

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

VII - 1 APRIL 1960

INHOUD

Prof. Dr. Howard F. Fehr: Teaching Geometry in the Secondary School	209
Verslag van het Seminarium "New Thinking in School Mathematics" van de O.E.E.S.	218
De Onderwijsbevoegdheid van Officieren.	229
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden.	230
A. J. Poelman: Meetkunde, Onmisbaar voor de Opvoeding	234
Recreatie	238
Kalender	239
Ingekomen Boeken	240

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Singel 13, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

TEACHING GEOMETRY IN THE SECONDARY SCHOOL ¹⁾

by

Prof. Dr. HOWARD F. FEHR

Teacher College, Columbia University, New York City N.Y. U.S.A.

Geometry, as a physical representation of the world in which we live, must play a larger role in primary education today. It is also conceded that an intuitive physical geometry is an essential preparation for the later study of geometry as a purely deductive science. The problem of methods of initiating youth into the study of physical geometry has been well presented in the report to the I.C.M.I. edited by Dr. H. Freudenthal. However, treatment of deductive geometry and axiomatic structure at the secondary school level is perhaps the most controversial issue in mathematics education today in all the countries. Euclid still holds the stage for teaching geometry. Even with the defects of the usual Euclidean synthetic geometry well known, and with the advent of many less objectionable (at least to the mathematician) ways of treating geometry at hand, we are still in a quandry. The rigorous synthetic treatments of Hilbert, or Veblen and others, appear to be too difficult for a first approach to deductive geometry. What shall we do?

The current points of view with regard to Euclid are of two kinds: one, that Euclid is dead, and Euclid must therefore depart from the secondary school scene; the other Euclid must stay, but it must be cleared, by modification, of its failings and inconsistencies. These can be illustrated as follows:

1. Dieudonné, Choquet, and in general the Bourbaki school would replace Euclid in its entirety by the use of *real numbers and vectors*. To this group, the only important part of Euclid is, "the axiomatic system, a few useful consequences, and a few originals. Everything else about triangles, parallelograms, inversion, circles, conics and so on as it is treated has as little relevance to mathematics today as does magic squares or chess".
2. Felix Klein, in his Erlanger program embeds Euclid in the whole study of geometry as that part for which the transformations of the plane preserve metric properties — distance and ratio. Thus for

¹⁾ Voordracht Weekend-conferentie van de Wiskunde Werkgroep WVO, november 1959.

Klein Euclid is not dead, but reconstructed, and the present widespread movement in Germany of *Bewegungsgeometrie* is an attempt to present Euclid as Klein proposed.

3. Hilbert, in his *Grundlagen der Geometrie*, cleared up all inconsistencies and thus saved synthetic euclidean geometry. However, while his seventeen axioms are sufficient, Hilbert never worked out the complete development of the theorems usually ascribed to Euclidean Geometry. He showed that this could be done. The proofs of order on a line and partitioning in a plane, however, soon become cumbersome and time consuming.

4. A different approach, which may be called "Euclid must be modified" was proposed by Birkhoff in 1932, and further developed by many other geometers. Its thesis is that geometry can be approached through the use of the real numbers. In this way order, betweenness, and separation properties are easy to handle correctly and permit the development of modern concepts of congruence and similarity.

The purpose of this paper is to give a summary of some of the experiments now going on in the U.S.A. in the teaching of deductive geometry. All of these experiments presuppose that a large body of geometric facts, have been learned intuitively from ages 11 through 14 years. The pupils in these experiments are 15 years of age.

A Modified Hilbertian Approach. Ball State Teachers College in Muncie, Indiana is headquarters for an experimental program in Hilbert's Geometry being taught in about 12 classes. The emphasis is on logic and Euclidean Geometry is made precise and rigorous. While the logical terms such as implication, conjunction, disjunction and negation are used, the only new symbol used is the arrow ($\rightarrow$) for implication.

The course sharply distinguishes physical geometry from the mathematical geometry that is studied. Such words as draw, measure, place, rotate and move, that denote physics are not used. It is emphasized that points and lines are things that exist only in the mind. Pencil and chalk marks are physical objects used to picture or illustrate geometry, but they are not necessary, only useful.

The facts of geometry, already learned by most pupils, are inconsequential but rigor is of the utmost importance. Nothing is assumed, if it can be proved. The language of sets is used and the words *point*, *line*, *plane*, *congruence*, and *between* are undefined. These words are given meaning through eighteen (18) postulates, distributed as follows.

3 on incidence, the usual point and line axioms.

5 on order and betweenness; the separation of a line and a plane.

7 on congruence of lines, angles and the triangles axiom.

Archimedes axiom on continuity.

A real number axiom on completeness, or the association of the real numbers with distance.

The Playfair parallel axiom.

These are essentially Hilbert's axioms.

In this experiment, children are still proving theorems about order and separation after three months of study; congruence of triangles appears after 6 or 7 months of study; and angle and circle measurement is delayed to the last topic. While the experimenters have expressed some measure of success with the program, the general consensus of *opinion* is that the approach is too severe for the first study of deductive geometry in the secondary school.

The Modified Real Number Approach. In 1932, Birkhoff of Harvard University published a set of postulates for plane geometry based on scale and protractor. In 1940, a textbook was published giving a course of geometry using these axioms. Subsequently other modified forms of these axioms, based on a scale and protractor, have appeared. During the summer of 1959, a group of mathematicians and teachers, working under a new organization called the School Mathematics Study Group, wrote a new development of geometry from the ruler-protractor real number view point. A monograph on the new geometry and a manual for teaching it were written for instructors who are now teaching *the course*. Since over 300 teachers are involved (about 9000 students), I should like to outline the program in some detail.

The approach is to review what the geometry students already know and out of this develop the need for a postulational system — i.e. undefined terms, unproved implications (postulates), definitions, theorems, and a logic. In this work the real numbers, their order, and their association with the points on the real axis are reviewed. The language of sets — such as set of points, membership, union, intersection and empty set — is used continuously. The geometry treats both two and three space simultaneously.

The only undefined terms are point, line, and plane and the common words of logic. There are fifteen postulates, and these suffice for the whole of the study. The postulates are as follows:

1. (a) Every line contains two points (b) Every plane contains

three non-collinear points and (c) space contains four non-coplanar points.

2. Two distinct points contain one and only one line.
3. Any three points are coplanar and three non-collinear points determine a plane.
4. If two points lie in a plane, then the line containing these points lies in the plane.
5. If two planes intersect, their intersection is a line.
6. To every pair of different points, P and Q , there is a positive real number called the distance between P and Q .
7. (Ruler postulate) Points of a line can be placed in correspondence with the real numbers in such a way that
 - (1) Every point of the line corresponds to exactly one real number
 - (2) To every real number there is exactly one point
 - (3) The distance between the points is the absolute value of the difference of the corresponding values.
8. (Ruler placement postulate) Given two points of a line, P and Q , the coordinate system can be chosen in such a way that the coordinate of P is zero and that of Q is positive.
9. Plane separation. Every line separates a plane into two sets called half-planes, each of which is convex.
10. Space separation. Every plane separates space into two sets called half-spaces, each of which is convex.
11. Angle measurement. To every angle $\angle BAC$ there corresponds a real number between 0 and 180 called the measure of the angle and written $m\angle BAC$.

Note that there is no angle 0 or an angle 180 or straight. All angles are less than 180. One reason for this is that an angle is a *set of points*. Hence a zero angle could not be distinguished from a ray, nor a 180 angle from a line. Also in each case it would be impossible to determine the interior of the angle. Yet two angles can have a sum of 180 by the following axioms.

12. Angle Construction. Let $\overline{AB}$ be a ray on the edge of a half-plane H . For every number r between 0 and 180 there is exactly one ray $\overline{AP}$ with P in H , such that $m\angle PAB = r$.
13. If D is a point interior to $\angle BAC$, then $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$. If $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ are opposite rays and $\overline{AD}$ is another ray, then $m\angle DAC + m\angle DAB = 180$.

Congruence is defined as a mapping or one-to-one correspondence between points in a given order that is distance preserving. It is shown that equal line segments, and equal angles are always congruent. Then if a correspondence $\{A, B, C\} \leftrightarrow \{D, E, F\}$ is

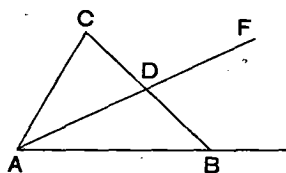
such that every pair of corresponding sides, and every pair of corresponding angles are congruent, the correspondence is a congruence between the two triangles.

After a discussion of this concept of congruence, we have postulate 14. Given a correspondence between two triangles. If 2 sides and an included angle of one triangle are congruent to the corresponding parts of the other triangle, the correspondence is a congruence.

With this postulate the other two congruence theorems (asa, sss) are proved.

15. The parallel postulate as stated by Playfair.

The treatment of this geometry is accompanied by illustrations, and no attempt is made to differentiate physical and mathematical geometry. The logic is essential for establishing or proving what appears to be true. Pasch's so-called-axiom can be proved by using only the above postulates. The postulates also remove the ambiguity in the theorem on the exterior angle of a triangle.



Here we must first prove that F is interior to angle CAB. How do we know it? By the use of the above postulates segment $\overline{CD}$ does not contain B, hence segment $\overline{CD}$ contains no point of $\overline{AB}$, and C and D are on the same side of $\overline{AB}$. Exactly the same way D and B are both on the same side of $\overline{AC}$. Hence D is interior to angle CAB.

Again since D is between A and F, A is not between D and F, hence segment $\overline{DF}$ does not contain A. Then D and F are on the same side of $\overline{AB}$. Exactly the same way D and F are on the same side of $\overline{AC}$. Thus F is the interior of angle CAB by the definition of the interior of an angle. It would be impossible to establish this fact without the given postulates and this is where Euclid failed. In this system of postulates it can be easily proved that an angle bisector meets the opposite side of the triangle, and that a median is interior to the triangle.

Is the rigor gained by this approach worth the care and difficulty needed in teaching? We cannot tell until the experiment is completed. However, my own opinion is that the care and consideration given to axiomatics is beyond the grasp of most pupils at this age,

and further it interferes with the value obtained by the discovery and proof of original exercises.

A Rigorous Real Number Approach. A complete rigorous plane geometry using only sets and the real numbers has been developed by Professor Howard Levi of Columbia University as well as other mathematicians (Artin e.g.) The requirements for success in the course are a thorough understanding of the linear function and equation, and the quadratic function for real variables. Here function is a (one-one) mapping given by ordered pairs. The course can best be described as "coordinate geometry": Last year this course was taught successfully to a group of bright 15 year olds. That it can be taught, however, is no proof that it should be taught or even is the best approach to the study of geometry.

I present an outline of this approach to geometry, because I believe as time goes on, more and more the geometry program in secondary school program will tend in the direction of algebra. No pictures whatsoever are needed to do this algebraic approach, but for pupils who study it, pictures and illustrations of a general nature are a necessity.

The study first of all assumes a complete understanding of the real number system, and especially the manipulation of expressions and equations of the first and second degree, including systems of first degree equations. The geometry is built on five basic axioms, two on the affine line and three on the affine plane. To start there is a set of elements Y , called points which can be put into correspondences with the real numbers. *Point*, and *coordinate system* are the members of the sets and the correspondences. The undefined words are real numbers, sets, and logic.

Postulate 1. Each pair of distinct points O and I of Y is the base of exactly one coordinate system of Y .

Postulate 2. Let O, I and O', I' be bases for any two coordinate systems of Y . Then there is a linear expression $ax + b$ such that for each point $\bar{X}$ of Y , its OI coordinate x is related to its $O'I'$ coordinate x' by the equation $x' = ax + b$.

These two axioms define Y as an affine line and are sufficient to construct the entire geometry of the line. It also enables two lines Y and Y' to be placed in an affinity. This leads to the study of the affine plane L , defined as a set of points for which at least two subsets are lines. The postulates for the plane are

Postulate 3. If A and B are distinct points of a plane there is one and only one line which contains them.

Postulate 4. If l is any line of L and if P is any point of L , there is one line of L containing P which is parallel to l .

Parallelism is defined by the equivalence relation of no points in common or all points in common. Using parallel lines, a parallel projection of one line on another can be established and this leads to

Postulate 5. If l and m are lines of L , then any parallel projection from l to m is an affinity of l to m .

Then all theorems of the affine plane can be proved, including Pasch's theorem, separation theorems, theorems on medians, and in general all theorems except those depending on perpendicularity. To get the Euclidean plane, perpendicularity is defined as a one-to-one correspondence of all directions (a direction is a set of all parallel lines), that is anti-reflexive and symmetric. That is, no direction is paired with itself and if direction l is paired with m , then m is paired with l . Then a rectangular coordinate system with the same scale on each axis gives the Euclidean plane permitting of Pythagorean theorem and the law of cosines.

Similarity of figures is defined in terms of correspondences in which the distance PQ between two points in one coordinate system is related to the distance $P'Q'$ of the corresponding points in a second system by $d(PQ) = kd(P'Q')$, k a positive real number. If $k = 1$, the similarity is a congruence. Correspondences of the entire plane into itself are similitudes and if $k = 1$, isometries. Now the usual theorems on congruence and similarity can be proved and rotations, reflections, and translations are shown to be isometries. The entire subject of trigonometry of angles is derived logically. The circle is defined and measured; angle and arc measure are related. Area is defined as a measure of a point set, through the use of the interior of a unit square. This completes the geometry.

I can assure you that it is a beautiful mathematical development; which almost all our teachers in the U.S.A. find even too difficult for themselves to understand at first study. There is not a single application of geometry in the entire treatment, since it is a straight forward rigorous pure mathematical structure. What you have at the end of this study is the joy of its existence; perhaps sufficient for mathematicians, but not for most of our students.

A sensible approach to Geometry. The Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board of America has studied the problem of reform in the secondary school mathematics program, and after three years of study proposed a program in geometry. They listed three main objectives for its study.

(1) The acquisition of information about geometric figures in the plane and in space. This knowledge is needed by the citizen, the prospective scientist, and for the later study of trigonometry and calculus.

(2) The development of the deductive method (an axiomatic structure) as a way of thinking. This is essential for the understanding of mathematics.

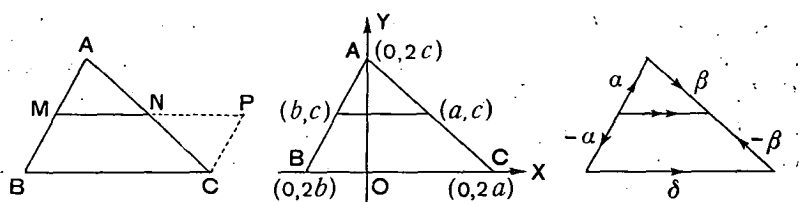
(3) To provide opportunity for original and creative thinking. The proof of original exercises in geometry is one of the best media for creative work in mathematics.

To accomplish this we do not propose to clear Euclid of all blemishes. Rather we propose introducing any postulate that seems reasonable and helps us to get on with the job of learning geometry and deductive methods. To this end there is first given an informal discussion of distance-preserving transformations — translations, rotations, and line reflections — which leads to the postulation of the three congruence theorems. Since it is important that the student sees the system as a whole only eight (8) major theorems are stressed and they form an inviolable deductive chain. All other theorems are treated as original exercises. (A list of these theorems can be given, if requested.) The last of the chain is the Pythagorean theorem and its converse.

This enables an introduction of the coordinate geometry of the plane, writing the algebra and geometry previously studied to form a mightier system for discovering and proving geometric relations. The coordinate geometry (where the scales on each axis must be the same) is contrasted with the graphical algebra (where the scales need not be the same). Thus in graphical algebra $x^2 + y^2 = 25$ is only a special case of the quadratic forms $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2$ the graph of which is finite, closed, and symmetric to the axes. In coordinate geometry $x^2 + y^2 = 25$ is a circle because of distance preserving transformations in the plane. The study is limited to that of the straight line and the circle. Many geometric theorems can now be proved by a "method" whereas in synthetic geometry it was largely trial and error and discovery. The Commission lists 30 theorems which the pupils can prove by the "method" of coordinate geometry.

Coordinate geometry is needed for the study of trigonometry. But it is also good to use vectors in introducing trigonometry. So the commission recommends an introduction to plane vectors. This geometry can serve later in the University as a background for the study of vector spaces and the abstract algebra of vector

spaces. The study of vectors is limited to addition, subtraction, and multiplication by a scalar quantity. A few theorems are proved (5 in fact) and now the pupils have still another powerful method for proving theorems in geometry. Thus the theorem on the line joining the mid-points of two sides of a triangle has the three following possibilities



Pupils get much insight on using two or even three of these methods on many original exercises.

Finally, the student should have knowledge of geometry of three dimensions. There is neither time nor virtue in developing space geometry in a formalistic axiomatic fashion. In fact, much solid geometry can be learned intuitively by extending by analogy, the relations in two space to those in three space: The Commission recommends about six weeks (24 hours) of study on space geometry stressing the relations of lines, planes, and angles in space and the study of the figures on a sphere.

The Commission believes this geometry is a sensible study, one in which the student *does* a lot of mathematics and one in which formalism does not get in the way of learning. It sets a basis for the study of trigonometry and analysis, and for more formal and rigorous study of geometry at the University level. It uses the postulates of the real number approach but it does not belabor the obvious which is usually of little or no interest to the student. It does not attempt to teach everything. It is an approach that permits many extension in subsequent study and it is one in which I believe.

VERSLAG VAN HET SEMINARIUM
„NEW THINKING IN SCHOOL MATHEMATICS”
VAN DE O.E.E.S.

Door de Organisatie voor Europese Economische Samenwerking is een congres georganiseerd over „New thinking in school mathematics”. Het congres is gehouden van 23 november tot en met 4 december 1959 in de abdij van Royaumont, in de buurt van Parijs. Ongeveer 45 vertegenwoordigers van 18 landen namen aan de besprekingen deel. De door de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen aangewezen Nederlandse delegatie bestond uit Prof. H. Th. M. Leeman, Dr. L. N. H. Bunt en Dr. P. G. J. Vredenduin.

In het hier volgende verslag willen we trachten zo objectief mogelijk de hoofdpunten weer te geven die op het congres in behandeling kwamen. Daartoe zullen we ons houden aan de teksten van de gehouden redevoeringen en ons onthouden van persoonlijk commentaar.

De voorzitter, Prof. Dr. M. H. Stone (V.S.), zette in zijn openingsrede het doel van het congres op de volgende wijze uiteen. Het onderwijs in wiskunde op de middelbare scholen is verouderd: bijna alle schoolwiskunde is reeds minstens 200 jaar oud. Er zijn onmiskenbare tekenen die erop wijzen, dat een radicale wijziging in dit programma onontkoombaar is. Dit seminarium is dan ook bijeengeroepen in de overtuiging, dat dergelijke veranderingen essentieel zijn om tot vooruitgang te komen en dat ze zorgvuldig moeten worden overwogen, voordat ze in praktijk worden gebracht. Twee redenen die de noodzakelijkheid doen blijken, zijn: 1e. de sterke groei van de zuivere wiskunde en 2e. de toenemende afhankelijkheid van andere wetenschappen van het gebruik van mathematische methoden en de daarmee gepaard gaande grotere behoefte aan mathematici. De kloof tussen schoolwiskunde en universitaire wiskunde wordt steeds groter. Uit het leerplan dienen daarom verwijderd te worden „dead, useless, outmoded, or unimportant parts of mathematics” om deze te vervangen door belangrijker en meer stimulerend materiaal. Het nut van de wiskunde voor natuurwetenschap en techniek moet mede bepalend zijn voor het kiezen van de leerstof. Dat de positie van de wiskunde steeds belangrijker wordt, brengt met zich mee, dat er op de scholen een grotere hoeveelheid tijd aan dit vak moet worden besteed.

Er zullen gedifferentieerde opleidingen noodzakelijk zijn voor leerlingen die verschillen in mathematische begaafdheid. We dienen er ons in te verdiepen, welke wiskunde zij, die zich niet voor universitaire studie voorbereiden maar in de industrie werkzaam zullen zijn, nodig hebben.

Tot de leerstof voor iedereen, op de lagere school en in de laagste klassen van de middelbare school, moeten behoren een goede praktische kennis van rekenen, zeer elementaire algebra en intuïtieve meetkunde. Daarna zullen zij, die zich niet voorbereiden op een universitaire studie, getraind moeten worden in een beter begrip en een betere beheersing van praktische aspecten van de wiskunde, terwijl de toekomstige student „should receive continuous secondary instruction in algebra, geometry, and the elements of statistical reasoning, designed to give him a fairly high degree of mathematical proficiency within a circumscribed mathematical domain and to enable him to proceed rapidly with further more exacting mathematical study. He should have acquired some feeling of numerical and geometrical magnitudes, some facility for expressing himself in mathematical terms, and some practice in the art of abstraction... He should have learned in all his subjects some concepts and insights recognised as important for modern mathematics.” Als de omstandigheden gunstig zijn, behoort deze opleiding ook te bevatten elementaire waarschijnlijkheidsrekening en statistiek en elementaire analyse.¹⁾

Tot slot nog enkele punten. Er moet coördinatie zijn tussen het onderwijs in wiskunde en in natuurkunde. De verbetering van het wiskundeonderwijs zal reeds moeten beginnen op de lagere school, waar het rekenonderwijs verantwoord moet zijn en niet moet leiden tot tegenzin in de wiskunde. Om tot een adequate wijziging van het onderwijs te komen, zal niet alleen nodig zijn het samenstellen van nieuwe leermiddelen, maar ook een herscholing van leraren en een wijziging van de bestaande leraarsopleidingen. Dit laatste moet met spoed geschieden, opdat zoveel mogelijk leraren reeds voor hun taak berekend zullen zijn zodra een nieuw programma ingevoerd wordt.

Tot zover de openingsrede van Prof. Stone. Het congres was verdeeld in drie secties, namelijk:

sectie I, *New thinking in mathematics*, onder voorzitterschap van Prof. Dr. J. Dieudonné,

¹⁾ Men moet zich over de beperking „als de omstandigheden gunstig zijn” niet te zeer verbazen. Er is hier een Amerikaans hoogleraar aan het woord. De toestanden in de Verenigde Staten zijn zeer verschillend van die in ons land.

sectie II, *New thinking in mathematical education*, onder voorzitterschap van Prof. Dr. H. Fehr,

sectie III, *Problems of implementation*, onder voorzitterschap van P. Théron.

In de secties I en II werden desiderata t.a.v. een nieuw programma voor de middelbare school aan de orde gesteld. In de praktijk bleken deze secties, ten gevolge van hun analoge probleemstelling, tot één sectie samen te vloeien. We zullen ze dan ook niet apart behandelen. Deze besprekingen duurden zeven dagen. In sectie III werden technische problemen behandeld, die het gevolg zouden zijn van een doorvoering van een nieuw programma. Ter sprake kwamen onderwerpen als leerboeken en leermiddelen, leraarsopleiding, lerarentekort. Deze sectie nam drie dagen in beslag. Ten slotte bleef één dag gereserveerd voor algemene conclusies en resoluties.

Als eerste sprak over de eisen die aan een nieuw programma worden gesteld, Prof. Dr. J. Dieudonné (Fr.).

Wegens het grote belang van deze redevoering geven we de inhoud hieronder uitvoerig weer. We waarschuwen de lezer er echter voor, dat hij met voorzichtige kritiek het betoog moet volgen. Leest men te snel, dan lijkt het geheel vaak fantastisch en verliest men de belangrijke aanwijzingen voor verbetering, die de spreker gegeven heeft, uit het oog. De algemene mening was, als we ons niet vergissen, dat opvattingen van Dieudonné enerzijds zeer waardevol zijn, echter anderzijds met een korreltje zout genomen moeten worden. We laten nu Dieudonné aan het woord.

Aankomende studenten moeten reeds vertrouwd zijn geraakt met enige technieken waarin vaardigheid niet snel verkregen wordt en die essentieel zijn, zoals lineaire algebra, analytische meetkunde, goniometrie en enige infinitesimaalrekening. Ze moeten goed getraind zijn in logische deducties en enig inzicht hebben in de axiomatische methode. Om de universiteit te ontlasten is het namelijk noodzakelijk, dat zoveel mogelijk stof die voor universitaire studie belangrijk is en niet boven het bevattingsvermogen van de leerling ligt, reeds door het middelbaar onderwijs behandeld wordt. Daardoor wordt tijdverspilling voorkomen.

Wat kan nu in het oude programma gemist worden, omdat het geen bijdrage levert tot het leggen van fundamenteën waarop later voortgebouwd wordt? Dit is in één slogan samen te vatten: "à bas Euclide!" Deze uitspraak is stellig niet ingegeven door gebrek aan eerbied voor de grootse prestaties van de oude Grieken. Sinds het midden van de 19e eeuw hebben onderzoekingen het mogelijk gemaakt de betekenis van de euclidische meetkunde te herwaarderen

met betrekking tot moderne wiskunde „en séparant ce qui est essentiel d'un amas chaotique de résultats qui ne sont que les reliques éparses de méthodes maladroites ou de points de vue désuets". In het bijzonder heeft de behandeling van de driehoek, van systemen en van eigenschappen van kegelsneden met moderne wiskunde niet meer te maken dan magische vierkanten en schaakproblemen.

Een modern axiomasysteem voor de euclidische meetkunde gaat uit van de reële getallen, het ongedefinieerde groundbegrip vector, de ongedefinieerde grondoperaties optelling van vectoren ($x + y$); vermenigvuldiging van een vector met een scalair (λx , waarin λ een reëel getal is) en het scalaire produkt van twee vectoren ($x \cdot y$). De axioma's zijn:

- A. $x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $1x = x$,
 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
 het maximum aantal lineair onafhankelijke vectoren is 2 of 3
 (al naarmate het systeem dient om de planimetrie of de stereometrie te funderen),
- B. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $x \cdot y = y \cdot x$, $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$,
 als $x \neq 0$, dan is $x \cdot x > 0$.

De axioma's A leveren de affiene meetkunde. Van belang zijn hier lineaire onafhankelijkheid, bases, rechte lijnen, de groep van de translaties en van de homothetische afbeeldingen, parallelle lijnen, lineaire afbeeldingen. Voor de metrische meetkunde hebben we ook de axioma's B nodig. Van belang zijn hier orthogonaliteit, cirkels, rotaties, symmetrie, hoeken en de bewegingsgroep.

Verdere belangrijke onderwerpen zijn:

matrices en determinanten van de orde 2 en 3,
 elementaire infinitesimaalrekening (functies van één variabele),
 constructie van de grafiek van een functie of een kromme die in
 parametrische vorm gegeven is (door middel van differentiëren);
 elementaire eigenschappen van complexe getallen,
 poolcoördinaten.

Hieronder volgt een schetsmatige uitwerking van een programma dat gebaseerd is op bovengenoemde inzichten. De spreker geeft toe niet overtuigd te zijn, dat het op deze wijze uitvoerbaar zal zijn, maar meent, dat het in elk geval kan dienen als werkhypothese zonder dat aan de details te veel belang wordt gehecht.

Twee opmerkingen vooraf:

- axiomatische theorie is niet mogelijk zonder vooraf verkregen voldoende intuïtief inzicht,
- logische conclusies mogen nimmer zo gepresenteerd worden, dat lacunes in de bewijsvoering verdoezeld worden (speciaál in de

beginselen van de meetkunde moet men de relatieve juistheid van de conclusies laten zien en zich ervoor hoeden een soort metafysische waarheid te suggereren).

Begonnen moet worden met intuïtieve algebra en intuïtieve planimetrie. Op logische gevolgtrekking kan men de nadruk leggen, waar dit mogelijk is. De intuïtieve meetkunde moet gericht zijn op begrippen als symmetrie, translatie, samenstelling van transformaties, en niet op de eigenschappen van de driehoek. Men kan reeds spreken over verzamelingen (en niet over meetkundige plaatsen), het symbool ϵ (is element van) gebruiken en eveneens het symbool $\Rightarrow$ (impliceert). Bij het oplossen van vergelijkingen is het van belang de grafische methode te volgen en methodes te oefenen voor het approximeren van wortels. Formules voor wortels, zoals de formule voor de vierkantsvergelijking, zijn onbelangrijk.

Na deze intuïtieve stof moet zo spoedig mogelijk overgegaan worden op een axiomatische fundering van het natuurlijk getal (Peano) en de methode van de volledige inductie. Daarna kan men een axiomasysteem geven voor de reële getallen. Bedoeld is hiermee niet de constructie van de reële getallen uitgaande van het rationale systeem (Dedekind, Cantor), maar de axioma's voor een archimedisich lichaam, waarin inkrimpende intervallen een niet lege doorsnede hebben.

Nu kan het bovenstaande axiomasysteem A en B voor de vlakke meetkunde gegeven worden. Gevolgtrekkingen hieruit kunnen zowel algebraïsch als meetkundig geïnterpreteerd worden. Nadruk moet worden gelegd op lineaire transformaties, waarbij matrices en determinanten vanzelf ter sprake komen. Daarna komen transformatiegroepen aan de orde, het begrip hoek en de goniometrische functies, de introductie van complexe getallen en hun geometrische betekenis en eventueel de classificatie van kegelsneden.

Daarnaast kan, als meer technisch onderwerp, elementaire infinitesimaalrekening behandeld worden, weliswaar niet volledig streng, maar met een goede definitie van limiet en van continuïteit, met toepassingen hiervan op berekening van oppervlakten en op constructies van krommen die in parametrische vorm gegeven zijn.

Tot slot komt de axiomatische behandeling van de stereometrie, weer volgens de axioma's A en B, ter sprake. En bovendien, als meer technisch gerichte onderwerpen, logaritmen en exponentiële functies, berekening van inhouden en het construeren van een kromme die gegeven is door een vergelijking in poolcoördinaten.

In het programma komen uitsluitend begrippen voor die een intuïtieve interpretatie toelaten. Hogere graden van abstractie dienen aan universitair onderwijs voorbehouden te blijven.

Het gebied van de toegepaste wiskunde werd geheel buiten beschouwing gelaten.

Tot slot merkte de spreker nog op, dat volgens hem geometrisch inzicht van het grootste belang is en dat hij slechts de methoden om dit inzicht te verkrijgen heeft willen verbeteren.

Dr. W. Servais (België) zette uiteen, op welke wijze een leergang in algebra samengesteld kan worden, waarin de logische structuur van de algebra tot zijn recht komt.

Het is gewenst, dat men een juist inzicht krijgt in de logische begrippen die bij redeneringen worden gebruikt. Daartoe behoort allereerst het begrip verzameling. Verder relaties tussen verzamelingen, zoals identiteit ($A = B$), inclusie ($A \subset B$), doorsnede ($A \cap B$), vereniging ($A \cup B$), verschil ($A - B$), complement ($\sim A$) en de nulverzameling ($\emptyset$). Verzamelingen worden gedefinieerd door eigenschappen. Met de bovengenoemde relaties tussen verzamelingen corresponderen de volgende logische relaties: ekwivalentie ($p \Leftrightarrow q$), implicatie ($p \Rightarrow q$), conjunctie ($p \wedge q$), disjunctie ($p \vee q$), negatie ($\sim p$), en de kwantificatoren alle ($\forall$) en er is ($\exists$).

Van centraal belang zijn verder de begrippen functie en relatie. De functie geeft aanleiding tot een afbeelding van een verzameling in een andere verzameling. Het begrip (binaire) relatie is algemener, omdat daarbij aan één element van de ene verzameling meer dan één element van de andere kan worden toegevoegd. Als bijzondere soorten relaties zijn de orderrelaties en de ekwivalentierelaties (transitief en reflexief) belangrijk. Deze laatste geven aanleiding tot het onderverdelen van een verzameling, waarbij elk element met alle elementen waartoe het in de gegeven relatie staat, tot één deelverzameling wordt verenigd.

Een belangrijke rol spelen de operaties in de algebra. Eigenschappen van deze operaties kunnen zijn commutativiteit, associativiteit en distributiviteit. Bestudering van deze operaties leidt tot de begrippen lichaam en ring. Zo kunnen de ring van de gehele getallen, de restklassenring en het lichaam van de rationale getallen ter sprake worden gebracht. Verder leidt deze bespreking ook tot het begrip groep. Zo ontstaat een groep, als we de operatie optellen in het systeem van de gehele getallen beschouwen. Het begrip groep kan verder verduidelijkt worden door middel van geometrische voorbeelden uit de theorie van de transformaties (b.v. de groep van de spiegelingen en rotaties).

Nadat de reële getallen geïntroduceerd zijn, kunnen de complexe getallen worden gedefinieerd als paren reële getallen. Nu kan de invoering van gehele en rationale getallen gereviseerd worden door ook deze als getallenparen te definiëren.

Als laatste onderwerp komt de vectoralgebra aan de orde, en wel de theorie van de vectorruimten met 1, 2, 3, . . . , n dimensies. Bestudering hiervan leidt tot het bespreken van systemen van lineaire vergelijkingen, matrices en determinanten.

Het spreekt vanzelf, dat al deze begrippen slechts kunnen worden ingevoerd, als de leerling tevoren voldoende intuïtief inzicht is bijgebracht.

Dr. O. Botsch (Duitsland) richtte zich eveneens tegen de ouderwetse euclidische meetkunde. Dit statische systeem dient vervangen te worden door een meer dynamische beschouwingwijze, waarbij het begrip van de geometrische transformatie het centrale gezichtspunt wordt. We moeten beginnen met de eenvoudigste transformaties te bestuderen, b.v. de spiegeling. Door middel van materiële hulpmiddelen (glasplaat) kunnen we de leerlingen een intuïtief begrip van deze transformatie bijbrengen. Behandeling van de translatie en de rotatie (in het bijzonder de spiegeling t.o.v. een punt) leidt tot een intuïtieve behandeling van het begrip congruentie, inclusief de congruentiegevallen voor driehoeken.

Uitgaande van het begrip translatie kunnen we komen tot het vectorbegrip en tot de additie van vectoren. Men kan tevens laten zien, dat de tot nog toe besproken transformaties een groep vormen, hoewel het misschien beter is met de invoering van het begrip groep te wachten, totdat ook niet-abelse groepen van transformaties zijn voorgekomen.

Vervolgens komen verschillende affiene transformaties aan de orde. Allereerst de afschuiving, d.i. de transformatie waarbij elk punt verplaatst wordt evenwijdig aan een rechte l over een afstand, die evenredig is met de afstand van het punt tot l . Daarna de strekking, waarbij elk punt verplaatst wordt in een richting loodrecht op een rechte l , en de afstand van het punt tot l met een constante factor vermenigvuldigd wordt. Combinatie van twee strekkingen t.o.v. loodrecht op elkaar staande rechten levert de vermenigvuldiging t.o.v. een punt. Combinatie van vermenigvuldigingen t.o.v. een punt met congruente transformaties leidt tot de groep van de gelijkvormigheidstransformaties.

Een andere interessante groep ontstaat door combinatie van de rotaties om een punt met de vermenigvuldigingen t.o.v. dat punt. Deze groep is isomorf met het lichaam van de complexe getallen. (na elkaar uitvoeren van twee transformaties komt overeen met vermenigvuldiging van twee complexe getallen). Op deze manier kunnen de complexe getallen geïntroduceerd worden op een zodanige wijze, dat het geven van een abstracte aritmetische definitie overbodig wordt.

Verder komen aan de orde projectiemethoden in de ruimte. Deze kunnen gebruikt worden om de kegelsneden te doen ontstaan.

Tot zover is slechts synthetische geometrie op intuïtieve basis bedreven. Daarop voortbouwend kan in hogere klassen een strengere meetkunde worden opgebouwd langs analytische weg. De transformaties krijgen nu aritmetische vorm, te beginnen bij $x' = x + a$ en $y' = y + b$ (translatie) en eindigend met de collineatie $x' = A(x, y) : C(x, y)$ en $y' = B(x, y) : C(x, y)$, waarin A , B en C lineaire functies van x en y zijn.

Men ziet, dat dit programma sterk onder de invloed staat van het Erlanger Programm van Felix Klein (1870). In Duitsland heeft men op basis van dit programma in 1906 het Meraner programma voor onderwijs in wiskunde op de middelbare school ontworpen. Het heeft echter daarna nog ongeveer 50 jaar geduurd eer schoolboeken geschreven werden die uitgingen van transformaties. Merkwaardigerwijze zijn er toen binnen een jaar verscheidene verschenen, getiteld „Abbildungs-Geometrie“, „Bewegungs-Geometrie“ of „Verwandschafts-Geometrie“.

Uit deze voordrachten en ook uit de vele en uitvoerige discussies die er het gevolg van waren, blijkt, dat men hervormingen in het wiskundeprogramma zoekt in de volgende richtingen. Logische en mathematische structuren zijn van meer belang dan kennis van veel eigenschappen. Het onderwijs in planimetrie en stereometrie geschiedt volgens sterk verouderde methoden. De nieuwe begrippen en onderwerpen waarvan verlangd wordt, dat ze hun intrede in het onderwijs doen, zijn in grote trekken de volgende: verzameling, ring, lichaam, groep, transformatie, vector, lineaire algebra, poolcoördinaten, complexe getallen. Daarnaast wordt het van groot belang geacht, dat men enig inzicht kweekt in de betekenis van de axiomatische methode en in de betekenis van de logische hulpmiddelen die bij het wiskundig denken gebruikt worden.

Rest ons nog te vermelden, dat in deze sectie Prof. Dr. G. Choquet (Fr.) en Mlle. Lucienne Félix (Fr.) voordrachten hielden over het rekenonderwijs. Volgens hen moet het rekenonderwijs reeds gericht zijn op latere doelstellingen. Met behulp van de methode Cuisenaire, waarbij van blokjes met verschillende lengte gebruik gemaakt wordt, is het goed mogelijk de hoofdeigenschappen van de optelling en de vermenigvuldiging te demonstreren. Ook is het mogelijk al aan jonge kinderen begrippen als negatieve getallen, restklassen en talstelsels duidelijk te maken.

Verder spraken nog Prof. Dr. H. Fehr (V.S.) en Prof. Dr. E. A. Maxwell (Eng.). De rede van Prof. Fehr, waarmee sectie II geopend

werd, hield de probleemstelling voor deze sectie in. Prof. Maxwell sprak over het onderwijs in infinitesimaalrekening.

Twee voordrachten hadden betrekking op de toegepaste wiskunde. Prof. Dr. A. W. Tucker (V.S.) besprak in het bijzonder de methode van de lineaire programmering en verdedigde, dat eenvoudige voorbeelden van deze methode op school behandeld zouden kunnen worden.

Dr. L. N. H. Bunt sprak over het belang van onderwijs in de statistiek op de middelbare school. Hij gaf een kort overzicht van de vorderingen van dit onderwijs in een aantal landen, en sprak in het bijzonder over het programma dat we in ons land voor het gymnasium-A kennen. Hij legde de nadruk op de wenselijkheid zich bij het onderwijs te beperken tot een behandeling van enkele essentiële begrippen en methoden, met het toetsen van een hypothese als centrale gedachte. Hij lichtte dit toe door een bespreking van het toetsen van een hypothese omtrent de samenstelling van een populatie, zoals die in zijn boek behandeld wordt, en omtrent het verband tussen twee grootheden dat wordt uitgedrukt door een coëfficiënt van rangcorrelatie.

Over sectie III kunnen we kort zijn. De voorzitter stelde in zijn openingsvoordracht de problemen voor deze sectie. Dr. Ch. Brunold gaf een overzicht over het Franse onderwijssysteem en de manier waarop men in Frankrijk op gereglementeerde manier het lerarentekort poogt te compenseren. R. E. K. Rourke (V.S.) gaf een ooggetuigeverslag van het onderwijs in de Sovjet Unie en Prof. S. Bundgaard besprak het onderwijssysteem en de problemen van de leraarsopleiding en de herscholing van leraren in Denemarken.

Meer aandacht willen we besteden aan de voordracht van Prof. Dr. E. G. Begle (V.S.). Prof. Begle, leider van de School Mathematics Study Group, gaf een uiteenzetting van wat door deze werkgroep in de Verenigde Staten gedaan is.

Men zag in, dat het wiskunde-onderwijs in de Verenigde Staten een grote achterstand had. De werkgroep, samengesteld uit een groot aantal leraren, hoogleraren en andere deskundigen, wilde trachten hierin verbetering te brengen. Ze is voor het eerst bijeengekomen in de zomer van 1958. Gedurende ongeveer een maand werkte men tezamen aan de voorbereidingen voor een serie wiskundeboeken voor de hoogste vier leerjaren van de middelbare school. In de eerste plaats werd vastgesteld wat de hoofdinhoud van deze leerboeken moest zijn, waarbij men zich los trachtte te maken van traditionele gezichtspunten. Subgroepen bespraken de leerstof voor de vier verschillende leerjaren. Daarna stelden

één of twee personen een ontwerp voor een hoofdstuk samen, dat vervolgens onderwerp van discussie voor de subgroep uitmaakte. In de zomer van 1959 werd dit werk voortgezet gedurende negen weken door een groep die bijna tweemaal zo talrijk was. Uitgaande van het werk dat het vorige jaar reeds gedaan was, slaagde men er nu in volledige leerboeken te ontwerpen. Ook deze werden daarna in ruimere kring besproken en op grond van de geleverde kritiek herzien. De eindtekst wordt op verschillende scholen geprobeerd. In de zomer van 1960 zullen de verkregen ervaringen uitgangspunt zijn voor een nadere revisie van de teksten.¹⁾

De leerstof voor de twee voorafgaande jaren van de middelbare school werd eveneens herzien. Hoewel deze nog slechts uit intuïtieve wiskunde bestaat, bleek het toch gewenst de stof zo in te richten, dat ze een doelmatige voorbereiding voor de latere leerstof vormt. Zelfs heeft de werkgroep het plan ook het rekenonderwijs op de lagere school onder de loep te nemen.

Het spreekt vanzelf dat dit werk niet zonder aanzienlijke financiële hulp kon worden verricht; de overheid heeft er dan ook enige miljoenen dollars voor beschikbaar gesteld.

Behalve de voorstellen van de School Mathematics Study Group zijn er die van andere groeperingen. Steeds wordt echter een bijzonder probleem gevormd door de herscholing van de leraren, omdat voor velen de voorgestelde leerstof nieuw is. Door het geven van cursussen tracht men hierin te voorzien. Door het aangeven van geschikte literatuur en zelfs door het schrijven van speciale boeken tracht men het verder de leraren mogelijk te maken zichzelf in de nieuwe leerstof in te werken. Aan veel universiteiten en colleges wordt de opleiding van de wiskundeleraren herzien.

Tot slot de resoluties, en wel eerst die, welke met de inhoud van het leerprogramma te maken hebben. Een voorstel, aan te bevelen, dat de behandeling van de vierkantsvergelijking tot een uiterst minimum (formule voor de wortels met enkele toepassingen) wordt gereduceerd, verkreeg een meerderheid. Unaniem bleek men er voorstander van te zijn de behandeling uit te sluiten van bijzondere lijnen en cirkels van een driehoek, systemen van cirkels, inversie, eigenschappen van kegelsneden. Daarentegen ging het voorstel, zelfs de congruentiegevallen van driehoeken niet meer te behandelen, de vergadering te ver; het werd verworpen. De meerderheid bleek er voorstander van de symbolen $\forall$ (alle), $\exists$ (er is), $A - B$ (verschil

¹⁾ Deze boeken wijken sterk af van hetgeen men hier te lande gewoon is. Het is zeer de moeite waard er kennis van te nemen.

van twee verzamelingen) en CAB (het complement van B t.o.v. A) bij het onderwijs te gebruiken. (Over de wenselijkheid van het gebruik van $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$ was men vroeger reeds tot overeenstemming gekomen.)

Een belangrijke resolutie betrof de statistiek. Deze hield in, dat elementaire kansrekening als een adequaat onderdeel van de schoolwiskunde dient te worden beschouwd, dat „statistical inference be recognised as applied mathematics which contributes in an essential way to decision processes in the spirit of the „scientific method” basic to so many fields both in the physical sciences and in the science of human behaviour; furthermore that statistical reasoning is of growing importance in the field of public affairs”, en dat om deze redenen onderwijs in kansrekening en statistiek ingelast dient te worden in het leerplan van de middelbare school. De resolutie werd met algemene stemmen aangenomen.

Verder twee resoluties over de stappen die gedaan moeten worden ter voorbereiding van een nieuw programma. Om tot modernisering te geraken, is het noodzakelijk, dat in de verschillende landen leerboeken worden ontworpen. Ter vergemakkelijking van dit werk wordt de O.E.E.S. verzocht een commissie in te stellen bestaande uit vertegenwoordigers van universiteit en middelbare school met de opdracht een beknopte leergang samen te stellen betreffende de verschillende manieren waarop modernisering mogelijk is. Deze leergangen zouden dan ter beschikking gesteld worden van de diverse landen met de bedoeling, dat ze daar aan de praktijk getoetst worden. Binnen drie jaar zou de O.E.E.S. de resultaten van deze proefnemingen moeten vernemen.

Daarbij aansluitend werd een resolutie ingediend, waarin de O.E.E.S. verzocht wordt de regeringen op de hoogte te brengen van de belangrijkheid van dit werk en erop aan te dringen de vereiste soepelheid te betrachten met betrekking tot leerprogramma's en examens om de uitvoering van experimenten mogelijk te maken.

Deze beide resoluties werden met algemene stemmen aangenomen.

Eveneens werd met algemene stemmen aangenomen een resolutie waarin tot uitdrukking werd gebracht, dat leraren die les geven in de hogere klassen van het middelbaar onderwijs en zo mogelijk ook zij, die les geven in de lagere klassen, aan de universiteit behoren te worden opgeleid. Als laatste vermelden we nog, zij het met enige tegenzin, een resolutie die inhield, dat leraren behoorlijk gesalarieerd moeten worden en onder gunstige omstandigheden hun werk moeten kunnen verrichten.

We eindigen met de hoop uit te spreken, dat de op deze conferen-

tie gevoerde besprekingen zullen mogen leiden tot een, door alle deelnemers gewenste, langs voorzichtige weg verkregen, modernisering van het wiskundeonderwijs.

H. TH. M. LEEMAN,

L. N. H. BUNT,

P. G. J. VREDENDUIN.

DE ONDERWIJSBEVOEGDHEID VAN OFFICIEREN

Naar aanleiding van het artikel in het februarinummer werd van Zijne Excellentie de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen een brief (VHMO 128651), dd. 9 maart 1960, ontvangen, die wij voor belanghebbenden hieronder gaarne afdrukken.

Het artikel over de onderwijsbevoegdheid van ingenieurs en officieren, verschenen in het nummer van februari 1960 van uw blad en overgenomen uit de Mededelingen van de Bond van Verenigingen voor Christelijk Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs, bevat, naar eerst thans onder mijn aandacht komt, de mededeling, dat alle officieren behalve de officieren van administratie, die voor 1 september 1954 hun opleiding voltooiden, onderwijsbevoegdheid voor het vak wiskunde bezitten.

Sinds de officiersopleidingen op 1 mei 1948 zijn hervat, ontvangen evenwel officieren van het wapen der infanterie en der cavalerie geen onderwijs meer in de technische wetenschappen, als bedoeld in het vervallen art. 89 der middelbaar-onderwijswet.

Deze officieren, die sindsdien de cursus ten einde hebben gebracht, bezitten derhalve op grond van hun opleiding tot officier geen bevoegdheid tot het geven van middelbaar onderwijs in enig vak, ook niet in de wiskunde. Volledigheidshalve merk ik nog op, dat officieren der infanterie en der cavalerie, die vóór 1 mei 1948 de cursus ten einde hebben gebracht, de bevoegdheid tot het geven van onderwijs in de wiskunde, die zij aan hun opleiding ontleenden, hebben behouden.

Een aanvullende mededeling op dit punt in uw blad zou aanbeveling verdienen.

De staatssecretaris,

namens deze,

de chef van de afdeling

Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs
voor deze,

w.g. mr. J. L. Meertens

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

XLV. Dr. O. Postma, wis- en natuurkundige.

Obe Postma is er een voorbeeld van dat belangstelling voor en studie van de exacte wetenschappen en een functie als wiskundeleraar gedurende meer dan veertig jaren, samen kunnen gaan met een geheel anders gerichte aandacht van de geest. Wie de taal verstaat van deze oudste dichter van West-Europa vindt in het dr. O. Postma-nûmer van het litterair tydskrift *De Tsjerne* van maart 1953 en in *It Beaken* van de Fryske Akademy van maart 1958, een ter gelegenheid van zijn vijfentachtigste en van zijn negentigste verjaardag verschenen reeks van getuigenissen en kritische beschouwingen over zijn verzen en zijn werk als historicus. De *Encyclopedie van Friesland* noemt hem „een der belangrijkste Friese dichters van deze eeuw, verfijnd lyricus van aardse gerichtheid, maar tegelijk van wijsgerige eenheidsbeleving”.

Obe Pieters Postma werd op 29 maart 1868 te Kornwerd geboren en studeerde wis- en natuurkunde te Amsterdam. Al heeft deze studie, begonnen om te komen „ta it wêzen fan de dingen” en later dan ook met filosofie uitgebreid, hem geen volledige voldoening geschonken, en al zou hij naar eigen uitspraak „gjin bysûndere oanlêch foar de natuerwittenskippen” hebben gehad, dan staat daar het feit tegenover dat hij tot omstreeks zijn vijftigste levensjaar artikelen publiceerdde over theoretische physica en over grondslagenleer, die voor zover zij in de verslagen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen verschenen, aangeboden werden en zorgvuldig gewogen door niemand minder dan Lorentz.

In de dissertatie waarop Postma in 1895 bij Van der Waals promoveerde is van de problematiek die hem later zou bezighouden, nog weinig sprake. Zij draagt de goed nederlandse titel „*Iets over uitstraling en opslorping*” en het onderwerp betreft de emissie als functie van temperatuur en golflengte. De promovendus blijkt de klassieke verhandelingen van Kirchhoff, Stefan, Wien en

Boltzmann grondig te hebben bestudeerd, staat er onafhankelijk en kritisch tegenover en confronteert de theoretische beschouwingen met in de litteratuur ontmoete experimentele gegevens. Uit de stellingen blijkt een zekere voorkeur voor natuurfilosofische vragen.

Reeds vóór zijn promotie was Postma benoemd tot leraar aan de Rijks Hogere Burgerschool te Groningen en hij bleef daaraan verbonden van 1894 tot dat hij in 1933 de leeftijdsgrens bereikte. Hij doceerde wiskunde en mechanica, helder en zorgvuldig, was tot begrip en vergeving bereid maar onkreukbaar rechtvaardig. In de leraarskamer had hij het gezag dat natuurlijk voortvloeit uit een zuiver en onaantastbaar karakter; in uren van spanning en misverstand werd het bemiddelende woord van de meest bescheiden van allen door een ieder dankbaar gevolgd.

Karakteristiek voor het wetenschappelijke werk van Postma — men herkent dezelfde trekken in het uitvoerige historische oeuvre van zijn latere levensperiode — is wat men misschien zijn positief gerichte kritische gesteldheid mag noemen. Hij leeft in een staat van onvrede met de halve waarheid en kan er slecht in berusten dat hem begrippen of ontwikkelingen niet helder voor de geest staan. Aan bewondering voor grote figuren ontbreekt het hem niet, maar reeds in zijn proefschrift blijft zijn intellectuele argwaan zich tegenover de meest eminente autoriteit handhaven, niet uit zucht tot beter weten, maar uit verantwoordelijkheidsbesef tegenover zichzelf. Bij deze gesteldheid verwondert het niet dat Postma's aandacht ging naar de problematiek van de physica aan haar basis. Zijn geschriften daarover — na een halve eeuw uiteraard naar feitelijke inhoud voor een deel nog slechts van historische betekenis — zijn tegengesteld aan wat het oppervlakkige vermoeden van een dichter verwachten zou. Geen schemerige speculatie, doch een rationeel vertoog; voor metrum en melodie het zakelijke proza en de logische gevolgtrekking. En het is op de een of andere wijze een bevrijdende gewaarwording te beseffen dat dezelfde man en reeds in dezelfde tijd subtiële verzen schrijven kon over leven en landschap. Wie buiten hun taal staat kan een indruk krijgen van de aard van dit dichterschap als hij weet dat Postma een bewonderaar is van Slauerhoff en zo verwant met Rilke en Emily Dickinson dat hij ons meesterlijke vertalingen van hun poëzie kon schenken.

In 1903 publiceerde Postma de monografie „*Het meten*, een kennistheoretische studie”, waarin hij met als uitgangspunt geschriften van Helmholtz, Husserl, Poincaré en vele anderen (waaronder ook Bertrand Russell, waarlijk zijn tijdgenoot)

in het reine tracht te komen met de vraagstellingen van het onderwerp. De aard der fysieke grootheden en het hun vergezellende getallensysteem, de „eigenlijke” en de „surrogatieve” meting, de abstracte ruimte der meetkundigen naast en tegenover die der „werkelijkheid”, de principiële moeilijkheden bij de meting van lengte, tijd en massa hebben zijn aandacht. De relativiteitstheorie zou hier spoedig meer licht brengen; Postma is later op deze vragen voor zover ik weet niet teruggekomen.

In zijn geschrift komt ook de waarschijnlijkheidsrekening ter sprake; een van de stellingen bij het proefschrift had zich reeds kritisch uitgelaten over de betekenis van de „gemiddelde waarde” van waarnemingen. Dit hoofdstuk der wetenschap zou Postma intensief bezighouden. In de jaren 1908-1910 verschijnen in het Nieuw Archief voor Wiskunde verhandelingen over „de grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening” en over „de wet van het toeval”, waarin de klassieke onzekerheden over de betekenis van fundamentele begrippen als gelijke kans, kans a priori en de wet der grote getallen de schrijver tot uitvoerige beschouwingen brengen daarbij geleid door een grondige kennis der litteratuur van Laplace tot Bruns (wiens hoofdwerk in 1906 verscheen) en met bijzondere waardering voor de opvattingen van Von Kries, die vooral was opgekomen tegen de subjectieve elementen in de kansbepaling. Er is in de laatste halve eeuw op het gebied der waarschijnlijkheidsrekening een ontwikkeling geweest, die moeilijk kon worden voorzien, maar Postma's artikelen blijven kenmerkend voor een tijdvak waarin hier te lande de belangstelling voor fundamentele vragen schaars was.

De verdere geschriften op natuurwetenschappelijk gebied sluiten zich in zoverre bij deze beschouwingen aan dat zij betrekking hebben op de statistische physica.

In een viertal artikelen in 1906-1908 wordt kritiek geoefend op de beschouwingen van Boltzmann over het door deze ontwikkelde H-theorema, waarbij verschillende onvolkomenheden in de afleiding worden aangewezen. Ook de behandeling door Jeans blijkt hem allerm minst feilloos, waarna Postma met instemming het werk van Gibbs aanhaalt door wiens invoering van het begrip *ensemble* een zoveel meer bevredigende theorie ontstaat. In 1915 komt hij nog eens, mede met betrekking tot de quantumtheorie van Planck, op dergelijke problemen terug, daarbij een scherpzinnige analyse gevend van de even bondige als diepzinnige stelling van Boltzmann: de entropie is de logaritme van de waarschijnlijkheid.

Interessant is een helder artikel van 1918 over de Brownbe-

beweging; hij vergelijkt de verschillende formules die voor de gemiddelde weglengte van een gesuspendeerd deeltje afgeleid waren en weegt de veronderstellingen die er aan ten grondslag liggen tegen elkaar af. Van belang is dan vooral of en zo ja op welke wijze de hydrodynamische weerstand volgens de regel van Stokes in rekening wordt gebracht. Postma stelt nog vast dat Lamb en Basset bij hun berekeningen van de weerstand die een bol bij bepaalde veronderstellingen in een vloeistof ondervindt, tot enigszins verschillende uitkomsten zijn gekomen en lost de tegenstelling op door aan te tonen dat de eerste bij zijn energetische beschouwingen een bepaalde term buiten rekening heeft gelaten.

Na 1918 blijft de Friese dichter, die later zijn verzen samenvat in enige prachtige bundels, maar de physicus Postma maakt plaats voor de historicus. Zijn bibliografie vermeldt tientallen artikelen en enkele uitvoerige boeken over de geschiedenis van het recht, de landbouw en het maatschappelijke leven in zijn gewest. Hij vertrekt in 1933 van Grins naar Ljouwert en werkt daar met onvermoeide drang en blijvend heldere geest. In een van zijn verzen noemt hij zich zelf een *âld fintsje* en wie zou hem, gezien de jaartallen, willen tegenspreken? Wat hij voor Friesland betekent heeft vorm gevonden in een rij van huldigen en velerlei eerbetoon; hij weet die te waarderen met oprechte voldoening, maar ook met de speelse zin die zijn wezen niet vreemd is.

In Postma gaan *sense* en *sensibility* evenwichtig samen, uiterste gevoeligheid met scherpe neiging tot weten; hij is even wijsgerig zachtmoedig als stil onverzettelijk. Volgens sommigen is hij daarom het friese karakter in zijn uitnemendste verschijningsvorm. Tot dit bijzondere land zou men willen zeggen: zo zij het.

MEETKUNDE, ONMISBAAR VOOR DE OPVOEDING

door

A. J. POELMAN

Bennekom

Het artikel van collega Streefkerk¹⁾ noodt mij tot het maken van enige opmerkingen over de meetkunde. Collega S. heeft een zeer belangrijk aspect van de meetkunde vergeten: Aan de beantwoording van zijn vraag: „Waartoe dient de meetkunde” wil ik toevoegen: „Het bestuderen van de wereld, waarin wij leven”. Tal van handelingen, ervaringen en waarnemingen uit het dagelijks leven zijn gebaseerd op eigenschappen uit de meetkunde: Van de vroege morgen tot de late avond hebben wij ermee te maken en daarom mag de meetkunde niet van het programma verdwijnen. Onder meetkunde versta ik zowel de planimetrie als de stereometrie; voor mij bij het onderwijs in de eerste klasse(n) een onverbrekkelijk geheel. Collega S. wil de planimetrie wel handhaven maar de stereometrie laten verdwijnen en maakt daardoor de meetkunde vleugellam. Wel ben ik er een voorstander van het onderwijs in de meetkunde vanuit een geheel ander standpunt op te zetten.

Een grote tekortkoming van ons onderwijs zowel in de planimetrie als de stereometrie is, dat wij het eerste hoofdstuk weglaten. Dat eerste hoofdstuk is een oriëntatie in het meetkundeveld. Deze oriëntatie moet met voorwerpen en verschijnselen uit het dagelijks leven plaatsvinden. Enige voorbeelden:

Hoeveel poten heeft een tafel nodig.

Kan een tafel met drie poten wiebelen? En met vier poten?

Hoe komt dat.

Onder een kerstboom is vaak een houder met twee latten gespijkerd om de boom overeind te houden. Op welke eigenschap is dat gebaseerd.

Hoe kunnen we een paal loodrecht in de grond slaan.

Waarom heeft een deur twee scharnieren nodig. Hoe moeten we een derde aanbrengen.

Als een deur scheef hangt of klemt, wat moeten we dan doen en welke eigenschappen kunnen we hier ontdekken.

¹⁾ Euclides, 34, blz. 267.

Als een voorwerp zich van ons verwijderd, lijkt het kleiner te worden: Hoe komt dat.

Gaat U eens na hoe de eigenschappen, die hier gebruikt worden, in een stereoboek staan en hoeveel moeite het de leerlingen kost ze te verwerken:

Het is zo eenvoudig en we maken het zo moeilijk.

Er liggen tal van dergelijke voorbeelden voor het grijpen. Een groot aantal vindt U in „Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse“ door Mevr. T. Ehrenfest-Afanassjewa, uitgever M. Nijhoff Den Haag (1931).

Op deze wijze ontstaat een werkelijke intuïtieve inleiding. Een groot aantal eigenschappen, schijnbaar zonder veel verband, wordt aan de leerlingen voorgezet. Elke leerling, die zich voor de ons omringende wereld interesseert, zal belangstelling hebben en allicht nieuwsgierig zijn, wat we met deze verschijnselen uit zijn wereld willen doen. Zij komen tot de ontdekking, dat ze niet in strijd met deze eigenschappen kunnen handelen.

De volgende stap is: Bestaat er verband tussen de eigenschappen en kunnen wij ze ordenen. Dat is het begin van een systematische cursus. Deze ordening is van zeer groot belang, want men kan beter een aantal stellingen onthouden en begrijpen, die in logisch verband met elkaar staan, dan een aantal, die los van elkaar staan. Eén der sterkste punten van de westerse beschaving is juist verworven kennis te systematiseren. Dit vermogen is van belang voor het maken van een atoombom, voor het ontwerpen van een huis enz. In dit stadium van de meetkunde kunnen vragen oprijzen als: Hoe kunnen we vaststellen, of een lijn recht is. De stereometrie kunnen we hier niet missen, omdat wij nu eenmaal in de driedimensionale ruimte leven.

In een volgend stadium kunnen wij controleerbare vragen stellen. Een voorbeeld: Als we een balk doorzagen, hoe ziet de doorsnede er dan uit, wat is er aan de hand met de voor- en achterkant en met de linker- en rechter zijkant. De beredeneerde conclusie kan gecontroleerd worden door een balkje door te zagen.

Na deze uitgebreide voorbereiding kan de vraag gesteld worden: Welke eigenschappen kunnen we voorspellen door te redeneren en welke kunnen we niet voorspellen, het begin van een axiomatische opbouw. Deze axiomatische opbouw moet op het moment van introductie voldoen aan een behoefte en komt de leerlingen zeker niet plotseling op hun dak vallen.

Van een ieder, die de M.S. bezocht heeft, mag toch wel verwacht worden, dat hij zich de eigenschappen van de ruimte waarin wij

leven bewust is en ermee bekend is, dat er verband tussen deze eigenschappen bestaat. Voor hun werk zullen maar weinigen die kennis nodig hebben, maar dat komt ook bij andere vakken voor. In de aardrijkskunde zal niemand erover denken de kennis van de grondsoorten in Nederland van het programma te schrappen. Wie heeft dit voor zijn werk nodig? Enkelen, maar wij allen hebben ermee te maken.

Zeer merkwaardig vind ik, dat collega S. de oppervlakte- en inhoudsformules wil handhaven, alleen ten gebruike van de integraalrekening. In de eerste plaats lijken mij de begrippen oppervlakte en inhoud belangrijker, maar collega S. zal dit stilzwijgend mede bedoeld hebben. De leerlingen zonder de speciale aanleg voor de wiskunde moeten wij het leven insturen, zonder dat zij de hoeveelheid geleverde kolen of stookolie kunnen controleren. Het is toch de plicht van de opvoeders hun pupillen zo goed mogelijk tegen de listen en lagen van het leven te wapenen. Dacht U, dat zij dit op de L.S. geleerd hebben? Vraagt U de nieuwe lichting leerlingen maar eens wat een m^3 is.

Kort gezegd moeten wij in het begin de meetkunde aanbieden als een empirische natuurwetenschap, gebaseerd op de waarneming van onze ruimte gevolgd door een ordening van de waarnemingen. Daarna kan men trachten met de geordende eigenschappen (abstract) te redeneren. Toch bestaan deze (abstracte) redeneringen bij de gratie van de aanschouwelijke figuren. Deze aanschouwelijke figuren blijven object van de redeneringen. Zij zijn in onze axiomatische meetkunde slechts geïdealiseerd, utopisch voorgesteld.

De intuïtieve inleiding zoals deze nu gewoonlijk aan de leerlingen voorgezet wordt, geeft geen overzicht van het meetkundevel en is in grove trekken niets anders dan de oude stof zonder redeneerbewijzen. Plotseling, na de congruentiegevallen, voldoet een bewijs gebaseerd op waarneming niet meer. Als wij de congruentiegevallen, die de grootste rol in onze schoolmeetkunde spelen en heus niet zo voor de hand liggen, op grond van waarneming kunnen aannemen, waarom kan men dan niet op deze weg verder gaan en bv. de eigenschappen van de bijzondere vierhoeken ook niet zo accepteren? Er is bij de leerlingen op dat moment geheel geen behoefte om van methode te veranderen. Door waarneming kan men de meeste eigenschappen wel vinden en zeker door de leerlingen laten controleren. Wat wij nu doen is onlogisch. Accepteert men aan het einde van de eerste klasse alleen beredeneerde bewijzen, dan moet men ook de middelen, waarmee deze bewijzen geleverd worden door redeneren gevonden hebben, anders meet men met twee maten.

Nu weten de leerlingen na een aantal voorbeelden wel wat de leraar van hun verlangt, zodat zij op repetities voor gevallen, die erop lijken, de bewijzen wel kunnen produceren of beter reproduceren. De noodzaak en de zin van het bewijzen ontgaat hun. Waarschijnlijk ligt hier één van de oorzaken, waarom collega S. meent zijn tijd te verbeuzelen.

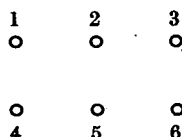
Een andere oorzaak is volgens mij, dat in de onderbouw alleen het platte vlak beschouwd wordt en daardoor de indruk wordt gewekt, dat de meetkunde een kunstmatige wetenschap is, die alleen in enkele gevallen toepasbaar is voor andere wetenschappen. Is dit een erfenis van de 19e eeuw of van de Griekse beschaving?

Nu wil collega S. het ruimte-inzicht ontwikkelen met behulp van de vectormeetkunde, een stap verder op de weg van arithmetisatie en naar mijn mening toch niet de meest natuurlijke manier. En de onderbouw? Als we de vlakke weg blijven volgen, laten we dan de knoop doorhakken en door middel van waarneming naast de congruentiegevallen ook de bijzondere vierhoeken, gelijkvormigheid, evenredigheden, de stelling van Pythagoras en misschien nog een paar voor de andere vakken noodzakelijke onderwerpen cadeau geven. De leerlingen, die dat wensen, kunnen dan de meetkundelessen beëindigen en de moeilijkheden, waarmede collega S. en met hem vele anderen worstelen, zijn opgelost. De aanschouwelijke meetkunde, eens een hoogtepunt van de Griekse beschaving, zal uit Nederland praktisch verdwijnen. Dat wij de leerlingen iets moois, ja iets unieks onthouden, staat voor mij wel vast. Terwijl de grondslagen van de andere natuurwetenschappen nog verre van volledig bekend zijn, kunnen wij een ongekunsteld stelsel met verantwoording aanbieden. Dat wij dit nu niet doen, wil niet zeggen, dat het onmogelijk is; het is een kwestie van methodiek en didactiek.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

23. In bijgaande figuur stellen 1, 2 en 3 drie huizen voor en 4, 5 en 6 centrales voor gas-, elektriciteits- en watervoorziening. Er moeten buizen gelegd worden van 4, 5 en 6 naar 1, 2 en 3 elk. Deze buizen moeten in één vlak liggen en mogen elkaar niet snijden. Hoe moeten ze aangelegd worden? Het probleem is opgegeven door de Duitse televisie. Mocht deze zich vergist hebben, dan moet bewezen worden, dat het niet kan.



24. In hoeveel delen verdelen n platte vlakken de ruimte maximaal?

OPLOSSINGEN

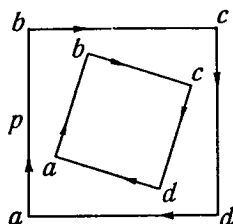
(zie voor de opgaven het vorige nummer)

21. In de oplossing is tweemaal $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$ vervangen door $\sqrt{x_1 x_2}$. Dit is in het gebied van de complexe getallen niet geoorloofd. In ons geval is $\sqrt{x_1} = i\sqrt{3}$ en $\sqrt{x_2} = i$, zodat we vinden $\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = -\sqrt{3}$. Ten onrechte is hiervoor tweemaal als uitkomst $\sqrt{3}$ opgegeven.

22. Noem de afgelegde weg van een hoekpunt s en de erbij horende lengte van de zijde van het vierkant x . Letten we op de zijde ab , dan zien we, dat a zich beweegt in de richting naar b , terwijl b zich beweegt in een richting, die daar loodrecht op staat. Hieruit volgt, dat een infinitesimale verplaatsing ds van a als gevolg heeft een even grote infinitesimale inkrimping van de zijde van het vierkant.

D.w.z., dat $\frac{ds}{dx} = -1$. Dus is $s = -x + c$. Als $x = p$, dan is $s = 0$. Hieruit volgt, dat $s = -x + p$. In de eindtoestand is $x = 0$ en dus $s = p$. De door elk punt dan afgelegde weg is dus gelijk aan de zijde van het vierkant.

Na verloop van enige tijd is het vierkant verkleind en gedraaid. (zie fig.). Omdat de dan ontstane figuur gelijkvormig is met de oorspronkelijke, zal het vierkant nu dan nog over een even grote hoek moeten draaien om de eindstand te bereiken als aanvankelijk het geval was. Daaruit volgt, dat het vierkant oneindig vaak om het middelpunt zal moeten draaien en dat de beweging dus praktisch niet realiseerbaar is.



KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Singel 13, Hoogezand.

13de CONGRES

VAN LERAREN IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPEN

te Utrecht op maandag 25 april 1960.

Thema: Het V.H.M.O. en de vooruitgang van de wetenschap.

Eerste algemene samenkomst. Grote Collegezaal Botanisch Laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

10,30 Opening van het congres door de voorzitter Dr. P. G. J. Vredenduin.
Prof. Dr. H. J. den Hertog, Wageningen: Wetenschap en Onderwijs.

Sectie Wiskunde. Kleine Collegezaal Botanisch Laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

12,15 Prof. Dr. F. van der Blij, Utrecht: De ontwikkeling van de schoolwiskunde in de komende vijftig jaar.

15,00 Dr. P. M. van Hiele, Bilthoven: Enkele onderwerpen uit de didactiek van de schoolwiskunde; hun ontwikkeling in de laatste vijftig jaar.

Sectie Natuurkunde. Grote Collegezaal van het Fysisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat 6.

12,15 Prof. Dr. M. J. Steenland, Eindhoven: Wat verlangt de Universiteit of Hogeschool van het natuurkunde-onderwijs bij het V.H.M.O.?

15,00 Dr. Ir. J. M. J. Kooij, Breda: Enige aspecten van de ruimtevaart.

Sectie Scheikunde. Grote Collegezaal van het Botanisch Laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

12,15 Samen met de sectie biologie.

Prof. Dr. H. Veldstra, Leiden: Verkenningen in de moderne biochemie.
Kleine Collegezaal van het Fysisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat 6.

15,00 Ir. H. J. Rijks, Amsterdam: De groei van chemie en chemische technologie en de gevolgtrekkingen daaruit voor het V.H.M.O.

Sectie Biologie. Grote Collegezaal van het Botanisch Laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

12,15 Zie sectie Scheikunde.

15,00 Dr. A. D. Voûte, Arnhem: Nieuwe aspecten bij het landbouwdierkundig onderzoek in verband met het V.H.M.O.

Tweede algemene samenkomst. Grote Collegezaal Botanisch Laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

16,15 Prof. Dr. K. Posthumus, Eindhoven: Gemeenschappelijke vraagstukken van middelbaar en hoger onderwijs.

17,15 Sluiting van het congres.

De kosten van deelneming bedragen voor leden van de organiserende verenigingen (Wimecos, Liwenagel, Velines, Velebi) / 3,50, voor anderen / 6,00. Wie dit wenst kan deelnemen aan een maaltijd in de „Mensa”, Lepelenburg, à / 1,75.

Het congresverslag zal verschijnen als afzonderlijk nummer van „Faraday”.

dat voor deelnemers, die dit tijdschrift niet als abonnee of anders ontvangen verkrijgbaar is voor f 1,50.

Indien men aan het congres wenst deel te nemen, de maaltijd wenst te gebruiken of het verslag wenst te ontvangen, wordt men verzocht de verschuldigde bedragen te storten op postgirorekening 581627 t.n.v. Penningmeester van het Congres van Leraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen te Delft en wel uiterlijk 9 april a.s. Toezending van toegangskaarten etc. zal dan volgen. Penningmeester is de heer D. Leujes, Thorbeckestraat 47, Delft.

Voor deelnemers verbonden aan een school voor V.H.M.O. kunnen de reiskosten, voor zover deze meer dan f 2,50 bedragen worden vergoed (rijkssubsidie).

Namens het congresbestuur

J. F. Hufferman, secretaris

Ch. de Bourbonlaan 64

Zeist

INGEKOMEN BOEKEN

C. J. Alders en G. J. Hietbrink, *Algebra voor kweekscholen*, 3e druk; P. Noordhoff, Groningen, 1959. 130 blz., f 2,90. Deze druk is gelijk aan de eerste.

P. Wijdenes, *Algebra voor m.u.l.o. en voor verschillende inrichtingen van onderwijs met beperkt wiskundeprogramma — II —* 21e druk; P. Noordhoff, Groningen, 110 blz. geb. f 3,25.

P. Wijdenes, *Nieuwe Schoolmeetkunde*, II, 3e druk; P. Noordhoff, Groningen, 138 blz. ing. f 3,50, geb. f 4.—.

P. Wijdenes (met medewerking van M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen), *Nieuw Rekenboek voor het voortgezette rekenonderwijs I*, 10e druk; P. Noordhoff, Groningen, 55 blz., f 1,60.

P. Wijdenes, *Middel-Algebra*, leerboek voor akte-studie en inleiding tot de analyse, dl. II — 6e druk; P. Noordhoff, Groningen, 375 blz. ingen. f 17.—, geb. f 19.—.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw Algebraboek*, IVB, 7e druk; P. Noordhoff, Groningen, ingen. f 3,90, geb. f 4,75.

W. J. H. Salet e.a., *Vraagstukken over analyse en algebra II*, 2e druk; Enkele volledige stellen examenopgaven van de laatste jaren zijn opgenomen, alsmede vraagstukken over integratie en oplossing van differentiaalvergelijkingen met behulp van reeksontwikkeling. P. Noordhoff, Groningen, 171 blz. prijs f 6,50.

Wijdenes en Bruinshoofd, *Algebra voor het Nijverheidsonderwijs*, 10e dr.; P. Noordhoff, Groningen, f 2,50.

Reijnders en Witkop, *Meetkunde van de ruimte*, 1A en 1B, 2e dr.; P. Noordhoff, Groningen. Per deel f 2,50.

P. Wijdenes, *Goniometrie en Trigonometrie*, 10dr.; P. Noordhoff, Groningen 1959, f 12,50. Deze druk is gelijk aan de vorige.

Dr. W. Bos en Drs. P. Lepoeter: *Wegwijzer in de Meetkunde*, 2, 4e dr.; J. M. Meulenhoff, Amsterdam 1959, f 5,90. De Trigonometrie is in dit deel ingelast. Van de s-formule voor de hoogtelijn hebben de schrijvers nog niet volledig afscheid durven nemen.

Burgers.

W. J. H. SALET e.a.

Vraagstukken

over

Analyse en Algebra

Deel I, 5de druk f 6,50 - Deel II, 2de druk f 6,50

„Dit tweede deel van deze vraagstukkenverzameling is al even voortreffelijk als het eerste.”

W. J. Brandenburg in Weekblad v.h. „Genootschap”

„Deze verzameling van zorgvuldig uitgekozen, systematisch gerangschikte en goed gere-
digeerde vraagstukken maakt op de lezer een
prettige indruk.”

Weekblad v.d. A.V.M.O.

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN



Thans in brochure-vorm verkrijgbaar:

VERSLAG

van de Nomenclatuurcommissie
ingesteld door

WIMECOS en LIWENAGEL

f 1,25

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Zojuist verschenen:

C. J. ALDERS

ALGEBRA

voor M.O. en V.H.O.

Deel II - 36-40e druk f 2,50
gebonden f 3,35

De andere deeltjes zijn:

I, 36-38e druk f 2,25, geb. f 3,—
III, 14-16e druk f 1,90, geb. f 2,65

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Ook verkrijgbaar bij de boekhandel

Zojuist verschenen
voor H.B.S.-B en Gymnasium-B:

BEKNOPTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

door

Dr. D. J. E. Schrek

2e druk ing. f 3,90, geb. f 4,60

Bij het voorbereiden van deze
nieuwe druk is rekening gehouden
met de nadere toelichting, die de HH.
Inspecteurs inmiddels met betrek-
king tot het nieuwe leerplan en het
eindexamen hebben gegeven.
Tevens kon worden voldaan aan
enkele wensen, die door de Nomen-
clatuurcommissie in haar onlangs
verschenen rapport zijn geuit.

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Ook verkrijgbaar bij de boekhandel

NIEUWE uitgaven van **P. NOORDHOFF N.V.**

Prof. M. A. Naimark

■ NORMED RINGS

Een systematische samenvatting van de begrippen, methodes en resultaten der Banach algebra theorie.

XVI+542 blz.+register

gebonden f 48,75

Uit het Russisch vertaald door Leo F. Boron

Een monumentaal werk voor de specialist zowel als voor de student!

Prof. G. Sansone en Prof. Dr J. C. H. Gerretsen

■ LECTURES ON THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

Deel 1: **Holomorphic functions**

De verhandeling begint met de elementaire principes der theorie, doch weidt niet uit over de logische grondslagen, teneinde leesbaar te blijven voor wie geen belang stelt in de zuiver formele kant der wiskunde. De tekst veronderstelt enige scholing bij de lezer, aangezien vele niet-elementaire onderwerpen uit de klassieke theorie worden behandeld.

XII+481 blz.+register

gebonden f 48,75

De theorie wordt op zodanige wijze gepresenteerd dat het boek niet slechts als leerboek voor de beoefenaar der zuivere wiskunde dienst kan doen, maar ook hoogst belangwekkende lectuur vormt voor wie kennis wil nemen van geavanceerde opvattingen in de moderne analyse.

Prof. Dr A. O. Gelfond

■ THE SOLUTION OF EQUATIONS IN INTEGERS

Een populaire behandeling van verschillende methoden voor de oplossing van problemen bij het zoeken naar oplossingen van vergelijkingen in integralen. De in dit werkje geformuleerde theorema's zijn voorzien van bewijzen in die gevallen, waar de bewijsvoering eenvoudig kon worden gehouden.

Vertaald uit het Russisch door Leo F. Boron

f 3,75

Dit boekje is, behalve voor wiskunde-leraren en ingenieurs, ook toegankelijk voor leerlingen uit de hoogste klassen van middelbare scholen, met een bijzondere belangstelling voor het vak wiskunde.

Verkrijgbaar bij Uw boekhandelaar of rechtstreeks bij

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN