

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

VI - 1 MAART 1960

INHOUD

Dr. P. M. van Hiele: Nieuwe Onderwerpen in de Wiskunde.	
Mogelijkheden en Criteria	177
Wijzigingen in het Verslag van de Nomenclatuurcommissie	186
Bockbespreking	188, 206
Ir. Dr. A. J. Staring: Enkele Berekeningen in verband met	
de Wet van Van der Waals	189
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden	196
R. Kooistra: Vraagstuk over een bekende Driehoek	198
Eindexamen — Luxemburg 1959	200
Recreatie	206
Kalender	208
Akten KI en KV	208

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Singel 13, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek, tel. 08307/3807.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt / 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

NIEUWE ONDERWERPEN IN DE WISKUNDE. MOGELIJKHEDEN EN CRITERIA.¹⁾

door

Dr. P. M. VAN HIELE

Bilthoven

De gedachte, die aan al mijn voordrachten van de laatste jaren ten grondslag ligt, is, dat er een discussie mogelijk is over het lesgeven, anders dan op basis van intuïtie. Dat wil zeggen, dat het mogelijk is stellingen uit te spreken over het onderwijs, waarvan men de juistheid aan een oordeel kan onderwerpen, het is mogelijk deze juistheid te toetsen aan andere waarheden. Het is dus niet noodzakelijk op dit gebied door middel van een stemming tot resultaten te komen, deze subjectieve methode kan plaats maken voor de meer objectievere weg der wederzijdse overtuiging. Vooral de beoefenaars der wiskunde moeten zich hierdoor meer bevredigd gevoelen, immers, tot misschien wel de belangrijkste vormende waarde der wiskunde moet men wel rekenen het besef van de kracht der redenering.

Het doel van deze voordracht is dan ook niet in de eerste plaats aan te duiden, welke onderwerpen wel en welke niet voor een middelbare school in aanmerking komen. Bij wijze van voorbeeld zal ik er wel een aantal noemen, die ik meer en een ander aantal, die ik minder geschikt acht, maar het doet er niet veel toe, of men het met deze keuze eens is. Veel belangrijker is immers de vraag, of men de overwegingen, die tot deze keus voeren, als basis van redenering kan aanvaarden.

Wie een onderwijsprogramma wenst te hervormen, moet zich ter dege bewust zijn van de doelen van zijn onderwijs. Op een — zeer vruchtbare — bespreking in de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. is het nuttig gebleken de leerdoelen in drie groepen te onderscheiden, n.l.:

objectieve formele doelen,
objectieve materiële doelen,
subjectieve doelen.

¹⁾ Voordracht Weekend-konferentie van de Wiskunde Werkgroep WVO, november 1959.

Tot de objektieve formele doelstellingen kan men bv. rekenen: het kunnen bewijzen (d.w.z. weten, wat een wiskundig bewijs is, in tegenstelling tot het net doen, of men bewijzen kan), het doorzien van de innerlijke structuur der wiskunde, het begrijpen van het gebruik van letters in de algebra als middel om algemene relaties uit te drukken, enz.

Tot de objektieve materiële doelstellingen moet men rekenen alle leerstof, die men leert, omdat deze elders nuttig kan worden aangewend. Voorbeelden zijn: de stelling van Pythagoras, het kunnen oplossen van vierkantsvergelijkingen, het kunnen hanteren van de sinustafel bij het berekenen van lijnstukken.

Tot de subjektieve doelstellingen kan men rekenen: de ontwikkeling van de eigen aktiviteit van de leerling, van zijn esthetisch beleven, van zijn creativiteit, van een besef van de waarde van eigen nadenken. De subjektieve doelstellingen hangen dus samen met de ontwikkeling van het gevoelsleven van de leerling.

Wij zouden volkomen op een dwaalspoor geleid worden, wanneer wij zouden trachten een van de groepen doelstellingen hoger aan te slaan dan de andere. Voor het vaststellen van een leerprogramma is de onderscheiding echter toch van grote betekenis. Wij willen nl. als eerste stelling uitspreken, dat *de subjektieve doelstellingen van geen invloed kunnen zijn op het verplichte leerprogramma.*

Daar immers de subjektieve doelstellingen samenhangen met het gevoelsleven van de leerling, kunnen zij alleen tot stand komen door het persoonlijke kontakt met de leraar. Deze moet de over te dragen waarden zélf in de stof ontmoet hebben en door zijn entoesiasme moet hij zorgen een soortgelijk effect bij zijn leerlingen te bewerkstelligen.

Uit praktische overwegingen zal men dikwijls de te behandelen onderwerpen kiezen in verband met de materiële objektieve doelstellingen. Men kiest dus die onderwerpen uit de algebra, waarvan het waarschijnlijk geacht moet worden, dat de leerlingen van het betrokken schooltype ze later opnieuw zal ontmoeten. *De onderlinge samenhang van de leerstof, de eigenlijke structuur van het leerprogramma wordt echter grotendeels bepaald door de objektieve formele doelstellingen.* Om dit goed in te zien, dient men zich te realiseren:

1° dat een goed beklijven van de leerstof alleen gegarandeerd is, wanneer daaraan een nieuwe, op gevarieerde punten beproefde, denkordening ten grondslag ligt,

2° dat een mens alleen dan paraat kan zijn in totaal nieuwe situaties, wanneer hij heeft leren beschikken over een zeer algemene denkordening, van waaruit het antwoord op de nieuwe

situaties kan worden ontwikkeld. De leerling is er niet zozeer mee gebaat, dat de leraar hem geleerd heeft te handelen in die situaties, die aan de leraar bekend zijn, de leraar moet de leerling in staat stellen het hoofd te bieden aan moeilijkheden, die de leraar niet heeft kunnen voorzien.

De beslissing van de vraag, of een nieuw vak al of niet ingevoerd dient te worden, zal dus in belangrijke mate moeten afhangen van de vraag, of door middel van dit vak formele doelen verwezenlijkt kunnen worden. Zou dit laatste namelijk niet het geval zijn, dan zouden de materiële doelstellingen, die tot de keuze zouden moeten leiden, wel van zeer grote betekenis dienen te zijn en bovendien spoedig gerealiseerd moeten worden.

Bij de vaststelling van de formele doeleinden zal men rekening moeten houden met:

- 1° het intelligentiepeil van de betrokken leerlingen,
- 2° de ter beschikking staande tijd,
- 3° de niveaustruktuur van het betrokken vak,
- 4° de formele waarde van het vak in verband met de bestemming van de leerlingen,
- 5° de vooropleiding van de leerlingen,
- 6° de vraag, of de betrokken leraren in staat zijn de gestelde doelen te verwezenlijken.

De didaktiek is immers aan een praktische situatie gebonden, het heeft weinig zin op te noemen, welke doelen wenselijk zijn, wanneer hun verwezenlijking niet goed mogelijk is. Zo zal het wel voor een ieder duidelijk zijn, dat de intelligentie van de leerlingen in zekere zin bepalend is voor de formele doelen, die men voor hen kan stellen.

Verder zal men, wanneer men weinig uren voor de wiskunde beschikbaar heeft, zijn doelen lager moeten stellen dan wanneer men over zeeën van tijd beschikt. En afgezien daarvan is het nog van belang, in hoeverre de geest der leerlingen door andere zaken in beslag wordt genomen.

De niveaustruktuur van het betrokken vak is vanzelfsprekend van grote betekenis voor de vaststelling der formele doelen, het hogere niveau van denken heeft immers de structuur van het denken op het lagere niveau tot objekt. De formele waarde van een vak wordt dus ten dele door het bereiken van het hogere denk-niveau gerealiseerd.

Bij de vaststelling der formele doelen mag men de bestemming

der leerlingen niet uitschakelen. Het beschikken over nieuwe denk-ordeningen van logische aard heeft een geheel andere waarde voor hen, die wiskunde gaan studeren dan voor hen, die zich bv. met sociale geografie gaan bezig houden.

De vooropleiding van de leerlingen — en wel speciaal dat deel van die opleiding, dat niet of nauwelijks door een toelatingsexamen gecontroleerd kan worden — is van belang voor de vaststelling der formele doelen. Op sommige lagere scholen is er reeds een belangrijke basis gelegd voor het bereiken van het doel, op andere lagere scholen heeft men de leerlingen een verkeerde habitus aangewend, die men slechts met veel moeite en tijd weer kan afleren.

Tenslotte stelt een gericht-zijn van het onderwijs op formele doelen zeer hoge eisen aan het inzicht der leraren. De controle op het bereiken van deze doelen kan nooit op directe wijze geschieden, het is immers steeds mogelijk op de toetsingsvragen te antwoorden, doordat men bepaalde algoritmen ingestudeerd heeft. Weinig skrupuleuze leraren zal het steeds lukken langs deze weg voor zich en voor hun leerlingen schijnsukcessen te verwerven.

Wie zich het bovenstaande schema voor ogen houdt, kan zich hoeden tegen vele fouten, wat de keuze der leerstof betreft. Zulke fouten zijn o.a.:

- a.* het plaatsen van leerstof op het programma uit traditie of persoonlijke voorkeur. (Men zondigt dan tegen 2° en 4°).
- b.* het kiezen van een bepaalde volgorde terwille van een logische ordening, die men zich had voorgesteld. (Men zondigt tegen 3° en 5°).
- c.* het kiezen van zekere leerstof terwille van de gemakkelijke toetsing. (Men zondigt tegen 4° en 6°).
- d.* het kiezen van leerstof terwille van zekere vraagstukken, terwijl de keuze van die vraagstukken niet nader gemotiveerd wordt. (Men zondigt tegen 2° en 4°).
- e.* het kiezen van leerstof, omdat deze in een bepaalde methodische samenhang thuis hoort, terwijl deze methodische samenhang niet noodzakelijk is. (Men zondigt tegen 3° en 4°).

Voorbeelden van zulke verkeerd gekozen leerstof zijn:

Bij *a*: moeilijke ontbindingen in de algebra, het leren van stukken $s - a$, $s - b$ in de driehoek, het herleiden van vormen als $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C$, als $A + B + C = 180^\circ$, enz.

Bij *b*: gelijkvormigheid van figuren, gebaseerd op vermenigvuldiging; een behandeling van de stereometrie, uitgaande van axioma's.

Bij *c*: opgaven met absolute waarde in de algebra, bewijzen van loodrechte stand in de stereometrie.

Bij *d*: de *s*-formule voor de oppervlakte van een driehoek, de stelling van Stewart, de formule voor de uiterste waarde van een kwadratische funktie.

Bij *e*: de formule voor de tangens van de hoek tussen twee elkaar snijdende lijnen in de analytische meetkunde (omdat men daar de loodrechte stand uit kan afleiden).

Om ons nader te kunnen oriënteren zal ik thans bespreken, welke formele doelen het huidige programma kent en welke nieuwe doelen denkbaar zijn.

1° Als formele doelen van de algebra kunnen wij beschouwen: het funktiebegrip, ekwivalentie van beweringen, de betekenis van „en” en „of”, afbeelding van betrekkingen in een figuur, het limietbegrip. Dat deze doelen als „formeel” beschouwd kunnen worden, mogen we konkluderen uit het feit, dat zij alle ver buiten het gebied der algebra en dikwijls zelfs ver buiten de wiskunde nog van belang zijn.

2° Tot de formele doelen van de meetkunde reken ik: inzicht in ruimtelijke ordeningen, „volgen uit”, logische systemen, verschillende bewijsvormen, inzicht in het al of niet „waar” zijn van een stelling, inzicht in transformaties.

3° Tot de formele doelen van de analytische meetkunde behoren: afbeeldingen van verzamelingen op elkaar, integratie van algebra en meetkunde (en goniometrie), verdieping van het ekwivalentiebegrip, onderzoek naar het vormen van gesloten systemen (veralgebraïsering van de meetkunde, toevoeging van het oneindige, toevoeging van het komplexe).

4° De goniometrie bezit in hoofdzaak slechts een speciaal formeel doel: de kennismaking met periodieke funkties. Zij sluit daarmee geheel bij de algebra aan.

5° De differentiaal- en integraalrekening kent als voornaamste formele doel het verkrijgen van inzicht in infinitesimaalmethoden.

Men dient deze lijst te beschouwen als een reeks van voorbeelden, het is stellig mogelijk aan sommige vakken nog formele doelen toe te voegen, misschien zelfs wel zeer belangrijke. Is de lijst min of meer volledig geworden, hetgeen bereikt kan worden doordat vele leraren er zich over uitspreken, dan kan men tot een nadere analyse overgaan. Dan kan men er zich op gaan bezinnen, of al deze doelen gewenst zijn, of zij binnen de mogelijkheden liggen, of sommige van deze doelen misschien beter in een ander vak ver-

wezenlijkt zouden kunnen worden, of er voldoende evenwicht is tussen de formele waarde en de materiële waarde van die vakken.

Bij wijziging van het bestaande programma kan men het volgende overwegen:

- 1° Invoering van nieuwe of schrapping van bestaande onderwerpen,
- 2° uitbreiding of inkrimping van bestaande onderwerpen,
- 3° verschuiving van onderwerpen naar een andere leerperiode.

Bij de *invoering van nieuwe onderwerpen* kan men denken aan (voor de duidelijkheid noem ik de onderwerpen niet bij hun vaknaam, maar noem ik de voornaamste materie):

- a. leerstof samenhangende met vektoren,
- b. leerstof samenhangende met determinanten,
- c. leerstof samenhangende met groepentheorie,
- d. leerstof samenhangende met topologische problemen,
- e. leerstof samenhangende met de formele logika, expliciet gehanteerd.

Het onderwerp *a* mag men zeker als formeel doel beschouwen. Er is daarvan zeker wel het een en ander te verwezenlijken, mits men de leerlingen de tijd gunt zich aan te passen. Een inleiding in de analytische meetkunde met behulp van vektoren is daarom niet aan te bevelen, de analytische meetkunde zou dan veel te laat moeten beginnen.

Van het onderwerp *b* zou ik de formele waarde in twijfel willen trekken. Het gaat hier veel meer om een materiële waarde, die alleen geldt voor leerlingen, die een bepaalde studierichting zullen kiezen. Daarom zou ik dit onderwerp aan de universiteit willen laten. Het onderwerp *c* komt tevoorschijn bij reflectie over eisen, die aan getellensystemen gesteld moeten worden en ook bij reflectie over vektoren. Men ontmoet het verder bij transformaties, in het V.H.M.O. vooral in de meetkunde. Het ligt daarom op een vrij hoog niveau. Het is mogelijk in de hogere leerjaren deze zaak hier en daar aan de orde te laten komen, het stelt zeer hoge eisen aan het begrip van de leerlingen en de doceerkunst van de leraar. Het is alleen mogelijk, wanneer er op de leerstof nog meer bezuinigd wordt.

Het onderwerp *d* ligt voor een deel op een niet hoog niveau. Het zou dus in de middelklassen aan de orde kunnen komen. Een bezwaar is echter, dat voor een expliciete behandeling de materiële waarde vrij gering is. Bovendien bestaat deze vrijwel uitsluitend voor die leerlingen, die later hoger onderwijs in de wiskunde gaan

volgen. Om deze reden kan men dus ook beter dit onderwerp aan de universiteit laten. Impliciet kan men het onderwerp te pas brengen bij het limietbegrip, de punten-, lijnen- en vlakkenverzamelingen.

e. In de hoogste klasse kan men stellig verschillende problemen meer tot klaarheid brengen, wanneer men ze expliciet met logika toelicht. Voor een aparte behandeling van de logika lijkt mij de tijd niet aanwezig en bovendien de materiële waarde gering.

Bij de bespreking van nieuwe onderwerpen in de wiskunde heb ik de statistiek buiten beschouwing gelaten. Het komt mij namelijk voor, dat noch de formele, noch de materiële waarde van dit vak binnen de wiskunde gezocht moet worden. Een behandeling van statistiek in het V.H.M.O. in die zin, dat men zich er rekenschap van tracht te geven, in welke gevallen statistiek bruikbaar is en in welke gevallen het geoorloofd is op statistische gronden konklusies te trekken, lijkt mij zeer waardevol. Voorlopig meen ik te moeten betwijfelen, of er voldoende leraren gevonden kunnen worden, die tot een dergelijke behandeling van de leerstof in staat zijn. Daar het dan ook niet om de wiskundige behandeling van de materie gaat, is het allerm minst vanzelfsprekend, dat wiskundeleraren met deze taak belast dienen te worden.

Uitbreiding of inkrimping van bestaande onderwerpen.

Uit de algebra zou men zonder bezwaar de getallenrijen, anders beschouwd dan als variant, kunnen schrappen. Dat betekent dus, dat het woord „reeks” uit het onderwijs in het V.H.M.O. verbannen zou kunnen worden.

Uit de stereometrie zou men de theorie der viervlakken kunnen laten vervallen. Dat wil zeggen, dat iedere leraar vrij zou blijven van dit onderwerp zoveel te behandelen, als hij voor het inzicht gewenst acht, maar dat op het examen geen resultaten van deze studie gevraagd zouden mogen worden.

Uit de analytische meetkunde zou men de theorie van pool en poollijn en alle soorten van bundels kunnen laten vervallen. Niet, omdat aan deze onderwerpen geen belangrijke formele waarde zou kunnen worden gerealiseerd, maar omdat voor deze realisatie een zeer degelijke voorbereiding noodzakelijk vooraf moet gaan. Hier-voor ontbreekt de tijd, zodat men de onderwerpen thans meestal op onverantwoorde wijze moet behandelen.

Daarentegen zou men aan de leerstof kunnen toevoegen:

In de algebra: permutaties en combinaties,

in de analytische meetkunde: ruimtelijke problemen.

Het eerste onderwerp bezit een zekere formele waarde, verband houdende met ordeningen in het algemeen. Het tweede onderwerp maakt het mogelijk de invoering van vektoren zinvol te doen zijn. Het onderwerp kost weinig extra moeite, terwijl hierdoor ook nog een zinvolle integratie met de stereometrie mogelijk wordt.

Verschuiving van onderwerpen naar een andere leerperiode.

Er zijn tal van onderwerpen, die wegens hun hoge niveau in de hoogste klassen thuis horen. Daartoe kan men rekenen: funktieleer, analytische meetkunde, infinitesimaalrekening. Om te zorgen, dat voor deze onderwerpen voldoende tijd beschikbaar is, zal men alle onderwerpen, waarvoor dit mogelijk is, naar een lagere klasse dienen te verschuiven. Daarbij moet men zich dan wel realiseren, dat deze onderwerpen in de lagere klassen op een andere wijze behandeld zullen moeten worden dan tevoren in de hogere klassen, nl. aangepast aan het lagere niveau. Waarschijnlijk zal zulk een verschuiving een verbetering van de didaktiek ten gevolge hebben, immers er worden thans veel te weinig onderwerpen behandeld op een laag niveau. Veel onderwerpen ontmoeten de leerlingen thans voor het eerst in een abstrakte vorm, terwijl het toch heel goed mogelijk geweest zou zijn de leerlingen er eerst bv. aanschouwelijk mee te laten handelen.

Geschikte onderwerpen voor de verschuiving zijn:

a. een groot deel van de stereometrie. Men kan vrijwel alles veel vroeger behandelen, mits men de moeilijke bewijzen achterwege laat en deze later als voorbeelden van bijzondere bewijstypen toont. Ook dient men verschillende verzamelingen (althans de daarmee samenhangende bewijzen) later te behandelen.

b. eenvoudige koördinatenleer. Men kan vele funkties grafisch laten afbeelden, zonder bewijs, dat de afbeelding juist die bepaalde figuur moet zijn. Men kan figuren bepalen door middel van koördinaten, transformaties in het platte vlak beschrijven met behulp van koördinaten, enz.

c. Met *b* hangt samen het veel toelichten met behulp van grafieken. De leerlingen kunnen bekend worden gemaakt met de meeste bekende funkties, zonder dat men nog van funkties spreekt, of tracht het begrip funktie te definiëren. De grafieken zullen het voornaamste hulpmiddel daarbij zijn.

Een dergelijke verschuiving is alleen mogelijk, wanneer men in de lagere klassen alles laat vervallen, wat maar enigszins gemist kan worden. Wil men werkelijk meer inzicht, dan dient men te streven

naar het bereiken van een hoog denkniveau. De leerstof van de lagere klassen zal dus, voor zover het niet gaat om de materiële inhoud, voornamelijk moeten bestaan uit de grondslag voor de hogere leerstof. En de leerstof, die men wenst te handhaven om zijn materiële waarde, moet met zorg worden gekozen. Men zal moeten motiveren, waarin die materiële waarde bestaat, waar deze gerealiseerd wordt. Daarmee vervallen dus de ingewikkelde ontbindingen, s-stukken in de driehoek, raaklijnen vierhoek, gegoochel met de wortels van een vierkantsvergelijking, interpoleren in reeksen, foeftjes met logaritmische en exponentiële vergelijkingen.

Natuurlijk zal er in iedere methodiek leerstof optreden, die niet op het programma staat, maar die een bepaalde functie heeft voor de begripsontwikkeling. Men zal altijd vrij moeten zijn om met dit doel niet verplichte leerstof in te schakelen. Zulke leerstof mag echter in het voorgeschreven programma niet genoemd worden.

Voor velen zal een zo ingrijpende bezuiniging een aanslag betekenen op zaken, die zij zeer waardevol vinden. Laten zij bedenken, dat men dikwijls een offer zal moeten brengen voor iets, dat belangrijker is dan datgene, wat men offert. De woorden, waarmee ik ga besluiten, zullen dit offer stellig niet gemakkelijker maken. Ik vrees nl., dat de invoering van nieuwe onderwerpen en de invoering van de onderwerpen, die thans reeds zijn ingevoerd niet dat sukses zal hebben, dat velen ervan verwachten. Ik meen, dat als men eindelijk tot een juist oordeel zal zijn gekomen van wat kinderen kunnen verwerken, wanneer men in staat zal zijn schijnkennis van ware kennis te onderscheiden, dat men dan zich genoodzaakt zal zien heel veel water in de wijn te doen, ja, dat het toch wel eigenlijk een erg slap drankje zal worden. De taal, waarvan men zich meent te kunnen bedienen in het onderwijs, de onderwerpen, die men hoopt aan de orde te kunnen stellen, doen mij vrezen, dat men zijn verwachtingen veel te hoog gespannen heeft. Het zou wel eens kunnen zijn, dat de eensgezindheid, die thans over de onderwerpen schijnt te bestaan, meer schijn dan werkelijkheid is. Het is niet zozeer belangrijk, of men een bepaald onderwerp wil gaan behandelen en verplicht stellen. Veel belangrijker is, welk niveau men daarin wil bereiken. In dat opzicht deel ik het optimisme van velen niet.

Heel dikwijls moet ik konstateren, dat wanneer ik meen de leerlingen de beginselen van het begrip functie bij te brengen, deze eigenlijk niet veel meer doen dan trachten eenvoudige vormen, waarin negatieve getallen optreden uit te rekenen. En deze opgaaf valt hun nog zwaar genoeg. Wanneer ik bezig ben een algemeen principe te ontwikkelen, volgens hetwelk men de oppervlakte van

alle door rechte lijnen begrensde figuren kan bepalen, dan zijn er leerlingen, die op dat moment zich pas realiseren, dat kongruente figuren een gelijke oppervlakte hebben. Vele leerlingen leren in de aan de orde zijnde les pas *voor het eerst*, wat men al jaren bij hen bekend verondersteld had. Het valt ons meestal gemakkelijker een dergelijk ontmoedigend feit bij kollega's van een ander vak te konstateren (bv. wanneer wij onze kinderen met het huiswerk helpen), dan bij ons zelf. Maar laten wij op onze hoede zijn. Een eerlijk onderzoek in die richting zou misschien de ware onderwijs-vernieuwing kunnen inluiden.

BOEKBESPREKING

Henri Lebesgue, *Notices d'Histoire des Mathématiques*, 116 blz., ingen. 16 Zw.fr.; 1958; Institut de Mathématiques, Université, Genève.

Dit werkje is verschenen als nummer 4 in de serie „Monographies de l'Enseignement Mathématique” en bevat een aantal overdrukken uit het officiële orgaan van de C.I.E.M., het Zwitsers tijdschrift „L'enseignement mathématique”.

Lucienne Félix heeft een van eerbied, liefde en bewondering getuigende inleiding geschreven tot deze verzameling historische opstellen van de in 1941 overleden franse wiskundige Lebesgue.

Deze opstellen confronteren ons op indringende wijze met het oeuvre van enige franse mathematici van groot formaat.

Het eerste opstel is gewijd aan Viëta en bespreekt in het bijzonder de afgrenzing van de domeinen van arithmetica, algebra en analyse. Een ander opstel is gewijd aan de figuur van Vandermonde, die in de waardering der wiskundigen nimmer de plaats heeft verworven die hem toekwam. Velen onzer kennen hem alleen door een determinant die ten onrechte zijn naam draagt. Gauss bouwde op zijn werk voort zonder hem ooit te citeren. Van een grote liefde voor de persoon van Camille Jordan getuigt de herdenkingsrede door Lebesgue in 1922 na Jordan's dood gehouden. Boeiend is de terugblik van Lebesgue op het werk van een aantal zijner voorgangers aan het Collège de France, aan het slot waarvan hij de betekenis laat uitkomen die Ramus († 1572) voor de studie der wiskunde in Frankrijk heeft gehad. In verband hiermee getuigt hij van zijn eigen niet-klassieke vorming en zegt: „je reconnais bien sincèrement que ce manque de culture classique est un tare, grave, très grave; mais, hier, on admettait que les tares pouvaient cependant faire parfois de bonne besogne; va-t-on, demain, dire qu'on s'était trompé et déclarer, au moment où le recrutement des travailleurs intellectuels est particulièrement difficile, qu'on peut maintenant se passer de ces tares?” om vervolgens in deze rede (zijn inaugurele oratie) te constateren „... qu'il serait néfaste, tant au point de vue scientifique qu'au point de vue social, que, désormais, seuls puissent accéder aux carrières intellectuelles ceux qui y auraient été prédestinés par l'enseignement du jeune âge.”

Deze „Notices d'Histoire des Mathématiques” kan ik aan alle wiskunde-docenten van harte ter lezing aanbevelen.

Joh. H. Wansink

WIJZIGINGEN IN HET VERSLAG VAN DE NOMENCLATUURCOMMISSIE

Het verslag van de nomenclatuurcommissie, dat gepubliceerd is in Euclides, deze jaargang, aflevering II, p. 49—78, is onderwerp van bespreking geweest op 3 nov. 1959 op een bijeenkomst met auteurs van schoolboeken. Deze bespreking gaf ons aanleiding enige wijzigingen in het verslag aan te brengen en ons standpunt nader te bepalen ten aanzien van de in het oorspronkelijke verslag ter discussie gestelde termen. Op 29 dec. 1959 is het verslag punt van bespreking geweest op een gecombineerde ledenvergadering van Wimecos en Liwenagel. Ook nu gaven de adviezen van de vergadering ons aanleiding nog enkele wijzigingen aan te brengen. Daarna is het verslag bij acclamatie door de vergadering goedgekeurd. Hieronder volgt ten gerieve van de lezers van Euclides een opsomming van de aangebrachte veranderingen. De volledige definitieve tekst zal binnenkort in de handel verkrijgbaar zijn.

Algebra

pag. 56, voorlaatste alinea.

Definitieverzameling en waardenverzameling (i.p.v. -gebied).

pag. 57, 6e alinea.

Een functie heet *constant in een interval*, als hij voor elk getal van dat interval dezelfde waarde aanneemt. Een constante functie is een functie, die in elk getal van het getalsysteem, dat men beschouwt, gedefinieerd is en overal dezelfde waarde heeft. De functie $\frac{4x-4}{x-1}$ is dus geen constante functie, omdat hij voor $x=1$ niet gedefinieerd is.

pag. 61, 3e alinea.

Deze alinea wordt geschrapt.

pag. 62.

afvoeren van de lijst verplichte termen:

stel wortels

ekwivalent (beide keren)

lineair-gebroken functie

toevoegen:

nulpunt (van een functie)

wijzigen:

rij van de sommen (i.p.v. somrij)

som van de getallen van een oneindige rij (i.p.v. som van een oneindige rij)

sommeerbare rij (voor: oneindige rij, waarvan de getallen een som hebben)

Differentiaalrekening

pag. 64.

Toepassingen op de mechanica, 1e en 2e alinea, vervangen door:

Men moet onderscheid maken tussen de baancoördinaat, de verplaatsing en de *afgelegde weg*. De baancoördinaat van een punt is de langs de baan gemeten afstand van een aangenomen nulpunt tot het punt (voorzien van een teken), terwijl de verplaatsing het verschil is tussen de baancoördinaten van het punt op twee tijdstippen. De baancoördinaat is een functie van de tijd. Deze functie willen we de plaatsfunctie noemen. Als notatie stellen we voor: $u(t)$. De verplaatsing is een functie van twee variabelen, begin- en eindtijdstip. Men kan deze noteren: $u(t_2) - u(t_1)$. Desgewenst kan men deze ook door s voorstellen. Onder de afgelegde weg zouden we hetzelfde willen verstaan als in het dagelijks leven, nl. $\int_{t_1}^{t_2} |v| dt$. Men kan hiervoor als notatie $w(t_1, t_2)$ gebruiken. Omdat dit begrip in de mechanica van weinig belang is en het zeker geen aanbeveling verdient het als uitgangspunt voor vraagstukkenmateriaal te kiezen, lijkt het ons voorzichtig de term afgelegde weg te rangschikken onder de facultatieve termen.

Opmerking. Ten einde de continuïteit van de plaatsfunctie te verzekeren kan men bij gesloten baankrommen aan een punt van de baan meer waarden van u toevoegen.

pag. 65.

afvoeren van de lijst van verplichte termen:

een functie is stijgend (dalend) in een punt

wijzigen: verplaatsing (i.p.v. afgelegde weg)

Meetkunde

pag. 72—73.

afvoeren van de lijst van verplichte termen:

trapezium (def.)

binnenomtrekshoek

buitenomtrekshoek
 as van een driehoek, as van een koordenveelhoek
 zwaartevlak
 orthocentrisch viervlak
 rechthoekig viervlak
 toevoegen:
 centrum van vermenigvuldiging (i.p.v. gelijkvormigheidspunt)
 opmerking: verkorting blijft gehandhaafd

Analytische meetkunde

pag 77, 3e alinea van onder.

De hoek, die een lijn met de X-as maakt, wordt gemeten van -90° tot en met 90° .

De Nomenclatuurcommissie

BOEKBESPREKING

Prof. dr. J. B. Alblas, *Empirie en Formalisme*; rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de mechanica aan de Technische Hogeschool te Eindhoven. J. B. Wolters, Groningen; 1959 f 1,50.

Prof. dr. ir. A. I. van de Vooren, *Over enkele aspecten van de toegepaste wiskunde*; rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de toegepaste wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Groningen. J. B. Wolters, Groningen; 1959 f 1,50.

Beide oraties bespreken nieuwere toepassingen van de wiskunde bij allerlei natuurwetenschappelijk onderzoek. De eerste doet dit vanuit het gezichtspunt van de wisselwerking van natuurkundig beschouwen en het wiskundige denken in de mechanica, of anders geformuleerd, vanuit het gezichtspunt van de wisselwerking van empirie en formalisme. Zeer beknopt uiteraard beschouwt de spreker hiervan enige interessante voorbeelden.

De tweede oratie beschouwt de zaak niet vanuit een bepaald gezichtspunt maar geeft een reeks van toepassingsgebieden van de wiskunde in het hedendaagse natuurwetenschappelijk onderzoek. Tussen deze opsomming door worden dan hier en daar belangrijke opmerkingen gemaakt.

De lezing van beide redevoeringen is zeer aan te bevelen. Men krijgt een aardig overzicht dat tot verdere kennisneming van de nieuwe toepassingsgebieden uitnodigt.

J. F. Hufferman

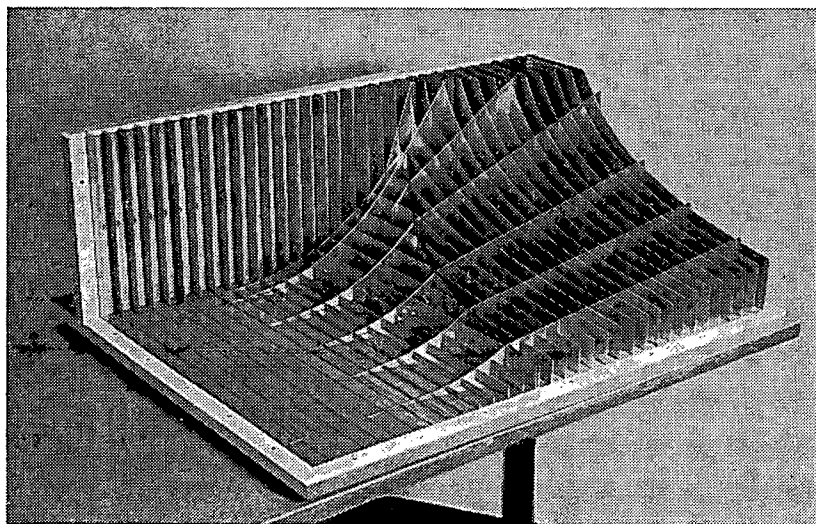
ENKELE BEREKENINGEN IN VERBAND MET DE WET VAN VAN DER WAALS

door

Ir. Dr. A. J. STARING

Appingedam

Het maken van een 3-dimensionale afbeelding van toestanden waarin een stof kan verkeren die de wet van Van der Waals zou volgen, gaf aanleiding tot een paar berekeningen, waarvan de uitkomsten misschien ook voor anderen van belang kunnen zijn. De foto van het toestel vertoont een reeks isothermen, voor temperaturen van 0° Kelvin af, opklimmend met $\frac{1}{20}$ van de kritieke temperatuur T_k , tot en met $1,6 T_k$. Ook zijn enige lijnen voor constant volume aangebracht.



§ 1. De gereduceerde vergelijking van Van der Waals:

$$\left(p + \frac{3}{V^2}\right) \cdot (3V - 1) = 8T \quad (1)$$

levert gemakkelijk voor elk stel waarden van V en T de bijbehorende druk p , mits $T \geq 1$. Daarentegen is het bepalen van de maximum spanning p_m van de damp bij een gegeven temperatuur een tijdrovend

werk. Vervangt men in (1) V door $\frac{1}{d}$, waarin d de dichtheid van de stof is, dan krijgt men de eenvoudiger vergelijking:

$$d^3 - 3d^2 + \frac{1}{3}(p + 8T) \cdot d - p = 0. \quad (2)$$

Voor $T < 1$ zijn er waarden van p , waarbij 3 reële waarden van d behoren; de grootste daarvan is d_1 , de kleinste d_3 . Bij gegeven T moet men een waarde van p_m aannemen, en de daarbij passende waarden van d_1 en d_3 berekenen. Het eenvoudigst leek daarvoor de volgende manier:

Stel:

$$M = 9 - p_m - 8T \quad N = 9(3 + p_m - 4T) \quad \cos \varphi = \frac{N}{M\sqrt{M}},$$

dan is

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 + \frac{2}{3}\sqrt{M} \cdot \cos \varphi & V_1 &= \frac{1}{d_1} \\ d_3 &= 1 - \frac{2}{3}\sqrt{M} \cdot \sin (30^\circ + \varphi) & V_3 &= \frac{1}{d_3} \end{aligned}$$

Dan moet men nagaan of daarmede voldaan is aan de voorwaarde van Maxwell:

$$\int_{V_1}^{V_3} p \, dV = \frac{8T}{3} \ln \frac{3V_3 - 1}{3V_1 - 1} + \frac{3}{V_3} - \frac{3}{V_1} = p_m (V_3 - V_1) \quad (3)$$

Zo niet, dan moet de berekening met een andere waarde voor p_m herhaald worden, tot overeenstemming bereikt is.

§ 2. Voor $T < 0,3$ wordt de in § 1 aangegeven wijze van berekenen onbetrouwbaar en weldra onmogelijk door de kleine waarde van p_m , vergeleken met de andere termen van M en N . Men kan dan de volgende benaderingsmethode toepassen:

Bij lage temperaturen is de waarde van V_1 praktisch de waarde van V , die behoort bij het snijpunt van de V -as met het steil oplopende deel van de isotherm. Ook is V_3 al spoedig vele machten van 10 malen groter dan V_1 en V_2 .

Voor $p = 0$ volgt uit (1):

$$8TV^2 - 9V + 3 = 0 \quad (4)$$

zodat

$$V_1 + V_2 = \frac{9}{8T}. \quad (5)$$

Uit (1) volgt verder:

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{3} + \frac{8T}{3p} \quad (6)$$

Uit (5) en (6) samen volgt:

$$V_3 = \frac{1}{3} + \frac{8T}{3p} - \frac{9}{8T}.$$

Daar p zeer klein is, vergeleken met de andere getallen in deze vergelijking, kan men als goede benadering aannemen:

$$V_3 = \frac{8T}{3p} \quad (7)$$

(3) wordt dan, met gepaste verwaarlozingen:

$$\frac{8T}{3} \ln \frac{3V_3}{3V_1 - 1} - \frac{3}{V_1} = p_m V_3,$$

dus volgens (7):

$$\frac{8T}{3} \ln \frac{8T}{p_m (3V_1 - 1)} - \frac{3}{V_1} = \frac{8T}{3}$$

zodat

$$\begin{aligned} \ln \frac{8T}{3V_1 - 1} - \ln p_m - \frac{9}{8TV_1} &= 1 \\ \ln p_m &= \ln \frac{8T}{3V_1 - 1} - \left(\frac{9}{8TV_1} + 1 \right) \end{aligned} \quad (8a)$$

waarin volgens (4):

$$V_1 = \frac{9 - \sqrt{81 - 96T}}{16T} \quad (8b)$$

Deze benaderingsmethode geeft voor $T = 0,3$ een waarde voor p_m , die slechts 0,15 % verschilt van die, berekend volgens § 1. (8a en b) lijken dus betrouwbare formules voor $T < 0,3$.

§ 3. Een ander punt van berekening betreft de lijn voor constant volume, die door het kritieke punt K gaat. In tegenstelling met alle andere lijnen voor constant volume vertoont deze geen knik bij de overgang naar het twee-fasen-gebied, n.l. dat van vloeistof en verzadigde damp. Het gedeelte van de lijn, dat in dit gebied ligt, is de dampspanningslijn; deze geeft voor elke temperatuur tussen nul en 1 de maximum spanning van de damp aan. De genoemde bijzonderheid kan men als volgt bewijzen:

Vervangt men in (1) V door $\frac{1}{d_1}$, resp. $\frac{1}{d_3}$, dan worden de vergelijkingen:

$$(p + 3d_1^2) \left(\frac{3}{d_1} - 1 \right) = 8T \quad (9a)$$

en

$$(p + 3d_3^2) \left(\frac{3}{d_3} - 1 \right) = 8T \quad (9b)$$

of

$$\frac{3p}{d_1} + 9d_1 - p - 3d_1^2 = 8T$$

en

$$\frac{3p}{d_3} + 9d_3 - p - 3d_3^2 = 8T$$

$$3p \frac{d_3 - d_1}{d_1 d_3} + 9(d_1 - d_3) - 3(d_1^2 - d_3^2) = 0$$

$$- \frac{p}{d_1 d_3} + 3 - (d_1 + d_3) = 0$$

Stel

$d_1 + d_3 = f$, dan is

$$p = d_1 d_3 (3 - f) = d_1 (f - d_1) (3 - f) \quad (10a)$$

$$= d_3 (f - d_3) (3 - f) \quad (10b)$$

Deze uitdrukkingen voor p , gesubstitueerd resp. in (9a) en (9b) geven na uitwerking:

$$d_1^2 - f d_1 - 3(3 - f) + \frac{8T}{f} = 0$$

en

$$d_3^2 - f d_3 - 3(3 - f) + \frac{8T}{f} = 0.$$

Bij gegeven f kunnen d_1 en d_3 dus beschouwd worden als de wortels van de vergelijking:

$$d^2 - f d - 3(3 - f) + \frac{8T}{f} = 0,$$

waaruit volgt:

$$d_1 d_3 = \frac{8T}{f} - 3(3 - f).$$

Volgens (10a) is dan:

$$p = (3 - f) \cdot \left[\frac{8T}{f} - 3(3 - f) \right] \quad (11)$$

Indien p hierin de maximumspanning p_m van de damp bij de temperatuur T voorstelt, dan is (11) de vergelijking van de dampspanningslijn, mits f als functie van T bekend is. Dat is niet het geval, maar voor het hier gestelde doel is het voldoende te weten dat voor $T = 1, f = 2$.

Uit (11) volgt:

$$\frac{dp_m}{dT} = \frac{24}{f} - 8 - \left[\frac{24T}{f^2} - 6(3 - f) \right] \cdot \frac{df}{dT} \quad (12)$$

In het kritieke punt K is dus

$$\left(\frac{dp_m}{dT} \right)_K = 4, \quad (13)$$

onafhankelijk van df/dT .

Buiten het twee-fasen-gebied volgt uit (1):

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{8}{3V - 1}.$$

Voor $V = 1$ wordt ook dit gelijk aan 4, waarmee het gestelde bewezen is.

§ 4. De vergelijkingen (8a) en (8b) vormen samen de vergelijking van de dampspanningslijn (met goede benadering) voor $T < 0,3$, maar niet voor $T > 0,3$. Het gelukte ook dáárvoor twee vergelijkingen op te stellen, die het „proberen” (zie § 1) verder overbodig maken.

De vorm van de dampspanningslijn doet denken aan een exponentiële functie van T , en de lijn raakt in het nulpunt aan de T -as, zodat gesteld werd:

$$p_m = a T^x e^{f(T)}$$

Voor $T = 1$ is $p_m = 1$. Dit kan, als $a = 1$ en $f(1) = 0$, zodat geprobeerd werd

$$f(T) = n(1 - T),$$

waarin n nog een functie van T kan zijn.

Verder moet nog voldaan worden aan de betrekking (13).

Uit het gestelde:

$$p_m = T^x e^{n(1-T)}$$

volgt:

$$\ln p_m = x \ln T + n(1 - T)$$

dus

$$\frac{dp_m}{p_m} = x \frac{dT}{T} + \ln T \cdot dx + dn(1 - T) - ndT$$

zodat

$$\frac{dp_m}{dT} = p_m \left[\frac{x}{T} + \ln T \cdot \frac{dx}{dT} + \frac{dn}{dT} (1 - T) - n \right]$$

Volgens (13) is nu, voor $T = 1$ en $p_m = 1$:

$$4 = x - n$$

zodat

$$p_m = T^{n+4} \cdot e^{n(1-T)} \quad (14a)$$

n kon bepaald worden voor de waarden van T , waarvoor p_m volgens § 1 berekend was. De grafiek voor n als functie van T gaf punten op een kromme, die niet te onderscheiden was van een deel van een tak van een orthogonale hyperbool, met als vergelijking:

$$(n - 0,4931) \cdot (T + 0,0328) = 1,9724 \quad (14b)$$

Bij substitutie van de met (14a en b) berekende waarden in de in § 1 gegeven vergelijkingen voor M en N , en de daaruit afgeleide, en tenslotte in (3), bleken zij over de gehele serie waarden voor T tussen 0,3 en 1 zeer goed te voldoen, met kleine verschillen in 4e of 5e decimaal na de nullen; slechts in één van de 5 berekende waarden bedroeg het verschil 0,14%.

Nagegaan werd of het stuk van de dampspanningslijn voor $T > 0,3$ goed aansluit aan dat voor $T < 0,3$, wat de richting betreft. Dan moet voor $T = 0,3$ $\frac{dp_m}{dT}$ voor beide lijnen hetzelfde zijn. Voor het onderste stuk is dit, berekend uit (8a en b), 0,01180; voor het bovenste, berekend uit (14a en b), 0,01188; het kleine verschil geeft bij de lage spanning (voor $T = 0,3$ is $p_m = 0,0003188$) geen merkbare knik.

§ 5. Hoewel het volgende niet van belang is voor de constructie van het V - p - T -model, is het wel interessant dat met de vergelijking (11) nagegaan kan worden of uit de wet van Van der Waals een empirische wet, bekend als de „regel van Matthias”, of „wet van de diameter”, volgt. Die wet komt er op neer dat, althans in de

nabijheid van het kritieke punt, f een lineaire functie van T zou zijn, mits deze f behoort bij de bij T passende p_m . Dan zou dus gelden:

$$f = A + BT,$$

waarin A en B constanten zijn. Voor $T = 0$ is $p_m = 0$; volgens (11) is dan $f = 3$, dus $A = 3$. Voor $T = 1$ is $p_m = 1$ en $f = 2$, dus $B = -1$, zodat

$$f = 3 - T.$$

Uit (11) volgt dan:

$$p_m = T^2 \cdot \frac{3T - 1}{3 - T}.$$

Dat ook hiervoor $\frac{dp_m}{dT}$ voor $T = 1$ gelijk is aan 4, volgt reeds uit het feit dat dit resultaat onafhankelijk bleek te zijn van de waarde van $\frac{df}{dT}$; zie (13).

Volgens deze wel zéér eenvoudige formule voor de dampspanningslijn zou p_m negatief zijn voor $T < \frac{1}{3}$. Voor $T = 0,9$ is de afwijking van de berekende waarde van p_m 1,4 %. Aan de wet van de diameter kan, althans volgens de wet van Van der Waals, slechts beperkte waarde worden toegekend. Praktisch is zij trouwens alleen van belang om uit metingen van d_1 en d_3 in de buurt van het kritieke punt, door extrapolatie zo nauwkeurig mogelijk de dichtheid van de stof in dat punt te bepalen.

BOEKBESPREKING

Leonhard Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, unter Mitwirkung von Joh. Niessner neu herausgegeben von Jos. E. Hofmann. Reclam-Verlag, Stuttgart, 1959, geb. DM 18.50.

Deze nieuwe uitgave van Euler's in 1767 voor het eerst verschenen werk zal velen een genoegen doen. Men kan er kennis van nemen uit historische belangstelling, doch men kan het ook gebruiken om het eenvoudige algebraïsche rekenen te leren. Prof. Hofmann schreef een „biographisch-wissenschaftliche” inleiding, waarin het leven van Euler uitvoerig wordt beschreven.

De uitvoering is buitengewoon mooi; het boek is voorzien van een zeer gedistingeerd bandje in het bekende Reclam-formaat.

H. W. Lenstra

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

XLIV. *Over voortlopende en teruglopende planeten.*

Het is bekend dat zowel de binnen- als de buitenplaneten, waargenomen van de zich in zijn jaarlijkse baan om de zon bewegendes aarde, op de hemelbol banen beschrijven die uit voortlopende en teruglopende gedeelten bestaan. Onder *voortlopen* wordt daarbij een beweging verstaan in de zelfde richting als die van de zon langs de ecliptica, gezien uit geocentrisch standpunt. Wij zullen nagaan in hoeverre dit verschijnsel samenhangt met bepaalde kwantitatieve eigenschappen van het zonnestelsel, met name de derde wet van Kepler.

Wij veronderstellen dat twee planeten P_1 en P_2 zich in een zelfde vlak in concentrische cirkels, met stralen R_1 en R_2 , bewegen met constante hoeksnelheden ω_1 en ω_2 . Voorts zij $R_1 \neq R_2$, $R_2 = kR_1$ en dus $k > 0$, $k \neq 1$, terwijl verder $\omega_1 \neq \omega_2$. Uit de laatste voorwaarde volgt, dat het telkens voorkomt dat P_1 en P_2 op een zelfde straal liggen; op zo'n tijdstip stellen wij $t = 0$ en wij kiezen de X-as langs deze straal. Dan geldt voor de coördinaten (x_i, y_i) van P_i :

$$x_i = R_i \cos \omega_i t, \quad y_i = R_i \sin \omega_i t$$

waarbij hoeken in de zin der goniometrie positief worden gemeten. Is φ de hoek, die de vector $P_1 P_2$ met de X-as maakt, dan is

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k \sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{k \cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t} \quad (1)$$

φ bepaalt de richting waarin de planeet P_2 van P_1 uit gezien wordt; P_2 is voortlopend, stationair of teruglopend al naar gelang $\dot{\varphi} > 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} < 0$ is.

Uit (1) volgt door differentiatie naar t :

$$\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = \frac{k^2 \omega_2 + \omega_1 - k(\omega_1 + \omega_2) \cos (\omega_2 - \omega_1) t}{(k \cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)^2}$$

waaruit na eliminatie van φ volgt

$$\dot{\varphi} = \frac{k^2 \omega_2 + \omega_1 - k(\omega_1 + \omega_2) \cos (\omega_2 - \omega_1) t}{k^2 + 1 - 2k \cos (\omega_2 - \omega_1) t} \quad (2)$$

Voor onze vraag is het teken van $\dot{\varphi}$ beslissend. De noemer van (2) is altijd positief; het is het kwadraat van de met R_1 tot eenheid gemeten

afstand $P_1 P_2$. Het teken van de teller bepaalt dus de richting der relatieve beweging. Voor $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ is deze teller gelijk aan $A - Bz$, waarin $A = k^2\omega_2 + \omega_1 > 0$, $B = k(\omega_1 + \omega_2) > 0$, $z = \cos(\omega_2 - \omega_1)t$. Daar $\omega_1 \neq \omega_2$ is, doorloopt z heen en weer gaand het interval $-1 \leq z \leq 1$. De beweging is dus in elk geval voortlopend voor $-1 \leq z \leq 0$; tussen 0 en 1 ligt dan en alleen dan een waarde van z met $\dot{\varphi} = 0$, als $A \leq B$. Deze voorwaarde luidt

$$k^2\omega_2 + \omega_1 - k(\omega_1 + \omega_2) \leq 0$$

of

$$(R_2 - R_1)(R_2\omega_2 - R_1\omega_1) \leq 0 \quad (3)$$

Hieruit volgt de nodige en voldoende voorwaarde voor het verschijnsel der voortlopende en teruglopende beweging: *van de planeten moet die met de grootste baan een kleinere lineaire snelheid hebben dan de andere.*

Volgens de derde wet van Kepler is $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}$ of

$R_1^2\omega_1^2 : R_2^2\omega_2^2 = R_2 : R_1$, zodat de voorwaarde vervuld is.

Wij kunnen ook afstand doen van de voorwaarde dat ω_1 en ω_2 beide positief zijn. Zal het verschijnsel optreden dan moet blijkbaar

$$|k^2\omega_2 + \omega_1| < k|\omega_1 + \omega_2|$$

of wel

$$(1 - k^2)(\omega_1^2 - k^2\omega_2^2) < 0$$

waaruit volgt dat de absolute waarde van de lineaire snelheid in de grootste baan kleiner moet zijn dan in de andere.

Uit (2) kan men niet alleen de wisseling in het teken van $\dot{\varphi}$, maar het gehele verloop aflezen. Zij is een gebroken lineaire functie van z op het interval $-1 \leq z \leq 1$; de grafiek is een hyperbool, die zijn verticale asymptoot rechts van het interval heeft. De functie neemt af bij toenemende z ;

$$f(-1) = \frac{k\omega_2 + \omega_1}{k + 1}, f(0) = \frac{k^2\omega_2 + \omega_1}{k^2 + 1}, f(1) = \frac{k\omega_2 - \omega_1}{k - 1}.$$

Als functie van t beschouwd is het een periodieke functie met de cirkelfrequentie $\omega_2 - \omega_1$; zijn T_1 en T_2 de omlooptijden der planeten dan is de periode T van $\dot{\varphi}$ blijkbaar bepaald door

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \text{ of } T = \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2}.$$

Voor het systeem Aarde en Venus is $T_1 = 365,3$ en $T_2 = 224,7$ dagen, waaruit volgt dat T ongeveer 584 dagen is. In die periode heeft Venus ongeveer 542 dagen een directe en 42 dagen een retrograde beweging.

VRAAGSTUK OVER EEN BEKENDE DRIEHOEK

door

R. KOOISTRA

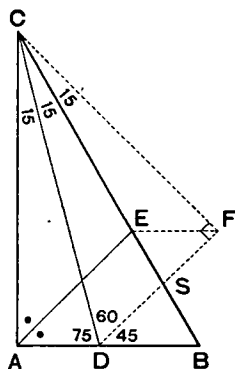
Culemborg

Het bedoelde vraagstuk luidt:

In een rechthoekige driehoek ABC ($\alpha = 90^\circ$) met $\gamma = 30^\circ$ is de deellijn uit A de helft van de deellijn uit C .

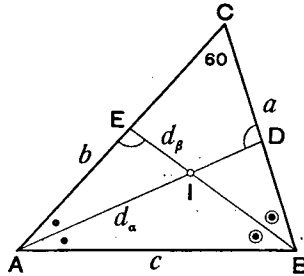
Dit vraagstuk kwam me onlangs onder ogen in een verslag van een mondeling examen Wiskunde L.O. in 1939 en ik moet zeggen, dat ik tamelijk verrast was, daar ik deze bijzonderheid van deze, toch overbekende, driehoek niet kende noch in één of ander leerboek der meetkunde was tegengekomen. Wellicht zijn er lezers, voor wie deze eigenschap eveneens onbekend is. Voor de school is het een aardig vraagstuk, als de klas de formule voor de deellijn heeft gehad, of desnoods na de behandeling der gelijkvormigheid (maar dan voor pientere leerlingen).

Het bewijs met de formule voor de deellijn is zeer eenvoudig. Men verkrijgt voor $d_a = \frac{1}{2}a\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$ en voor $d_c = a\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)$. Toepassing van de deellijn-formule uit de trigonometrie is uiteraard ook mogelijk. Interessanter is het, het bewijs zuiver meetkundig te leveren. Zulk een bewijs moge hier volgen:



Trek de hulplijnen CF ($\angle BCF = 15^\circ$) en $DF \perp CF$. Wegens

$\angle FDB = 45^\circ$ is $DF \parallel AE$, dus $ES : SB = AD : DB = \sqrt{3} : 2$.
 In $\triangle CDF$ is CS bissectrice dus: $SF : DS = \sqrt{3} : 2$. Derhalve:
 $EF \parallel AB$. Bijgevolg is vierhoek $AEFD$ een parallellogram en dus:
 $AE = DF = \frac{1}{2}CD$. ¹⁾



Het bewijs kan ook eenvoudig volgen uit een eigenschap van een driehoek met een hoek van 60° :

In een driehoek met $\gamma = 60^\circ$ geldt $d_\alpha : d_\beta = b : a$.

Daar vierhoek $CEID$ een koordenvierhoek is, geldt: $\angle AEB = \angle ADC$. Toepassing van de sinusregel in $\triangle ABD$ en $\triangle ABE$ op $\frac{d_\alpha}{c}$ en $\frac{d_\beta}{c}$ geeft na deling van deze twee verhoudingen de beweerde evenredigheid. In een rechthoekige driehoek met $\alpha = 90^\circ$ en $\gamma = 30^\circ$ geeft deze eigenschap dus als onmiddellijk gevolg: $d_\alpha : d_\gamma = 1 : 2$.

¹⁾ Een collega maakte mij attent op het volgende korte en elegante bewijs: Trek hoogtelijn AG , dan is $\triangle AEG \sim \triangle CDA$. Daar $AG = \frac{1}{2}AC$ is dus $AE = \frac{1}{2}CD$.

EINDEXAMEN - LUXEMBURG 1959 ¹⁾

Examen de fin d'études secondaires

1959

Enseignement secondaire pour jeunes filles.

Mêmes questions pour toutes les sections.

Algèbre

1. Calculer les dérivées suivantes:

a) $y = \frac{x^2(x^2 - 2)^2}{x^4 - 4};$ (8 points)

b) $y = \frac{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}{x - 1};$ (8 points)

c) $y = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}.$ (6 points)

2. Etudier les variations de la fonction suivante et construire le graphique correspondant:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 15}{2x - 5} \quad (18 \text{ points})$$

3. Etudier les variations de la surface latérale de tous les cônes de volume donné $V = \frac{1}{3}\pi a^3$, où a est une constante supposée connue. (14 points)

Géométrie

1. Qu'appelle-t-on segment sphérique?

Etablir la formule donnant le volume d'un segment sphérique à 2 bases. (18 points)

2. Dans un demi-cercle de diamètre $AD = 2R$ on inscrit un demi-hexagone régulier ABCD terminé aux extrémités du diamètre AD et un rectangle ayant pour hauteur le côté BC de l'hexagone parallèle au diamètre AD. Exprimer par trois nombres le rapport des 3 volumes engendrés par le demi-cercle, le demi-hexagone et le rectangle tournant autour de AD. (18 points)

3. Dans une sphère de rayon donné R, inscrire un cône tel que le volume du cône soit égal au demi-volume de l'anneau sphérique qui enveloppe la surface latérale du cône. (18 points)

Trigonométrie

1. Rendre calculable par logarithmes:

$$\frac{\sin 2a}{2 \operatorname{tg} a} - \sin a \cos a. \quad (18 \text{ points})$$

¹⁾ Door vriendelijke bemiddeling van dr. A. Gloden ontvangen. Zie ook Euclides 34, blz. 116.

2. Résoudre l'équation:

$$5 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{cotg} x = 1. \quad (18 \text{ points})$$

3. Une statue de 7,24 m de haut doit être placée sur un socle de façon qu'un observateur, se trouvant à 22 m de distance du monument et à 1,60 m au-dessus du sol, puisse voir tout le monument sous un angle de $27^{\circ}10'$. Quelle doit être la hauteur du socle? (18 points)

Examen de fin d'études secondaires

1959

Enseignement classique pour garçons

I. a. Algèbre et Géométrie

Sections gréco-latine, latine A et C

1. Dériver

$$y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, \quad (3 \text{ points})$$

$$y = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x - \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (4 \text{ points})$$

2. Intégrer

$$\int \frac{2ax \, dx}{(b^2 - c^2 x^2)^2} \quad (3 \text{ points})$$

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx. \quad (4 \text{ points})$$

3. Etudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 1}{4x + 5}. \quad (12 \text{ points})$$

4. Inscrire dans un cône donné le cylindre de volume maximum. (12 points)

5. Calculer la surface comprise entre la courbe $y^2 = 9x$ et la droite $y = \frac{2}{3}x$. (8 points)

6. Calculer à l'aide d'une intégrale le volume d'un cône de révolution qui a pour hauteur h 6 cm et pour rayon de la base r 4 cm. (8 points)

b. Trigonométrie

1. Rendre calculable par logarithmes

a) $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1$ A, B, C , étant les angles d'un triangle.

b) $(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$. (20 points)

2. Résoudre

a) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$,

b) $3 \sin x - \cos x = \sqrt{2}$. (20 points)

3. Les sommets de deux montagnes sont dans un même plan vertical avec un observateur et lui paraissent élevés au-dessus de l'horizon de $9^{\circ}30'$ et $18^{\circ}10'$. L'observateur s'étant rapproché de 6365 m, en restant dans le même plan vertical

et sur une horizontale, voit alors les deux montagnes (leurs sommets) à la même hauteur de 37° au-dessus de l'horizon. Calculer en m la hauteur de chaque montagne. (20 points)

II. Sous-section latine C (section des sciences naturelles)

Compléments de Mathématiques.

a. Calcul différentiel et intégral

1. Dériver $y = \ln \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2$.
2. Dériver $y = \cos x \cdot e^{\sin x}$.
3. Intégrer $\int \sin^3 x \, dx$.
4. Intégrer $\int x^2 e^{2x} \, dx$.
5. $\int \frac{2x - 13}{x^2 - 10x + 25} \, dx$.
6. Déterminer l'aire comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = 1 - x^2$, en se servant d'intégrales définies. (9 points par question)

b. Géométrie analytique.

1. a) Construire le cercle (C) $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$.
 b) Etablir l'équation de la tangente à ce cercle au point P ($-1, y < 2$) situé sur le cercle.
 c) Soit Q le point d'intersection de cette tangente avec l'axe $x'x$. Trouver l'équation de la seconde tangente menée par Q au cercle (C). (18 points)
2. Etablir l'équation de la normale à la parabole $y^2 = 10x$ qui est perpendiculaire à la droite $y = \frac{-2x}{5} + 12$. (18 points)
3. a) Montrer que l'équation

$$4y^2 - 4xy - 3x^2 + 8x - 16y - 64 = 0$$
 représente une hyperbole,
 b) trouver les équations de ses asymptotes,
 c) construire cette hyperbole. (18 points)

III. Sous-section latine B (Mathématiques spéciales).

a. Algèbre et calcul différentiel et intégral.

1. a) La série $\frac{2 \cdot 4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 8} + \dots$
 est-elle convergente ou divergente? (4 points)

b) Etudier, pour toutes les valeurs de x , la nature de la série entière

$$\frac{x}{9} + \frac{x^5}{11} + \frac{x^9}{13} + \frac{x^{13}}{15} + \frac{x^{17}}{17} + \frac{x^{21}}{19} + \dots \quad (5 \text{ points})$$

2. Représenter graphiquement dans l'intervalle la fonction

$$y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}.$$

Trouver les minima, les maxima, les points d'inflexion, l'intersection avec les axes et les pentes de tangentes aux points d'intersection avec les axes.

(14 points)

3. Evaluer la vraie valeur de l'expression

$$y = \frac{\log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ si } x \rightarrow a. \text{ Log népérien} \quad (5 \text{ points})$$

4. Etudier les variations du volume d'un cylindre circulaire droit dont la surface totale est constante. (9 points)

5. Calculer l'intégrale $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctg x \, dx$. (9 points)

6. Trouver l'aire comprise entre la parabole $y^2 = 2x$ et le cercle $y^2 = 4x - x^2$ extérieurement à la parabole.

Les 2 courbes tournant autour de l'axe Ox , trouver le volume engendré par la surface considérée précédemment. (8 points)

b. Géométrie analytique.

1. On donne les deux cercles:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 100 = 0 \text{ et}$$

$$C_2 \equiv x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0.$$

a) Montrer que les deux cercles sont tangents.

b) Trouver les équations des cercles tangents à C_1 et C_2 en leur point de contact et tangents à Oy . (14 points)

2. On donne la courbe

$$\rho = \frac{12}{3 - 5 \cos \theta},$$

le pôle étant au foyer droit.

a) Déterminer l'excentricité et le genre.

b) Donner l'équation de la directrice voisine du foyer droit.

c) Construire la courbe.

d) Ramener l'équation en coordonnées rectangulaires.

e) Calculer les coordonnées du centre et établir les équations des asymptotes. Tracer les asymptotes sur le graphique. (14 points)

3. Réduire et construire la conique

$$x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 2 = 0. \quad (13 \text{ points})$$

4. Trouver l'équation d'une parabole qui passe par les points suivants: $(-4, 0)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$ et $(5, 6)$. (13 points)

c. Compléments de géométrie plane.

1. a) Définir l'axe radical, montrer que c'est une droite perpendiculaire à la ligne des centres et déterminer sa position si les deux cercles sont extérieurs. (10 points)
- b) Construire l'axe radical de deux cercles extérieurs en justifiant la construction. (8 points)
2. a) Définir la polaire d'un point par rapport à deux droites. (2 points)
- b) Construire la polaire d'un point par rapport à deux droites en justifiant la construction. (8 points)
- c) Démontrer que dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres. (8 points)
3. Sachant que deux cercles situés dans un plan sont homothétiques, construire un cercle passant par un point donné A et tangent à deux droites qui se coupent. (10 points)
- Refaire la construction dans le cas où les droites sont parallèles. (8 points)

Premier Baccalauréat Européen 1959

Ecole Européenne de Luxembourg

Mathématiques

(Section Latin-Grec)

1. Représenter graphiquement, dans le même système d'axes de coordonnées, la fonction

$$y = x^3 - 12x$$

et sa première dérivée.

Quel est le profit que l'on peut tirer de l'étude de la dérivée pour la construction de la courbe donnée?

2. Résoudre l'équation trigonométrique

$$\sin^2 x + \cos x \sin x = 0.$$

3. Trouver la hauteur du cylindre droit de volume maximum inscrit dans un cône droit de rayon 8 cm. et de hauteur 24 cm.
4. On représente par x et par y les volumes engendrés par la rotation d'un triangle isocèle rectangle tournant successivement autour de l'hypothénuse et autour d'un des côtés de l'angle droit.

Montrer que $\frac{1}{x^2} = \frac{2}{y^2}$.

5. Calculer

$$\int_0^5 (x^2 + 6x + 5) dx$$

et interpréter graphiquement.

Mathématiques

(Section Latin-Math.)

$$1. \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1} \right)^{2m+1}$$

2. Représenter la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 4$ (H) en mettant en évidence les éléments géométriques remarquables. Trouver le lien du pôle par rapport à (H) d'une tangente mobile au cercle

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ (C).}$$

3. La somme des arêtes d'un prisme droit à base carrée est constante et égale à 48cm. Exprimer le volume de ce prisme en fonction du côté x de la base. Représenter graphiquement la variation du volume en fonction de x . Pour quelle valeur de x le volume est-il maximum et quelle est la valeur de ce maximum?
Calculer l'aire limitée par la courbe et l'axe des x .

4. p étant un nombre premier, résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 - y^2 = p.$$

5. Par deux points A et B mener un cercle (C') tangent à un cercle (C) donné. Discussion.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie aangaande deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

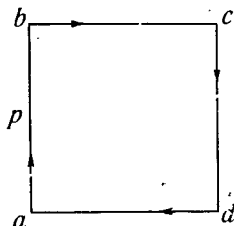
21. De wortels van de vergelijking $x^2 + 4x + 3 = 0$ zijn x_1 en x_2 . Stel een vergelijking op met wortels $\sqrt{x_1}$ en $\sqrt{x_2}$.

Oplossing. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \pm \sqrt{(x_1 + x_2) + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \pm \sqrt{(-4) + 2\sqrt{3}} = \pm i(-1 + \sqrt{3})$ en $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{3}$.

De gevraagde vergelijking is dus $x^2 \pm i(-1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.

Men zou dus verwachten, dat een van deze twee vergelijkingen aan de vraag voldoet. Ze voldoen echter geen van tweeën. Hoe komt dat?

22. Vier stoffelijke punten bevinden zich in de hoekpunten van een vierkant met zijden p . Ze bewegen zich met een aanvangssnelheid, die in de figuur is weergegeven door een pijl. Gedurende de beweging veranderen deze snelheden zo, dat de snelheid van op a elk ogenblik gericht is naar de plaats, waar b zich op dat moment bevindt; de snelheid van b naar de plaats, waar c zich bevindt, enz. De vier snelheden zijn op elk moment aan elkaar gelijk. Gevraagd wordt, welke weg de punten afleggen, totdat ze elkaar ontmoeten. Is het mogelijk een toestel te ontwerpen, waardoor deze beweging tot het eind toe gerealiseerd wordt?



OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

19. Algebraïsch is direct duidelijk, dat we uit

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ en } \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

niet mogen concluderen, dat

$$\frac{a+p}{b+q} < \frac{c+r}{d+s}$$

Statistisch doorziet men het probleem gemakkelijker, als men het gegeven chargeert door b.v. als uitslag te kiezen:

burgerauto's	1 personenauto	0 ongelukken,
	100 vrachtwagens	99 ongelukken,
militaire auto's	100 personenauto's	1 ongeluk,
	1 vrachtwagen	1 ongeluk.

Zowel de burgerpersonenauto's als de burgervrachtwagens komen er beter af dan hun militaire collega's. Toch zal niemand de militairen ervan verdenken onvoorzichtiger te rijden dan de burgers. De in de aantallen auto's verborgen gewichten veroorzaken dus de paradox.

20. 512m/sec. Nu is de snelheid van de hond immers groter dan de geluidssnelheid en hoort hij het blik niet meer vallen.

16a. A. Heb ik 3^n munten, waaronder één valse, en weet ik van iedere munt afzonderlijk, dat ze echt of te zwaar is (z-munt) of dat ze echt of te licht is (l-munt), dan kan ik in n wegingen de valse munt bepalen. Bewijs met volledige inductie: Ik verdeel de munten in groepen van 3^{n-1} , zodanig dat er twee gelijke groepen zijn, d.w.z. groepen die evenveel z-munten bevatten en evenveel l-munten. Deze twee leg ik ieder op een der schalen van de balans. Slaat die door dan bevindt de valse zich tussen de z-munten van de schaal die doorslaat of tussen de l-munten van de andere schaal. Slaat de schaal niet door dan bevindt de valse zich in de derde groep. Steeds dus in een groep van 3^{n-1} munten.

B. Heb ik $\frac{1}{2}(3^n + 1)$ munten, waaronder één valse en beschik ik over slechts één echte, dan kan ik in n wegingen de valse bepalen. Weer met volledige inductie: Ik leg op een schaal van mijn balans $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$ en op de andere $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$ van de te onderzoeken munten en bovendien de gegeven echte. Slaat de schaal door dan heb ik het geval gereduceerd tot A voor $n-1$. Slaat ze niet door dan heb ik er nog $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$ over.

C. Heb ik $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ munten, waaronder een valse en beschik ik over geen echte, dan kan ik in n wegingen klaar komen. Ik leg dan op iedere zijde $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$ munten. Bij doorslaan kom ik in geval A, bij niet doorslaan in geval B voor $n-1$.

De gevallen A en B geven de oplossing van 16a, C is een toegift.

(Ingezonden door de heer C. A. M. v. d. Linden - Amsterdam)

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Singel 13, Hoogezand.

VOORDRACHTEN MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „Elementaire onderwerpen vanuit een hoger standpunt belicht”, in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 23 maart 1960: Prof. Dr. C. Visser (onderwerp nog niet bekend). Aanvang 20,00 uur.

In de serie „Actualiteiten” in „Krasnapolsky”, Warmoesstraat 173—199, Amsterdam op zaterdag 26 maart 1960: Dr. Ir. D. J. Hofsommer (onderwerp nog niet bekend). Aanvang 14,00 uur.

AVONDCOLLEGES VOOR LERAREN

Op de avonden van 22 en 29 maart en 5 april 1960 zal Dr. A. van der Sluis iets vertellen over de elektronische rekenmachine Zebra. Aanvang 20.00 uur. Plaats: Laboratorium voor Kristalchemie, Catharijnesingel 51, Utrecht (vlak bij het station). Belangstellenden worden verzocht zich tijdig op te geven bij de administratie van het Mathematisch Instituut, Achter den Dom 7, Utrecht. De deelneming is kosteloos. Er zal getracht worden de gebruikelijke reiskostenvergoeding voor leraren te verkrijgen.

3e CONGRES BENELUX d'HISTOIRE DES SCIENCES

Dit wordt van 20 t/m 23 april 1960 gehouden in Luxemburg. De voertalen zijn Frans en Nederlands. Nadere inlichtingen verstrekt gaarne Dr. A. Gloden, Secrétaire-Général, rue Jean-Jaurés 11, Luxembourg.

AKTEN K I en K V

We kunnen thans melden dat het tijdvak waarin nog examens kan worden afgelegd ter verkrijging van de akten K I en K V is verlengd tot onderscheidenlijk 1 januari 1962 en 1 januari 1963 (KB van 12 dec. 1959). Na deze data kan men de bevoegdheid tot het geven van middelbaar onderwijs in de wiskunde slechts verkrijgen door het afleggen van het examen voor de akten wiskunde m.o. — A en wiskunde m.o. — B.

Half maart, verschijnen voor de BOVENBOUW V.H.M.O.:

Wijdenes en Heyt Nieuwe Schoolalgebra IV B - 14de druk

180 blz., 107 fig., 105 voorbeelden . . . f 5,90
Blz. 177 en 178 Tafel van radialen, 179 en 180 met
herleidingstafels

Wijdenes en Heyt Goniometrie - 14de druk van Driehoeksmeting B

100 blz., 64 fig., 44 voorbeelden (waarvan
24 grafieken) . . . f 3,50
Blz. 97 en 98 Tafel van radialen, 99 en 100 met
herleidingstafels

Wijdenes en Lucieer Stereometrie - 12de druk

144 blz., 133 fig., 20 voorb. met constructies f 5,—

*In deze aflevering van „Euclides” liggen de eerste bladzijden van
elk der drie boven aangekondigde werken. Aanvragen voor zicht-
zendingen en presentexemplaren met het oog op uitvoering kunt u
richten aan de uitgever.*



P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

**NOORDHOFF'S
LOGARITMENTAFEL
IN 4 DECIMALEN**

met rentetafels in 5 decimalen
voor schoolgebruik de bekendste!

23ste druk geb. f 1,90

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Ook verkrijgbaar bij de boekhandel

Binnen enkele dagen verschijnt:

**BEKNOPT
ANALYTISCHE
MEETKUNDE**

door

Dr. D. J. E. SCHREK

m.m.v.

H. PLEYSIER

2de herziene druk f 3,90

Voor H.B.S.-B en Gymn.-B

P. Noordhoff N.V. - Groningen

Ook verkrijgbaar bij de boekhandel

MEETKUNDE VOOR V.H. EN M.O.

P. Wijdenes

Nieuwe Schoolmeetkunde

Deel I, 3de druk, 132 blz., 162 fig. f 3,50, gecart. f 4,—

Deel II, 3de druk, 138 blz., 162 fig. f 3,50, gecart. f 4,—

Toelichting en antw., 2de druk, 95 blz., 115 fig. f 3,50

Gratis voor leraren.

Dr. H. Streefkerk

Nieuw Meetkundeboek voor m.o. en v.h.o.

Deel I, 4de druk, 120 blz., 163 fig. f 3,25

Deel II, 3de druk, 124 blz., 94 fig. f 3,50

Deel III, 2de druk, 95 blz., 66 fig. f 3,75

C. J. Alders

Planimetrie

10/12de druk, 163 blz., 200 fig. . . f 3,50, geb. f 4,40

Stereometrie

13/14de druk, 94 blz., 84 fig. . . . f 2,50, geb. f 3,35

Goniometrie

6/10de druk, 64 blz., 38 fig. . . . f 1,90, geb. f 2,75

Driehoeksmeting

23ste druk, 90 blz., 42 fig. f 1,90, geb. f 2,75

Inleiding tot de

Analytische Meetkunde

6/10de druk, 79 blz., 29 fig. . . . f 2,50, geb. f 3,35
antwoorden gratis

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook verkrijgbaar bij de boekhandel