

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

VIII - 1 MEI 1960

INHOUD

Prof. Dr. H. Freudenthal: Logica als Methode en als Onderwerp 241

Prof. Dr. F. van der Blij: Vectoren in de Wiskunde . . . 257

Boekbespreking 256, 270

Kalender 271

Recreatie 272

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Singel 13, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

LOGICA ALS METHODE EN ALS ONDERWERP¹⁾

door

Prof. dr. H. FREUDENTHAL

Utrecht

Het begin van mijn lezing over „logica en nog wat” zal wel moeten lijken op een eerste meetkundeles in de eerste klas. Want ik mag niet veronderstellen, dat u weet wat logica is. Het programma KV kende geen onderdeel „logica”, wat nauwelijks kon verbazen bij een programma, dat van meer dan 80 jaren geleden dateert. (Wel verbazingwekkend is het ontbreken van dit onderdeel in het programma Wiskunde M.O., dat van onze tijd heet te zijn.) Maar ook als u doctorandus bent, moet ik aannemen, dat u het doctoraal hebt behaald in een tijd, toen logica nog niet tot de college- en tentamenonderwerpen behoorde.

Misschien zult u protesteren. Want niet weten wat logica is — het klinkt haast als „niet weten, hoeveel tweemaal twee is”, en zoiets neemt een wiskundeleraar niet. Maar om de vergelijking dan maar door te trekken: het kan best, dat iemand de uitkomst van twee maal twee kent en zelfs van heel wat ingewikkelder sommetjes, en dat hij niettemin nimmer iets van rekenkunde heeft gehoord. Iemand kan een voortreffelijk rekenaar wezen en toch nog nimmer hebben opgemerkt, dat $a + b = b + a$ is, ook al heeft hij deze wet duizenden malen toegepast. Aan de rekenkunde is hij dan in elk geval niet toe. Ik vertrouw, dat u als wiskundelaren logisch kunt redeneren, dat u het dag in dag uit doet, met groter gemak en correcter dan anderen, die geen wiskunde hebben gestudeerd. Men bedrijft echter logica niet door logisch te redeneren, maar door over het logisch redeneren te peinzen.

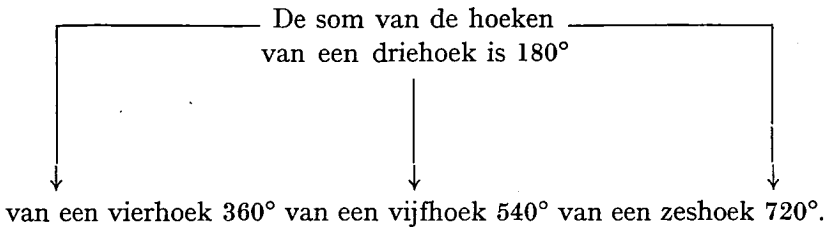
Als u deze lezing als een les in logica wilt beschouwen, dan begint zij voor u, om met van Hiele te spreken, op het nulde niveau. Aan voorbeelden zal ik u de context van het woord logica duidelijk maken.

Ik citeer uit klassegerepreken, die u in het proefschrift van Dieke van Hiele-Geldof²⁾ kunt vinden:

¹⁾ Voordracht weekend-conferentie van de wiskunde werkgroep W.V.O, november 1959.

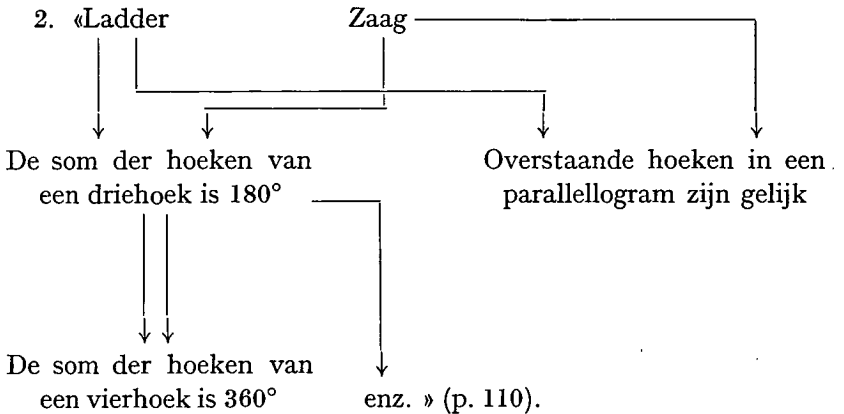
²⁾ titel: De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.

1. «Ik schrijf nu het volgende op het bord. De getallen geven jullie mij, en tevens vertel je mij, hoe je er aan komt.



Pl. Wat zouden die pijltjes betekenen? Je ziet het ook wel eens in een geschiedenisboek of in een familieroman.

Pp. 28. Die onderste drie volgen uit die er boven staat. » (p. 100).



3. «Pp. 32. Met regelmatige vijfhoeken is een vlak niet te vullen. Pl. Dan weet ik nog niet veel van de andere: Hoe zit het daar dan mee?

Pp. 34. Niet met iedere vijfhoek is een vlak te vullen. » (p. 100).

In het eerste stuk wordt een logische term gebezigd (namelijk „volgen uit”), maar er wordt geen logica in bedreven, evenals de volzin „deze twee lucifers zijn even lang” een meetkundige term (even lang), maar geen meetkunde behelst. In het tweede stuk wordt de leerling echter een eigenschap van de relatie „volgen uit” en het in het vervolg bezigen van deze eigenschap gesuggereerd. Ik bedoel de eigenschap

„als $p \rightarrow q$ en $q \rightarrow r$, dan $p \rightarrow r$ ”,

en terwijl ik deze eigenschap voor u in zulke algemene termen formuleer, heb ik het terrein van de logica betreden.

Het derde stuk is een voorbeeld voor het verschil tussen

„niet alle x hebben de eigenschap F ”
 en „alle x hebben de eigenschap niet- F ”,

waarmee elk goed taalgebruiker vertrouwd is, ook al komt hij niet verder, dan dit verschil in concrete gevallen op te merken ¹⁾).

(Dit sluit niet uit, dat in een veel gebruikt meetkundeboekje beweerd wordt „dat twee driehoeken niet congruent zijn, als ze de drie hoeken gelijk hebben”).)

U ziet, hoe in dit stadium van het wiskunde-onderwijs wel logische termen gebruikt en ook in hun eigenschappen en verschillen gekend worden, dat echter op deze termen geen nadruk wordt gelegd, laat staan dat hun eigenschappen en verschillen worden geformuleerd en in definities worden vastgelegd. Geleidelijk zal de leraar de logische begrippen wel bewust maken — in welke mate, met hoeveel nadruk en hoe scherp geformuleerd, zal elk voor zichzelf moeten beslissen. Met deze behoefte aan een bewustmaking der logische begrippen houden de boekjes min of meer rekening, maar vaak op een minder juiste manier. De schrijvers realiseren zich vaak niet, dat zij een ongelukkig figuur slaan, als zij begrippen formeel trachten te definiëren, die niet formeel kunnen worden gedefinieerd. Het is een onjuiste instelling, alles te willen definiëren en, als er geen goede definitie te vinden is, een slechte te geven. Een term, waarvan men als leerling de betekenis in een klasgesprek kan doen beseffen, heeft zich nog niet te lenen voor een definitie door welgevormde gedrukte volzinnen.

In de traditionele didactiek is het expliceren van logica iets dat onlosmakelijk aan de meetkunde vast zit. Hiervan getuigen tal van boekjes. Zelfs een rapport uit de laatste tijd, dat leiding moet geven aan wiskundeonderwijs en wiskundeleraar, zoals Program for college preparatory mathematics (College Entrance Examination Board 1959; met Appendices) geeft zich geheel aan deze traditie over. Hoe diep de idee geworteld is, dat logica in de meetkundeles thuishoort kan men zien, wanneer in de algebra kwesties worden behandeld, zoals de equivalentie van vergelijkingen en ongelijkheden. Dit bij uitstek logische onderwerp, wordt zoveel mogelijk in de beperkte sfeer van de algebra der vergelijkingen en ongelijkheden gehouden, en men vermijdt zoveel mogelijk, het te doen begrijpen vanuit de equivalentie van uitspraken — uitspraken niet alleen omtrent ver-

¹⁾ Voetnoot. Bij middelbare examens komt men geregeld kandidaten tegen, die dit verschil nog nooit hebben opgemerkt. Ik bedoel: goede kandidaten. Zulke "high-brow"-vragen stel je natuurlijk niet aan middelmatige kandidaten.

gelijkingen en ongelijkheden, maar omtrent alles en nog wat. Om het iets duidelijker te zeggen: De equivalentie van de vergelijkingen

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

betekent logisch: de uitspraken

$$„x \text{ voldoet aan } 2x^2 - 6x + 4 = 0”$$

$$„x \text{ voldoet aan } x^2 - 3x + 2 = 0”$$

zijn gelijkwaardig, d.w.z. ze hebben tegelijk de waarde waar resp. vals, evenals de uitspraken

„de driehoek ABC is gelijkzijdig”,

„de driehoek ABC is gelijkhoekig”.

Hoe moeten we deze band tussen meetkunde en logica verklaren? Blijkbaar als uitvloeisel van de mening, dat het in de meetkunde niet, maar in de algebra wel zonder logica gaat. In de algebra wordt de leerling van een goed werkend systeem van regels voorzien, om gegeven uitdrukkingen te vervormen met als doel een precies te voorspellen resultaat. In de meetkunde beschikken we niet over een even betrouwbaar systeem van schema's. Het is wel kenmerkend, dat voetangels in de algebra (denkt u maar aan het vermenigvuldigen van vergelijkingen met 0 en van ongelijkheden met negatieve getallen) niet uit de weg worden geruimd door een logische analyse, maar dat zij door nieuwe regels plegen te worden geblokkeerd.

Welke logische onderwerpen plegen in de meetkunde ter sprake te komen! Een ervan heb ik zojuist geraakt. Het staat bekend onder de naam „het omkeren van stellingen”. Stel, bij twee uitspraken p en q doet zich het feit voor, dat altijd als p waar is, ook q waar is. (Bij voorbeeld p is de uitspraak „ x is mens” en q de uitspraak „ x is sterfelijk”.) We zeggen dan $p \rightarrow q$ en vatten dit als een nieuwe uitspraak op. Ten aanzien van twee uitspraken p en q kunnen zich vier gevallen voordoen, die in het schema

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

zijn opgesomd („waar” is aangeduid door 1, „vals” door 0). $p \rightarrow q$ is alleen dan als onwaar te beschouwen, als p waar en desondanks q vals is.

Van de uitspraak „ x is mens” $\rightarrow$ „ x is sterfelijk” geldt niet het

omgekeerde. Algemeen hoeven $p \rightarrow q$ en $q \rightarrow p$ niet samen te gaan. Als dit wel het geval is, zeg ik $p \leftrightarrow q$, en dit geval doet zich voor als p en q steeds tegelijk waar en vals zijn, dus als zij gelijkwaardig zijn. Een andere uitdrukkingswijze voor $p \leftrightarrow q$ is: p dan en slechts dan als q . En nog anders: Als $p \rightarrow q$, dan zeggen we ook: q is een noodzakelijke voorwaarde voor p , en p is een voldoende voorwaarde voor q . (Voor het mens-zijn is het sterfelijk zijn noodzakelijk, maar niet voldoende; voor het sterfelijk-zijn is het mens-zijn voldoende, maar niet noodzakelijk.)

In de meetkunde komen wij stellingen tegen met een samengestelde „gegeven” en „te bewijzen”, die dan op verschillende manieren kunnen worden omgekeerd. Laten we bij voorbeeld t.a.v. vierhoeken $ABCD$ de volgende uitspraken beschouwen:

$$p: AB \parallel CD,$$

$$q: AD \parallel BC,$$

$$r: AB = CD,$$

$$s: AD = BC.$$

We gebruiken de tekens $\wedge$, $\vee$ voor „en” resp. „of”. U weet, dat dan

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (r \wedge s),$$

$$(p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge s),$$

maar dat als $q \wedge r$ waar is, noch p noch s waar behoeven te zijn (hetgeen door voorbeelden wordt aangetoond). Alle mogelijkheden, die zich t.a.v. p, q, r, s , samen kunnen voordoen, zijn dus

p	1	1	0	1	0	0	0	0
q	1	0	1	0	1	0	0	0
r	1	0	1	0	0	1	0	0
s	1	1	0	0	0	0	1	0

Nu een voorbeeld uit een geheel ander gebied, om u te laten zien, dat ondanks traditioneel verschillende terminologie de logica altijd dezelfde is: We beschouwen twee keer differentieerbare functies f en een punt a (inwendig punt van het definitie-interval), en de uitspraken

$$p: f'(a) = 0,$$

$$q: f''(a) > 0,$$

$$r: f''(a) < 0,$$

$$s: f \text{ heeft een maximum in } a,$$

$$t: f \text{ heeft een minimum in } a.$$

Dan geldt

$(s \vee t) \rightarrow p$, $(p \wedge q) \rightarrow t$, $(p \wedge r) \rightarrow s$, maar ook niet meer. T.a.v. p , q , r , s , t zijn net de mogelijkheden

p	0	0	1	1
q			1	1
r			1	1
s	1		0	1
t		1	0	1

uitgesloten (op de vrije plaatsen kan willekeurig 0 of 1 worden neergezet). Alle andere (acht) kunnen zich inderdaad voordoen.

Naast het omkeren is een traditioneel logisch onderwerp in de meetkunde het bewijs uit het ongerijmde. Eigenlijk moest men zich erover verbazen. Want met enig inzicht in het logisch elementaire karakter van de meetkunde zou men zeggen, dat het bewijs uit het ongerijmde overbodig is in de meetkunde zoals ze op school wordt beoefend. Als men dan de boekjes raadpleegt, vindt men dit vermoeden bevestigd. De auteurs schijnen zich verschrikkelijk te hebben ingespannen, om een voorbeeld voor een bewijs uit het ongerijmde op te scharrelen, en ze schijnen met het resultaat zelf niet erg tevreden te zijn. Meestal wordt de ene of andere stelling, die al rechtstreeks was bewezen, nog eens uit het ongerijmde behandeld. U kunt het geval van een bewijs uit het ongerijmde in de boekjes vinden, door in het wilde weg te bladeren en alleen op te letten, waar in een figuur een lijn verschijnt met er een stippellijn vlak naast. In de tekst zult u dan zoiets kunnen lezen als „laten we veronderstellen, dat de lijn niet door P ging” — om deze veronderstelling aanschouwelijk te steunen, is de schrijver met zijn hoofd schuin op het papier gaan liggen, om er een valse lijn in te zien en te tekenen. In het stadium, waarin de leerling nog zwaar worstelt met de problematiek van de verhouding tussen logica en aanschouwing, lijkt me dit een averechtse methode, om het bewijs uit het ongerijmde te illustreren.

Hoe moeilijk het logische probleem van het bewijs uit het ongerijmde is, toont de definitie uit een der boekjes: „Hierbij begint men met alle onderstellingen te maken, die ten aanzien van het „te bewijzen” denkbaar zijn. Al deze onderstellingen worden één voor één onderzocht.” Volgens dit boekje spreekt men dus van een bewijs uit het ongerijmde, als men een stelling omtrent driehoeken bewijst, eerst in de veronderstelling, dat de driehoek scherphoekig, dan voor het geval van rechthoekige driehoeken en tenslotte voor stomphoekige. Natuurlijk noemt men zoiets geen bewijs uit het ongerijmde. Want bij een bewijs uit het ongerijmde introduceert men slechts één

veronderstelling, namelijk die dat het „te bewijzen” vals is. Logisch berust het bewijs uit het ongerijmde op de wet van contrapositie, d.w.z. de gelijkwaardigheid van

$$p \rightarrow q \text{ en } \neg q \rightarrow \neg p$$

($\neg$ betekent „niet”). Natuurlijk is er ook een bewijsmethode zoals in het geciteerde boekje bedoeld. In dat geval moet bekend zijn dat $p \vee q$, en men moet het te bewijzen r zowel uit p als ook uit q kunnen afleiden. De logische formule, die hieraan beantwoordt, is

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)].$$

Ook in het reeds eerder geciteerde Amerikaanse werk is de behandeling van het bewijs uit het ongerijmde onbevredigend. Betekent dit nu, dat deze bewijsmethode dan maar uit het onderwijs moet verdwijnen?

Neen, volstrekt niet. Het zou u zelfs niet lukken, het bewijs uit het ongerijmde te vermoorden. Het zal voor elke afgeslagen kop zeven nieuwe springlevende opsteken. Maar de functie van het bewijs uit het ongerijmde is een totaal andere dan uit boekjes blijkt en ooit kan blijken. Het bewijs uit het ongerijmde is of moet zijn: de uiting van de nog niet aan banden gelegde activiteit van de leerling. Het redeneren uit het ongerijmde is een populaire bezigheid (Jan is thuis, want anders was de deur op het nachtslot), en hoewel niet door eigen klasse-ervaringen geruggesteund, durf ik beweren, dat een leerling, met een probleem aan zichzelf overgelaten, spoedig vanzelf in de redeneertrant zal vervallen van „want als het niet zo was, dan . . .” Gaarne zal ik van u met uw groter ervaringen vernemen of mijn vermoeden klopt.

Het bewijs uit het ongerijmde heeft een voornamelijk heuristische functie. Om u dit te demonstrenen, stel ik u het volgende probleem: Ik teken een kwadratisch rooster in het vlak (d.w.z. de verzameling van de punten met gehele coördinaten op een gewoon assenstelsel). Gevraagd die punten, om welke draaiingen van het vlak mogelijk zijn, die de rooster in zichzelf transformeren. Natuurlijk zult u meteen die punten kunnen aanwijzen: de hoekpunten van de rooster, de middelpunten van de roosterribben en de middelpunten van de roostervierkanten. Maar hoe te motiveren, dat er geen andere zijn? Vanzelf begint u dan met „was er . . .”: Was er een zo’n punt P op een ribbe AB , en was P dichter bij A dan bij B , dan was P dichter bij A dan bij enig roosterpunt, dus dan zou A bij draaiing om P geen punt hebben waar het in over kon gaan. Was er zo’n punt P binnen een vierkant $ABCD$ maar niet op de middelloodlijn van AB . . .”.

Achteraf zult u natuurlijk trachten recht door te steken en de omweg over het ongerijmde te vermijden. Bewijzen uit het ongerijmde staan als het ware in het klad. Maar een meetkundeboekje of een gedoceede les zijn netschrift, en daar staan bewijzen uit het ongerijmde maar voor schut. Dus: wilt u de leerling vertellen, wat een bewijs uit het ongerijmde is, zoek dan geen voorbeelden in boeken, maar betrap de leerling op een indirect bewijs en leg er dan de vinger op.¹⁾

Om u ook aan een voorbeeld uit de algebra te helpen, waar logica te pas komt, schrijf ik de vergelijking

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

op. Leerlingen hebben de neiging, hierop te reageren met

$$x = 1 \quad \text{en} \quad x = 2$$

(waarbij het „en” alleen gesproken, maar niet geschreven wordt). Een leraar, die het hoog opneemt, merkt dan op „ $x = 1$ en $x = 2$ kan niet samen”. Een goed gedresseerde leerling zegt dan: herstel,

$$x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2.$$

De leraar zal dit lesje misschien besluiten met de opmerking: Als je òf bedoelt, schrijf het er dan ook tussen. Ik zou de leraar nog willen toevoegen: Waarom wilt u hem „of” laten schrijven, als er sinds tientallen jaren hiervoor het teken $\vee$ bestaat? U laat hem toch

¹⁾ In de discussie kwamen indirecte bewijzen ter sprake, waarbij een ontkenning $\neg p$ werd bewezen door uit p een tegenstrijdigheid af te leiden. Formeel is zoiets inderdaad een indirect bewijs, maar psychologisch en didactisch is het dat nauwelijks. Want een wiskundig niet geschoolde, die net de woorden „bewijzen” en „ontkenning” heeft leren gebruiken, kan met de woordcombinatie „de ontkenning van . . . bewijzen” nauwelijks enige zin verbinden. Voor hem moet $\neg p$ betekenen „ p weerleggen” en dat geschiedt het meest rechtstreeks (en niet indirect) door uit p een strijdigheid af te leiden.

Verder werd in de discussie de vraag gesteld, of de overgang van „als $PA = PB$, dan ligt P op de middelloodlijn van AB ” naar „als P niet op de middelloodlijn van AB ligt, is $PA \neq PB$ ” niet door indirect bewijs geschiedt. Ik zou zeggen van neen. De overgang geschiedt per contrapositie; deze operatie kan wel als grondslag van het indirecte bewijs worden beschouwd, mist echter de kentekenen van het indirecte bewijs. $p \rightarrow q$ betekent, dat de waarheid van p steeds die van q met zich meebrengt; maar dan is zonder veel redeneerkunst evident, dat de valsheid van q die van p met zich meebrengt. Natuurlijk kan men de zaak ook compliceren door een redenering: Bekend $p \rightarrow q$; veronderstelling $\neg q$; te bewijzen $\neg p$; stel $\neg p$, dus p ; uit het bekende volgt q , in strijd met de veronderstelling, dus $\neg p$. Hierbij worden, om het indirecte bewijs te imiteren, overvloedig veel woorden gebruikt voor iets wat elementair is dan het indirecte bewijs.

Het is wel merkwaardig, dat de meetkunde-boekjes, die zich met het indirecte bewijs bezighouden, de aandacht niet vestigen op de figuur van de contrapositie.

ook niet „wortel uit a kwadraat plus b kwadraat tussen haakjes” schrijven.

Maar hiermede is de kous nog niet af. „ $x = 1$ en $x = 2$ ” is namelijk ook een goed antwoord. De vraag is alleen waarop. Terwijl de wiskundeleraar, als hij meetkunde onderwijst, gaarne op moedertaalkundig terrein beunhaast en er wel op let, dat vraag en antwoord uit hele volzinnen bestaan, heeft hij in de algebra als goede verstaander aan elke onsamenhangende reeks van woorden — ik zou haast zeggen: vloeken — genoeg. Want in de algebra is het toch maar schema wat de klok slaat. Als de leraar $x^2 - 3x + 2 = 0$ opschrijft, weet de leerling, dat hij de x -en, die hieraan voldoen, moet berekenen, en als de vergelijking $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ luidt, is het ook vanzelfsprekend, dat de leerling niet a , maar x „uitrekt”. En in de algebra behandelt ook de leerling de leraar als goed verstaander. „ $x = 1$ en $x = 2$ ” is goed, want de leerling bedoelt ermee: „ $x = 1$ ” is een oplossing en „ $x = 2$ ” is een oplossing. Anders gezegd $[(x = 1) \rightarrow (x^2 - 3x + 2 = 0)] \wedge [(x = 2) \rightarrow (x^2 - 3x + 2 = 0)]$, hetgeen gelijkwaardig is met

$$[(x = 1) \vee (x = 2)] \rightarrow (x^2 - 3x + 2 = 0).$$

De enige aanmerking van leraarskant, die hout snijdt, zou dus zijn: zijn er geen andere oplossingen? Want deze bedoeling wordt pas uitgedrukt in

$$(x^2 - 3x + 2 = 0) \leftrightarrow [(x = 1) \vee (x = 2)].$$

Het woord „algebra” zou in de schoolpraktijk kunnen worden vertaald als „aanwijzing voor het invullen van schema’s — laten we het nog iets krasser zeggen — van voorgedrukte formulieren”. De voorgedrukte tekst staat in het geheugen van de leerling gegrift, die zich ertoe beperkt, neer te schrijven, wat bij het invullen tussen de gedrukte tekst in komt te staan. Stelt u zich voor, dat u hetzelfde gaat doen met een formulier voor kinderbijslag. Het resultaat zal wel lijken op wat u hoort, als u van een telefoongesprek alleen de ene partner beluistert: „Ja ... ja ... neen ... jaaa ... drie ... neen ...”. Een zeer scherpzinnig man kan wellicht uit gebaren en stembuiging opmaken, waar de onhoorbare partner het over heeft. Ik bewonder dan ook elk jaar bij het nazien van het schriftelijk eindexamenwerk de scherpzinnige leraar, die weet, welk voorgedrukt formulier de leerling net aan het invullen was. Want dat is de vloek der algebra: dat er verschillende soorten voorgedrukte formulieren bestaan, en dat de verstandhouding eronder lijdt, als de een meent, dat het over kinderbijslag ging, terwijl de ander aan een girobiljet dacht.

Ook in de meetkunde zijn er van die voorgedrukte formulieren, maar daar werken ze niet zo machinaal, en daar kom je er niet zo ver mee als in de algebra. Dit is een van de redenen, waarom de meetkunde als leerschool der logica in hoger aanzien staat dan de algebra. Een meetkundig bewijs, als het goed is, is een sluitend betoog; een algebrasom is een invuloefening zonder tussentekst. Als uw leerlingen bij hun logische vorming van de algebra evenveel als van de meetkunde willen profiteren, zult u aan een algebrasom dezelfde formele eisen moeten stellen als aan een meetkundig bewijs (en dat is niet eens gek, want vergeet niet: wie een som oplost, is iets aan het bewijzen). Natuurlijk zou het voor de leerling erg vervelend zijn, het in zijn geheugen voorgedrukte formulier woordelijk te reproduceren (en voor de leraar, om dit na te zien). Even vervelend als „wortel uit a kwadraat plus b kwadraat tussen haakjes” neer te schrijven. Gelukkig hoeft dit niet. Want sinds Vieta (plm. 1600) is er een algebraïsche symboliek en sinds Peano (plm. 1900) een logische. Met de grootste klem pleit ik ervoor, dat deze symboliek op school systematisch wordt toegepast. Ik merk tussen haakjes op, dat ik dit pleit al enkele jaren geleden heb verloren (althans voor tenminste één generatie) toen mijn voorstel, om bij de M.O.-examens symbolische logica te vragen, de prullenmand inging.

Na deze algemene beschouwingen kom ik tot de formule

$$[(x^2 - 3x + 2) = 0] \leftrightarrow [(x = 1) \vee (x = 2)]$$

terug. Het is een formule, die voor *alle* x geldt, in tegenstelling met bijvoorbeeld de formule

$$x^2 = 1$$

die slechts voor sommige x geldt. „Alle” en „sommige” heten in de logica kwantoren. Met kwantoren springt de omgangstaal raar om (des te zwaarder weegt de taak van de wiskundige, om er de nodige nauwkeurigheid mee te betrachten). In de volzinnen „In een driehoek is de hoekensom 180° ” en „Teken een driehoek” doelt „een driehoek” eenmaal op alle driehoeken en het andere maal op „er is een driehoek . . .”. Deze slordigheid der omgangstaal kan ook met telwoorden niet worden verholpen: „Twee driehoeken zijn congruent . . .” en „Teken twee driehoeken” plaatsen ons voor dezelfde moeilijkheid: „alle tweetallen van driehoeken” of „er is een tweetal van driehoeken”?

„Voor alle x geldt $F(x)$ ”, betekent

$$F(a) \wedge F(b) \wedge F(c) \wedge \dots,$$

waarvoor ik beknopter zal schrijven

$$\bigwedge_x F(x).$$

„Er is een x , zodat $F(x)$ geldt” betekent

$$F(a) \vee F(b) \vee F(c) \vee \dots;$$

beknoper

$$\vee_x F(x).$$

Laten we het werken met deze symbolen ietwat oefenen. Met xKy bedoel ik: x is kind van y . (Voor variabelen wil ik uitsluitend mensen substitueren.)

$\vee_x \vee_y xKy$: er is iemand, die kind is van iemand.

$\vee_y \vee_x xKy$: er is iemand, die een kind heeft.

$\vee_x \wedge_y xKy$: er is iemand, die kind is van iedereen.

$\vee_y \wedge_x xKy$: er is iemand, waarvan iedereen kind is.

$\wedge_x \vee_y xKy$: iedereen is kind van iemand.

$\wedge_y \vee_x xKy$: iedereen heeft een kind.

$\wedge_x \wedge_y xKy$: iedereen is kind van iedereen.

$\wedge_y \wedge_x xKy$: iedereen heeft iedereen tot kind.

Een ander soort voorbeelden:

$P(x, t)$ betekent: op het ogenblik t pak ik het ding x .

$Z(x, t)$ betekent: op het ogenblik t zie ik het ding x .

$t < t'$ betekent: t is vóór t' .

Hoe schrijven we op:

Ik zie altijd iets.

Soms zie ik niets.

Elk ding zie ik eens een keer.

Als ik iets zie, pak ik het meteen.

Ik pak niets of ik heb het tevoren gezien.

Antwoorden:

$$\wedge_t \vee_x Z(x, t).$$

$$\vee_t \neg \vee_x Z(x, t).$$

$$\wedge_x \vee_t Z(x, t).$$

$$\wedge_t \wedge_x (Z(x, t) \rightarrow P(x, t)).$$

$$\wedge_t \wedge_x \{ \neg P(x, t) \vee \vee_{t'} [(t' < t) \wedge Z(x, t')] \}.$$

Het laatste zou men trouwens ook kunnen interpreteren als

$$\wedge_t \wedge_x \{ P(x, t) \leftrightarrow \vee_{t'} [(t' < t) \wedge Z(x, t')] \}.$$

Misschien zult u zeggen: wat hebben deze uitgekookte voorbeelden met ons wiskundeonderwijs te maken? Ik zal u het antwoord niet schuldig blijven.

Stapelingen van kwantoren „er is” en „alle” zijn de schrik van de jongelui, die de schoolbanken voor de collegebanken verwisselen. Ik herinner u aan de definitie van continuïteit: f heet continu voor

x_0 , indien er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is, zo dat voor alle x uit $|x - x_0| < \delta$ volgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dus

$$\bigwedge_{\varepsilon} ((\varepsilon > 0) \rightarrow \bigvee_{\delta} \{(\delta > 0) \wedge \bigwedge_x [(|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)]\}).$$

Continuïteit zonder meer en uniforme continuïteit vereisen één kwantor $\bigwedge_{x_0}$ meer, die in 't ene geval helemaal in 't begin moet staan en in 't andere geval bij $\bigwedge_x$.

Dit zijn ingewikkelde logische structuren, die nu eenmaal in de moderne wiskunde, speciaal in de analyse onmisbaar zijn. De wiskundestudent moet er zo spoedig mogelijk mee vertrouwd raken. Uitstel geeft niets. Hoe vroeger de student geënt wordt met kwantoren, des te groter is de kans, dat de kwantorenkoorts zal meevallen.

Hoe komt het, dat de schoolwiskunde zulke stapelingen van kwantoren kan vermijden? Deze vraag stelde ik me enkele jaren. Het antwoord heeft mij buitengewoon verrast. Wat bleek? Dat ook de schoolwiskunde zulke gevaarlijke kwantoren-torens kent, en nogwel in de algebra, die logisch simpeler heet te zijn dan de meetkunde. Ik haalde mijn voorbeelden uit de bekende verzameling van 250 opgaven (Euclides 32 (1956/7), 97—152). Algebraboekjes brengen meestal nog veel ingewikkelder materiaal.

Ik citeer 49:

a. Aan welke voorwaarde moeten a en b voldoen, als

$$-x^2 + ax + a + b$$

voor elke waarde van x negatief is?

b. Aan welke voorwaarde moet b voldoen, opdat er waarden van a zullen zijn die aan de gevonden voorwaarde voldoen?

Symbolisch:

$$?_b \bigvee_a \bigwedge_x (-x^2 + ax + a + b < 0).$$

(U ziet hier naast de reeds bekende kwantoren nog een $?_b$, dat natuurlijk betekent: Gevraagd de b met de eigenschap . . .)

Een ander voorbeeld, 69:

a. Bewijs dat het minimum van $x^2 + px + q$ voor geen enkel stel waarden van p en q groter is dan $p + q + 1$.

b. Voor welke waarden van p en q is het minimum gelijk aan $p + q + 1$?

$$\bigwedge_{p, q} \{[\bigvee_x (x^2 + px + q = y) \wedge \neg \bigvee_x (x^2 + px + q < y)] \rightarrow (y > p + q + 1)\}.$$

$$?_{p, q} \{[\bigvee_x (x^2 + px + q = y) \wedge \neg \bigvee_x (x^2 + px + q < y)] \rightarrow (y = p + q + 1)\}.$$

Toch is er een geweldig verschil tussen deze voorbeelden en dat van de continuïteit. De gevaarlijke kwantoren in deze voorbeelden zijn leeuwen zonder tanden. Van de kwantor $\wedge_x$ in

$$\wedge_x (-x^2 + ax + a + b < 0)$$

zijn de tanden getrokken met behulp van de discriminant. De leerling weet machinaal dat bovenstaande uitdrukking gelijkwaardig is met

$$a^2 + 4(a + b) < 0,$$

en hiermee is het vraagstuk gereduceerd tot

$$?_b \vee_a (a^2 + 4(a + b) < 0).$$

Maar de volgende kwantor, $\vee_a$, is al even seniel. De discriminant reduceert het probleem tot

$$?_b (16 - 16b > 0),$$

en nu heeft de kandidaat de eerste kans om te stranden, want na al het trainen op kwadratische en gebroken ongelijkheden kun je er zeker van zijn, dat hij niet weet, wat hij met een lineaire ongelijkheid moet doen.

Met mijn tweede voorbeeld is het eender gesteld. Tussen de rechte haakjes staat de uitspraak „ y is het minimum van de vorm $x^2 + px + q$ ”, die twee „er is”-kwantoren in blik bevat. Gelukkig is de kandidaat niet verplicht, ze uit het blik te halen, want hij beschikt over een regel, om ze meteen onschadelijk te maken: hij schrijft het minimum van die vorm neer, en alle complicaties lossen zich op in

$$?_{p,q} (-p^2 + q = p + q + 1).$$

Hoe ingewikkeld zulke vraagstukken zijn, zodra de geijkte kwadratische vormen door andere (b.v. de veel eenvoudigere lineaire) worden vervangen, zult u beseffen als u over de juistheid van de volgende uitspraken nadenkt:

$$\vee_z \wedge_y \vee_x (xy = z).$$

$$\wedge_z \vee_y \wedge_x (xy = z).$$

$$\wedge_x \vee_y \wedge_z (xy = z).$$

In de twee geciteerde vraagstukken ontmoetten we algoritmische kwantoren, d.w.z. we konden algoritmisch een uitspraak van de soort $\wedge_x F(x)$ reduceren tot een, waar de kwantor $\wedge_x$ niet meer in verscheen, en we konden in het geval van een uitspraak $\vee_x F(x)$ direct alle x aanwijzen, waarvoor die uitspraak waar is. Bij de definitie van continuïteit daarentegen missen we elke aanduiding omtrent een algoritme, dat ons bij een gegeven $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ op-

levert met de bekende eigenschappen, en ook de alle-kwantoren laten zich met geen algoritmische middelen elimineren (behalve natuurlijk als we met speciale functieklassen bezig zijn).

Het zijn juist de niet-algoritmische kwantoren, die aan de geestelijke greep van de beginnelingen weten te ontsnappen. Ze kunnen bij honderdtallen in successie optreden, maar ook voor de geoefende zijn drie à vier kwantoren in successie het maximum, dat hij in één oogopslag kan omvatten. Hij verschaft zich het nodige overzicht door telkens weer een groep kwantoren in de vorm van een definitie in te blikken. Bijvoorbeeld zit in de definitie van continuïteit het begrip functie. Een functie is een dusdanige verzameling G van getallenparen $\ulcorner x, y \urcorner$ (de grafiek), dat bij elke x een en slechts een y hoort met $\ulcorner x, y \urcorner \in G$. U ziet hier een alle-kwantor en een er-is-kwantor (een y), maar achter het woordje „slechts een” verschuilt zich nog weer een alle-kwantor, die dus met behulp van „slechts een” is ingeblikt. Symbolisch luidt de definitie van functie

$$\bigwedge_x \bigvee_y \{(\ulcorner x, y \urcorner \in G) \wedge \bigwedge_{y'} [(\ulcorner x, y' \urcorner \in G) \rightarrow (y' = y)]\}.$$

Deze door niet-algoritmische kwantoren ingewikkelde logische structuur verbergt zich achter het onschuldige woord functie, dat in de definitie van continuïteit optreedt. Bovendien vooronderstelt die definitie natuurlijk het begrip „reëel getal”, dat een logische diepte van zeker tientallen kwantoren in successie bezit. Van hem, die met deze begrippen wil werken, wordt geëist, dat hij telkens weer in die logische diepte kan afdalen, dus op elk rustpunt de ingeblikte kwantoren uit het blik kan halen, zonder kans op algoritmische eliminatie.

De kwantoren-torens in de algebraïsche kaskaden-sommetjes zijn gezichtsbedrog, voorspiegeling van een logische diepte die er niet is. Och ja, zult u van dit type vraagstukken zeggen, baat het niet, dan schaadt het niet. Maar dat is juist de vraag. Het is de vraag, of de moeilijkheden, die de leerlingen bij elk echt wiskundig vraagstuk plegen te ondervinden, en speciaal de moeilijkheden bij de overgang van de schoolwiskunde naar de universitaire wiskunde of naar enige meer rechtstreekse toepassing van de schoolwiskunde, niet het gevolg zijn van dit trainen op een logische schijndiepte. Zou niet door het aldoor maar werken met algoritmische kwantoren het begrip voor echte kwantoren kunnen zijn geblokkeerd? Als ik analoge verschijnselen de revue laat passeren, vrees ik deze vraag bevestigend te moeten beantwoorden. Ik word zelfs van een dubbele vrees bevangen, een vrees voor dubbele blokkering. Door dit type vraagstukken wordt niet enkel bij de leerling iets geblokkeerd, maar

ook bij de leraar — en dat is misschien erger, want bij een jeugdige leerling staan de kansen beter, om zich aan die blokkade te ontworstelen.

Bij de vorming van de leraar gaan wij ervan uit, dat hij, die onderwijst, iets meer weet dan hij geacht wordt te onderwijzen. Dit „iets meer” slaat niet alleen op de leerstof. De leraar moet wat hij onderwijst op een andere wijze weten, dan rechtstreeks uit zijn onderwijs blijkt. Hij moet niet alleen boven de stof staan, die hij onderwijst maar ook boven de logische vorm van die stof. Wil dit lukken, dan moet hij in staat zijn, de logische diepte van de stof te peilen. Het middel hiertoe is: logica. Ik hoop, u duidelijk te hebben gemaakt, dat dit veel meer betekent dan de geijkte termen: bewijs uit het ongerijmde, omkeren van een stelling, valse vergelijking, equivalentie, enz.

Men zou nog een stap verder kunnen gaan, door van de leraar ook te eisen, dat hij boven de door hem gebezigde methode van aanbieding van de stof staat en zichzelf deze methode bewust kan maken. Ook hierbij kan de logische analyse diensten bewijzen. Niet in die triviale zin, dat de methode door de logische structuur worde bepaald, maar om, naar het voorbeeld van de van Hieles, de niveau's van inzicht te herkennen en hun onderlinge relatie, die volstrekt logisch van aard is.

Ik heb tijdens deze lezing ervoor gepleit, dat symbolisch logische methoden door de leerling — ik zeg niet zoveel mogelijk, maar zoveel noodzakelijk — worden toegepast. Dit betekent uiteraard niet, dat de logica als leerstof haar intrede in de schoolwiskunde doet. Ik sta over het algemeen sceptisch tegenover nieuwe onderwerpen, en in 't bijzonder lijkt mij logica als leerstof op zijn minst prematuur. Bij het woord „methode” in de titel van deze lezing heb ik echter niet zo zeer de leerling voor ogen gehad, die zich bij het neerschrijven van zijn werk van logische symbolen bedient, maar veeleer de leraar die met modern logische methoden de leerstof en zijn vorm benadert en zijn eigen methodiek analyseert.

BOEKBESPREKING

C. Gattegno, *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*, 211 pages, prix fr. s. 15,—; Delachaux et Niestle, Neuchâtel.

Dit werk is de tweede uitgave van de „Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques”, een groepering van wiskundigen, waarvan Gattegno de toegewijde secretaris is.

De vorige uitgave van deze commissie werd door mij aangekondigd in een beschouwing van ruim tien bladzijden in Euclides XXXI, blz. 282 e.v. Dat ik me hier tot één pagina beperk, is niet het gevolg van mindere waardering. Ik verheug me buitengewoon over de totstandkoming van dit werk, dat een te vaak verwaarloosd aspect van ons wiskunde-onderwijs behandelt.

Gattegno heeft zich de medewerking weten te verzekeren van een aantal didactici van betekenis, die ons allen op enigerlei wijze inlichten over de betekenis van audiovisuele en dynamische hulpmiddelen voor ons wiskunde-onderwijs.

De twaalf bijdragen laten zich in drie afdelingen onderbrengen. In de eerste afdeling bespreekt Gattegno in „La perception et l'action comme bases de la pensée mathématique” de psychologische aspecten, W. Servais (België) de filosofische onder de titel „Concret-abstrait” en Emma Castelnuovo (Italië) de pedagogische in het hoofdstuk: „L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive”.

In de tweede afdeling komen de verschillende problemen aan de orde die men kan plaatsen rondom de titel „de film in het wiskunde-onderwijs”.

J. L. Nicolet (Zwitserland), pionier op dit terrein, schrijft over „L'intuition mathématique et dessins animés”, T. J. Fletcher (Engeland), wiens films voor wat oudere leerlingen bedoeld zijn als die van Nicolet (nl. voor 18-jarigen en ouderen), behandelt „Les problèmes du film mathématique”. L. Motard schrijft „Les techniques du dessin animé mathématique”. Hij bepleit een stevige internationale organisatie voor de produktie en de distributie van films. In „L'enseignement par le film mathématique” licht Gattegno ons in over de praktijk van enige filmvertoningen. De laatste zes hoofdstukken gaan alle over modellen.

Campedelli (Italië), Biguenet (Frankrijk), Peskett (Engeland) Puig Adam (Spanje) en Gattegno leveren er bijdragen, Gattegno over het „matériel Cuisenaire des nombres en couleurs” en het „géo-plan”.

Er is een lijst opgenomen van 33 thans voor het onderwijs beschikbare films.

Ik kan lezing van dit belangrijke werk aan alle collega's aanbevelen. Voor ieder die zich in de problemen rondom wiskundige modellen en films interesseert, bevat het boek onmisbare informatie.

Joh. H. Wansink.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machiels: *Slotstukje van het Nieuw-Algebra-Boek*. 5e druk. P. Noordhoff N.V. Groningen, 1959, ing. f 3,90; geb. f 4,65.

Bestemd voor scholen, die in drie jaar voor het M.U.L.O. diploma A opleiden. Het sluit aan op deel I en II van het Nieuw Algebra-Boek. Dit slotstukje behandelt in hoofdzaak de wortelvormen en de vierkantsvergelijkingen en bevat verder een groot aantal herhalingsopgaven en de examenopgaven M.U.L.O.-A 1932—1956 (waarom 1957 en 1958 niet?)

Ik heb wat bezwaar tegen die imaginaire en complexe getallen op blz. 54, maar verder geloof ik, dat men prettig met dit boekje zal werken.

R. Troelstra

VECTOREN IN DE WISKUNDE ¹⁾

door

Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ

Bilthoven

§ 1. *Definities.*

Na de historische inleiding en de fysische aanleiding moet ik U nu met de wiskundige begeleiding van de vectoren in kennis brengen. Dan wordt het een abstracte behandeling, waarbij allereerst de algebra aan het woord komt. De leer van de vectoren, als zoiets bestaat, zou van wiskundig standpunt onderverdeeld kunnen worden in *lineaire algebra*, *theorie van functies van meer variabelen*, en *differentiaalmeetkunde*, waarbij ik zeker niet wil pretenderen dat deze opsomming uitputtend zou zijn.

Ik wil nu de eerste twee onderwerpen iets toelichten.

Voor ik aan de definitie van een vectorruimte toe ben, wil ik eerst enkele definities uit de theorie van de verzamelingen en de afbeeldingen (functies) geven. Als V en W twee verzamelingen zijn, verstaan we onder $V \times W$ een nieuwe verzameling, waarvan de elementen paren (v, w) met $v \in V$, $w \in W$ zijn. (Heeft dus b.v. V k elementen W l elementen, dan heeft $V \times W$ precies $k \cdot l$ elementen). We noemen $V \times W$ de produktverzameling van V en W .

Als V en W twee verzamelingen zijn verstaan we onder een afbeelding f (of functie f) een voorschrift dat aan elk element van V één element van W toevoegt. Het element van W dat door f toegevoegd wordt aan $x \in V$ schrijven we $f(x)$.

We merken op dat in het geval dat zowel V als W de verzameling van de reële getallen is, de functie f aan een reëel getal x een reëel getal y toevoegt, geschreven als $y = f(x)$. Dit is in overeenstemming met de bekende notatie. Alleen is gebroken met de slordige zeggwijze „ $f(x)$ is een functie”. We schrijven nu voor de functie alleen f , soms $f: V \rightarrow W$.

We gebruiken dit symbool natuurlijk ook in het geval we een

¹⁾ Naar een voordracht in de vakantiecursus 1959 van het Mathematisch Centrum.

afbeelding van een produktverzameling $V \times W$ in een derde verzameling U hebben. Voor zo'n afbeelding f is dus $c = f(a, b)$ het getal uit U , dat door f toegevoegd wordt aan het paar $a \in V$, $b \in W$.

Na deze notatiekwesities beginnen we met de definitie van een vectorruimte, vaak ook lineaire ruimte genoemd.

Een *vectorruimte* V op een *lichaam* K is een verzameling V en een lichaam K , waarvoor twee afbeeldingen $f_1: V \times V \rightarrow V$ en $f_2: K \times V \rightarrow V$ gegeven zijn, — die we schrijven als $a + b$ i.p.v. $f_1(a, b)$ als $a, b \in V$ en λa i.p.v. $f_2(\lambda, a)$ als $\lambda \in K$, $a \in V$ — zodat volstaan is aan:

1. V is een commutatieve groep met betrekking tot f_1 , dus
 - i) $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - ii) $a + b = b + a$
 - iii) er is een element $0 \in V$ met $a + 0 = a$, voor alle a .
 - iv) bij iedere $a \in V$ is een element $-a \in V$ met $a + (-a) = 0$.
2. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ $a, b \in V$, $\lambda \in K$.
3. $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ $a \in V$, $\lambda, \mu \in K$.
4. $\lambda(\mu a) = (\lambda \mu) a$ $a \in V$, $\lambda, \mu \in K$.
5. 1. $a = a$ $a \in V$, 1 is eenheidselement van K .

De n vectoren $a_1, a_2, \dots, a_n$ heten lineair onafhankelijk, als de relatie $\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k = 0$, $\lambda_k \in K$, alleen voor $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ vervuld is; we noemen de elementen van K vaak *skalair*en.

Wanneer in een lineaire ruimte, ieder $n + 1$ -tal vectoren lineair afhankelijk is, terwijl er tenminste één n -tal lineair onafhankelijk is, spreken we van een n -dimensionale vectorruimte. Er zijn dan n vectoren $e_1, e_2, \dots, e_n$, zodat iedere vector te schrijven is als $a = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k$. Er bestaat immers een niet triviale relatie $\alpha a + \sum_{k=1}^n \epsilon_k e_k = 0$, en als we de $e_1 \dots e_n$ lineair onafhankelijk kiezen volgt $\alpha \neq 0$. We noemen de getallen μ_k de *coördinaten* van a ten opzichte van de *basis* $e_1, e_2, \dots, e_n$. Bij voorgeschreven basis wordt de vector eenduidig vastgelegd door de coördinaten. We schrijven dan i.p.v. a ook wel $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$; waarbij dus $(1, 0, \dots, 0) = e_1$ etc.

§ 2. Lineaire functies.

Een functie $f: V \rightarrow K$, die dus aan vectoren uit V , getallen uit K toevoegt heet *lineair* als

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b), \quad \lambda, \mu \in K; \quad a, b \in V.$$

We beschouwen nu de verzameling V^* van de lineaire functies op V gedefinieerd. We willen van deze verzameling een vectorruimte op K maken. Daartoe definiëren we de som van twee lineaire functies f en $g \in V^*$ als de functie $f + g$, die bepaald is door $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Dit is weer een lineaire functie. Evenzo definiëren we λf door de relatie $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Het is eenvoudig te verifiëren dat V^* nu een vectorruimte op K geworden is. We noemen V^* de duale ruimte van V .

Als V een n -dimensionale ruimte is met een basis $e_1, e_2, \dots, e_n$ dan vormen de lineaire functies f_i , die gedefinieerd worden door $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, ($\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$) een basis voor V^* . Deze is in dit geval dus ook n -dimensionaal. Deze speciale basis $f_1, \dots, f_n$ van V^* heet de *duale* basis ten opzichte van $e_1, \dots, e_n$.

Laten V en W twee vectorruimten gedefinieerd op eenzelfde lichaam K zijn, dan heet een afbeelding $f: V \times W \rightarrow K$ bilineair wanneer f bij vaste $w \in W$ lineair op V is en omgekeerd, dat wil zeggen:

$$f(\lambda a + \mu b, x) = \lambda f(a, x) + \mu f(b, x),$$

$$f(a, \rho x + \sigma y) = \rho f(a, x) + \sigma f(a, y),$$

met $a, b \in V$; $x, y \in W$, $\lambda, \mu, \rho, \sigma \in K$.

[Als $e_1 \dots e_n$ een basis van V en $h_1 \dots h_m$ een basis van W is, zal voor $x = \sum \varepsilon_i e_i$, $y = \sum \eta_j h_j$ gelden $f(x, y) = \sum_{i,j} \varepsilon_i \eta_j f(e_i, h_j)$]

Een belangrijk voorbeeld vinden we door voor W de duale ruimte V^* te kiezen. Een voor de hand liggend voorbeeld van een bilineaire functie $\varphi: V \times V^* \rightarrow K$ is dan $\varphi(x, f) = f(x)$ voor $x \in V$, $f \in V^*$. Het ligt nu voor de hand voor V een basis $e_1, \dots, e_n$ te kiezen en voor V^* de duale basis $f_1, \dots, f_n$. Dan geldt dus $\varphi(x_i, f_j) = \delta_{ij}$ voor bovenstaande definitie van φ .

In het bijzonder zullen we bilineaire functies beschouwen, die gedefinieerd zijn op $V \times V$. Naast bilineaire kunnen we ook trilineaire functies beschouwen, dat zijn functies gedefinieerd op $V \times V \times V$ met waarden in K , terwijl de functie lineair in ieder van de drie „variabelen” is. In het algemeen beschouwen we ook multilineaire functies.

In het vervolg zal één speciale multilineaire functie een grote rol spelen. Als n de dimensie van een vectorruimte is beschouwen we een n -lineaire functie. We beperken ons nu tot *alternerende* n -lineaire functies, dat zijn functies die voldoen aan:

$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \varepsilon_P \varphi(a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}, \dots, a_{\sigma_n})$, met $\varepsilon_P = 1$ voor een even permutatie $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ van $1, 2, \dots, n$ en $\varepsilon_P = -1$ voor een oneven permutatie. (We zouden kunnen volstaan met de

eis, dat φ van teken wisselt bij verwisseling van twee van de vectoren a_i).

Wanneer we deze functies bezien, blijken zij bepaald te zijn door de waarde $\varphi(e_1, \dots, e_n)$ voor een basis $e_1, \dots, e_n$; d.w.z. op een skalare factor na is de alternerende n -lineaire functie bepaald. We noemen deze functie, wanneer hij niet identiek 0 is, een determinant functie: $\det(a_1, \dots, a_n)$.

(Voor $a_i = \sum \alpha_{ij} e_j$ geldt $\det(a_1, \dots, a_n) = |\alpha_{ij}| \det(e_1, \dots, e_n)$ waarin $|\alpha_{ij}|$ de klassieke determinant van de matrix α_{ij} is.)

Voorbeelden:

1. De continue functies op $[0,1]$ vormen een lineaire (oneindig dimensionale) ruimte C . Voorbeelden van lineaire functies op deze ruimte zijn: het voorschrift A , dat aan de continue functie f het getal $f(a)$ toevoegt. (A is dus een lineaire functie gedefinieerd voor continue functies, een functie van functies noemt men wel een functionaal, A is dus een lineaire functionaal). Een andere lineaire functie B , voegt aan f het getal $\int_0^1 f(x) dx$ toe. Een voorbeeld van een bilineaire functie op $C \times C$ wordt gegeven door $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Dit soort beschouwingen geven een belangrijk inzicht en een aanmerkelijke vereenvoudiging in de theorie van de orthogonale stelsels (Fourierreksen).

2. De polynomen van een graad kleiner dan n in één variabele x vormen een n -dimensionale lineaire ruimte P . Als p een polynoom is wordt door $p \rightarrow p(a)$ weer een lineaire functie op P , dus een element van P^* , gegeven. Kiezen we n punten $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0,1]$ dan vinden we n lineaire functies A_k bepaald door $A_k(p) = p(a_k)$. Men kan eenvoudig inzien dat deze een basis in P^* vormen als de punten a_k alle verschillend zijn. Voor een willekeurige $b \in [0,1]$ zal de lineaire functie B , bepaald door $B(p) = p(b)$, dus voor te stellen zijn als een lineaire combinatie van $A_1, \dots, A_n$. Dus geldt

$B = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$. Een eenvoudig experiment leert dat

$$\lambda_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{b - a_i}{a_k - a_i} \right)$$

Dit betekent dus dat voor ieder polynoom van de graad $n-1$ of lager de klassieke interpolatie formule van Lagrange geldt:

$$p(b) = \sum_{k=1}^n \lambda_k p(a_k).$$

3. Een andere mogelijkheid bij dezelfde lineaire ruimte is om de functies D_k , bepaald door $D_k(p) = \frac{d^k}{dx^k} p(x) \Big|_{x=a} = p^{(k)}(a)$, als basis te kiezen. We vinden dan $B = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k D_k$, met $\mu_k = \frac{(b-a)^k}{k!}$.

Dit geeft ons de formule van Taylor:

$$p(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} p^{(k)}(a).$$

§ 3. De driedimensionale ruimte.

We specialiseren ons nu op de drie dimensionale ruimte V . We beschouwen voor drie vectoren a, b, x de waarde van een „determinant“ $\det(a, b, x)$. Dit is een lineaire functie van x ; we kunnen zeggen dat a en b een element van de duale ruimte bepalen. We hebben een afbeelding van $V \times V \rightarrow V^*$ geconstrueerd. Men kan eenvoudig verifiëren dat deze afbeelding bilineair is.

We maken nu een vreemde sprong. We willen van de afbeelding $V \times V \rightarrow V^*$ een afbeelding $V \times V \rightarrow V$ maken. We zoeken dus een afbeelding van V^* in V , dus een afbeelding, die aan lineaire functies vectoren toevoegt. Als φ een bilineaire functie is zouden we kunnen proberen bij een lineaire functie f een vector a_f te bepalen zodat $f(x) = \varphi(a_f, x)$. Dit is steeds mogelijk mits er onder de lineaire functies $\varphi(a, x)$ met verschillende a precies n lineair onafhankelijken zijn. In dit geval noemen we φ niet ontaard. We beschouwen nu zo'n niet ontaarde φ en voegen aan de functie f de vector a_f toe door $f(x) = \varphi(a_f, x)$.

Tezamen genomen vinden we dus $\det(a, b, x) = \varphi(c, x)$. We hebben nu een bilineaire afbeelding van $V \times V$ in V gevonden die aan a en b dus c toevoegt. We schrijven voortaan $c = a \wedge b$. De volgende regels volgen direct uit de definitie.

1. De toevoeging $a \wedge b = c$ is bilineair.
2. $a \wedge b = -b \wedge a$, dus $a \wedge a = 0$
3. $\varphi(a \wedge b, c) = \varphi(a, b \wedge c) = \varphi(b, c \wedge a) = \det(a, b, c)$
4. $\varphi(a \wedge b, a) = \varphi(a \wedge b, b) = 0$.

De definitie van het uitwendige produkt $a \wedge b$ hangt nu nog af

van de keuze van de skalaire factor in de functie $\det$ en van de gekozen bilineaire functie φ . We gaan deze nu fixeren. We kiezen zo'n φ , dat voor een basis e_1, e_2, e_3 geldt $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, en dan stellen we nog $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$. We noteren (a, b) i.p.v. $\varphi(a, b)$.

Bij deze keuze geldt:

$$5. (a \wedge b) \wedge c = (a, c)b - (b, c)a.$$

(Uit het feit dat $x = (a \wedge b) \wedge c$ voldoet aan $(x, a \wedge b) = 0$ volgt dat $x = \lambda a + \mu b$. Uit $(x, c) = 0$ volgt $\lambda : -\mu = (b, c) : (a, c)$.

Gebruik makende van de boven vermelde afspraken kan men dan 5 direct afleiden).

Hieruit volgt weer

$$6. (a \wedge b) \wedge c + (b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b = 0.$$

$$7. (a \wedge b, c \wedge d) = ((a \wedge b) \wedge c, d) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$$

$$8. (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \det(a, b, d)c - \det(a, b, c)d, \\ = \det(c, d, a)b - \det(c, d, b)a.$$

Tenslotte vinden we de expliciete formule, die de lineaire afhankelijkheid van ieder viertal vectoren uitdrukt nu direct:

$$9. \det(a, b, c)d - \det(b, c, d)a + \det(c, d, a)b - \det(d, a, b)c = 0.$$

§ 4. Differentiaalrekening.

Laat f een reële functie van een reële variable zijn. We kunnen de afgeleide in $x = a$ beschrijven als de lineaire functie in h , die $f(a + h) - f(a)$ „zo goed mogelijk” benadert. Iets scherper geformuleerd:

$$f(a + h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

hierin is Ah de lineaire approximatie voor $f(a + h) - f(a)$ en $h\varepsilon(h)$ is een correctieterm. $A = f'(a)$.

We beschouwen nu een reële functie f gedefinieerd op een n -dimensionale vectorruimte. We proberen weer $f(a + h) - f(a)$ voor vaste a zo goed mogelijk te benaderen door een lineaire functie van h . Deze kunnen we met een inproduct schrijven als (c, h) , waarin de vector c de rol van de afgeleide in $x = a$ overneemt. We schrijven $c = \text{grad } f$ in $x = a$. We vinden voor een differentieerbare functie

$$f(a + h) = f(a) + (\text{grad } f, h) + (h, e(h)),$$

waarin $e(h)$ een vector is, die met h naar 0 nadert (meetkundig gezien is $\text{grad } f$ de vector in de richting van de sterkste verandering van f).

Wanneer we coördinaten invoeren b.v. $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$,

dan wordt $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ alle berekend in $x = a$; en $(\text{grad } f, h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Formeel voert men soms de vector-operator ∇ in door $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ dan is $\text{grad } f = \nabla f$, waarbij ∇ met de skalaire faktor f van achteren vermenigvuldigd wordt.

§ 5. Vectorvelden.

Een veel voorkomende situatie is, dat in een vectorruimte aan ieder punt een vector is toegevoegd. Beter gezegd er is een afbeelding f van een n -dimensionale vectorruimte V in een n -dim. vectorruimte V' gegeven. Ook hier kunnen we differentieerbaarheid weer invoeren door middel van locale lineaire approximaties. Wat de definitie van een lineaire afbeelding van V in V' moet zijn, is wel zonder meer duidelijk. We vinden in dit geval weer een relatie:

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \dots,$$

L is dus een lineaire afbeelding van V in V' . Wanneer we weer coördinaten invoeren wordt L gegeven door een matrix

$\{\lambda_{ij}\}$ en $L(h) = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} h_j \right)_{i=1,2,\dots,n}$. Door voor f speciale afbeeldingen te kiezen ziet men zonder veel moeite dat $\lambda_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ als $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

De matrix $(\lambda_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ heet de *functionaalmatrix* van Jacobi.

Deze matrix is natuurlijk afhankelijk van de keuze van de coördinaten. Er zijn wel invarianten van deze matrix bij verandering van coördinaten, namelijk de eigenwaarden. Op de betekenis van deze eigenwaarden gaan we niet in. We noemen alleen het produkt van de eigenwaarden, dat is $\det (\lambda_{ij})$, de functionaaldeterminant. Wanneer deze determinant ongelijk 0 is, is de lineaire afbeelding één-één-duidelijk en dus omkeerbaar, hetzelfde zal lokaal gelden voor f in een voldoende kleine omgeving van a .

Naast het produkt van de eigenwaarden van de functionaalmatrix speelt ook de som een belangrijke rol. Deze geven we aan

met $\text{div } f$. Wanneer we alles weer in coördinaten uitschrijven vinden we voor $f = (f_1, f_2, f_3)$ de formule

$\text{div } f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = (\nabla, f)$. We moeten hierbij weer opmerken dat (f, ∇) een geheel andere betekenis heeft n.l.

$f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}$, dus een vector-operator.

Het ligt nu voor de hand ook $\nabla \wedge f$ te definiëren. We zouden dit met enige voorzichtigheid kunnen doen door voor alle *constante* vectoren c te eisen dat $(\nabla \wedge f, c) = (\nabla, f \wedge c) = \text{div } (f \wedge c)$. In coördinaten vinden we dan $\nabla \wedge f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$. We schrijven vaak $\text{rot } f$ i.p.v. $\nabla \wedge f$.

Naast elkaar hebben we nu dus:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \text{grad } \varphi && \left(\text{vector: } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right), \\ (\nabla, f) &= \text{div } f && \left(\text{skalair: } \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right), \\ \nabla \wedge f &= \text{rot } f && \left(\text{vector: } \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right), \text{ etc.} \right), \\ (f, \nabla) &&& \left(\text{operator: } f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ f \wedge \nabla &&& \left(\text{operator: } f_2 \frac{\partial}{\partial z} - f_3 \frac{\partial}{\partial y}, \text{ etc.} \right). \end{aligned}$$

Van de zeer vele differentiatieregels, die nu af te leiden zijn, noemen we er slechts enkele als voorbeeld:

$$\text{div } (f \wedge g) = (\text{rot } f, g) = - (f, \text{rot } g),$$

$$\text{rot grad } \varphi = 0, \quad \text{div rot } f = 0.$$

In de literatuur wordt vaak een fysisch meer aanschouwelijke definitie van de grootheden $\text{div } f$ en $\text{rot } f$ gegeven. Deze definities zijn eigenlijk speciale gevallen van twee bekende stellingen.

Eerst de formule van Stokes, laat O een oppervlak zijn, begrensd door een kromme K . We zullen beide voldoende „netjes” veronderstellen, zonder hier nader op in te gaan. Dan geldt voor een differentieerbaar vectorveld f

$$\iint_O (\text{rot } f, do) = \int_K (f, ds) \quad (do \text{ is een vector loodrecht op het oppervlak}).$$

De formule van Gauss handelt over een gebied I begrensd door een voldoende „net” oppervlak O . Dan geldt voor een differentieerbaar vectorveld f

$$\iiint_I \operatorname{div} f \, dv = \iint_O (f, do).$$

De bedoelde definities van div en rot worden nu door beschouwingen over „infinitesimale inhoud- en oppervlakte-delen” als „limieten” van een oppervlakte integraal gedeeld door een volume etc. gegeven. We gaan hier nu niet verder op in, maar verwijzen naar de beschouwingen van Prof. Timman in deze vakantiecursus.

In een volgende paragraaf willen we echter een formalisme trachten te ontwerpen dat ons een beter inzicht in deze stellingen zal geven.

§ 6. *Differentiaalvormen.*

We verwijzen voor een uitvoeriger behandeling van de stof van de volgende paragrafen in het bijzonder naar P. Lorenzen: *Differentialformen und mehr dimensionale Integrale* I, II, Math. Phys. Semesterberichte 5 (200—213), 6 (20—30); (1958).

Met D_0 geven we de verzameling van de voldoende vaak differentieerbare functies van n variabelen aan. Een differentiaalvorm van de eerste graad is een vector uit een n -dimensionale ruimte D_1 , waarvan de componenten uit D_0 gekozen zijn, dus een uitdrukking $\varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \dots + \varphi_n e_n$, waarin $e_1, e_2, \dots, e_n$ een basis van D_1 is. (Eigenlijk zouden we niet over vectorruimten D_i mogen spreken omdat de skalieren in dit geval niet uit een lichaam maar uit een ring genomen zijn). De speciale differentiaalvorm

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} e_n$ noemen we $d\varphi$, we zien nu direct dat

$dx_1 = e_1^1$) enz.

Een differentiaalvorm van de tweede graad is een vector met $\frac{1}{2}n(n-1)$ componenten, die weer differentieerbare functies zijn. We definiëren nu een bilineaire afbeelding van de produktruimte $D_1 \times D_1$ van de differentiaalvormen van de eerste graad met zich zelf in de ruimte D_2 van de differentiaalvormen van de tweede graad. Vervolgens geven we deze afbeelding expliciet aan door aan

¹⁾ Hier vervallen we in een notatiefout, eigenlijk zouden we moeten schrijven $d\varphi_1$, waarbij de functie φ_1 gedefinieerd is door $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$. We kiezen echter de kortere en slordigere notatie dx_1 .

de elementen paren dx_i en dx_j voor $i < j$ de basiselementen van D_2 toe te voegen. Verder eisen we dat de afbeelding alternerend zal zijn. We schrijven deze afbeelding met het symbool $\wedge$. Dus $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, met als gevolg dat $dx_i \wedge dx_i = 0$. Een direct gevolg van de bilineariteit van deze afbeelding is dat $(\sum \varphi_i dx_i) \wedge (\sum \psi_j dx_j) = \sum_{i < j} (\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i) dx_i \wedge dx_j$.

Analoog kunnen we differentiaalvormen van hoger graad invoeren. De dimensie van de ruimte D_k (bij n variabelen) is $\binom{n}{k}$, we definiëren met $\wedge$ een multilineaire alternerende afbeelding van de verzameling $D_1 \times D_1 \times \dots \times D_1$ in D_k .

We merken in het bijzonder nog op dat de ruimte D_n bestaat uit alle skalare veelvouden van $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Als $\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij} dx_j$ geldt $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n = \det(\varphi_{ij}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Is in het bijzonder $\varphi_i = df_i$ dan is $df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_n = \frac{\partial(f)}{\partial(x)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, waarin $\frac{\partial(f)}{\partial(x)}$ de functionaaldeterminant van het stelsel f_i is.

Met deze notatie kunnen we de formule voor de substitutiestelling voor integralen van één variabele

$$\int f(x) dx = \int f\{\varphi(t)\} d\varphi(t) = \int f\{\varphi(t)\} \varphi'(t) dt$$

overbrengen naar n variabelen door inplaats van de notatie

$$\int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \text{ in te voeren } \int f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

De substitutieregel $dx = d\varphi = \varphi' dt$ luidt dan gegeneraliseerd

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = \frac{\partial(\varphi)}{\partial(t)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n,$$

waarbij φ_i een functie van $t_1, t_2, \dots, t_n$ is en $\frac{\partial(\varphi)}{\partial(t)}$ dus weer de functionaaldeterminant. Bij deze beschouwingen is de volgorde van de factoren dx_i belangrijk, in wezen komt het er op aan een oriëntatie in de ruimte vast te leggen.

Naast de boven ingevoerde uitwendige vermenigvuldiging van differentiaalvormen (we hebben op deze wijze een z.g. Grassman-algebra gekregen) voeren we nog een differentiatie d in, dit zal een lineaire afbeelding van D_k in D_{k+1} zijn. Wanneer we onder D de skalaren verstaan, definieerden we al reeds $d: D_0 \rightarrow D_1$

door $d\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$. Met volledige inductie definiëren we d

verder door voor een sklair φ en een differentiaalvorm f van de graad k te definiëren $d(\varphi f) = d\varphi \wedge f$. Door de lineariteit is d hiermede op D_k vastgelegd.

Als voorbeeld bezien we:

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j \varphi_j dx_j\right) &= \sum_j d\varphi_j \wedge dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

In het bijzonder volgt hieruit als φ een tweemaal continu differentieerbare functie is $d(d\varphi) = 0$, immers:

$$d(d\varphi) = d\left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Men kan door een directe berekening algemeen verifiëren dat de afbeelding $d^2: D_k \rightarrow D_{k+2}$ identiek 0 is, zodat voor iedere differentiaalvorm f geldt $d(df) = d^2f = 0$. (We veronderstelden f weer tweemaal continu differentieerbaar).

We zouden verder nog kunnen onderzoeken of uit het verdwijnen van de afgeleide van een differentiaalvorm volgt dat deze differentiaalvorm exact is. Met andere woorden als $d\omega = 0$ is er dan een φ met $\omega = d\varphi$? Dit zou een bijzondere eigenschap voor de afbeelding d zijn, op iedere plaats D_k valt het beeld van D_{k-1} samen met de kern van D_{k+1} in D_k . (De kern is het origineel van het 0 element). Het eenvoudigste voorbeeld, $\omega = f dx + g dy$, is klassiek. Dan is de vraag namelijk als $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ is er dan een

φ met $f = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $g = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$? Het antwoord is sterk afhankelijk van het beschouwde gebied. In een „net” gebied dat enkelvoudig samenhangend is (dus geen gaten bevat) geldt de stelling van Poincaré, die zegt dat $d\omega = 0$ het bestaan van een φ impliceert met $\omega = d\varphi$.

§ 7. Integraalrekening.

Laat K een (eventueel stuksgewijs) differentieerbare kromme zijn, gegeven door de parameter voorstelling $x = x(t)$ ¹⁾. Voor

¹⁾ x is hier weer een vector in die zin dat zijn componenten x_i functies van t resp. van u en v zijn!

een differentiaalvorm ω van de eerste graad definiëren we de integraal langs K van een punt t_0 tot een punt t_1 door:

$$\int_K \omega = \int_K \sum \varphi_i dx_i = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \varphi_i \frac{dx_i}{dt} \right) dt.$$

Is in het bijzonder ω exact dan vinden we voor $\omega = d\varphi$

$$\int_K \omega = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\varphi}{dt} = \varphi(x(t_1)) - \varphi(x(t_0)).$$

Laat O een „voldoende net” oppervlak zijn in parameter vergelijking gegeven door $x = x(u, v)$ ¹⁾. Voor een differentiaalvorm ω van de tweede graad definiëren we over een deel van O , bepaald door een gebied G in het U - V -vlak, de integraal door:

$$\begin{aligned} \iint_O \omega &= \iint_O \sum_{i < j} \varphi_{ij} dx_i \wedge dx_j = \\ \iint_G \left[\sum_{i < j} \varphi_{ij} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) \right] du \wedge dv. \end{aligned}$$

Bezien we in het bijzonder weer $\omega = df$, dus $\varphi_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, dan vinden we

$$\begin{aligned} \iint_O df &= \iint_G \left[\sum_{i < j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) \right] du \wedge dv \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Hierin is $\lambda = \sum f_i \frac{\partial x_i}{\partial v}$ en $\mu = \sum f_i \frac{\partial x_i}{\partial u}$, zoals direct nagerekend kan worden.

De integraal over het gebied G in het U - V -vlak kan, mits we maar bepaalde regulariteitseisen aan het gebied G opleggen overgevoerd worden in een lijn integraal langs de rand van G , d.w.z. in de integraal van de eerste graads differentiaalvorm $\lambda dv + \mu du$ langs de rand C van G . Terugvertalend naar O geeft dit de integraal van de eerste graads differentiaalvorm f langs de rand kromme van O , welke kromme we aangeven met dO . Zodoende komt men tot de stelling:

$$\iint_O df = \int_{dO} f.$$

¹⁾ Zie voetnoot vorige bladzijde.

Voor alle details en topologische veronderstellingen over de gebruikte oppervlakken en krommen moeten we in dit kader naar de literatuur verwijzen. Het is onze bedoeling in deze paragraaf slechts een enkele lijn aan te stippen.

We zijn nu de algemene stelling van Stokes op het spoor gekomen. Laat in een n -dimensionale ruimte ω een differentiaalvorm van de graad k zijn. Laat O een (voldoende net) $k + 1$ dimensionaal gebied zijn en dO de k dimensionale rand van dit gebied. Dan geldt de stelling:

$$\int_O d\omega = \int_{dO} \omega.$$

(Hier lieten we eindelijk de onhandige en ouderwetse notatie met vele integraalteken varen en volstonen met een enkele „vleeshaak” onafhankelijk van de dimensie.)

Deze fundamentele stelling heeft de stellingen van Stokes en Gauss als bijzondere gevallen. We zullen dit hier nog even aanduiden. Laten we formeel met $d\mathbf{r}$ de vector (dx, dy, dz) en met $d_2\mathbf{r}$ de vector $(dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ aangeven. Laat f een differentiaalvorm van de eerste graad zijn, dus $f = (v, d\mathbf{r})$, met $v = (v_1, v_2, v_3)$, dan is $df = (\text{rot } v, d_2\mathbf{r})$ en dus

$$\iint_O (\text{rot } v, d_2\mathbf{r}) = \iint_O df = \int_{dO} f = \int_K (v, d\mathbf{r}). \quad (\text{Stokes})$$

Laat verder f een differentiaalvorm van de tweede graad zijn, dus $f = (v, d_2\mathbf{r})$, dan is $df = \text{div } v \cdot dx \wedge dy \wedge dz$. Dus zal

$$\iiint_I \text{div } v \, dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_I df = \iiint_{dI} f = \iiint_O (v, d_2\mathbf{r}). \quad (\text{Gauss})$$

BOEKBESPREKING

Van Thijn's wiskundige leergang. E. J. Wasscher. *Meetkunde van het platte vlak voor het VHMO* 2e deel, J. B. Wolters, Groningen 1959; 114 pagina's; ing. f 3,25; geb. f 3,90.

Bij het lezen van dit boekje gaat de belangstelling in de eerste plaats uit naar de wijze, waarop de schrijver zich heeft aangepast aan het leerplan 1958. Deze aanpassing wil mij zeer geslaagd voorkomen.

Na een hoofdstuk over veelhoeken — de bijzondere veelhoeken zijn reeds in deel 1 behandeld — volgen de oppevlaktes, de evenredigheden, de vermenigvuldiging en de gelijkvormigheid van driehoeken met haar toepassing in de rechthoekige driehoek (Pythagoras).

Dan komt de goniometrie en wordt het voor de criticus interessanter; sin, cos en tangens worden meteen voor alle hoeken kleiner dan 180° gedefinieerd, waardoor de auteur de cosinusregel kan geven vóór de projectiestelling. Van deze laatste is hij geen bewonderaar; daarmee ben ik het volkomen eens; ik zelf heb bij een recente behandeling deze stelling eveneens wel afgeleid, maar niet gebruikt; men kan hoogtelijnen, projecties, zwaartelijnen en bissectrices ook uitrekenen door een dubbele toepassing van de stelling van Pythagoras. Een *methode*, die systematisch is, verdient m.i. eveneens voorkeur *boven het automatisch toepassen* van een formule, die bovendien verschillende gedaanten kan hebben (+ en — voor het dubbelprodukt). De cosinusregel heeft deze gelijke vorm wel; zij wordt dus min of meer gescheiden van de projectiestelling gegeven. De auteur leidt beide af op dezelfde manier, maar zet de een dus niet in de andere om. Wellicht had hij de projectiestelling helemaal willen weglaten, als hij die niet had moeten gebruiken bij de afleiding van de *s*-formule voor het oppervlak van een driehoek; deze elegante formule rechtvaardigt inderdaad het nare en ingewikkelde bewijs dat gebruikelijk is.

De goniometrie wordt toegepast bij de berekening van de elementen van een driehoek; indien ik goed heb gelezen, ontbreekt — ook bij de voorbeelden — het „vijfde” geval met de beide mogelijkheden.

Dan volgt de behandeling van de meetkundige plaatsen — vervolg op deel 1 — en die van de merkwaardige lijnen in een driehoek.

Tenslotte enkele betrekkingen, afgeleid uit oppervlakteberekeningen. Daarbij vond ik o.a. de „stelling”, waarin gezegd wordt, dat de som van de loodlijnen, die uit een punt *P* binnen een gelijkzijdige driehoek op de zijden kunnen worden neergelaten, gelijk is aan de lengte van een hoogtelijn. Het is niet mijn bedoeling de juistheid van deze bewering te ontkennen; wel vind ik de naam „stelling” hier wat geforceerd. Toegepast wordt de „stelling” immers niet en het lijkt mij in het algemeen verstandig als „stelling” alleen te poneren die beweringen, die de leerling bij het maken van vraagstukken, herhaaldelijk kan gebruiken. Men kan beter spreken van „voorbeeld” of „toepassing”.

Het boek sluit met een tafel; ik vraag mij af, of wij niet goed doen, de (log-)tafel reeds in klasse 2 aan te doen schaffen. Een los vel bij het boek gaat gauw verloren, terwijl bij proefwerken tafel en theorie in één band, begrijpelijke bezwaren heeft.

Al met al een fleurig, helder en moedig geheel.

J. T. Groenman

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machiels: *Meetkunde voor M.M.S.* Deel I. P. Noordhoff N.V., Groningen, 1959, 112 blz., f 3,75.

Een eenvoudig leerboek voor vlakke meetkunde. Na een wat intuïtief begin, waar hier en daar wat geknipt of gevouwen wordt, gaat het boek spoedig op traditionele wijze verder. Het vijfde congruentiegeval wordt volledig behandeld. Bij de evenredigheid van lijnstukken komt „de som van de termen van de eerste reden enz.” geheel onnodig om de hoek. Na het hoofdstuk over gelijkvormigheid, besluit dit eerste deel met een overzicht van de definities, stellingen en constructies.

Het M.M.S.-karakter van dit boek blijkt, behalve uit de titel, ook uit twee fleurige, gestyleerde meisjesfiguren op de omslag. Maar dat is dan ook alles. Overigens kon het net zo goed voor allerlei andere scholen bedoeld zijn. Het komt mij echter voor, dat juist een speciaal M.M.S.-boek een unieke gelegenheid biedt, de meetkunde aantrekkelijk te maken, door eens nieuwe paden te betreden. De talrijke studies over het aanvankelijk meetkunde-onderwijs, waarvan men in de laatste jaren kennis heeft kunnen nemen, bieden aanknopingspunten genoeg, en er staat geen strak examenprogramma in de weg.

De docenten echter, die zich niet op het gladde ijs der vernieuwing willen wagen, zullen dit boek vast wel met plezier gebruiken. Als alle boeken uit deze reeks ziet het er zeer verzorgd uit.

R. Troelstra

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Singel 13, Hoogezand.

CURSUS STATISTIEK te ARNHEM

In het seizoen 1960-'61 zal, bij voldoende deelname, in Arnhem door het Mathematisch Centrum in samenwerking met het Wiskundig Dispuut „Pi” een oriënterende cursus „Mathematische Statistiek” worden gehouden.

Het doel van deze cursus is leraren en aanstaande leraren in de wiskunde vertrouwd te maken met de beginselen van de kansrekening en de wiskundige statistiek. Daarnaast is deze cursus ook zeer geschikt voor personen, die niet in het onderwijs werkzaam zijn, maar die met het oog op hun werk zich in deze materie willen verdiepen.

De kosten, verbonden aan deze cursus, zijn f 50,00 per persoon. Aan leraren wordt reductie verleend; zij betalen f 10,00. In deze prijs is begrepen een syllabus van de cursus.

De cursus zal éénmaal in de veertien dagen worden gegeven. Als voorlopige keuze komen de volgende daggedeelten in aanmerking: maandagavond, woensdagmiddag, woensdagavond.

Opgaven (zo spoedig mogelijk) en inlichtingen bij de Administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O (met vermelding of men leraar is en welke daggedeelten mogelijk zijn).

VOORDRACHTEN MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht”, in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O op woensdag 18 mei 1960: Prof. Dr. Ir. A. I. van de Vooren: „Het binaire getallenstelsel en de Algebra van Boole”. Aanvang 20,00 uur.

In de serie „Actualiteiten”, in Krasnapolsky, Warmoesstraat 173-199, Amsterdam op zaterdag 28 mei 1960: P. C. Baayen. Onderwerp nog niet bekend. Aanvang 14,00 uur.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

25. A en B spelen het volgende spel. Om de beurt leggen zij, op een, aanvankelijk lege, tafel een geldstuk. Een geldstuk mag een ander geldstuk niet geheel of gedeeltelijk bedekken. A en B hebben de beschikking over ieder gewenst aantal geldstukken van elke soort. Winnaar is hij, die het laatste geldstuk op de tafel legt.

A begint. Hoe moet hij spelen om zeker te zijn van de winst.

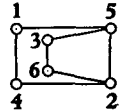
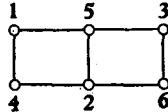
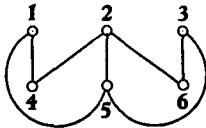
26. Volgens welk principe zijn de volgende getallen (1 — 99) lineair gerangschikt.

8, 38, 98, 88, 28, 48, 58, 68, 78, 18, 13, 30, 3, 33, 93, 83, 23, 43, 53, 63, 73, 1, 31, 91, 81, 21, 41, 51, 61, 71, 11, 9, 39, 99, 89, 29, 49, 59, 69, 79, 19, 90, 80, 10, 12, 2, 32, 92, 82, 22, 42, 52, 62, 72, 20, 14, 40, 4, 34, 94, 84, 24, 44, 54, 64, 74, 5, 35, 95, 85, 25, 45, 55, 65, 75, 15, 50, 6, 36, 96, 86, 26, 46, 56, 66, 76, 16, 60, 7, 37, 97, 87, 27, 47, 57, 67, 77, 17, 70.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

23. Er ontstaan o.a. twee gesloten series buizen, nl. 1 — 4 — 2 — 5 — 1 en 3 — 6 — 2 — 5 — 3. Deze twee series buizen zijn topologisch te transformeren tot twee buiten elkaar gelegen vierhoeken, die de zijde 2 — 5 gemeen hebben, of tot twee dergelijke vierhoeken, waarvan de een binnen de ander ligt. In beide gevallen zien we, dat de ontbrekende verbindingen 1 — 6 en 3 — 4 elkaar moeten snijden. Het probleem heeft dus geen oplossing.



24. We vragen ons eerst af, in hoeveel delen n rechten een vlak maximaal verdelen. Veronderstel, dat er reeds k rechten aangebracht zijn. De $k + 1^e$ rechte wordt door deze k rechten dan verdeeld in $k + 1$ delen. Hij zal dus $k + 1$ van de reeds aanwezige vlakdelen in tweeën delen. Toevoeging van het k^e vlak geeft dus een vermeerdering van het aantal delen met k . Aanvankelijk hadden we 1 deel. Het vlak wordt door n rechten dus verdeeld in $1 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1) + 1$ delen.

Veronderstel nu, dat in de ruimte reeds k vlakken aangebracht zijn. Het $k + 1^e$ vlak zal door deze k vlakken verdeeld worden in $\frac{1}{2}k(k + 1) + 1$ delen (volgens het voorgaande). Het zal dus $\frac{1}{2}k(k + 1) + 1$ van de reeds aanwezige ruimtedelen in tweeën delen. Toevoeging van het k^e vlak geeft dus een vermeerdering van het aantal delen met $\frac{1}{2}k(k - 1) + 1$. Aanvankelijk hadden we 1 deel. De ruimte wordt door n vlakken dus verdeeld in $1 + \sum_{k=1}^n \{\frac{1}{2}k(k - 1) + 1\} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ delen.

ALDERS

Wiskundeboeken voor M.O. & V.H.O.

Algebra (3 delen) — Planimetrie — Stereometrie — Goniometrie —
Driehoeksmeting — Inleiding tot de Analytische Meetkunde

6de — 40ste drukken

Alders: beknopt-duidelijk-volledig!



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Nieuw:

Prof. Dr. A. O. GELFOND

THE SOLUTION OF EQUATIONS IN INTEGERS

ing. f 3,75

Prospectus en bestelkaart vindt U
bij deze aflevering van EUCLIDES
ingesloten

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Zojuist herdrukt:

P. WIJDENES LOGARITMEN- TAFELS

IN 5 DECIMALEN

uitgave C

Briggse logaritmen van de
getallen van 1 tot 10800

5e druk f 1,10

Hebt U onze nieuwe catalogus B

(schoolboeken voor wis- en
natuurkunde) al ontvangen?

Ze wordt U op aanvraag
gaarne toegezonden.

Binnenkort verschijnt ook
van onze catalogus C
(studiewerken voor wis- en
natuurkunde)
een geheel herziene uitgave.

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

J. VERSLUYS

GEWONE LOGARITMEN

IN 5 DECIMALEN

tafel A

De gewone logaritmen van de
getallen van 1 tot 10000

f 1,00

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Algebra voor M.M.S.

f 3,75

Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen Het behoort tot het beste, dat ik tot dusverre onder ogen heb gehad. Daarom, in afwachting van meer op het meisje ingestelde boeken, van harte aanbevolen.

(D. S. in Chr. Gymn. en M.O.)

Een boek met aardige verzamelingen van eenvoudige vraagstukken. Weinig theoretische uitleg, zodat aan de docent alle kansen geboden worden. Geschikt voor alle scholen, waar eenvoudig wiskundeonderwijs gegeven wordt, zoals op de m.m.s.

(W. J. Brandenburg in Weekbl. v.b. „Genootschap”).

Meetkunde voor M.M.S.

Deel I f 3,75

Deel II f 4,50

Deeltje I geeft de stof tot en met de gelijkvormigheid. Na een inleidende cursus van 30 blz. komt het bewijzen van stellingen aan de orde. Deze cursus bevat naast eenvoudige theorie oefeningen in tekenen en berekenen.

Deeltje II bevat de leerstof voor de derde klas. In elk hoofdstuk komt een vrij groot aantal eenvoudige vraagstukken voor, die betrekking hebben op de daarin behandelde theorie. Verder bevat het boek een aantal herhalingsopgaven, die voorafgegaan worden door een overzicht der besproken stellingen en constructies.

De goniometrie is aan het eind geplaatst, zodat de behandeling daarvan desgewenst achterwege kan blijven.

Het is duidelijk dat de auteurs de leerlingen van de middelbare meisjesschool werkelijk meetkunde willen leren, en dat dit met behulp van dit leerboek mogelijk moet zijn. Trouwens, ook andere leerlingen dan die van een M.M.S. zullen het boek met vrucht kunnen gebruiken

De uiterlijke verzorging van het boek staat op hoog peil.

(Weekblad van de A.V.M.O.)

Hoewel deze boeken niets bevatten, dat men spectaculair zou kunnen noemen, is zowel om hun inhoud als om hun uiterlijke vorm — ik denk ook aan het aardige omslag — een gelukwens voor de schrijvers en de uitgeefster wel op zijn plaats.

(D.S. in Chr. Gymn. en M.O.)

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN