

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

IX - 1 JUNI 1960

INHOUD

Dr. P. G. J. Vredenduin: Het Kansbegrip	273
Dr. W. Bevelander: De Voortbeweging van een Projectiel in de Atmosfeer II	283
J. Wichers: Het Afgeknotte Parallellepipedum van Albert Dürer	296
De Eindexamenprogramma's voor Wiskunde	299
Boekbespreking	298, 301
Kalender	303
Recreatie	304

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Singel 13, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefst;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET KANSBEGRIP

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

De kansrekening wordt meestal beschouwd als onderdeel van de wiskunde. Het fundamentele begrip kans is echter van oorsprong een fysisch begrip. Om enig inzicht te verkrijgen in de grondslagen van de wiskundige kansrekening is het dan ook noodzakelijk eerst de betekenis van het fysische kansbegrip te onderzoeken. Twee definities van dit begrip zijn voor ons van belang: de klassieke definitie van Laplace en de frequentiedefinitie. We beschouwen eerst de eerste definitie.

Om van een kans te kunnen spreken is het noodzakelijk uit te gaan van een gegeven beginsituatie. Uit deze beginsituatie kunnen verschillende eindsituaties voortkomen en de vraag is nu, wat de kans is, dat een bepaalde eindsituatie intreedt of dat een eindsituatie intreedt, die aan bepaalde eisen voldoet. De beginsituatie is b.v.: er wordt met een dobbelsteen gegooid, de eindsituatie: er wordt zes geworpen, of: er wordt een even aantal ogen geworpen.

We tellen nu het aantal verschillende eindsituaties, waartoe de beginsituatie aanleiding kan geven, en noemen het resultaat het aantal mogelijke gevallen. Evenzo tellen we het aantal eindsituaties, dat aan de gestelde eis voldoet, en noemen het resultaat het aantal gunstige gevallen. Onder de kans, dat een resultaat intreedt, dat aan de gestelde eisen voldoet, verstaan we nu

$$\frac{\text{het aantal gunstige gevallen}}{\text{het aantal mogelijke gevallen}}$$

Dit is de klassieke kansdefinitie van Laplace.

Toegepast op ons voorbeeld vinden we, dat de kans op het werpen van 6 gelijk is aan $\frac{1}{6}$ en op het werpen van een even aantal ogen gelijk aan $\frac{3}{6}$.

De inhoud van de definitie is eenvoudig; de moeilijkheden rijzen echter eerst, als men probeert haar toe te passen. Vooreerst moet het aantal mogelijke gevallen eindig zijn. We nemen aan, dat aan deze beperking voldaan is. Dan blijft echter het probleem: hoe moeten

we de mogelijke gevallen tellen? Als de dobbelsteen vervalst is door b.v. een plaatje lood bij het zijvlak 1 aan te brengen, levert de definitie desondanks voor de kans op het werpen van 6 als uitkomst $\frac{1}{6}$, terwijl dit niet meer acceptabel is. Als men de kans vraagt uit een bak met vier grote en drie kleine ballen een grote bal te trekken, zal men de uitkomst $\frac{4}{7}$, die op grond van de definitie verkregen wordt, niet als juist aanvaarden. Hieruit blijkt, dat we ons bij het tellen van de gevallen restricties moeten opleggen.

Meestal lost men deze moeilijkheid op door vast te stellen, dat de gevallen *gelijkwaardig* moeten zijn. Dit is echter geen oplossen, maar slechts een verschuiven van de moeilijkheid. Wat zijn immers gelijkwaardige gevallen? De meest ideale gelijkwaardigheid is de ononderscheidbaarheid. Twee gevallen A en B zijn ononderscheidbaar, als elk oordeel, waarin A of B voorkomt, waar resp. fout blijft, als men A door B of B door A vervangt. In dit ideale geval verkeren we bij de dobbelsteen niet. Niet elk oordeel, waarin het zijvlak 1 voorkomt, blijft juist, als we zijvlak 1 door zijvlak 2 vervangen. Dit is alleen maar het geval, als het aantal ogen van het zijvlak niet van invloed is op het al of niet geldig zijn van het oordeel. D.w.z. als we ons tot dergelijke oordelen beperken, is de gelijkwaardigheid verzekerd. Gelijkwaardigheid zou dan een soort beperkte ononderscheidbaarheid zijn, namelijk ononderscheidbaarheid voor zover we ons beperken tot oordelen, waarin de verschillen tussen de zijvlakken geen rol spelen. Maar door deze restrictie is onze positie meteen hopeloos geworden. Als we twee gevallen gelijkwaardig willen noemen, als ze ononderscheidbaar zijn, voor zover we ons beperken tot oordelen, waarin het verschil tussen de gevallen niet relevant is, dan zijn alle gevallen gelijkwaardig. Hiermee is de laatste kans op redding van de definitie verloren gegaan. Hoewel de definitie van Laplace, zoals ieder bekend is, praktisch bruikbaar is, levert ze ons geen theoretisch houvast bij het fixeren van het kansbegip.

Dit blijkt nog duidelijker, als we het geval van de valse dobbelsteen beschouwen. Onderstel iemand gooit met een dobbelsteen en werpt drie maal achtereen 6. Men zal dit als zeer toevallig beschouwen. Naarmate dit aantal groeit, zal twijfel rijzen aan de echtheid van de dobbelsteen. Of iemand gooit met een dobbelsteen 600 keer en werpt b.v. 200 keer 6. Dit aantal overschrijdt de verwachte (ongeveer) 100 zo veel, dat men de echtheid van de dobbelsteen in twijfel trekt, d.w.z. niet wenst te accepteren, dat de kans op het werpen van 6 met deze dobbelsteen gelijk is aan $\frac{1}{6}$, maar eerder geneigd is te geloven, dat deze kans in de buurt van $\frac{1}{3}$ ligt. Men heeft

blijkbaar intuïtief meer vertrouwen in de relatieve frequentie (d.i. het aantal keren, dat 6 geworpen is, gedeeld door het aantal keren, dat gegoooid is) dan in het quotiënt van het aantal gunstige en het aantal mogelijke gevallen als maat voor de kans. En hiermee worden we vanzelf gedreven in de richting van de andere kansdefinitie, de z.g. frequentiedefinitie.

We gaan weer uit van een bepaalde beginsituatie en vragen naar de kans, dat hieruit een eindsituatie resulteert, die aan bepaalde eisen voldoen. Een dergelijke eindsituatie zullen we een gunstige eindsituatie noemen. Om deze kans te vinden herhalen we de beginsituatie n keer en gaan we na, hoe vaak een gunstige eindsituatie verkregen wordt. Dit aantal noemen we g . Het quotiënt $\frac{g}{n}$ noemen

we de relatieve frequentie, waarmee een gunstig eindresultaat optreedt. Het ligt nu voor de hand deze relatieve frequentie per definitie de kans te noemen op een gunstig eindresultaat. Een dergelijke kansdefinitie zou echter wel wat overhaast gegeven zijn. Als men 1 keer met een munt gooit is het resultaat b.v. kruis. De relatieve frequentie, waarmee kruis optreedt, is dan 1 en de relatieve frequentie, waarmee munt optreedt, 0. Toch zal niemand deze getallen de kans op het werpen van kruis resp. munt noemen. Duidelijk is, dat de relatieve frequentie eerst betekenis krijgt, als n groot is. Omdat het groot zijn van n niet op zinvolle wijze in de definitie opgenomen kan worden, stellen we nu vast: onder de kans op een gunstig resultaat verstaan we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g}{n},$$

dus de limiet van de relatieve frequentie, als het aantal malen, dat de beginsituatie herhaald wordt, tot oneindig nadert. Deze kansdefinitie heet de frequentiedefinitie. Ze is o.m. vurig verdedigd door Von Mises.

Hoewel we de klip van het tellen van de mogelijke gevallen thans ontweken zijn, duikt een ander niet minder ernstig gevaar op. De definitie is nu logisch verantwoord, maar biedt geen mogelijkheid om de kans praktisch te bepalen. We kunnen weliswaar n groot maken, maar hebben dan geen zekerheid, dat de verkregen relatieve frequentie weinig van de limiet wijkt. En het is onmogelijk in de praktijk n tot oneindig te laten naderen. Weer is de praktische bruikbaarheid van de definitie ieder duidelijk, maar zijn we er toch niet in geslaagd een verantwoorde kansdefinitie te geven.

Laten we dus rustig, althans voorlopig, accepteren dat we ge-

faald hebben, maar laat dit ons niet weerhouden te onderzoeken, hoe het mogelijk geweest is, dat op een zo wankel basis een wiskundige kansrekening is opgetrokken. Een wiskundige interesseert zich nu eenmaal niet veel voor praktische toepasbaarheid van een definitie, maar vraagt veeleer naar de consequenties zonder zich aan de praktijk te storen. Het mag ons dan ook niet verbazen, dat wiskundigen een kansrekening ontworpen hebben, uitgaande van het kansbegrip van Laplace, zonder dit kansbegrip op zijn fysische waarde te toetsen.

Men begon met uit de kansdefinitie een aantal fundamentele kanswetten af te leiden. We laten ze hier volgen. De kans op een resultaat a noteren we $P(a)$.

Regel E. $0 \leq P(a) \leq 1$.

Regel C. $P(a) + P(\text{niet-}a) = 1$ (complementregel).

Regel S. Als a en b elkaar uitsluiten, dan is $P(a \text{ of } b) = P(a) + P(b)$ (somregel).

Definitie. De kans op b , als a ingetreden is, noteren we $P_a(b)$.

Regel P_1 . $P(a \text{ en } b) = P(a) \cdot P_a(b)$ (eerste produktregel).

Definitie. We noemen twee resultaten a en b onafhankelijk van elkaar, als $P_a(b) = P_{\text{niet-}a}(b)$.

Regel P_2 . Als a en b onafhankelijk van elkaar zijn, dan is $P(a \text{ en } b) = P(a) \cdot P(b)$ (tweede produktregel).

Opmerkingen. 1. Als we de onafhankelijkheid van a en b definiëren door $P_a(b) = P(b)$, dan blijkt direct, dat de tweede produktregel een bijzonder geval van de eerste is en zou P_2 dus achterwege gelaten kunnen worden.

2. De gegeven definitie van onafhankelijkheid is niet fraai, omdat ze niet symmetrisch in a en b is. De theorie leert achteraf, dat deze symmetrie aanwezig is.

Toelichting bij P_1 . Onderstel, dat 10 personen op een rij geplaatst worden en dat A zich afvraagt, welke kans hij heeft op het einde van een rij en bovendien naast B geplaatst te worden. Noem deze beide eisen resp. a en b . De kans op a is dan $\frac{2}{10}$. De kans op b , als we aannemen, dat a ingetreden is, is $\frac{1}{9}$, omdat in dat geval van de resterende 9 plaatsen er slechts 1 naast A is. Dus is hier $P_a(b) = \frac{1}{9}$ en $P(a \text{ en } b) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9}$.

Toelichting bij P_2 . Onderstel, dat twee groepen van 10 personen beide in een rij geplaatst worden. A behoort tot de ene en B tot de andere groep. Hoe groot is de kans, dat A en B beide op het einde van hun rij geplaatst worden? Nu zijn de beide resultaten onafhankelijk van elkaar. De kans, dat B aan het einde van een rij geplaatst wordt, is gelijk aan $\frac{2}{10}$, ongeacht of A wel of niet aan het einde van een rij geplaatst wordt. En dus is de gevraagde kans volgens P_2 gelijk aan $\frac{2}{10} \times \frac{2}{10}$.

De juistheid van deze regels kan men zowel afleiden uit de kansdefinitie van Laplace als uit de frequentiedefinitie.

Uitgaande van deze regels is nu een kansrekening opgebouwd, *zonder dat men daarbij terug hoefde te grijpen op een kansdefinitie.*

Een voor ons belangrijk resultaat, dat in deze kansrekening bewezen wordt, is de z.g. *wet van de grote getallen*. Deze luidt als volgt. Als de kans op een gunstig resultaat p is en men de beginsituatie n maal herhaalt, dan nadert de kans, dat voor het aantal gunstige resultaten g geldt

$$(p - \varepsilon)n < g < (p + \varepsilon)n$$

voor elke positieve ε tot 1, als n nadert tot oneindig.

Deze wet houdt in, dat men de kans met willekeurig grote nauwkeurigheid kan benaderen door n groot genoeg te kiezen. Dit resultaat brengt er ons toe de volgende praktisch bruikbare kansdefinitie op te stellen. *De kans op het optreden van een gunstig resultaat is een grootheid, die men bepaalt door de relatieve frequentie te bepalen van het aantal keren, dat het gunstige resultaat bereikt wordt. Deze bepaling is nauwkeuriger, naarmate het aantal keren, dat de beginsituatie herhaald wordt, groter is.*

Deze definitie schijnt vreemd, omdat niet gezegd wordt, wat kans is, maar alleen, hoe kans bepaald wordt. We moeten echter niet vergeten, dat kans een fundamenteel fysisch begrip is. Om de definitie te kunnen waarderen, moeten we haar dus vergelijken met de manier, waarop in de fysica andere fundamentele begrippen, zoals lengte en tijd, bepaald worden. Een fysische definitie van lengte houdt niet anders dan een meetmethode in. Men herleidt niet het begrip lengte tot andere reeds te voren gedefinieerde begrippen, zoals men b.v. doet als men een begrip als declinatie definieert, want men kan niet teruggrijpen op nog fundamenteelere begrippen. Men kan daarom niet anders doen dan vaststellen door welke handelingen een lengte gemeten wordt. Men kan bovendien vaststellen, dat een lengte nauwkeuriger gemeten wordt door verfijning van de meetinstrumenten of door de meting meer keren uit te voeren en het gemiddelde van de uitkomsten te berekenen. De situatie bij de lengtemeting is dan analoog aan die bij de kansbepaling. Verfijning van het meetinstrument of herhaling van de meting komt hier overeen met het groter kiezen van n . Toch is er nog een verschil. Bij het meten van de lengte geeft men een middelbare fout in de uitkomst op. Dat is hier, in de aanvang althans, principieel onmogelijk; want het bepalen van de middelbare fout geschiedt op grond van de kansrekening. Zou men dus een middelbare fout in de uitkomst in de kansdefinitie in-

corporeren, dan zou noodzakelijk een viciëuze cirkel in de definitie ingeslopen zijn. Natuurlijk kan men wel achteraf, nadat de kansrekening ontwikkeld is, kritiek uitoefenen op de numerieke betrouwbaarheid van het gevonden resultaat, maar een dergelijke kritiek kan nog niet in de kansdefinitie opgenomen worden. Aanvankelijk kunnen we dus niets anders zeggen dan dat de bepaling nauwkeuriger is, naarmate n groter gekozen wordt, maar niet vermelden, welke graad van nauwkeurigheid het resultaat heeft. In zekere zin blijkt hieruit, dat kans het meest fundamentele begrip van de fysica is.

Omdat ook uitgaande van de zojuist gegeven definitie de bovengenoemde kansregels afleidbaar zijn, blijft ze als fundament voor de kansrekening onverminderd bruikbaar.

Ik wil hier nog aan toevoegen, dat ik er niet volkomen zeker van ben, dat de door mij tegen de praktische bruikbaarheid van de frequentiedefinitie volgens Von Mises geopperde bezwaren houdbaar zijn. Men definieert namelijk in de fysica de snelheid als de limiet van de gemiddelde snelheid, als het tijdsverloop, waarover deze gemeten wordt, tot 0 nadert. Wil men deze definitie hanteren, dan zou men dus eigenlijk een oneindige serie experimenten moeten doen, waarbij steeds weer dezelfde beweging gereproduceerd wordt en de gemiddelde snelheid over een tot 0 inkrimpend tijdsinterval gemeten wordt. Toch wordt deze definitie door elke fysicus aanvaard en levert ze een goede theoretische basis voor het afleiden van mechanische wetten. Zou men dan toch op analoge gronden de frequentiedefinitie van Von Mises kunnen accepteren? Er is verschil: tot 0 naderen is niet hetzelfde als tot oneindig naderen; maar is dit verschil doorslaggevend? Ik durf de vraag niet te beantwoorden, maar leg hem graag aan de lezers voor ter bepaling van hun standpunt.

Totnogtoe hebben we vastgesteld, dat de wiskundige, uitgaande van een of andere fysische kansdefinitie, een mathematische kansrekening heeft opgebouwd. Eigenlijk is dit niet juist gezegd. Zolang men uitgaat van een fysische kansdefinitie bedrijft men fysica en geen wiskunde. Men kan hoogstens zeggen, dat de verdere opbouw van de kansrekening, omdat er geen rekening met de fysische definitie van het kansbegrip gehouden hoefde te worden, geschiedde conform de mathematische methode. Wil er echter een wiskundige kansrekening ontstaan, dan is het noodzakelijk, dat deze een ander fundament krijgt, waarin het fysische kansbegrip geen rol meer speelt.

Als eerste poging om dit probleem tot een oplossing te brengen,

zouden we kunnen voorstellen van een kansdefinitie af te zien en eenvoudig uit te gaan van de vijf kansregels E , C , S , P_1 en P_2 . Op basis van dit axiomastelsel zou men dan een deductief systeem kunnen optrekken. Nu bestaat de basis van een deductief systeem echter niet alleen uit axioma's, maar ook uit ongedefinieerde grondbegrippen en grondrelaties. We moeten dus nog vaststellen, welke grondbegrippen en grondrelaties we aan de mathematische kansrekening ten grondslag willen leggen.

Uitspraken in de kansrekening zullen van de vorm $P(a) = b$ zijn. Hierin is P een mathematisch niet te definiëren functie, de kansfunctie. Hiermee is de grondrelatie van de kansrekening opgespoord. (P is weliswaar een functie, maar als zodanig ook een speciaal soort relatie, nl. een relatie, die elke a met ten hoogste één b verbindt.) Verder stelt b een reëel getal voor. Ons enige probleem is dus nog de aard van a , d.w.z. van datgene dat voor de variabele a gesubstitueerd mag worden, te onderzoeken. Denken we aan de fysische kansrekening, dan stelt a een gebeurtenis voor. Maar zo concreet mogen we in de wiskunde niet denken. In de fysica is bij elk kansvraagstuk een beginsituatie gegeven, die aanleiding kan geven tot een veelheid van eindresultaten, die samen een verzameling E vormen. Gooien we tien keer met een munt, dan bestaat E uit de suites van tien resultaten kruis of munt. We voegen dan niet alleen aan elk van deze resultaten een kans toe (i.c. 2^{-10}), maar ook aan deelverzamelingen van E , die uit meer dan één element bestaan. Zo is b.v. de kans, dat de vierde keer kruis geworpen wordt 2^{-1} . Dit getal wordt dus als kans toegevoegd aan de deelverzameling van E , die uit de suites bestaat, waarvan het vierde element kruis is. Aan de deelverzameling, die uit de suites bestaat, die drie keer munt en zeven keer kruis bevatten, is als kans $\binom{10}{3}2^{-10}$ toegevoegd. In de wiskunde zullen we van de speciale aard van E moeten abstraheren en dus slechts aannemen, dat E een verzameling is. Aan deze verzameling en aan deelverzamelingen ervan worden door middel van de functie P getallen toegevoegd. We moeten dus uitgaan van een verzameling E , waarvan we de aard in het midden laten, en vaststellen, dat de functie P als argument deelverzamelingen van E moet hebben. En daarmee zien we, dat we geen grondbegrip behoeven te introduceren en in ons axiomastelsel slechts de grondfunctie P behoeft voor te komen. Verder gaan we uit van een willekeurige verzameling E , die in het axiomastelsel de rol van een grondconstante heeft. Ten slotte stellen we vast, dat $P(a)$ alleen betekenis heeft, als a een deelverzameling van E is, en dat in dat geval $P(a)$ een reëel getal voorstelt.

Het axiomastelsel kiezen we zo eenvoudig mogelijk. Voldoende is nu de volgende drie axioma's te kiezen.

Axioma 1. $P(a) \geq 0$.

Axioma 2. $P(E) = 1$.

Axioma 3. Als $a \cap b = \emptyset$, dan is $P(a \cup b) = P(a) + P(b)$.

Hierin stelt $a \cap b$ de doorsnede van a en b , $a \cup b$ de vereniging van a en b en $\emptyset$ de nulverzameling (lege verzameling) voor.

Axioma 1 zegt, dat de kans steeds een niet-negatief getal is.

Axioma 2 komt overeen met het fysische feit, dat E het totaal van alle mogelijkheden voorstelt en dat de kans, dat minstens één van deze mogelijkheden gerealiseerd wordt, dus gelijk aan 1 is.

Axioma 3 is niets anders dan de somregel.

Bovengenoemd axiomastelsel is opgesteld door Kolmogorov.¹⁾

Als men toelaat, dat de verzameling E oneindig kan zijn, dan is nog een vierde axioma nodig, dat inhoudt, dat de somregel ook voor een aftelbare hoeveelheid disjuncte verzamelingen juist is. We zullen van dit axioma geen gebruik maken.

We gaan nu de kansregels E , C , P_1 en P_2 uit de axioma's afleiden.

De verzameling van elementen, die tot E en niet tot a behoren (het complement van a t.o.v. E), schrijven we $-a$.

Stelling 1. $P(a) + P(-a) = 1$.

Bewijs. Dit volgt uit de somregel (axioma 3) en axioma 2.

Stelling 2. $P(a) \leq 1$.

Bewijs. Dit volgt uit stelling 1 en axioma 1.

Hiermede zijn de regels E en C bewezen.

De produktregel P_1 biedt meer moeilijkheden. Deze regel zegt, dat $P(a \cap b) = P(a) \cdot P_a(b)$. Hierin komt een symbool, $P_a(b)$, voor, dat in het mathematische systeem nog niet is opgetreden en dus eerst gedefinieerd moet worden. Het spreekt vanzelf, dat de volgende definitie een onmiddellijke oplossing geeft voor het bewijs van P_1 .

Definitie. Als $P(a) \neq 0$, dan is

$$P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)}.$$

Formeel is dit volkomen correct en ik zou zelfs niet weten, hoe deze voor sommige lezers wel wat gordiaans doorgehakte knoop op andere wijze losgemaakt zou moeten worden. Toch voelt men zich wel wat behaaglijker, als de definitie iets uit-

¹⁾ A.N. Kolmogorov, Foundations of the Theory of Probability, New York, 1950, p. 2.

voriger toegelicht wordt. Laten we daartoe eerst opmerken, dat de axiomatische kanstheorie in wezen niets anders is dan maattheorie. Om nu $P_a(b)$, de kans dat b zal intreden, als we aannemen, dat a reeds ingetreden is, te bepalen, moeten we een herwaardering van de maten uitvoeren. Omdat we ervan uitgaan, dat a reeds ingetreden is, moeten we ons nu beperken tot verzamelingen, die een deel van a zijn, en dus neemt a de rol over van E . Aan a wordt nu het getal 1 toegekend. Het ligt voor de hand, dat we de verhouding van de maten van deelverzamelingen van a hetzelfde kiezen als aanvankelijk het geval was. De oorspronkelijke maat van $a \cap b$ zal zich dan verhouden tot de oorspronkelijke maat van a als de nieuwe maat van $a \cap b$ tot de nieuwe maat van a . De nieuwe maat van $a \cap b$ is het getal, dat we aan $a \cap b$ toevoegen, als we a de maat 1 toekennen. Dit is dus de kans op b , als we aannemen, dat a ingetreden is. Deze kans stelden we voor door $P_a(b)$. Onze evenredigheid wordt dus

$$P(a \cap b) : P(a) = P_a(b) : 1.$$

En deze evenredigheid levert inderdaad

$$P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)}.$$

Uiteindelijk moet men dit hele verhaal echter niet au sérieux nemen; het dient alleen om de gegeven definitie van $P_a(b)$ iets plausibeler te maken.

Ten slotte de regel P_2 . Deze zegt: als a en b onafhankelijk van elkaar zijn, dan is $P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$. Of iets scherper:

Stelling 3. Als $P_a(b) = P_{-a}(b)$, dan is $P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$.

Bewijs. Onderstel, dat $P(a) \neq 0$ en $P(-a) \neq 0$. Dan is

$$P_a(b) \cdot P(a) = P(a \cap b),$$

$$P_{-a}(b) \cdot P(-a) = P(-a \cap b).$$

Dus, omdat $P_a(b) = P_{-a}(b)$,

$$\frac{P(a)}{P(-a)} = \frac{P(a \cap b)}{P(-a \cap b)}.$$

Nu is volgens axioma 3

$$P(a \cap b) + P(-a \cap b) = P(b).$$

Dus is in verband met stelling 1

$$\frac{P(a)}{1 - P(a)} = \frac{P(a \cap b)}{P(b) - P(a \cap b)},$$

waaruit volgt

$$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b).$$

Hiermee is ook P_2 bewezen. Kolmogorov slaat echter een gemakkelijker weg in. Hij definieert: men noemt a en b onderling onafhankelijk, als $P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$. Hij hoeft P_2 dan niet meer te bewijzen, omdat deze definitie P_2 automatisch geldig maakt. Formeel is dit eenvoudiger. Het heeft bovendien het voordeel, dat we ons van de restrictie $P(a) \neq 0$ en $P(\neg a) \neq 0$, zonder welke $P_a(b)$ en $P_{\neg a}(b)$ geen betekenis hadden, kunnen losmaken. Omdat deze definitie sommigen onplezierig aandoet, heb ik hier een minder fraaie weg gevolgd om hetzelfde resultaat te bereiken.

We hebben achtereenvolgens een fysische en een mathematische kanstheorie geschetst. Er rest ons nu nog de brug tussen deze te slaan en zo beide in zekere zin tot een geheel te verenigen. Een formeel systeem is opgebouwd door middel van grondelementen, waarvan de betekenis in het midden gelaten wordt. Deze grondelementen zijn hier E en P . Iedere interpretatie van E en P , die zodanig geschiedt, dat de axioma's in geldige oordelen overgaan, kunnen we een mogelijke interpretatie van het formele systeem noemen. Een dergelijke interpretatie heeft de eigenschap, dat alle oordelen van het formele systeem in geldige oordelen overgaan. We verkrijgen een dergelijke interpretatie b.v. door voor E een vierkant met zijden 1 te kiezen en voor $P(a)$, waarin a een deel van het vierkant is, de oppervlakte van a te kiezen. Een interpretatie, die voor ons hier uiteraard van meer belang is, is de volgende. Kies voor E het geheel van eindsituaties, die uit een gegeven beginsituatie kunnen voortkomen, en voor $P(a)$ de kans op het optreden van een resultaat, dat tot een deelverzameling a van E behoort. Ongeacht welke van de hierboven genoemde fysische kansdefinities men kiest, steeds krijgt men een mogelijke interpretatie van de formele kanstheorie. De oordelen van de formele kanstheorie gaan dus steeds over in geldige fysische kansoordelen. Hiermee is aangetoond, dat het formele systeem aan de verwachtingen voldoet te kunnen worden opgenomen in een fysische kanstheorie.

Nog één slotopmerking. Het zal misschien verbazing gewekt hebben, dat een fysische kansdefinitie gegeven is, de frequentie-definitie, die in de praktijk slechts uiterst zelden (voor zover mij bekend alleen in de levensverzekeringspraktijk) gebruikt wordt. Dit doet niets ter zake. Relevant is alleen, dat een aanvaardbare definitie gegeven wordt, die een kanstheorie mogelijk maakt. Dat deze kanstheorie dan resultaten oplevert, die het gemakkelijker mogelijk maken kansen te bepalen dan direct op grond van de definitie, kan slechts verheugend worden genoemd. Het pleit niet tegen de oorspronkelijke definitie, zonder welke we met het gehele onderwerp niet hadden kunnen starten.

DE VOORTBEWEGING VAN EEN PROJECTIEL IN DE ATMOSFEER II *)

door

Dr. W. BEVELANDER

Leraar aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda

6. De invoering van de eenheidswetten.

Zoals reeds eerder werd opgemerkt, kwam omstreeks 1900 de gedachte naar voren om voor $f(V)$ een formule te vinden, die voor het gehele snelheidsgebied geldig was, een z.g. *eenheidswet*.

Siacci schreef bij zijn derde methode, verschenen in 1896, voor de luchtkracht:

$$W = 1000i \cdot \frac{(2R)^2}{g} \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot f(V) \quad (14)$$

waarin ⁹⁾:

$$f(V) = 0,2002V - 48,05 + \sqrt{(0,1648V - 47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442V(V - 300)}{371 + \left(\frac{V}{200}\right)^{10}} \quad (15)$$

Deze formule gold tot snelheden van 1200 m/sec. Voor een ogief met een kromtestraal van 2 kaliber moest worden gesubstitueerd: $i = 0,896$.

Krupp bracht in 1912 eveneens een eenheidswet.

In Frankrijk verscheen in 1918 de eerste methode van Garnier, Haag, Marcus (G.H.M.I) ¹⁰⁾. De ballistische coëfficiënt was hier geschreven in de vorm:

$$c = c_0 e^{-\lambda v} = \delta_0 \frac{(2R)^2}{P} i e^{-\lambda v} \quad (16)$$

Vergelijken we (16) met (6), dan zien we dat o.a. de constante

*) Deel I werd afgedrukt in Euclides 35, blz. 145.

⁹⁾ [1] pg. 29, zie literatuuropgave aan het eind van dit artikel.

¹⁰⁾ [1] pg. 88 e.v.

factor δ_0 in de noemer is verdwenen, terwijl voor δ is geschreven:

$$\delta = \delta_0 e^{-h\gamma} \quad (17)$$

De e -macht, waarin $h = 10^{-4}$ en γ de hoogte boven zeeniveau in meters, geeft de mate aan, waarin het luchtgewicht afneemt met de hoogte. De bijbehorende luchtweerstandswet zag er als volgt uit ¹¹⁾:

$$\log \left(\frac{f(V)}{V^2} \right) = \log \left\{ 0,2550 + \frac{\sqrt[4]{1 + 0,0392 \left(\frac{V'}{10} \right)^8}}{27226 + 494V'^2} \cdot \arctg V \right\} + \frac{V^H - 6}{10^4}, \quad (18)$$

waarin $V' = \frac{V - 330}{50}$ en V^H is V in hectometers per seconde.

Deze wet was het resultaat van experimenten op de proefvelden van de „Commission d'Expériences de Gâvre”. Tot snelheden van 1200 m/sec berustte het resultaat op waarnemingen, terwijl later een extrapolatie werd uitgevoerd, om de geldigheid uit te breiden tot snelheden van 2000 m/sec. Bij deze methode behoorden tabellen, waarin o.a. de waarde van $f(V)$ als functie van V , onmiddellijk was af te lezen.

In de ballistiek gold steeds de opvatting, dat bij een methode tabellen opgesteld moesten worden, wilde men deze praktisch toepassen. In deze tabellen kon men dan de waarden van de voorkomende functies en grootheden direct aflezen. Het toch al omvangrijke rekenwerk werd hierdoor zo veel mogelijk beperkt. Door de recente ontwikkelingen in de elektronische rekenapparatuur is deze eis minder noodzakelijk geworden, daar in zulke machines een geheugen aanwezig is, waarin formules kunnen worden opgeborgen en bij de berekeningen gebruikt. Bovendien is de snelheid, waarmede deze rekentoestellen de berekeningen uitvoeren, zeer groot.

Zetten we de beide genoemde eenheidswetten grafisch uit, dan geeft het verloop niet direct aanleiding tot bijzondere opmerkingen.

Anders wordt dit als we een kromme tekenen voor $\frac{f(V)}{V^2}$ tegen V .

In fig. 2 zien we dit verloop voor de eenheidswet van Siacci ¹²⁾ en in fig. 3 voor de luchtweerstandswet, behorende bij de methode

¹¹⁾ [1] pg. 29.

¹²⁾ [1] pg. 40.

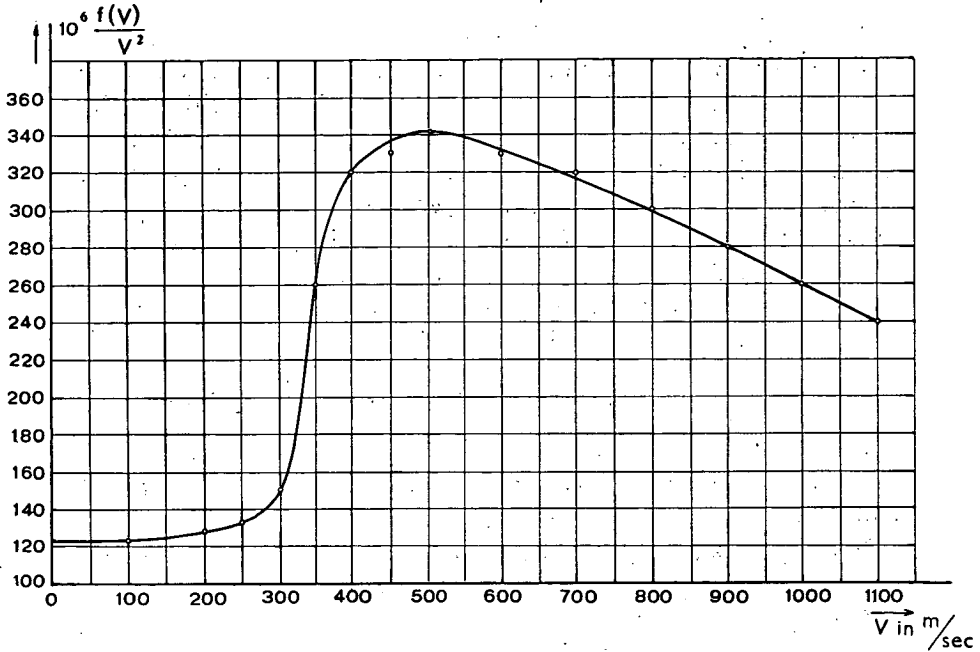


Fig. 2. Het verloop van $10^6 \frac{f(V)}{V^2}$ als functie van V voor de eenheidswet van Siacci.

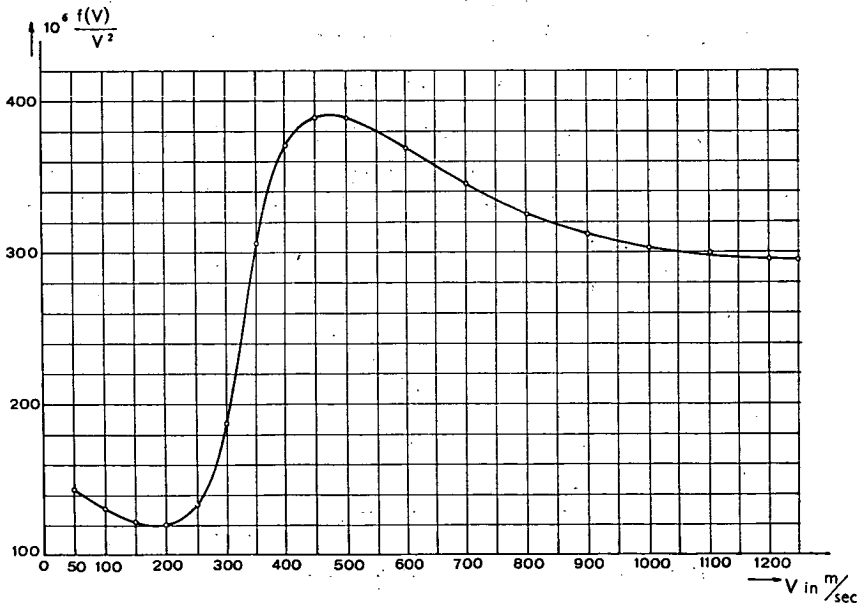


Fig. 3. Het verloop van $10^6 \frac{f(V)}{V^2}$ als functie van V voor de luchtweerstandswet van G.H.M.I.

G.H.M.I. Bij Siacci loopt de kromme aanvankelijk horizontaal, hetgeen er op wijst, dat $f(V)$ hier zuiver evenredig is aan V^2 . Beide krommen bevatten bij de geluidssnelheid een buigpunt (het buigpunt van Mayevski), hetgeen in de figuren slecht zichtbaar is. We kunnen het verloop van de krommen als volgt interpreteren. Stellen we voor een ogenblik $f(V) = V^n$, waarbij we de weerstandsgraad n van punt tot punt veranderlijk denken. Als de kromme gaat stijgen zal $n > 2$ worden. Deze toename van n gaat door tot het buigpunt, waarna we een afname krijgen. In het maximum (z.g. maximum van Hojel) bij een snelheid van ongeveer 500 m/sec is wederom $n = 2$. Daarna gaat de grafiek voor $\frac{f(V)}{V^2}$ dalen, hetgeen wil zeggen, dat $n < 2$ wordt. In fig. 3 is voor een snelheid van 1200 m/sec de kromme weer horizontaal, zodat de n hier weer gelijk aan 2 is te stellen.

Vergelijken we dit gedrag van de weerstandsgraad met dat bij de zonewetten, die reeds eerder vermeld werden, dan zien we een grote overeenkomst. Hier springt wel het voordeel van de eenheidswetten boven de zonewetten in het oog, n.l. dat de weerstandsgraad continu verandert en niet sprongsgewijze.

We zullen de weerstandsgraad nog iets nader gaan beschouwen¹³⁾ en denken ons daartoe $\log f(V)$ grafisch uitgezet als functie van $\log V$. Voor het geval van $f(V) = V^n$, vinden we:

$$\log f(V) = n \log V \quad (19)$$

Nu is $\log V = 0$ voor $V = 1$, waarbij echter $\log f(V)$ nog een, zij het geringe, waarde heeft. Voor n constant vinden we een rechte lijn, die de verticale as dus boven de oorsprong zal snijden (zie fig. 4).

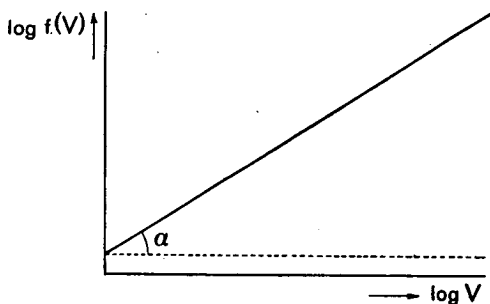


Fig. 4. $\log f(V)$ als functie van $\log V$, voor n constant.

¹³⁾ [1] pg. 35 e.v.

We zien tevens in fig. 4, dat $\operatorname{tg} \alpha = n$. Beschouwen we de zone-wetten, met een spronggewijze verandering van n , dan gaat de rechte over in een getrapte lijn, waarbij op de zonegrenzen een sprong aanwezig is, zoals schematisch in fig. 5 is aangegeven.

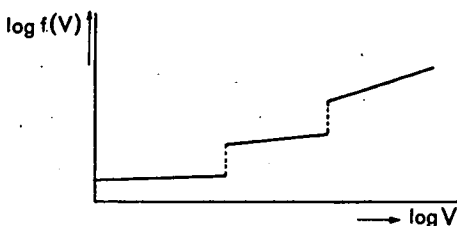


Fig. 5. $\log f(V)$ als functie van $\log V$, als n spronggewijze verandert.

De getallenfactoren, die bij de zonewetten zijn ingevoerd, zorgen er nu voor dat de sprong ongedaan gemaakt wordt en we een gebroken lijn krijgen. Voor de eenheidswetten zagen we reeds, dat de weerstandsgraad continu verandert. Op dezelfde wijze grafisch voorgesteld, zullen we een vloeiende kromme vinden, van een vorm, zoals ongeveer in fig. 6 is aangegeven en met voor de geluidssnelheid een buigpunt.

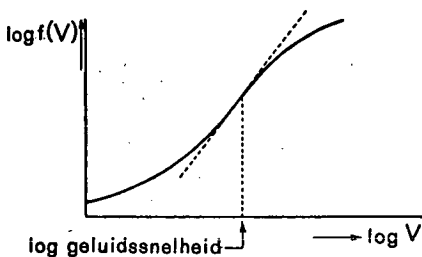


Fig. 6. $\log f(V)$ als functie van $\log V$, voor de eenheidswetten.

De weerstandsgraad n is nu de afgeleide functie van deze kromme dus:

$$n = \frac{d[\log f(V)]}{d[\log V]} = \frac{d[\ln f(V)]}{d[\ln V]} = \frac{\frac{f'(V)}{f(V)} dV}{\frac{dV}{V}} = \frac{V f'(V)}{f(V)} \quad (20)$$

Vullen we ter controle even in $f(V) = V^n$, dan levert (20):

$$\frac{V \cdot f'(V)}{f(V)} = \frac{V \cdot n V^{n-1}}{V^n} = n,$$

waaruit blijkt, dat de hier gedefinieerde weerstandsgraad overeenkomt met die we bij de zonewetten invoerden. Bepalen we nu met formule (20) de n als functie van V , dan kunnen we de weerstandsgraad grafisch uitzetten.

Dit is geschied in fig. 7 voor de eenheidswet van Siacci en in fig. 8 voor de luchtweerstandswet van G.H.M.I. Bij Siacci ligt het maximum van n in de buurt van 300 m/sec, bij G.H.M.I juist bij de geluidssnelheid. Naar mijn mening is laatstgenoemde wet beter aangepast aan de werkelijkheid. Nu valt hierbij op te merken, dat G.H.M.I een methode is voor het berekenen van banen voor luchtdoelgeschut, hetgeen in kleine stappen geschiedt. Siacci baseert zich echter op banen voor landdoelkanonnen, waarbij de baan in zijn geheel beschouwd wordt. Daar de geluidssnelheid op grotere hoogte afneemt, zou dit enigermate het feit kunnen verklaren, dat bij Siacci het genoemde maximum verschoven is naar een punt, dat lager ligt dan de geluidssnelheid op zeeniveau.

7. De moderne ontwikkeling van de wetten betreffende de luchtweerstand.

Het onderzoek naar vorm en gedrag van de functie $f(V)$, toonde een kritische waarde dezer vorm aan. Zowel de zonewetten, als de eenheidswetten lieten zien, dat de functie $f(V)$ in de buurt van de geluidssnelheid sterk veranderde, m.a.w. dat de weerstandsgraad toenam. Daar de geluidssnelheid evenredig is met de wortel uit de absolute temperatuur, zal deze snelheid, met toenemende hoogte in de atmosfeer, afnemen. Zo is in droge lucht van 0° C en 76 cm kwikdruk de voortplantingssnelheid van het geluid 331,3 m/sec, voor 15° C is deze 340,3 m/sec. Op een hoogte van 12 km waar dus ongeveer de stratosfeer begint, is de temperatuur -55° C en de snelheid van het geluid 296,1 m/sec.

De Fransman Darrieus wees er in 1922 in ballistische kringen op, dat het juister zou zijn om niet uitsluitend de snelheid als veranderlijke te kiezen, doch de snelheid gedeeld door de geluidssnelheid, dus het z.g. *getal van Mach*. We zouden dan beter $f(V)$ kunnen vervangen door $f(b)$, waarin $b = \frac{V}{\nu}$, het getal van Mach voorstelt en ν de geluidssnelheid ter plaatse waar het projectiel zich bevindt.

Uitgaande van dit principe bepaalde men in Frankrijk op experimentele wijze een nieuwe luchtweerstandswet, waaraan de naam van Dupuis verbonden werd. Deze wet vond toepassing bij de tweede methode van Garnier, Haag, Marcus (G.H.M.II)

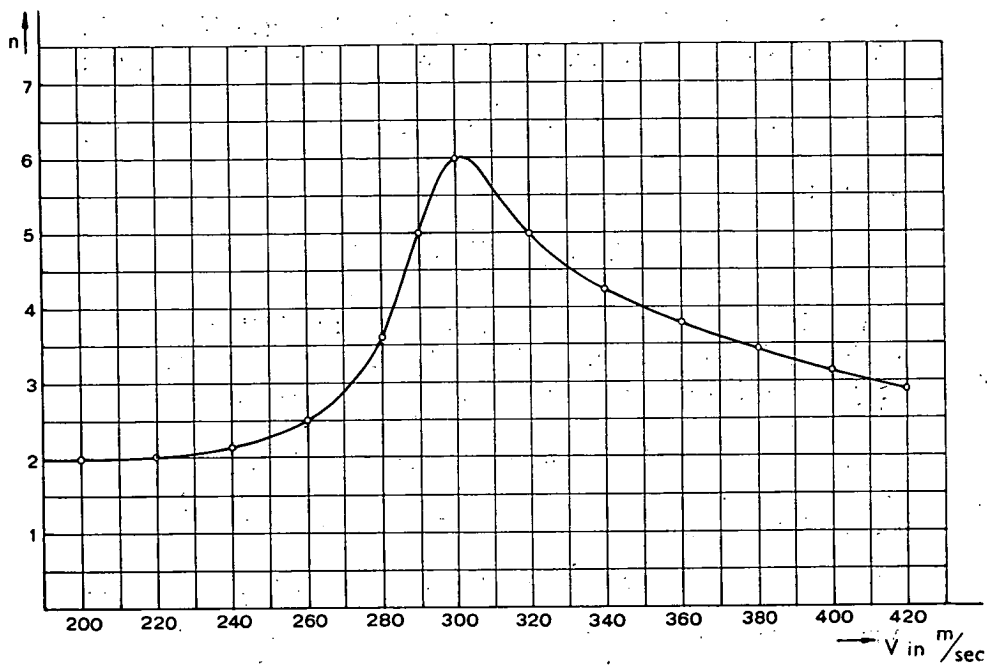


Fig. 7. De weerstandsgraad n , als functie van V , voor de eenheidswet van Sacci.

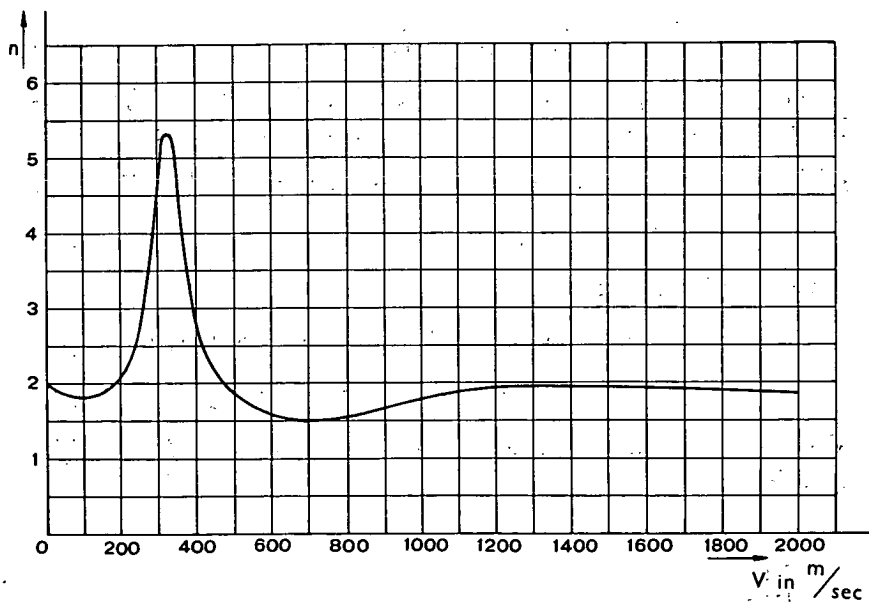


Fig. 8. De weerstandsgraad n , als functie van V , voor de luchtweerstandswet van G.H.M.I.

en werd als onderdeel van deze methode in 1929 gepubliceerd ¹⁴⁾. Voor de vertraging t.g.v. de luchtweerstand werd geschreven:

$$C_0 \frac{H}{H_0} f(b) \quad (21)$$

waarin:

$$C_0 = \delta_0 \cdot \frac{(2R)^2}{P} \cdot \frac{2R}{h} \cdot i \quad (22)$$

Wat betreft de betekenis van de symbolen: C_0 is de ballistische coëfficiënt op zeeniveau, H de luchtdruk ter plaatse waar het projectiel zich bevindt en H_0 de luchtdruk op zeeniveau, h is de lengte van het ogief in meters. Vergelijken we (21) en (22) met (16), dan zien we dat de hoogte afhankelijkheid van de luchtweerstand nu wordt weergegeven door de luchtdruk, terwijl dit bij G.H.M.I geschiedde door een e -macht, waarin de hoogte in de exponent voorkwam. Verder wordt in (22) de factor $\frac{2R}{h}$ ingevoegd, waardoor voor een slank projectiel met een spitse neus reeds direct een kleinere c_0 optreedt. De voor diverse projectielmodellen te kiezen waarden voor i , zullen diensgevolge een iets kleinere variatie gaan vertonen.

Voor $f(b)$ stelde men ¹⁵⁾:

$$f(b) = f_1(b) - j f_2(b) \quad (23)$$

Hierin treedt de j als nieuwe parameter op, die evenals de i , samenhangt met de vorm van het projectiel. Voor $b \geq 1$ is:

$$f_1(b) = 96000 \{(b - 0,5) + 0,16596(b - 2,05) \cdot 10^{-5,5(b-1,94)^2}\} \quad (24)$$

$$f_2(b) = 96000 \quad (25)$$

Voor $b \leq 1$ geldt:

$$f_1(b) = 96000 \{0,1399976 + 0,36 \cdot 10^{-5,8(1-b)}\} \quad (26)$$

$$f_2(b) = 96000 \{0,35 + 0,65 \cdot 10^{-5,8(1-b)}\} \quad (27)$$

Voor $b = 1$ geven de beide functies van $f_1(b)$ resp. $f_2(b)$ gelijke waarden.

¹⁴⁾ [5]

[1] pg. 131 e.v.

¹⁵⁾ [1] pg. 34/35.

Zetten we $f(b)$ grafisch uit, dan blijkt voor het punt $b = 1$ een discontinuïteit aanwezig te zijn (fig. 9) ¹⁶⁾.

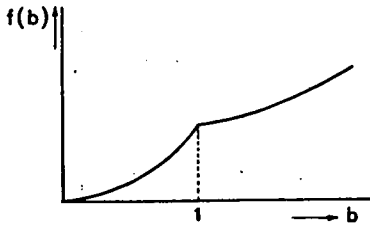


Fig. 9. Grafiek voor $f(b)$ als functie van b , voor de wet van Dupuis.

We definiëren de weerstandsgraad, in navolging van (20), nu als volgt ¹⁷⁾:

$$n = \frac{d[\log f(b)]}{d[\log b]} = \frac{d[\ln f(b)]}{d[\ln b]} = \frac{\frac{f'(b)}{f(b)} db}{\frac{db}{b}} = \frac{bf'(b)}{f(b)} \quad (28)$$

In fig. 10 hebben we n uitgezet als functie van het getal van Mach.

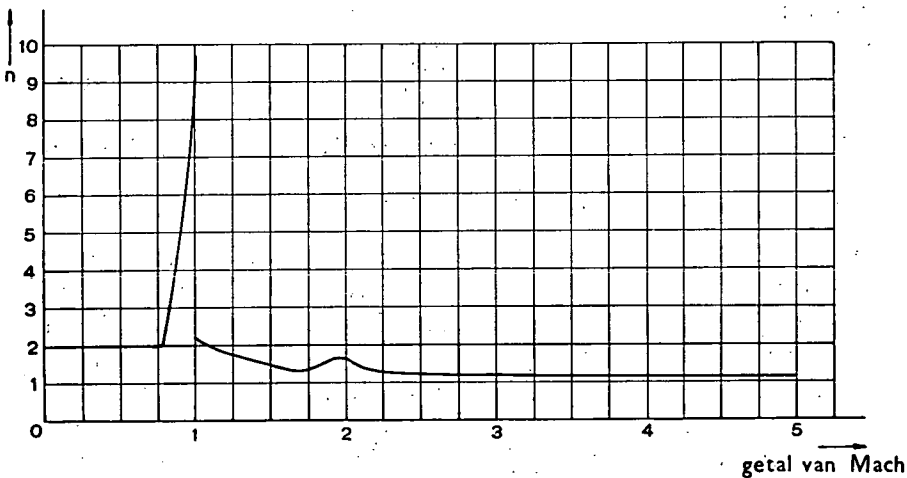


Fig. 10. De weerstandsgraad n , als functie van het getal van Mach, voor de wet van Dupuis.

We zien dat $n = 2$ tot $\text{Mach} = 0,75$. Daarna stijgt n en wordt 9,7 bij $\text{Mach} = 1$, om dan plotseling te dalen tot even boven 2 en

¹⁶⁾ [1] pg. 36.

¹⁷⁾ [1] pg. 38.

vervolgens langzaam tot iets meer dan 1 af te nemen. Bij Mach = 2 zien we tijdelijk een kleine toename van n . Het verloop van de weerstandsgraad doet bij Mach = 1 enigszins onbevredigend aan. Het ontstaan van de sprong is te verklaren, doordat de luchtweerstandswet in twee delen is gesplitst, die bij Mach = 1 aan elkaar sluiten. Toch rijst de vraag of een en ander wel juist is.

8. De luchtweerstandswetten in Engeland en Amerika.

Voor de luchtweerstand stelden we:

$$W = \frac{P}{g} c f(V) \quad (29)$$

Hierin was dus steeds de ballistische coëfficiënt c principieel onafhankelijk van de snelheid gedacht. We kunnen echter ook schrijven:

$$W = \frac{P}{g} c_1 V^2 \quad (30)$$

Dan is c_1 zeer zeker snelheidsafhankelijk. Uit (29) en (30) leiden we af:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{f(V)}{V^2} \quad (31)$$

Daar c constant is, geeft c_1 (de z.g. „dragfunction”) hetzelfde verloop te zien als $\frac{f(V)}{V^2}$. In Engeland en Amerika heeft men steeds vastgehouden aan de voorstelling volgens formule (30), met dien verstande, dat men ook daar er toe is overgegaan om c_1 niet meer op te geven als functie van V , maar afhankelijk van het getal van Mach: $c_1(b)$. Het zal duidelijk zijn, dat voor ieder projectiel dan een aparte dragfunction bepaald moet worden.

Echter heeft men in Engeland nog in 1940 een luchtweerstandswet¹⁸⁾ gepubliceerd, waarbij de snelheid als variabele is gekozen (fig. 11).

9. Het luchtgewicht.

Voor de berekening van projectielbanen neemt men een z.g. *standaardatmosfeer* aan. Deze bestaat hieruit, dat men een keuze doet voor druk, temperatuur en vochtigheid op zeeniveau en dan,

¹⁸⁾ [6]

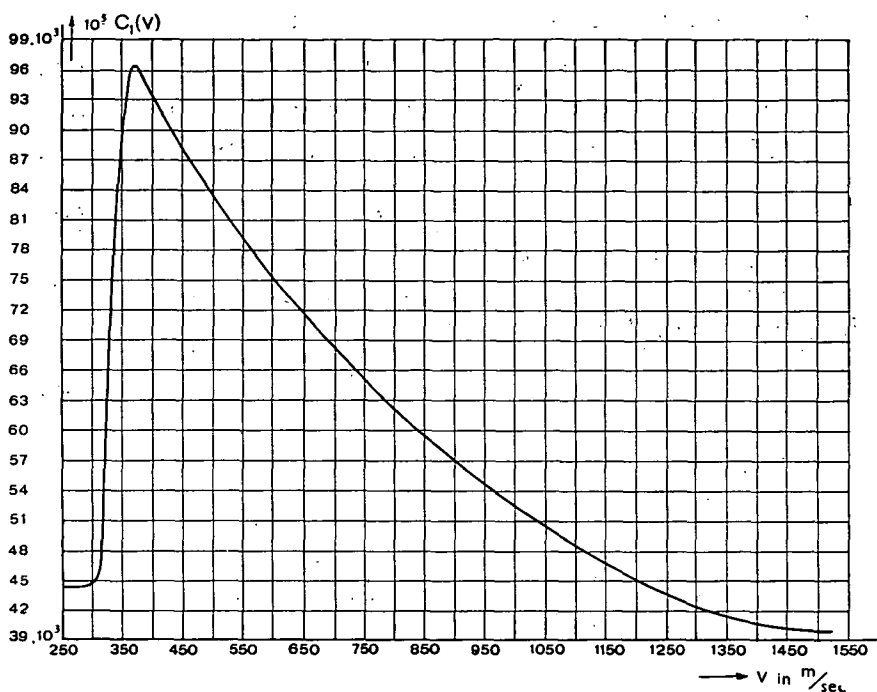


Fig. 11. De „dragfunction” $C(V)$, als functie van de snelheid, voor de Engelse luchtweerstandswet 1940.

met behulp van de gewichtsformule uit de natuurkunde, een luchtgewicht, uiteraard op zeeniveau, berekent. We vinden hiervoor de formule ¹⁹⁾:

$$\delta_0 = \frac{4,65}{T_0} (H_0 - \frac{3}{8} f_0 E) \quad (32)$$

Hierin is δ_0 het luchtgewicht in kg/m^3 , T_0 de absolute temperatuur, H_0 de druk in cm kwikdruk, f_0 de vochtigheidsgraad en E de verzadigingsdruk van waterdamp in cm kwikdruk, bij de gekozen temperatuur. De index 0 geeft aan dat de waarden op zeeniveau gekozen zijn.

In de tweede plaats moet men bij de standaardatmosfeer een formule aannemen, die het verloop van dit luchtgewicht als functie van de hoogte aangeeft. Verder wordt bovendien de lucht in rust gedacht.

Nemen we aan dat de temperatuur bij stijging in de troposfeer constant blijft, dan kunnen we, uitgaande van de toestands-

¹⁹⁾ [1] pg. 42.

vergelijking voor een ideaal gas, afleiden ²⁰⁾:

$$\delta_y = \delta_0 e^{-\frac{\delta_0}{p_0} y} \quad (33)$$

De druk p_0 moet hier genomen worden in kg/m^2 en de hoogte y in meters. Een formule uit de praktijk, die min of meer bij (33) past, luidt:

$$\delta_y = \delta_0 e^{-hy} \quad (34)$$

waarin $h = 10^{-4}$ (zie form. 16).

Gaan we er echter van uit, dat de temperatuur lineair met de hoogte afneemt, dan vinden we:

$$\delta_y = \delta_0 \left(1 - \frac{\lambda y}{T_0}\right)^{\frac{1}{R\lambda} - 1} \quad (35)$$

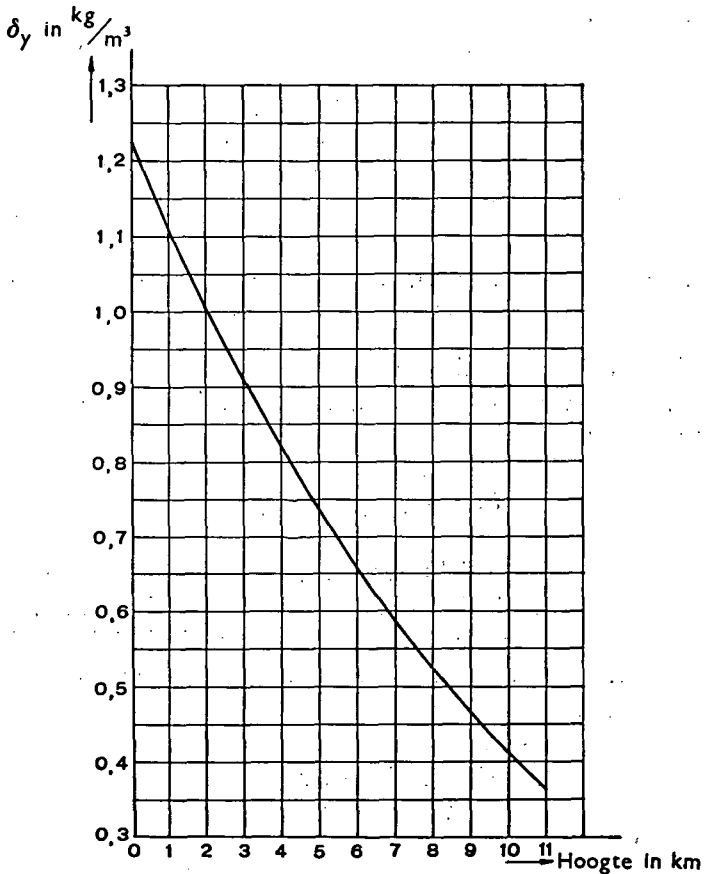


Fig. 12. Het luchtgewicht, als functie van de hoogte voor de I.C.A.N. standaardatmosfeer.

²⁰⁾ [1] pg. 44 e.v.

Nu is λ de *temperatuurgradiënt*, dus het bedrag waarmee de temperatuur afneemt bij stijging van 1 meter. R is verder de gasconstante voor lucht. Een hierbij passende formule, die in de praktijk van de ballistiek wordt gebruikt, luidt:

$$\delta_y = \delta_0 e^{-h(1+av)y} \quad (36)$$

Hierin is $a = 0,13 \cdot 10^{-4}$.

Een veel gebruikte standaardatmosfeer is de I.C.A.N. (International committee of aeronautical navigation). Hier kiest men op zeeniveau 760 mm kwikdruk, 15°C en 0 % vochtigheid, waaruit met (32) een luchtgewicht $\delta_0 = 1,2255 \text{ kg/m}^3$ wordt berekend. Men neemt verder aan dat de troposfeer op 11 km hoogte eindigt en de temperatuur daar $-56,5^\circ \text{C}$ bedraagt. Hieruit volgt voor de temperatuurgradiënt $\lambda = 0,0065^\circ \text{C/m}$. Bovendien is $R = 29,29$. We vinden dan met (35):

$$\delta_y = 1,2255 \left(1 - \frac{0,0065 y}{288} \right)^{4,255} \quad (37)$$

Grafisch is deze formule uitgezet in figuur 12.

LITERATUUROPGAVE

- [1] W. Bevelander - Uitwendige ballistiek, diss. Leiden 1954.
- [2] Th. J. van Buuren - Bijdrage tot de leer der ballistica, diss. Leiden 1879.
- [3] C. Cranz - Lehrbuch der Ballistik (1925), deel I.
- [4] M. Garnier - Calcul des trajectoires par arcs successifs (1918). Deze publikatie was het resultaat van theoretische onderzoeken en van experimenten, gedaan door de „Mission de balistique des tirs aeriens”.
- [5] M. Garnier - Calcul des tables et abaque de tir (Méthode GHM), Mémorial de l'artillerie française 1929, 1er fascicule, pg. 3 e.v.
- [6] Ballistic tables, part 1 (Engeland).

HET AFGEKNOTTE PARALLELEPIPEDUM VAN ALBERT DÜRER

door

J. WICHERS

(Amsterdam)

De bekende kunsthistoricus Dr. H. Schmidt Degener maakte mij opmerkzaam op een belangwekkend lichaam, dat voorkomt op de gravure „Melencolia I” van Albert Dürer. Aan een verslag van een lezing van Dr. S. D. over deze gravure ontleen ik:

„De „Melencolia”, Duitslands beroemdste gravure, heeft eeuwenlang onder onjuiste interpretaties geleden. Reeds de woorden „Melencolia I” worden doorgaans onjuist gelezen: er staat niet „Melancholie no. 1”, maar „Melancholie, ga heen!”. Ten tweede werd het magisch cijfervierkant nooit volledig ontcijferd. De volledige inhoud is: „Aan de dierbare nagedachtenis van Albert, 1514”.

Het zware steenblok is geen kristal, maar een mathematisch zuiver geconstrueerd lichaam, dat drie soorten van evenwicht kan bezitten. Het landschap vertoont geen komeet, maar het einde van de zondvloed. In zijn suggestieve, spontane spreektrant onthulde de heer Schmidt Degener de geheimen van Dürer’s constructieve geest, zoals deze in de gravure werkzaam is. Het bleek, dat de jonge vrouw, parodie van de gotische muze, een geldkist onder haar rok verbergt, tussen de sleutels en de drie geldbuidels in. Dergelijke driefouden komen in deze gravure minstens twintig keer voor. Er zijn bijvoorbeeld drie kryptogrammen, drie verborgen A’s, de letter van Dürer’s signatuur. Aan de hand van dergelijke driefouden voerde spreker de toehoorders door de rijke en diepzinnige beeldspraak, door de ineengevlochten allegoriën heen, todat alle details zinnebeeldig verklaard waren en er een eenheid ontstond.”

„Het steenblok”, aldus deelde de heer S. D. mij mede, „is het symbool van de nieuwe kunst der Renaissance: de leer der verhoudingen en der wetenschappelijke perspectief. Ten aanzien van het evenwicht moeten ook hier drie mogelijkheden zijn, al naar de verhouding van de ribben van het niet-afgeknotte lichaam”.

Men kan het bedoelde lichaam als volgt ontstaan denken: van een rechthoekig parallellepipedum A'B'C'DE'F'G'H' (Fig. 1) verwijdert

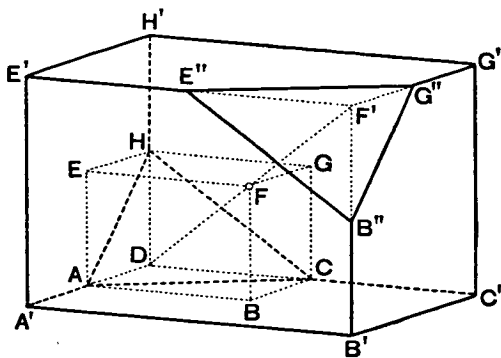


Fig. 1

men de viervlakken $DACH$ en $F'G''E''B''$, waarbij A, C, H, E'', B'', G'' de middens zijn resp. van $\overline{A'D}, \overline{C'D}, \overline{H'D}, \overline{F'E'}, \overline{F'B'}$ en $\overline{F'G'}$. Het overblijvende lichaam wordt op een horizontaal vlak geplaatst met het vlak ACH . Onder welke voorwaarde is er nu evenwicht?

Het zwaartepunt F van het afgeknotte lichaam valt samen met dat van het parallellepipedum. Er zijn nu drie mogelijkheden:

1. de projectie van F op het steunvlak ligt op een van de zijden van driehoek ACH ; er is dan labiel evenwicht;
2. de projectie ligt binnen driehoek ACH ; het evenwicht is stabiel;
3. de projectie ligt buiten de driehoek; er is dan geen evenwicht.

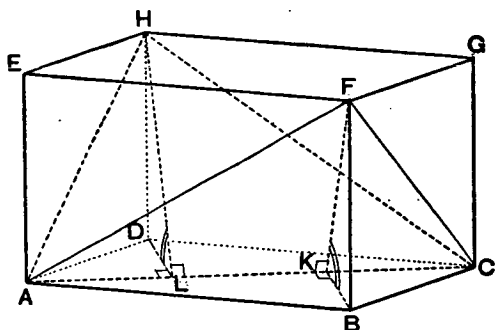


Fig. 2

De vlakken ACH en CAF maken gelijke hoeken met vlak $ABCD$. Lig de projectie K van F op vlak ACH op de rechte AC (fig. 2), dan staan de genoemde vlakken loodrecht op elkaar, zodat hoek FKB gelijk is aan 45° . Is nu $\overline{A'B'} = a$, $\overline{B'C'} = b$ en $\overline{C'G'} = c$,

dan geldt:

$$\overline{BF} = \overline{BK} = \frac{1}{2}c.$$

In driehoek ABC is

$$\frac{1}{\overline{BK}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{BC}^2},$$

dus:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{labiel evenwicht}).$$

Ligt K binnen driehoek ACH, dan is de hoek tussen de vlakken ACH en ABCD groter dan 45° ; dan is $\overline{FB} > \overline{KB}$, dus:

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{stabiel evenwicht});$$

ligt K buiten driehoek ACH, dan is de hoek tussen de vlakken ACH en ABCD kleiner dan 45° en dus:

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{geen evenwicht}).$$

(Driehoek ACH uit figuur 2 heeft enige merkwaardige eigenschappen, bijvoorbeeld: $\text{tg } A \cdot \text{tg } C = 2$, $\cos H = \cos A \cdot \cos C$, het hoogtepunt ligt in het midden van de hoogtelijn uit H. Verschillende malen komt deze driehoek voor bij de eindexamenopgaven voor trigonometrie: 1926 : 1, 1938 : 1, 1942 : 2).

BOEKBESPREKING.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Meetkunde voor M.M.S.*, deel II, Uitg. P. Noordhoff N.V., Groningen, 1959, 137 blz., f 4,50.

Het aantrekkelijk uiterlijk van dit boek doet het beste voor de inhoud vermoeden. Maar die blijkt toch wel erg op ouderwetse leest geschoeid te zijn. Wanneer men op blz. 8 de „projectiestellingen in de scheefhoekige driehoek” ontmoet, één voor een zijde tegenover een scherpe hoek en één voor een zijde tegenover een stompe hoek, volledig onder woorden gebracht in lange zinnen, en dadelijk daarop de stelling van Stewart, dan voelt men neiging om nog eens naar het jaartal op het titelblad te kijken. Maar daar staat toch heus 1959. Ook verderop blijkt, dat de schrijvers het menen te moeten zoeken in het kennen van een groot aantal stellingen en bijzonderheden. Meer nog dan bij deel I komt de vraag op, of het zinvol is op deze wijze meetkunde te onderwijzen aan m.m.s.-ers. Een vraag, die m.i. ontkennend beantwoord moet worden.

R. Troelstra

DE EINDEEXAMENPROGRAMMA's VOOR WISKUNDE

Gepubliceerd zijn het KB van 29-1-1960, *Staatsblad* 54 en het K.B. van 29-1-1960, *Staatsblad* 59 waarbij gewijzigd zijn de reglementen en de programma's van de eindexamens der hogere burgerscholen B en der gymnasia.

Behalve technische kwesties, die de regeling van het examen betreffen en enkele kleine veranderingen in het programma van een paar andere vakken, worden bij deze Koninklijke Besluiten geregeld de programma's voor de eindexamens in de wiskunde aan de genoemde scholen.

Voor de H.B.S.-B wordt voortaan (met ingang van 1 januari 1961) het examenprogramma voor de wiskunde als volgt gelezen:

- a. de algebra;
- b. de goniometrie;
- c. de analytische meetkunde;
- d. de stereometrie.

Het examen omvat de leerstof, die volgens het algemeen leerplan, bedoeld in artikel 20 der middelbaar-onderwijswet, voor wat de algebra betreft, moet worden behandeld in de eerste tot en met vijfde klasse van de openbare hogere burgerscholen B, en voor wat de goniometrie, de analytische meetkunde en de stereometrie betreft, moet worden behandeld in de vierde en de vijfde klasse van die hogereburgerscholen.

In het reglement lezen we verder, dat voor de wiskunde, twee cijfers zullen worden toegekend: één voor de afdeling algebra en goniometrie en één voor de afdeling analytische meetkunde en stereometrie.

De duur van het mondeling examen van elk van de beide afdelingen zal voortaan 20 minuten zijn; ook die van het mondeling examen in mechanica is op 20 minuten gebracht.

Voor het Gymnasium wordt voortaan (met ingang van 1 januari 1961) het examenprogramma voor de wiskunde (afdeling VI) als volgt gelezen:

A. voor de A-leerlingen:

- a. de algebra, die volgens het leerplan, bedoeld in artikel 7 der hoger-onderwijswet, in de vijfde en zesde klasse A der openbare

gymnasia moet worden behandeld, benevens een der overige, volgens dat leerplan voor die klasse gekozen onderwerpen.

b. het andere volgens dat leerplan voor die klassen gekozen onderwerp met dien verstande dat, indien herhaling van de planimetrie en stereometrie als onderwerp zijn gekozen, deze steeds als onderdeel b worden geëxamineerd.

B. voor de B-leerlingen:

a. de algebra, die volgens het leerplan, bedoeld in artikel 7 der hoger-onderwijswet, in de eerste tot en met vierde klasse en in de vijfde en zesde klasse B der openbare gymnasia moet worden behandeld;

b. de stereometrie, die volgens dat leerplan in de vijfde en de zesde klasse B der openbare gymnasia moet worden behandeld;

c. de goniometrie en de analytische meetkunde, die volgens dat leerplan in de vijfde en de zesde klasse B der openbare gymnasia moeten worden behandeld.

De duur van de examens is voor de A-leerlingen voor beide onderdelen op 20 minuten gebracht en voor de B-leerlingen voor ieder van de drie onderdelen op 2 uur en 30 minuten schriftelijk en 25 minuten mondeling.

Deze bepalingen bevatten geen verrassingen. De programma's zijn gelijk aan de leerplannen, die bij K.B. van 30-9-1958, Staatsblad 431, geregeld werden (Zie Euclides 34, III, november 1958). Voor de H.B.S.-B betekent dit een einde aan de merkwaardige toestand, die sinds 1937 bestond, n.l. een divergentie tussen leer- en examen-program; voor het gymnasium betekent het dat nauwkeuriger dan voorheen het programma vastgelegd is.

Wij zijn daarom zeer verheugd. We kunnen nu ons nieuwe programma ook aan het examen gaan toetsen en zijn werkelijk benieuwd hoe de opgaven in 1961 er uit zullen zien.

In beide Koninklijke Besluiten vinden we een overgangsbepaling voor kandidaten, die in de jaren 1959 en 1960 niet met gunstig gevolg het eindexamen aflegden. Zij kunnen in 1961 het examen in de wiskunde afleggen volgens de nu geldende bepalingen.

Indien dus bij het schriftelijk examen der H.B.S.-B of van het gymnasium-B in 1961 een vraagstuk wordt opgegeven dat betrekking heeft op de differentiaal- en integraalrekening, zullen deze kandidaten kunnen kiezen tussen dat vraagstuk en een ander, speciaal voor hen op te geven vraagstuk, dat wordt ontleend aan dat gedeelte van de leerstof voor de algebra of de goniometrie,

waarin het K.B. van 30-9-1958 (wijziging leerplannen gymnasium en H.B.S.) geen verandering heeft gebracht.

Deze kandidaten zullen, voor zover zij het eindexamen H.B.S. afleggen, voorts in 1961 de gelegenheid krijgen alsnog examen af te leggen in de beschrijvende meetkunde in plaats van in de analytische meetkunde. Daartoe zullen aan die leerlingen in het schooljaar 1960—1961 ten hoogste vijftientig lessen in beschrijvende meetkunde kunnen worden gegeven (niet in officiële rooster; gehonoreerd als vervanguren). De leerlingen die van deze regeling gebruik wensen te maken (er is geen verplichting: zij kunnen ook analytische meetkunde kiezen) behoeven de lessen in de analytische meetkunde niet te volgen. Een kandidaat, die bij het examen in 1961 gebruik wil maken van één der bijzondere regelingen ten aanzien van de algebra en de meetkunde, is niet verplicht tevens van de andere bijzondere regeling gebruik te maken.

Hierboven gaven wij alle wijzigingen aan die betrekking hebben op de examens in de wiskunde. Voor de volledige teksten mogen wij verwijzen naar de genoemde Staatsbladen.

AMK.

BOEKBESPREKING

J. H. Weinacht, *Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme*; 116 blz., 45 figuren, D.M. 8,80; 1958; Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

De auteur tracht leraren en aanstaande leraren van zijn langjarige onderwijservaring te laten profiteren door aan de hand van een serie van 45 voorbeelden de methodische hulpmiddelen op te sporen die bij het oplossen van wiskundige vraagstukken aanbeveling verdienen en een aantal heuristische principes voor het onderwijs aan te geven.

Het boek bespreekt bijna uitsluitend oplossingstechniek; zonder naar een systematische ordening van de diverse aspecten te streven die aan het oplossen van wiskundevraagstukken zijn verbonden, tracht de auteur in de eerste plaats de door hem gekozen oplossing te rechtvaardigen en de belangstelling voor het gekozen voorbeeld te verlevendigen.

Hij verklaart dat de oplossing van een wiskundevraagstuk zich i.h.a. in de volgende fasen voltrekt:

1. Das Verstehen der Aufgabe, die klare Erfassung und Herausarbeitung der einzelnen Forderungen.
2. Der Entwurf eines Gedankenganges, eines Lösungsplanes in seinen Grundzügen.
3. Die tatsächliche Durchführung desselben in allen seinen Einzelheiten.
4. Eine Schlussbetrachtung bestehend in einem Rückblick und einem Ausblick.

De titels der opvolgende paragrafen luiden:

- a. Erstellung und statische Erkundigung einer Figur;
- b. Die dynamische Erkundigung einer Figur;

- c. „Ändere das Problem ab!“;
 d. „Löse geometrische Probleme auf algebraischem Wege“.

Imponerend is dit allemaal niet. Denkpsychologische fundering ontbreekt. Het gaat vrijwel uitsluitend om een aantal oplossingsmethoden. Jammer is dat bijna alle voorbeelden op vrij hoog niveau liggen. Een analyse juist van eenvoudiger problemen lijkt me voor het door de auteur beoogde doel meer aanbevelenswaard.

Maar ik geloof wel, dat er ook in ons land leraren zullen zijn die van enkele der gegeven voorbeelden met genoegen kennis zullen nemen.

Joh. H. Wansink

B. Coster, Dr. A. van Dop en Dr. H. Streefkerk, *Nieuwe Algebra voor de Onderbouw*, Deel II. 112 blz. Ing. f 2,50; geb. f 3,25. Uitg. J. B. Wolters, Groningen, 1958.

Het deeltje bevat de stof voor de tweede klas H.B.S. volgens het nieuwe programma en wel in een behandeling, die geïnteresseerde, zelfstandige studie bij de leerling schijnt te veronderstellen. Natuurlijk behoeft dat aan de bruikbaarheid voor klassikaal onderwijs geen afbreuk te doen, al is er reden tot twijfel aan het nuttig effect van al dat uitspinnen der stof in aanloopjes en voorbeeldjes. Niettemin zit dat overal goed in elkaar.

Nuttig lijkt me de behandeling van verschillende vergelijkingen, gezien vanuit de rol, die het getal nul daarin speelt (hoofdst. II). Het hoofdstuk wortelvormen (III) is vrij heterogeen, de uitvoerige uiteenzetting maakte het mij moeilijk de lijn te zien. Terloops: wanneer de schrijvers zeggen dat $\sqrt{-4}$ „onbestaanbaar of imaginair” is, bedoelen ze dan deze woorden als wiskundige begrippen te introduceren, of mag de leerling ze in hun algemene betekenis verstaan? Het eerste heeft geen enkele zin, op het laatste is tegen, dat ze dan geenszins synoniem zijn. Ik zou er de voorkeur aan geven $\sqrt{-4}$ een zinloze uitdrukking te noemen.

De behandeling van functies, grafieken en ongelijkheden is uitstekend. Het slothoofdstuk behandelt de afgeronde getallen, naar mijn idee steeds (en ook hier) een moeilijk onderwerp.

Haren (Gron.)

J. Koksma

Dr. D. N. van der Neut en Drs. A. Holwerda, *Meetkunde met de beginselen der Goniometrie*, deel I, 11e druk, 1958. J. B. Wolters, Groningen. Ing. f 1,75; geb. f 2,25. Idem. idem. deel II, 10e druk, 1959. Ing. f 2,10; geb. f 2,75.

Het eerste deeltje is nog niet aan het nieuwe leerplan aangepast, maar bevat wel een inlegvel waarop aangegeven staat wat geheel of gedeeltelijk kan worden overgeslagen. Een gedeelte van het boekje kan bij eerste behandeling vervangen worden door het „Werkschrift” van dezelfde auteurs.

Jarenlang heb ik deze boekjes gebruikt. Het grote voordeel is, dat door het gebruik van veel tekens de omvang van een bewijs beknopt kan worden gehouden, zodat het met één oogopslag is te overzien. Jonge leerlingen zal men het gebruik moeten leren, door nauwkeurig eerst de stof vrij te behandelen, daarna het behandelde met de klas na te lezen in het boek, onder verwijzing naar de plaats waar het op het bord staat.

Het tweede deeltje is wel aangepast en nu door de uitgever ook in een fleuriger gewaad gestoken. Hier is toegevoegd een hoofdstuk over: Stellingen en Bewijzen. Hierin is een paragraaf over Meetkundige Plaatsen opgenomen. Los van dit boek

zou ik de opmerking willen maken of het niet mogelijk zou zijn deze benaming geheel over boord te zetten en gewoon te spreken van „Volledige Verzameling?” Voor aanvangende amateurs m.i. begrijpelijker.

Overigens goede en duidelijke werkjes, zoals ook door de vele herdrukken bewezen wordt.

J. F. Hufferman

Lietzmann. *Experimentelle Geometrie*. 111 bladz. 1959, prijs D.M. 12,60 B. G. Teubner, Stuttgart.

Bij het doornemen van het boekje vraagt men zich af: voor wie heeft de schrijver het eigenlijk bestemd? Misschien voor beoefenaars van de nomografie?

Mascheroni (1750—1800), die de schrijver voor de geest heeft gehad toont in zijn werk: *Meethkunde van de passer* zie vooral Dr. S. C. van Veen-Noordduyns wetenschappelijke reeks nr. 37) dat alle constructies van Euclides ook met een passer alleen kunnen worden uitgevoerd, terwijl Steiner (1832) ons laat zien, dat deze constructies ook verricht kunnen worden door gebruik te maken van een liniaal en één enkele vaste cirkel met een gegeven middelpunt in het vlak van tekening (H. de Vries: *Historische Studiën* dl I Artikel II, p. 84). De schrijver vestigt er de aandacht op, dat deze constructies bijzonder vlot kunnen verlopen als men hierbij gebruik maakt van een *biliniaal*, hetgeen de Vries ook wel in een noot had kunnen vermelden.

De schrijver staat vrij lang stil bij de trisectie van een hoek (zie liever van Veen, Bunt: *van Ahmes tot Euklides* of *Ontwakende wetenschap* van van der Waerden) zonder daarbij gebruik te maken van de historische *neusis*: hij verricht de constructie van Archimedes met een *trisectiepasser van Kilp*, ook met een passende winkelhaak. Ook vergeet de schrijver niet de bekende „constructies” van bogen van ellipsen, hyperbolen en parabolen te vermelden. Hij vermoedt, dat het boek de docent „eine Fülle von Anregungen zu moderner anschaulicher Ausgestaltung des Geometrie-unterrichts” kan verschaffen.

Omdat er nog veel onderwerpen worden aangesneden, waaronder ook enkele die aan puzzels doen denken en velen daarvoor interesse hebben, is het niet onmogelijk, dat de schrijver hierin niet geheel teleurgesteld wordt.

Okken

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Singel 13, Hoogezand.

VAKANTIECURSUS MATHEMATISCH CENTRUM

Ook dit jaar zal weer een vakantiecursus voor leraren V.H.M.O. worden georganiseerd door het M.C. en wel op 29 en 30 augustus a.s. in het Geologisch Instituut te Amsterdam. Als centraal thema werd gekozen: „*Het wiskundeonderwijs in het V.H.M.O. van morgen*”, terwijl de te behandelen onderwerpen luiden:

- Wat is het doel van het wiskundeonderwijs in het V.H.M.O.?
- Welke gevolgen voor het V.H.M.O. brengt de moderne ontwikkeling van de wiskundige wetenschappen met zich mede?
- Welke gevolgen brengt de veranderde plaats der wiskunde in de maatschappij met zich mede?
- Welke verwachtingen en desiderata zijn praktisch voor verwezenlijking vatbaar? Nadere berichten zullen tijdig worden bekend gemaakt.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

27. Wat is het kleinste getal, dat gehalveerd wordt, wanneer het voorste cijfer achteraan wordt gezet?

28. A ontmoet B.

A: Hoe gaat het met je drie kinderen?

B: Uitstekend, dank je.

A: Hoe oud zijn ze ook weer?

B: Het produkt van hun leeftijden, in gehele jaren, is 72.

A: Dan weet ik het nog niet.

B: De som van hun leeftijden is juist mijn huisnummer.

A: Ik weet je huisnummer, maar de leeftijden van de kinderen nog niet.

B: De oudste heeft juist een nieuwe fiets gekregen.

A: Dan weet ik het!

Weet u het ook?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

25. A legt een geldstuk midden op de tafel. Voorts legt hij na elke beurt van B precies zo'n geldstuk als B juist gelegd heeft op de plaats die radiaal symmetrisch ligt t.o.v. de plaats die B koos.

Verondersteld is dus, dat de tafel radiaal symmetrisch is en dat het symmetrie-centrum tot de tafel behoort.

26. Alfabetisch: acht, achtendertig,, zeventig.

Prof. Dr. O. Bottema zond ons de volgende elegante oplossing van nr 22: Neem de coördinaatassen evenwijdig aan de zijden van het vierkant, de oorsprong in het middelpunt. Als a in (x, y) aankomt is b , uit symmetrieoverwegingen in $(y, -x)$.

Daar de raaklijn van de baan van a langs ab moet vallen, heeft men $\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y}{y-x} \dots (1)$.

Voert men poolcoördinaten in: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ dan wordt (1); $\frac{dr}{d\varphi} = -r$ waaruit volgt $r = Ce^{-\varphi}$, waarbij C bepaald wordt door het gegeven dat de kromme door het startpunt van a gaat. De baan van a is dus een logaritmische spiraal; zij nadert asymptotisch tot 0. De kromme maakt een constante hoek met de voerstraal. Dat ziet men ook rechtstreeks uit (1):

$$\text{Als } \frac{dy}{dx} = \tan \alpha \text{ dan is } \tan \alpha = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{1 + \tan \varphi}{1 - \tan \varphi} = \tan \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right).$$

De raaklijn aan de baan maakt dus steeds een hoek van 45° met de lijn naar O.

Ook de heer J. C. G. Nottrot maakte ons er opmerkzaam op, dat het punt a een logaritmische spiraal beschrijft.

Dr. H. STREEFKERK

Nieuw meetkundeboek

Voor M.O. en V.H.O.

★

deel I, 4e druk f 3,25
120 blz., met 163 fig.

deel II, 3e druk f 3,50
121 blz., met 99 fig.

deel III, 2e druk f 3,75
109 blz., met 75 fig.

P. Noordhoff N.V. - Groningen

P. WIJDENES
Dr. P. G. VAN DE VLIET

Algebra en financiële rekenkunde voor h.b.s.-A

8ste druk, 125 blz., f 3,25
antwoorden f 1,—

★

Logaritmen en rentetafels *Tafel G*

6e druk, 103 blz., geb. f 2,75

Voor gebruik op H.B.S.-A, handels-
scholen en voor akte-studie handels-
wetenschappen.

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Uw steun wordt ingeroepen voor



„BIJSTAND 3”

(o.m. Bejaarden- en Jeugdzorg)

4 juni - 16 juli 1960

voor H.B.S.-B en Gymnasium-β:

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

door

Dr. D. J. E. Schrek
m.m.v. H. Pleysier

2e druk ing. f 3,90, geb. f 4,60

Bij het voorbereiden van deze
nieuwe druk is rekening gehouden
met de nadere toelichting, die de HH.
Inspecteurs inmiddels met betrek-
king tot het nieuwe leerplan en het
eindexamen hebben gegeven.
Tevens kon worden voldaan aan
enkele wensen, die door de Nomen-
clatuurcommissie in haar onlangs
verschenen rapport zijn geuit.

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Zojuist verschenen:

Dr J. H. Raat

WERKSCHRIFT GEOMETRISCHE OPTICA

f 1,90

De tekeningen en constructies van dit werkschrift doorlopen in 48 pagina's alles wat men bij de **geometrische optica** in de eerste ronde natuurkunde bij het VHMO en op de kweekscholen pleegt te behandelen. Gebruik van dit werkschrift geeft een aanzienlijke tijdsbesparing en verstrekt de leerling een helder, zelfgemaakt overzicht van het onderwerp geometrische optica.

Dr. H. Lindeman - Drs. G. H. Frederik

LEERBOEK DER NATUURKUNDE

Deel IA		in voorbereiding; volgorde van verschijnen: IA (sept. '60), II, IB
Deel IB		
Deel II		

Deel III, Elektriciteit, Atoom- en Kernfysica

4e druk, 286 blz. met talloze fig. . . . ing. f 6,50

Dit boek is een volledige omgewerkte en gemoderniseerde uitgave van deel III van de reeks leerboeken voor natuurkunde van Nathans-Lindeman. Het bevat de leerstof over Elektriciteit (2e ronde) en Atoom- en Kernfysica, zoals deze is aangegeven in de „Examenlijst Natuurkunde”, gepubliceerd in Faraday (23, 143-150, 1954) en de aanvullingen daarop. Behalve vele vragen in de tekst is aan het slot van het boek een vraagstukkenverzameling opgenomen, die nauw aansluit aan de behandelde leerstof.

N. Quint Gzn. - P. A. van der Harst

NATUURKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Deel I, 14e druk, herzien door J. Zeeman

708 vraagstukken, 4 tabellen ing. f 2,50

Deel II in voorbereiding

De opzet is gewijzigd door een indeling, die meer aansluit op de groepen, waarin de leerstof Natuurkunde voor de H.B.S.-B is verdeeld. Het giorgi-stelsel is toegepast, terwijl ook de andere stelsels voor zover ze in het dagelijks leven voorkomen, aan bod komen.
Het eerste deeltje bevat de grondbeginselen, en voornamelijk mechanica vraagstukken, geschikt voor gymnasium B.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

