek op een methode van oplossen van een eindexamen-vraagstuk voor mechanica

door

ir. dr. A. J. STARING

Vraagstuk 3 van de opgaven voor mechanica van het eindexamen h.b.s. van dit jaar gaf aanleiding tot m.i. ongewenste oplossingen, en het lijkt mij goed, daarop de aandacht te vestigen.

De opgave luidt:

De as van een recht-cilindervormige buis, waarvan de doorsnede verwaarloosd wordt, maakt een hoek van 45° met de naar boven gerichte verticaal door het laagste punt A van de buis. De buis is van binnen ruw en wentelt met een hoeksnelheid van ω rad/sec. om de verticaal door A. In deze buis bevindt zich een stoffelijk punt P met een massa van m kg; dit punt blijft op een afstand van $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ meter van A in rust t.o.v. de buis.

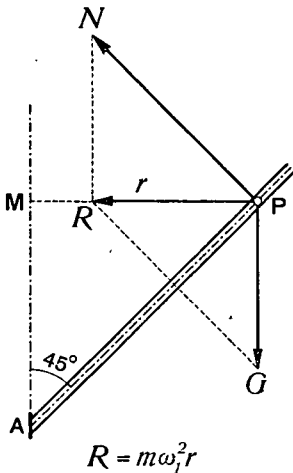


Fig. 1a

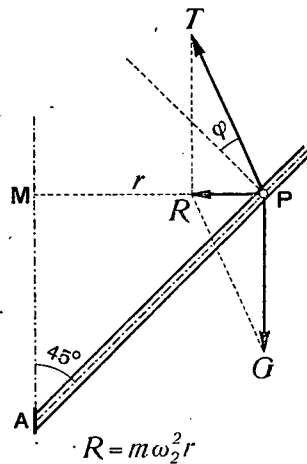


Fig. 1b

- a. Bereken de hoeksnelheid, waarmee men de buis moet laten wentelen voor het geval, dat de wrijvingsweerstand tussen P en de buis juist nul is.

- b. Als $\omega = 4$, is P op het punt in de richting van A te gaan glijden. Bereken de wrijvingscoëfficiënt voor de wrijving tussen P en de buis.

De eenvoudigste en duidelijkste oplossingen zijn m.i. die met behulp van de figuren 1a en 1b. Men tekent de krachten, die op P werken, en die tot resultante moeten hebben de middelpunt-zoekende kracht $m\omega^2 r$. In geval 1a is $R = G = 10m = m\omega_1^2 \cdot \frac{1}{4}$, dus $\omega_1 = 2\sqrt{10}$; in geval 1b is $\text{tg } (45^\circ + \varphi) = \frac{G}{R}$, dus $\frac{1+f}{1-f} = \frac{10m}{m\omega_2^2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$, zodat $f = \frac{3}{7}$.

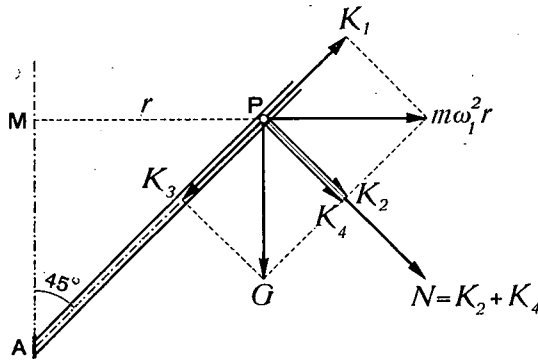


Fig. 2

De oplossing, waarop ik in de aanvang doelde, komt op het volgende neer (zie fig. 2, welke betrekking heeft op vraag a):

De centripetale kracht is $m\omega_1^2 r$, maar wordt als centrifugale kracht getekend, en door de meesten dan ook zo genoemd. Hij wordt ontbonden in de krachten K_1 langs, en K_2 loodrecht op de buis. Hetzelfde doet men met G ; de componenten zijn K_3 en K_4 .

Omdat P zich niet in de buis verplaatst, zegt men, dat K_1 en K_3 elkaar opheffen, dus $K_1 = K_3$, waaruit dan volgt $\omega = 2\sqrt{10}$. De uitkomst klopt, maar de gedachtengang is zeker verwarrend voor de leerlingen. Immers: G werkt op P, maar de centrifugale kracht werkt *niet* op P; men kan hoogstens zeggen, dat de component K_2 op de buis werkt. K_1 werkt zeker *niet* op de buis of op P, maar men zegt, dat hij evenwicht maakt met K_3 , die *wel* P tot aangrijpingspunt heeft. Zo stelt men ook K_4 , die op P werkt, samen met K_2 , die dat *niet* doet, tot een kracht N , waarvan men maar in het midden laat, waar die eigenlijk op werkt.

Ik weet wel dat het de bedoeling is een bewegingsgeval te vervangen door een geval van evenwicht, maar m.i. is dat voor de middelbare school ongeschikt. De leerlingen moeten juist leren zich goed rekenschap te geven van de krachten, die op een rustend of bewegend punt of lichaam werken; zij moeten die in hun voorstelling a.h.w. *zien*. De krachten in fig. 1a en 1b kunnen zij zich voorstellen; met de nodeloos ingewikkelde uitvoering volgens fig. 2 is dat vrijwel onmogelijk. In 99 van de 100 gevallen zal een leerling geneigd zijn de middelpuntvliedende kracht te beschouwen als een kracht, die werkt op het bewegende punt. Het kost moeite om hem dit uit het hoofd te praten; immers: die kracht is juist de enige, die hij bij het rondslingeren van een steen aan een touwtje, aan zijn hand voelt trekken!

ONTVANGEN BOEKEN

Prof. Dr. Siegfried Valentiner, *Vektoren und Matrizen*. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 1960, 2.Auflage; 202 blz., DM 4,80. Sammlung Götschen 354—354a. Voor recensie van de eerste druk zie Euclides 35 (1959—60), p. 167.

Prof. Dr. Guido Hoheisel, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1960, 6.Auflage; 128 blz., DM 3,60. — Sammlung Götschen — 920.

Prof. Dr. Guido Hoheisel, *Partielle Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter & Co, Berlin 1960, 4.Auflage; 128 blz., DM 3,60. — Sammlung Götschen — 1003.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, *Goniometrie voor VHMO*, J. B. Wolters, Groningen 1960, 5e druk, 101 blz., ing. f 2,10.

Een samenvoeging van „Goniometrie en Trigonometrie”, deel I en II. De trigonometrie is weggelaten. Nieuwe opgaven zijn opgenomen.

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Planimetrie voor VHMO*, deel I, 6e dr., J. B. Wolters, Groningen, 100 blz., ing. f 2,75.

Dr. Joh. H. Wansink, *Algebra voor VHO en MO*, deel I, 3e dr., J. B. Wolters, Groningen 1960, 121 blz. f 3,40.

De derde druk is zonder meer bruikbaar naast de vorige druk.

P. Wijdenes, *Lagere Algebra*, deel I, 8e dr., P. Noordhoff, Groningen, 1960. 275 blz., f 9,75. Deze druk is gelijk aan de vorige.

250 Opgaven, samengesteld in de geest van het ontwerp-leerplan van de Wimecos-commissie. 5e dr., P. Noordhoff, Groningen 1960.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw Algebra-Boek*, deel I, 18e dr., P. Noordhoff, Groningen 1960. ing. f 1,50; geb. f 2,25.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw Meetkundeboek*, deel I, 15e dr., P. Noordhoff, Groningen 1960. ing. f 1,35.

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Planimetrie II*, 5e dr., J. B. Wolters, Groningen 1960. 82 blz., ing. f 2,75; geb. f 3,25.

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Differentiaal- en integraalrekening voor VHMO*, 2edr., J. B. Wolters, Groningen 1960. 84 blz., ing. f 2,25; geb. f 2,90.

In deze tweede druk is rekening gehouden met het verslag van de nomenclatuur-commissie. Het laatste deel van het boek over toepassingen op de mechanica (§ 57 e.v.) is opnieuw geschreven.

BOEKBESPREKING

B. Coster, Dr. A. van Dorp en Dr. H. Streefkerk, *Nieuwe Algebra voor het eindexamen*. Uitgave: J. B. Wolters, Groningen, 1960, 185 blz., Prijs f 3,90.

Dit boekje is een voortzetting van „Algebra voor het Eindexamen” van dezelfde schrijvers. Het is aangepast aan het nieuwe programma en aan de wensen van de nomenclatuurcommissie van de Verenigingen Wimecos en Liwenagel.

Burgers

Prof. Dr. L. Kuipers, *Leerboek der analyse*. 176 blz. P. Noordhoff N.V., Groningen Ing. f 15,50, geb. f 17,50.

Dit boek bevat volgens de schrijver de leerstof, die gevraagd wordt bij het examen m.o. A voor zover dit het onderdeel analyse betreft. Bij de behandeling van het reële getal sluit de schrijver zich geheel aan bij de *Inleiding in de Algebra* van dr. F. Loonstra. Het boek dient men te beschouwen als een inleiding in de theorie der (reële) functies van één (reële) veranderlijke met inbegrip van de theorie der oneindige reeksen. Het integraalbegrip wordt ontwikkeld volgens Riemann.

Ook bij oudere mathematen (docenten) zal dit boek zeer in de smaak vallen, omdat het hun een pracht gelegenheid biedt zich in de gedachtensfeer van de jongere wiskundige generatie te verdiepen: ik denk b.v. aan het bewijs van de tweede limietstelling van Cauchy op pag. 16: Geldt voor de rij $u_1, u_2 \dots u_n$ dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ ($u_n > 0$) dan is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.

Zie verder b.v. de elegante afleiding van de convergentie van de rijen $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en $v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ door alleen van de ongelijkheid $(1+x)^n > 1 + nx$ ($x > -1$) gebruik te maken.

Aan het voorbeeld 2.10.1 zou ik de „didactische” vraag toevoegen: hoe op het v.h.m.o. te laten zien, dat de rij $u_n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{g_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{g_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{g_3} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{p-1} + 1} + \frac{1}{2^{p-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^p}\right)}_{g_p}$ divergeert, dat u_n zeker het getal G overtreft als $p \geq 2(G-1)$? Hoe te bewijzen dat

$$u_n = 1 + \left(\frac{1}{2^{1+r}} + \frac{1}{3^{1+r}}\right) + \left(\frac{1}{4^{1+r}} + \dots + \frac{1}{7^{1+r}}\right) + \left(\frac{1}{(2^p)^{1+r}} + \frac{1}{(2^p + 1)^{1+r}} + \dots + \frac{1}{(2^{2p} - 1)^{1+r}}\right)$$

convergeert als r een positief rationaal getal is?

Hoofdstuk 3 (pag. 23—38) is gewijd aan de limieten en functies (y steeds expliciet), waarbij ook de conforme continuïteit de revue passeert evenals de algemene limietstelling van Cauchy; dit alles natuurlijk als inleiding tot de diff. rekening, die in hoofdstuk 4 (pag. 39—59) aan de orde is, welk caput besluit met de reeksontwikkeling van Taylor, zeer vlot m.b.v. van de stelling van Rolle afgeleid met vermelding van de bekende resttermen. De oogst wordt binnengehaald op blz. 140 en volgende: de reeksontwikkeling van e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$, $\text{bgtg } x$ enz.

De integraalrekening wordt ontwikkeld in hoofdstuk 5 volgens Riemann. Dit caput, zeer pittig van inhoud, zou m.i. aan overzichtelijkheid winnen als behalve de aanhef van de § ook b.v. de stellingen 5.2.3, 5.3.1, 5.3.2 en 5.3.3, een ander lettertype verkrijgen evenals natuurlijk de hoofdstelling 5.7.1. In de herdruk, die naar ik verwacht, wel niet lang op zich zal laten wachten, zou ik b.v. als 5.11 de stelling opnemen: de verzameling van alle lengten van de in de cirkelboog AB beschreven gebroken lijnen bezit de booglengte $\widehat{AB}$ tot k.b.g de verzameling van alle lengten van de om deze boog beschreven gebroken lijnen met natuurlijk de raakl. in A en B als begin- en eindraaklijn bezit eveneens $\widehat{AB}$ tot o.g.g.

Hoofdstuk 6 (pag. 79—121) is gewijd aan de transcendente functies. De schrijver steekt van wal met de moderne definitie $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ en motiveert deze verder zeer voldoende. (Onder op pag. 79 dient te staan $-\int_1^x \frac{du}{u}$.) Het verbaast mij enigszins, dat de schrijver er niet op wijst, dat $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ natuurlijk ook als een oppervlak geïnterpreteerd kan worden, waardoor o.a. dan direct de ongelijkheden $x - \log(1+x) > 0$ ($x > 0$) en $-\log(1-x) > x$, $0 < x < 1$ in 't oog vallen, die hij gebruikt bij zijn afleiding van de constante van Euler op pag. 82. De exponentiële functie e^x wordt dan gedefinieerd als de omkeersfunctie van $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ (ik zou op pag. 86 achter $\log e = 1$ verwijzen (ter geruststelling) naar de voorb. 2.9.1 en 6-4.4) terwijl verder vlot de ons vertrouwde stellingen uit deze definitie worden afgeleid. Ook de algemene exp. functie a^x ($a > 0$) levert na de gegeven definitie $a^x = e^{x \log a}$ of $\log a^x = x \log a$ niet de minste moeilijkheden op evenmin, als de machtsfunctie x^a , waarbij ($x > 0$) a een willekeurig reëel getal (dus ook *irrationaal*) kan voorstellen, als we dus $x^a = e^{a \log x}$ stellen. Bij 6.3. zou de vraag kunnen staan: hoe dus de grafiek van a^x door „vermenigvuldiging” gemakkelijk uit die van e^x te verkrijgen? De verg. $a^x = b$, die steeds oplosbaar blijkt te zijn, als a en b beide pos. zijn, kan men per definitie ook lezen als $x = {}^a\log b$, zodat dus ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$ en $e^x = b$ ($b > 0$) is dan gelijkwaardig met $x = {}^e\log b$ of $x = \ln b$.

De schrijver maakt de indruk een groot voorstander te zijn van de apartheids-politiek in de B faculteit (mechanica en natuurkunde taboe). Typerend b.v. is de wijze, waarop (zonder enige toelichting), zie pag. 93, de definitie $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ($-1 \leq x \leq 1$) uit de lucht komt vallen. Volgens stelling 5.9.4.1 blijkt deze integraal te convergeren, uit de monotonie van de functie volgt, dat deze een inverse functie bezit, die we $\sin x$ noemen; definiëren we verder het getal π , zodanig, dat $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ en $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ dan gelukt de schrijver heus vlug de bekende formules, waaronder de additietheorema's $\sin(x+y) = \dots$ en $\cos(x+y) = \dots$ voor de dag te toveren. (4 bladz. zijn met deze opzet gemoeid.) Het zevende en laatste hoofdstuk levert ons een zeer bevredigende verhandeling over de reeksen; de talrijke vraagstukken zijn ook hier van een antwoord voorzien.

Dr. P. A. Okken

GROEP LIWENAGEL

Notulen van de ledenvergadering op woensdag 31 augustus 1960 om 14.30 uur in het Eykmanhuis te Driebergen.

De aanwezigen en in het bijzonder de heren Hufferman (Wimecos), Groen (Velines), Vernout (Wiskundewerkgroep van de W.V.O.) en Koldijk (redactie-secretaris van Euclides) werden door Dr. Schuyt, die deze vergadering presideerde, hartelijk welkom geheten. Een speciaal woord van welkom werd ook gericht tot de heren Roodenburg en Koning, bestuursleden van het Genootschap, en tot de sprekers, de heren Dr. Dekker en Dr. Van Hiele.

De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd.

Vervolgens hield Dr. J. W. Dekker zijn voordracht, getiteld: Het „bewijs door volledige inductie”, waarin hij deze bekende bewijsmethode aan een kritisch en historisch onderzoek onderwierp. Hij wees daarbij op allerlei merkwaardigheden, waarvan men ook „in de klas” profijt kan trekken. Omdat de voordracht waarschijnlijk in „Euclides” zal worden gepubliceerd, zal hier niet getracht worden een kort resumé te geven. De dankwoorden van de voorzitter werden onderstreept door een dankbaar applaus.

Na de pauze besprak Dr. P. M. van Hiele de wiskundeopgaven van het schriftelijk eindexamen gymnasium B van dit jaar. De opgaven voor stekunde waren over het algemeen gemakkelijk, hetgeen hij geen bezwaar vond. Bij 1b kan de vraag worden gesteld, of dit algebra of analytische meetkunde is. Bij 2b en c zou spreker geen scherpe redenering willen eisen; oplossen met behulp van de grafiek is goed. Het trigonometrivraagstuk vond hij geschikt; had men altijd zulke vraagstukken opgegeven, dan zou afschaffing van het vak niet gepropageerd zijn. Van het eerste analytische-meetkunde vraagstuk was de formulering misleidend; het laatste vraagstuk was meetkundig wel héél wat gemakkelijker dan algebraïsch. Over het geheel genomen vond spreker ook dit stel werk niet onredelijk. Bij de meetkunde was het eerste vraagstuk geschikt. Wie bij 2a goed begon, kreeg de rest cadeau en andersom, wie 2a verkeerd aanpakte, maakte van de rest ook niets. Het bewijs van 3a had niets om 't lijf; verder was de constructieopgave meer een rekenopgave. Dit laatste vond Dr. Van Hiele een bezwaar, dat echter niet door de hele vergadering werd gedeeld. Het meetkundewerk als geheel vond spreker het minste van de drie; er werd te weinig gevraagd naar exacte bewijsvoering; het was te veel rekenwerk. Aan de discussie — bij elk onderdeel — werd door velen deelgenomen.

Nadat de voorzitter Dr. Van Hiele bedankt had voor de moeite, die hij zich gegeven had en bij de rondvraag de gasten, bij monde van de heren Groen en Vernout, hun dank hadden betuigd voor de ontvangen uitnodiging, sloot de voorzitter om kwart over vijf de vergadering.

De secretaris,
D. Leujes

RECTIFICATIE

In het artikel over de Pedagogische studiedagen te Arlon (Euclides 1959-60, III) heb ik Prof. Papy de term „subjectie” in de mond gelegd. Achteraf verneem ik, dat dit op een misverstand berust; het moet „surjectie” zijn.

P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

39. Gegeven zijn twee willekeurige oppervlakken in de driedimensionale ruimte. Gevraagd wordt of op elk van deze oppervlakken een kromme getrokken kan worden, zodat de beide getrokken krommen congruent zijn. Opgemerkt wordt nog, dat hier „gewone” oppervlakken bedoeld zijn zonder „rare” dingen als geïsoleerde punten, imaginaire stukken e.d.

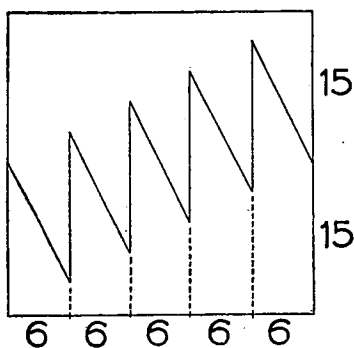
40. Aan een bepaalde bushalte stoppen vijf lijnen. We nemen aan, dat ze elk om de tien minuten rijden volgens de dienstregeling en elkaar met tussenpozen van twee minuten behoren op te volgen. Gemiddeld zal iemand, die op ongeregelde tijden bij de halte komt twee bussen van een verkeerde lijn zien stoppen, voordat de bus komt, die hij hebben moet (aangenomen, dat het stoppen geen tijd in beslag neemt). Nu is in werkelijkheid de dienst natuurlijk niet regelmatig. Is het gevolg daarvan, dat het gevonden getal twee verandering ondergaat?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

37. 15226 goudstukken, waarvan de dieven resp. ontvangen 2176, 3730, 3996, 3044, 1630, 558 en 92. Men vindt dit door de aandelen van alle dieven uit te drukken in het aandeel van de laatste en de eis dat die aandelen geheel moeten zijn.

38.



KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Jan Huitzingstraat 43, Hoogezand.

LIWENAGEL

Jaarvergadering op zaterdag 4 februari 1961 in „Hotel Smits”, Vreeburg, Utrecht. Aanvang 15 uur. Voor de agenda zie men het vorige nummer (blz. 126).

VELINES

Avondcolleges voor natuurkundeleraren en andere belangstellenden.

In de Grote Collegezaal van het Mathematisch Instituut, Nieuwe Achtergracht 123, Amsterdam. Aanvang 19 uur (einde 21.30 u.)

26 jan, 2 en 9 feb: Prof. Dr. J. de Boer: Inleiding over Golfmechanica.

16 feb: Prof. Dr. G. W. Rathenau: Toepassing op vaste stoffen-fysica.

23 feb: Dr. R. van Lieshout: Toepassing op Kernfysica.

2 mrt: Prof. Dr. S. A. Wouthuysen: Elementaire deeltjes.

Door een subsidie van het Ministerie van O.K.W. kan aan de leraren een tegemoetkoming in de reiskosten worden gegeven.

Degenen, die aan deze colleges willen deelnemen worden verzocht zich zo spoedig mogelijk aan te melden bij Dr. J. Deknatel, Jordensstraat 4, Haarlem.

MATHEMATISCH CENTRUM

Voordrachten

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt bezien*”, in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op

woensdag 22 februari 1961: Prof. Dr. G. W. Veltkamp: „Eigenwaarden”.

Aanvang 20.00 uur.

In de serie „*Actualiteiten*” in „Krasnapolsky”, Warmoesstraat 173—199, Amsterdam op zaterdag 25 februari 1961:

Dr. J. Th. Runnenburg: „Stochastische eigenschappen van een draad”.

Aanvang 14.00 uur.

Colloquium

„*Gegeneraliseerde functies*” o. l. v. Prof. Dr. H. A. Lauwerier. Vrijdag om de veertien dagen in het M.C., aanvang 10 feb. 14.00 uur.

Cursus

Oriënterende cursus „*Mathematische Statistiek*” in samenwerking met het Wiskundig Dispuut „Pi” te Arnhem. De cursus zal aanvangen in september 1961. Doel: leraren en aanstaande leraren in de wiskunde vertrouwd maken met de beginselen van de kansrekening en de mathematische statistiek.

Kosten f 50,00 (voor leraren f 10,00).

Eenmaal in de veertien dagen op maandagavond, woensdagmiddag of woensdagavond. Belangstellenden kunnen zich aanmelden bij de administratie van het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O.

Zojuist verschenen:

Dr. H. LINDEMAN - Drs. G. H. FREDERIK

LEERBOEK DER NATUURKUNDE

Deel 1A (1e ronde): Mechanica, vloeistoffen,
gassen en warmte - 7e druk f 6,50

Dit boek is een volledig omgewerkte en gemoderniseerde uitgave van deel 1A van de reeks leerboeken van Nathans, Lindeman en Frederik, aangepast aan de huidige ontwikkelingsperiode van de kunstmatige satellieten en de raketvluchten. Zo maken de auteurs thans van het begin af onderscheid tussen de begrippen gewicht en massa, omdat de leerlingen dagelijks kunnen horen en lezen over de afhankelijkheid van het gewicht van de plaats in het heelal. In het laatste hoofdstuk is een eenvoudige moleculairtheorie gegeven, waardoor het mogelijk wordt een groot aantal reeds behandelde verschijnselen onder één gezichtspunt te brengen.

Het aantal vragen in de tekst is aanmerkelijk uitgebreid en aan het slot is een vraagstukkenverzameling opgenomen, die nauw aansluit bij de behandelde leerstof. In de tekst werd ook een aantal activerende opdrachten als z.g. huiswerkproeven opgenomen.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

W. J. H. SALET e.a.

Vraagstukken over Analyse en Algebra

I - 5de druk f 6,50

II - 2de druk f 6,50

„Dit tweede deel van deze vraagstukkenverzameling is al even voortreffelijk als het eerste”.

W. J. Brandenburg in Weekblad v.b. „Genootschap”

„Deze verzameling van zorgvuldig uitgekozen, systematisch gerangschikte en goed geredigeerde vraagstukken maakt op de lezer een prettige indruk”.

Weekblad v. d. A.V.M.O.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIELSEN

Algebra voor M.M.S.

Onlangs verscheen de 2de druk, à f 3,75

Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van de verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen Het behoort tot het beste, dat ik tot dusverre onder ogen heb gehad. Daarom, in afwachting van meer op het meisje ingestelde boeken, van harte aanbevolen.

D. S. in Cbr. Gymn. en M.O.

Een boek met aardige verzamelingen van eenvoudige vraagstukken. Weinig theoretische uitleg, zodat aan de docent alle kansen geboden worden. Geschikt voor alle scholen, waar eenvoudig wiskunde-onderwijs gegeven wordt, zoals op de m.m.s.

(W. J. Brandenburg in Weekbl. v.b. „Genootschap”).

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIELSEN

Nieuw Algebraboek

Voor M.U.L.O.-A en-B, 3- en 4- j. c.; ook geschikt voor V.M.T.O.
Een gedegen methode sinds vele jaren,
verjongd en aangepast aan de tegenwoordige eisen!

Deel I	18e druk f 1,50, geb. f 2,25
Deel II	15e druk f 2,10, geb. f 2,90
slotstukje	5e druk f 3,90, geb. f 4,65
Deel III	9e druk f 1,90, geb. f 2,65
Deel IVA	4e druk f 1,90, geb. f 2,40
Deel IVB	7e druk f 3,90, geb. f 4,75

Ook voor schakelklassen H.T.S.

De deeltjes I, II, III en IVA vormen een afgerond geheel voor het A-programma. Voor het B-programma neemt men de deeltjes I, II, III en IVB. Het „slotstukje” werd samengesteld om tegemoet te komen aan de wens van vele gebruikers van het Nieuw Algebraboek, die werkzaam zijn aan U.L.O.-scholen, die in drie jaar voor het M.U.L.O.-diploma A opleiden. Met deel I en II bevat het de volledige stof voor het genoemde examen.
Voor elk deeltje zijn antwoorden verkrijgbaar.

Recht op het doel af, zonder ballast!
Unaniem aanbevolen door de gehele schoolpers.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

De in dit nummer geadverteerde uitgaven zijn zowel bij de boekhandel als bij de uitgever verkrijgbaar.