

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

IV - 15 DECEMBER 1959

INHOUD:

Prof. Dr. N. H. Kuiper: De Barycentrische Calcül en het Ontstaan van de Vectoren	113
Boekbespreking	126
Dr. G. ten Docsschate: Het Waarnemen van Evenwijdigheid	127
Dr. L. M. de Haan: De Stelling van Ptolemaeus en haar omgekeerde afgeleid uit één Hulpstelling	134
De Toelichting op het Nieuwe Leerplan voor Wiskunde	136
Recreatie	141
Contributie Wimecos	143
LIWENAGEL	143
Kalender	144

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Singel 13, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt f 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van *Wimecos* te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van *Liwenagel* te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

DE BARYCENTRISCHE CALCÛL EN HET ONTSTAAN VAN DE VECTOREN ¹⁾

door

Prof. Dr. N. H. KUIPER - BENNEKOM

1. Inleiding.

De ontwikkeling van een wetenschap bestaat enerzijds in een vermeerdering van feiten of waarheden die ontdekt en/of begrepen zijn. Anderzijds bestaat zij in een verbetering van begrippen en werktuigen, zodanig dat dezelfde hoeveelheid feiten en waarheden gemakkelijker overzien en geleerd kan worden. Kort gezegd is de ontwikkeling *het vermeerderen van inhoud en het vereenvoudigen van de vorm*.

Deze aspecten van ontwikkeling kan men ook constateren aan de ontwikkeling van een maatschappij of van een taal. Het aantal personen in Nederland neemt toe, maar gelukkig wordt tezelfder tijd aan de vorm van deze maatschappij veel aandacht besteed. Ik denk daarbij speciaal aan de organisatie: spoorwegen, autowegen en telefoonverbindingen bijvoorbeeld.

Dat de levende talen steeds meer inhoud moeten kunnen uitdrukken is duidelijk. Dat de vorm in de loop der eeuwen eenvoudiger wordt, ziet men aan voorbeelden. Voor het Nederlands wordt dit geïllustreerd door de diverse spelling-wijzigingen van de laatste decennia, waarbij bijzondere gebruiken, die voor de belangrijkste functie van de taal, namelijk de overdracht van informatie, geen belang hadden, overboord zijn gezet. Leraar schrijft met met één e, en tafel is niet meer merkbaar vrouwelijk.

In de richting van vereenvoudiging schijnt de Engelse taal wel het verst gegaan te zijn. De zelfstandige naamwoorden hebben geen geslachten, men kent geen onzijdige woorden, en men heeft er weinig vervoegingen.

Van deze taalefficiëntie in het Engels bestaat ook een voorbeeld in de wiskunde. Om dit duidelijk te maken denken we aan de natuurlijke getallen en wel enerzijds aan de gewone notatie in cijfers en anderzijds aan de manier van zeggen en schrijven in woorden van

¹⁾ Lezing vakantiecursus 1959, Mathematisch Centrum.

deze getallen. De gebruikelijke notatie in cijfers is bijzonder gelukkig en efficiënt omdat men met één oogopslag de hele informatie bevat in het symbool overziet en omdat de gewone rekenkundige bewerkingen bij deze notatie triviale bewerkingen zijn. Dit wordt extra duidelijk als men denkt aan de vermenigvuldiging van twee getallen boven de duizend in Romeinse cijfers, waarvoor men vroeger een begaafde specialist nodig had!

In de Nederlandse en Duitse taal is de uitspraak van vele natuurlijke getallen in vergelijking met de notatie *stuntelig*. De uitspraak van een getal als 9779, die luidt *zeven en negentig honderd negen en zeventig*, is oorzaak van vele administratieve fouten en verkeerde telefonische verbindingen, dus van ergernis en economische schade.

In het Engels zegt men *nine thousand seven hundred and seventy nine*, of men zou ook kunnen zeggen *ninety seven hundred seventy nine*. Opmerkelijk is dat dit een ontwikkeling van de laatste eeuw is, immers in Dickens' werken treft men nog „three hundred nine and seventy”.

Zou men vanaf heden in Nederland *drie honderd negentig zeven* zeggen voor 397, dan zou onze taal wat dit betreft hetzelfde stadium van ontwikkeling vertonen als het Engels. Zou men *drie honderd tien zeven* zeggen, dan was onze taal zelfs voor.

AANBEVELING I. *Op alle Nederlandse scholen moeten de natuurlijke getallen als boven aangeduid, dus op de efficiënte manier, worden uitgesproken.*

De vereenvoudigingen als aspect van de ontwikkeling van een wetenschap zijn binnen de wiskunde wel het indrukwekkendst, zoals ieder wiskundige zich aan nog vele andere voorbeelden duidelijk kan maken. Eén voorbeeld is de invoering van de *vectoren en vectorruimten*. Daaraan is de vakantiecursus van het Mathematisch Centrum in dit jaar gewijd.

Alvorens daar op in te gaan wil ik echter nog enige opmerkingen over de analytische meetkunde maken. Deze verbinding tussen meetkunde en algebra is vooral ontwikkeld door Descartes ((Géométrie) 1637). Voordat dit vak kon ontstaan was natuurlijk nodig dat men de voorstelling van al of niet bekende getallen door letters kende. Het inzicht daarin verbreidde zich tegen het einde van de 16e eeuw. De analytische meetkunde had dus ook niet veel eerder dan in 1637 kunnen ontstaan. Deze ontwikkeling ging overigens niet zonder moeite. De vergelijking $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ werd bijv. in die tijd door enigen weliswaar begrepen. Anderen vonden de vergelijking echter onzinnig, gewend als zij waren om bij x aan lengte,

bij x^2 aan oppervlakte en bij x^3 aan inhoud te denken ¹⁾). In hun denkkraam paste x^4 dus niet. Ik vind dit een duidelijk voorbeeld van de merkwaardige aard van de bezwaren die overwonnen moeten worden aler een nieuw begrip zijn juiste plaats heeft weten te overen. En dit voorbeeld kan ook verklaren waarom juist mensen met veel ervaring en rijke associaties zich soms tegen een nieuw, voor hen wegens hun associaties onzinnig, begrip het meest zullen verzetten. Misschien hangt daarmee weer samen dat een belangrijk deel van de originele vondsten in de wiskunde door personen onder de 30 jaar worden gedaan. Het voorbeeld nodigt nog uit tot de pikante vraag: Welke analoge voorbeelden zal men over honderd jaar hebben over de tijd waarin wij nu leven.

Gelukkig heeft echter ook in het onderhavige geval de abstractie gezegevierd en in het begin van de 17e eeuw was „het symbool x bevrijd van ongewenste overbodige associaties”.

De analytische meetkunde die volgde, bevorderde een geweldige ontwikkeling van de wiskunde, de sterrenkunde en de natuurkunde. Zonder analytische meetkunde kan men zich het werk van Huygens, Leibniz en Newton niet denken.

Ik ga thans over tot het centrale onderwerp van mijn voordracht, n.l. „*Der Barycentrische Calcul*”, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet, von August Ferdinand Möbius, Professor der Astronomie zu Leipzig, Leipzig 1827.

In dit boek wordt met zekere objecten (punten met massa's) gerekend, zonder dat van te voren bekend is dat deze objecten getalachtige grootheden zijn.

Dit nu is naar mijn mening een geweldige ontdekking. Men kende toen weliswaar de complexe getallen en deze waren ook reeds op de ons bekende wijze in een plat vlak door punten voorgesteld, zodat men had kunnen spreken van het optellen en van het vermenigvuldigen van punten, maar al had men dat gedaan, dan had men toch nog slechts een voorstelling van de bekende complexe getallen gegeven. De gedachte om te proberen met bekende objecten die niet apriori getal-achtig zijn, te gaan rekenen, komt juist in de laatste tientallen jaren weer veel op en heeft tot belangrijke ontdekkingen

¹⁾ Zie D. J. Struik. A concise history of mathematics. p. 116 (twee delen samen voor § 3. Dover publikations).

geleid. In deze zin is een behandeling van de Barycentrische Calcül dus actueel.

De vectoren kunnen worden verkregen uit de Barycentrische Calcül. Merkwaardig genoeg vond Möbius ze zelf niet. De eerste uitvoerige theorie over vectoren is bevat in „Die Ausdehnungslehre oder die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert von Hermann Grassmann (tweede druk 1878, eerste druk 1844).

Bij de behandeling van de Barycentrische Calcül en in verband daarmee van vectoren volg ik gedeeltelijk G. Peano. Die Grundzüge des geometrischen Calcüls. Leipzig 1891.

2. Barycentrische Calcül. De verzameling W .

Getallen zullen worden voorgesteld door a_1, b enz., punten in de driedimensionale ruimte door X_1, P, Q enz. Men beschouwt nu eindige formele sommen, die we ook „maaksels” zullen noemen.

$$\alpha = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n = \sum a_i A_i, \quad a_i \text{ een getal.}$$

Zo een som is een stel punten $A_1, \dots, A_n$, met aan elk daarvan een reëel getal, dat *massa* genoemd wordt, toegevoegd. Het „optellen” betekent hier alleen maar bij elkaar voegen. Er wordt dus verder niets gedaan. Eénzelfde punt kan ook meermalen voorkomen. a_i kan ook de waarde nul hebben.

Definitie: W is de verzameling van alle eindige formele sommen $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i A_i$ met A_i een punt, a_i een getal, $n \geq 0$ geheel. Het getal $\sum a_i$ heet de massa van $\alpha = \sum a_i A_i$.

In formule

$$W = \{\alpha\}, \quad \alpha = \sum a_i A_i.$$

(waarin „ $\{\dots\}$ ” betekent „de verzameling van alle $\dots$ ”).

3. Het rekenen in W .

Het optellen in W : Is $\alpha = \sum a_i A_i$, $\beta = \sum b_j B_j$ dan kan men ook de formele som $\sum a_i A_i + \sum b_j B_j$ beschouwen, die dus ontstaat doordat men alle genoemde punten met hun massa's bij elkaar voegt. Het zo verkregen maaksel heet de som van α en β en wordt aangeduid met $\alpha + \beta$. Het is wel zonder meer duidelijk dat de volgende regels voor willekeurige „maaksels” α, β, γ gelden.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \text{commutatieve wet} \quad (3.1)$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \text{associatieve wet} \quad (3.2)$$

Het vermenigvuldigen met een scalar in W . Is $\alpha = \sum a_i A_i$ en is a een getal, dan is per definitie

$$a\alpha = \sum (aa_i)A_i$$

Het is ook zonder meer duidelijk dat de volgende rekenregels gelden:

$$a(b\alpha) = (ab)\alpha, \quad a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta \quad (3.3)$$

Merk op dat $a\alpha + b\alpha = (a + b)\alpha$ niet geldt.

4. Een equivalentie in W .

Vervolgens worden sommige elementen van W onderling gelijk verklaard. Beter gezegd: er wordt een equivalentie in W ingevoerd. Deze equivalentie berust op het begrip *zwaartepunt*. Zijn de getallen a_i en b_j alle niet-negatief dan heten $\alpha = \sum a_i A_i$ en $\beta = \sum b_j B_j$ equivalent (notatie $\alpha \sim \beta$) indien de configuratie der punten A_i met massa a_i , $i = 1, \dots, m$ hetzelfde zwaartepunt heeft als de configuratie der punten B_j met massa b_j , $j = 1, \dots, n$ en indien tevens de totale massa's gelijk zijn: $\sum a_i = \sum b_j$.

Is $a_i \geq 0$ voor $i = 1, \dots, p$; $a_i < 0$ voor $i = p + 1, \dots, m$; $b_j \geq 0$ voor $j = 1, \dots, q$; $b_j < 0$ voor $j = q + 1, \dots, n$ dan heet $\alpha \sim \beta$ indien

$$\sum_1^p a_i A_i + \sum_{p+1}^m (-b_1 B_1) \sim \sum_{p+1}^m (-a_j A_j) + \sum_1^q b_k B_k.$$

Een gelijkwaardige definitie waarmee men sommige eigenschappen sneller kan inzien, verkrijgt men als volgt (Peano). Onder (XPQR) verstaat men de inhoud van het tetraeder met deze hoekpunten, voorzien van een + of — teken naar gelang de oriëntatie de ene (eens en voor al gekozen) of de andere is. Houdt men P , Q en R , die niet op een rechte gelegen zijn, vast en varieert men X dan ontstaat een functie $X \rightarrow (XPQR)$ die de waarde nul heeft in het vlak PQR en die constante waarde heeft in elk vlak daaraan evenwijdig. Het is een affiene coördinaat of lineaire functie. In cartesische coördinaten wordt hij door een lineaire vorm in de coördinaten uitgedrukt.

Definitie: Twee elementen $\alpha = \sum a_i A_i$ en $\beta = \sum b_j B_j$ heten *equivalent*, in notatie $\alpha \sim \beta$, indien voor elk drietal punten PQR geldt

$$\sum a_i (A_i PQR) = \sum b_j (B_j PQR).$$

Nog een gelijkwaardige definitie: Twee elementen α en β heten equivalent indien voor elke lineaire functie φ geldt

$$\sum a_i \varphi(A_i) = \sum b_j \varphi(B_j).$$

Uit de definitie volgen direct de voor een equivalentie wezenlijke eigenschappen. Voor $\alpha, \beta, \gamma \in W$ geldt:

- 1) $\alpha \sim \alpha$ (reflexief).
- 2) Indien $\alpha \sim \beta$ dan $\beta \sim \alpha$ (commutatief).
- 3) Indien $\alpha \sim \beta$ en $\beta \sim \gamma$, dan $\alpha \sim \gamma$ (associatief).

Alle elementen die equivalent zijn met een gegeven α vormen een klasse die zal worden aangeduid met $\underline{\alpha}$. Behoort β tot die klasse dan vormen de elementen die met β equivalent zijn precies dezelfde klasse, immers volgens de eigenschappen is:

Is $\alpha \sim \beta$ en $\beta \sim \gamma$, dan $\alpha \sim \gamma$. Ook is:

Is $\alpha \sim \beta$ en $\alpha \sim \gamma$, dan $\beta \sim \alpha$ en $\alpha \sim \gamma$, dus $\beta \sim \gamma$.

Behoort β niet tot $\underline{\alpha}$, dan hebben $\underline{\alpha}$ en $\underline{\beta}$ geen element gemeen.

5. De equivalentieklassen.

Lemma 1. Door de genoemde equivalentie zijn de elementen van W in disjunctie (geen element gemeen) klassen verdeeld.

Stelt men de equivalentie voor door de letter ρ dan wordt de verzameling V van de equivalentieklassen wel voorgesteld door een quotiënt-symbool n.l.

$$V = W/\rho = \{\underline{\alpha}\}.$$

Als voorbeeld beschouwen we een som $a_1 A_1 + a_2 A_2$ met massa $a_1 + a_2 \neq 0$. Op de rechte door A_1 en A_2 zoeken we het punt A_3 zo gelegen dat de afstanden $A_1 A_2 : A_2 A_3$ zich verhouden als $a_2 : a_1$, met de gebruikelijke conventies betreffende het teken van a_2 en van a_1 . Uit de stereometrie volgt direct dat voor willekeurige punten P, Q, R en $a_3 = a_1 + a_2$ geldt:

$$a_1(A_1 P Q R) + a_2(A_2 P Q R) = a_3(P Q R)$$

Derhalve is $a_1 A_1 + a_2 A_2 \sim a_3 A_3$.

Speciale gevallen.

- 1) $aA + bA \sim (a + b)A$ (5.1)
- 2) $A_1 + A_2 = 2A_3$, betekent: A_3 midden tussen A_1 en A_2 .
- 3) $aA_1 + 0A_2 = aA_1$

6. Enige stellingen.

Stelling 1. (Möbius) Is de massa van $\alpha = \sum a_i A_i$ gelijk aan $a = \sum a_i \neq 0$, dan bestaat één punt A zó dat

$$\alpha \sim aA$$

Bewijs: Existentie. Is $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i A_i$ dan is de conclusie voor $n = 1$ gelijk aan het gegeven. Stel de conclusie is bewezen voor geval $n \leq k$. Heeft $\alpha = \sum_{i=1}^{k+1} a_i A_i$ massa ongelijk nul dan bestaan zeker p en $q \neq p$, zó dat $a_p + a_q \neq 0$. Volgens het bovenstaande voorbeeld kan dan $a_p A_p + a_q A_q$ door één term worden vervangen. (daarbij maken we gebruik van een eigenschap die uit de definitie direct volgt, n.l.: Indien $\alpha \sim \beta$, dan ook $\alpha + \gamma \sim \beta + \gamma$). Het resultaat is volgens de inductie voorwaarde equivalent met een punt met massa α , waarmee de existentie is aangetoond.

Eenduidigheid: Stel vervolgens $aA \sim bB$, $a \neq 0$. Voor elk drietal PQR dat niet met A in een vlak ligt, geldt

$$0 \neq a(APQR) = b(BPQR) \text{ dus } b \neq 0.$$

Voor elk drietal punten PQR dat wel met A in een vlak ligt geldt

$$0 = a(APQR) = b(BPQR) \text{ dus } BPQR = 0.$$

B ligt dus in elk van die vlakken; dus $B = A$. Dan volgt met een drietal punten PQR niet in een vlak met A .

$$(APQR) = (BPQR) \neq 0, \quad a(APQR) = b(BPQR), \text{ dus } a = b.$$

Stelling 2. (Möbius) Barycentrische coördinaten. Zijn A_1, A_2, A_3, A_4 , vier niet in een vlak gelegen punten, is X een willekeurig punt, dan bestaan eenduidig bepaalde getallen x_1, x_2, x_3, x_4 met $\sum x_i = 1$ zodat

$$X \sim x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4.$$

X is het „gewogen zwaartepunt” van A_1, A_2, A_3, A_4 .

(De *homogene coördinaten* van een punt X t.o.v. A_1, A_2, A_3 en A_4 kan men definiëren als de al of niet positieve massa's die men in A_1, A_2, A_3, A_4 moet plaatsen om X tot zwaartepunt te verkrijgen.)

Bewijs: Eenduidigheid: Uit $(XA_2A_3A_4) = \sum_i x_i (A_i A_2 A_3 A_4) = x_1 (A_1 A_2 A_3 A_4)$ volgt de waarde van x_1 ; enz.

Existentie: Verbind X met zo een hoekpunt zeg A_1 van $A_1 A_2 A_3 A_4$, dat de verbindinglijn het overstaande zijvlak snijdt, zeg in Y . Dan is

$$X \sim x_1 A_1 + (1 - x_1) Y.$$

Herhaal deze methode met Y t.o.v. $A_2 A_3 A_4$ enz.

Toepassing: In een tetraeder gaan de zwaartelijnen door één punt. Dat punt ligt midden op elke verbindingslijn van de middens van twee overstaande zijden.

Bewijs:

$$A_1 + (A_2 + A_3 + A_4) = A_2 + (A_3 + A_4 + A_1) = \text{enz.} = (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4) = \text{enz.}$$

en zij zijn alle equivalent met eenzelfde punt, het zwaartepunt met massa 4.

Het volgende lemma doet ons denken aan de vectoren.

Lemma 2. $A - B \sim C - D$ geldt dan en alleen dan, wanneer de lijnstukken AB en CD evenwijdig, even lang en gelijk gericht zijn.

Bewijs: $(APQR) - (BQPR) = (CPQR) - (DPQR)$ geldt voor alle PQR dan en alleen dan, wanneer voor alle PQR :

$$(APQR) + (DPQR) = (BPQR) + (CPQR)$$

ofwel

$$A + D \sim B + C$$

Het midden tussen A en D valt dus samen met het midden tussen B en C , zodat $ABCD$ een parallelogram is. Daaruit volgt het gestelde.

Stelling 3. (Grassmann) *Ausdehnungslehre 1844*). *Is de massa van* $\alpha = \sum a_i A_i$ *gelijk aan* $\sum a_i = 0$, *is* O *een gegeven punt, dan bestaat precies een punt* A *zo dat*

$$\alpha \sim A - O.$$

In dit geval kan men α dus voorstellen door de pijl van O tot A .

Bewijs: Eenduidigheid: Is $A - O \sim B - O$ dan geldt voor elke PQR

$$(APQR) - (OPQR) = (BPQR) - (OPQR)$$

$$\text{dus } (APQR) = (BPQR)$$

$$\text{dus } A = B.$$

Existentie: Beschouw $O + \sum a_i A_i$ waarvan de massa 1 is. Noem het punt met massa 1 dat hiermee equivalent is A .

$$O + \sum a_i A_i = A.$$

Nu is voor elke PQR :

$$(OPQR) + \sum a_i (A_i PQR) = (APQR)$$

dus

$$\sum a_i (A_i PQR) = (APQR) - (OPQR)$$

maar dan is per definitie

$$\sum a_i A_i \sim A - O.$$

Wij formuleren nog de

Stelling 4. De equivalentieklassen van W worden éénéénduidig voorgesteld door (1) de paren bestaande uit een punt en een massa $\neq 0$, en (2) de verschillen $A - O$ met O een vast punt.

7. De vectoren.

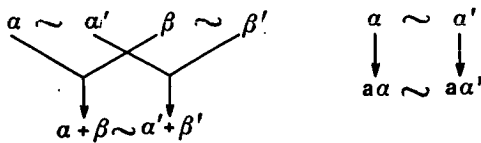
Definitie: De equivalentieklassen in W met massa nul heten vectoren.

Volgens stelling 3 en lemma 2 is een gelijkwaardige definitie: De equivalentie klassen van verschillen $C - D$ heten vectoren. Wij herinneren eraan dat zo een equivalentie klasse bestaat uit onderling evenwijdige gelijkgerichte even lange lijnsegmenten.

8. Het rekenen in W/ρ .

Wij zullen vervolgens het rekenen in W op natuurlijke wijze overbrengen tot een rekenen in W/ρ en een rekenen in vectoren. Dit kan krachtens de

Stelling: Vervangt men in $\alpha + \beta$ of in $a\alpha$, α en β door $\alpha' \sim a$ en $\beta' \sim \beta$ dan is de nieuwe uitkomst equivalent met de oude. In formule:



waarbij $\downarrow \downarrow$ implicatie betekent.

Daarmee heeft de volgende definitie van optelling en van vermenigvuldiging met een scalar in de verzameling der equivalentie klassen zin:

Definities:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} + \underline{\beta} &= \underline{\alpha + \beta} \\ \underline{a\alpha} &= \underline{a\alpha} \end{aligned}$$

Men kan immers willekeurige representanten kiezen en krijgt steeds

hetzelfde antwoord. Merk op dat de totale massa voor alle maaksels α in een equivalentie klasse $\underline{\alpha}$ dezelfde is. Hij wordt de massa van $\underline{\alpha}$ genoemd.

De volgende *rekenregels* volgen uit de eerder genoemde (zie § 3).

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} = \underline{\beta} + \underline{\alpha} \quad \text{commutatieve wet}$$

$$\underline{\alpha} + (\underline{\beta} + \underline{\gamma}) = (\underline{\alpha} + \underline{\beta}) + \underline{\gamma} \quad \text{associatieve wet}$$

$$a(\underline{b\alpha}) = (\underline{ab})\underline{\alpha}$$

$$a(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) = \underline{a\alpha} + \underline{a\beta}$$

$$\underline{a\alpha} + \underline{b\alpha} = (\underline{a + b})\underline{\alpha} \quad \text{zie. (5.1).}$$

Hebben α en β massa nul, dan hebben ook $\alpha + \beta$ en $a\alpha$ massa nul. *De vectoren vormen daarom een afgesloten systeem onder de bewerkingen. Zo ontstaat het rekenen met vectoren.* Passen we de formules toe dan vinden we voor de optelling van twee vectoren:

$$\underline{A - O} + \underline{B - O} = \underline{A + B - O - O}$$

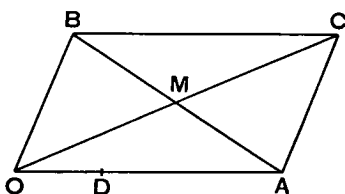
Is $A + B \sim 2M$ dan is M het midden tussen A en B , en het vierde hoekpunt C van het parallellogram $BOAC$ is bepaald door

$$A + B - O \sim 2M - O \sim C$$

of

$$C \in \underline{A + B - O - O}$$

De hier gedefiniëerde optelling van vectoren geeft dus de gewone parallellogram-constructie.



De vermenigvuldiging met een scalar a geeft.

$$a(A - O) \sim (aA - aO) \sim [\{aA + (1 - a)O\} - O] \sim D - O$$

In de figuur is $a = \frac{1}{3}$, $D \sim (\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}O)$.

Daarmee zijn de vectoren uit de barycentrische calcül gevonden.

Opmerkingen: 1) De Ausdehnungslehre van Grassmann bevat ook de n -dimensionale vectoren met in-product en uit-product, dus ook wat men noemt de *Grassmann algebra*. (differentiaalvormen).

2) De naam *vector* werd ingevoerd door W. R. Hamilton. (Lectures on quaternions 1853).

3) De definitie van Grassmann is nog anders, al bespreekt hij ook de hier gegeven definitie. Hij telt eerst op $AB + BC = AC$ op een rechte en dan in het vlak en komt zo tot de vectoren, rekenend met (equivalentieklassen van) lijnsegmenten.

9. Voor- en nadelen van de genoemde definitie van vectoren.

Voordelen:

a) De bewerkingen met vectoren volgen uit de eenvoudigste bewerkingen met elementen uit W die men zich maar kan denken.

b) De rekenregels volgen daar ook op natuurlijke wijze uit.

Nadelen:

a) De definitie steunt op de gewone euclidische (of althans affiene) meetkundige ruimte. Deze moet dus bekend zijn.

b) De definitie nodigt niet uit tot de moderne waardevolle veralgemeningen.

10. Slotopmerkingen.

Dat het begrip vector zo een belangrijke rol heeft kunnen spelen en blijft spelen in de wiskunde is aan verschillende eigenschappen toe te schrijven. Ik noem er enige van.

a) *Van complex naar éénvoudig.* Complexen (rijen) van getallen kunnen soms als vectoren worden opgevat en daarmee complexe grootheden als éénvoudige grootheden. Dit ziet men vooral als men de vector voorstelt door één letter. Complexe berekeningen worden hiermee overzichtelijk. Men ziet dat bijvoorbeeld in de toepassingen in de meetkunde en de statistiek (variantie-analyse).

b) *In een reële vectorruimte heeft differentiëren naar een reële parameter een zin.*

Dit komt omdat naast de genoemde rekenbewerkingen ook een topologie in die ruimte bestaat ¹⁾.

Laat t een reële parameter zijn, en $f(t)$ een afbeelding van $0 \leq t \leq 1$ in een nog niet nader te preciseren verzameling objecten V . Bij elke waarde van $0 \leq t \leq 1$ is dus een object aangewezen. Wij willen

¹⁾ Terzijde merk ik op, dat het begrip differentiëren ook veralgemeen kan worden, waarmee er in een groter verband betekenis aan kan worden gehecht.

gaan differentiëren. Wat is daarvoor nodig? Allereerst moet daartoe

$$f(t+h) - f(t)$$

een zin hebben. Dus aftrekken van objecten moet gedefiniëerd zijn in V .

In de tweede plaats moet

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (10.1)$$

een zin hebben, dus het vermenigvuldigen met een getal, hier h^{-1} moet betekenis hebben. De vectorruimten voldoen aan deze eisen en dus kan, wat dat betreft $f(t)$ een stel vectoren in een vectorruimte zijn. Men denke aan een kromme.

Voor kleine waarden van $h \neq 0$ heeft (10.1) een waarde. Wij willen de limiet $f'(t)$ van (10.1) bepalen. Daartoe is nodig dat er een begrip continuïteit of met een ander woord een topologie in V zij. Ook aan deze eis voldoet de reële vectorruimte. Het is natuurlijk de vraag of de limiet (10.1) in een speciaal geval bestaat, maar in elk geval heeft het zin om de vraag voor een gegeven geval te stellen.

Stelt t de tijd voor en $f(t)$ de plaats van een bewegend punt in een driedimensionale vectorruimte, dan heet de vector $f'(t)$ snelheid en de vector $f''(t)$ versnelling van het bewegende punt. Merk op dat om over snelheidsvector en versnellingsvector te kunnen spreken het begrip afstand niet nodig is. Snelheids(vector) en versnellings(vector) zijn affiene begrippen. Dit wordt anders als men ook over de „grootte” van de snelheid wil spreken.

De mogelijkheid van het differentiëren in de reële vectorruimten heeft vooral toepassing gevonden in de differentiaalmeetkunde (Frenet-Serret), mechanica en natuurkunde.

c) Zoals in het begin gezien vormt de barycentrische Calcül een voorbeeld van het rekenen met objecten, waarvan niet apriori getal-achtige eigenschappen bekend zijn. In moderne wiskundige theoriën komt dit herhaaldelijk voor en telkens ziet men op deze wijze in de algebra, de analyse, meetkunde, topologie, waarschijnlijkheidsrekening enz., groepen, vectorruimten, ringen en lichamen te voorschijn komen op plaatsen waar men die eerst niet zag.

Een merkwaardig voorbeeld van het rekenen met objecten is wel dat, waarbij de objecten zelf vectorruimten zijn. Daarbij is een optelling (Whitney-som) en een vermenigvuldiging (tensor-produkt) gedefiniëerd, waardoor een algebraïsche structuur (dimensie) ontstaat, die inwendig niet te onderscheiden is van die van de natuur-

lijke getallen. Analooq bestaat een algebraïsche structuur (Ring) in het stelsel der reële (of complexe) vectorruimte-bundels over een ruimte X modulo een zekere equivalentie.

d) De biogenetische *wet van Haeckel* houdt in dat er een parallel te trekken valt tussen de ontwikkeling van embryo tot volwassene en de ontwikkeling van de soort van de dieren in de loop der tijden. Men kan een analoge bewering maken betreffende de wiskundige ontwikkeling van een schoolgaand kind tot eventueel student en leraar nu, *en* de ontwikkeling van de wiskunde in de loop der tijden. Onder de wiskunde moet men dan verstaan, wat de beste wiskundigen op een bepaald tijdstip samen er van af weten.

Het jaar dat hoort bij een toelatingsexamenkandidaat voor de H.B.S. is dan wat betreft de meetkunde ≤ 300 v.C. (Euclides) en wat betreft de algebra ≤ 1600 („ x ”). In het V.H.M.O. wordt de meetkundige (beschrijvende meetkunde) filogenetische leeftijd van de leerling bijgetrokken tot 1700, de algebraïsche (als we differentiëren meetellen) tot voorbij Leibniz (1646—1716).

De vectoren zijn nu ruim een eeuw oud. In het V.H.M.O. zijn de vectoren reeds doorgedrongen in het mechanica- en natuurkunde-onderwijs (zonder differentiëren). In het analytische meetkunde-onderwijs vindt men een begin in het boek van Vredenduin en een consequent doorgevoerd gebruik van vectoren in het boek van Bijl, Kijne en Salet, dat juist dezer dagen is uitgekomen.

Wat betreft het hoger onderwijs valt op te merken, dat sinds enige jaren niet alleen op de Universiteiten maar ook op de Technische Hogescholen en de Landbouwhogeschool bij de eerstejaarsstudie de n -dimensionale reële vectoren in de leerstof zijn opgenomen.

Het blijkt dat de reële vectoren in vele takken van wetenschap een rol spelen, bijvoorbeeld ook in de economie (lineaire programmering) landbouw en biologie (analyse van spreiding, correlatie).

Terugkomend op de eerder genoemde wet van Haeckel voor de wiskunde doe ik de

AANBEVELING II. De vectoren moeten in het V.H.M.O. ook in het analytische meetkunde-onderwijs worden opgenomen.

Ik neem de gelegenheid te baat om te eindigen met nog een wens, die overigens los staat van de vectoren n.l.

AANBEVELING III. Reeds bij het lager onderwijs moet het gebruik van letters (x) voor onbekende grootheden worden geleerd.

Daarmee kunnen op de lagere school vele moeizaam te maken sommen vervallen, en versnelt de ontwikkeling van het kind, zonder dat meer moeite wordt geleverd.

Wageningen, Landbouwhogeschool.

ENIGE BOEKEN WAARIN VECTOREN BEHANDELD WORDEN.

Kuiper, N. H. — Analytische meetkunde verklaard met lineaire algebra. Noord-Holl. Uitg.mij. 1959.

Bijl-Kijne-Salet — Basis voor de analytische meetkunde. Meulenhoff 1959.

Halmos, P. R. — Finite dimensional vector spaces.

Steggerda e.a. — Vraagstukken over analytische meetkunde en lineaire algebra (handleiding T. H. Delft).

BOEKBESPREKING

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Differentiaal- en Integraalrekening*. J. B. Wolters, Groningen, 79 bladz., ing. f 2,25, geb. f 2,90.

Het is een alleraardigst origineel boekje, dat warm aanbevolen kan worden vooral aan degene, die de nieuwe Algebra IV geschreven met Dr. A. van Haselen *niet* gebruiken. De schrijver oordeelt het nu meer nodig uitstapjes te maken naar het gebied van de natuurkunde en mechanica, om zodoende het belang van dit vak nog beter te doen uitkomen. De differentiaal quotiënten van de gon. functies worden niet behandeld, wel die der exponentiële en logaritmische functies op dezelfde geestige en vlotte wijze als in Algebra IV, waarbij dus uitgegaan wordt van de functie 2^x , die als vanzelfsprekend continu, monotoon stijgend en differentieerbaar wordt aangenomen (had in dit verband niet even naar de ongelijkheid $1 < \sqrt[p]{1+p} < 1 + \frac{p}{n}$ ($p > 0$) dus naar de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{g} = 1$ ($g > 0$) verwezen kunnen worden?)

Het vraagstuk § 45 no. 2 zou ik althans gedeeltelijk vervangen door de vraag: hoe met behulp van de nauwkeurig getekende grafiek van 2^x dan $e = 2^{\frac{1}{c}}$, waarbij de constante c gelijk is aan de afgeleide van 2^x voor $x = 0$ behoorlijk nauwkeurig te „construeren” evenzo verder op het vraagstuk: bewijs, dat de grafiek van a^x ($a > 0$) uit die van 2^x verkregen kan worden door deze vanuit de y -as met $\frac{1}{2 \log a}$ te vermenigvuldigen. In § 12 no. 2 is een drukfout geslopen; de behandeling van de kettingregel vind ik niet in alle opzichten geslaagd (haast te duidelijk). Voor het bepalen van de afgeleiden van $\sqrt{x}$ en $\ln x$ zou ik een beroep doen op de inverse functies. In de herhaling mis ik vragen als, hoe in het punt (1, 1) de raaklijn te bepalen aan de kromme gegeven door de vergelijking:

$$3x^2 - 5xy + 2y^2 + 7x - 6y - 1 = 0.$$

Okken.

HET WAARNEMEN VAN EVENWIJDIGHEID

door

Dr. G. TEN DOESSCHATE - UTRECHT

In dit opstel wordt door een leek op het gebied der wiskunde, een oogarts, een mathematisch onderwerp op niet-wiskundige wijze besproken.

Enige leden van de Académie royale de France hebben zich in de 18de eeuw bezig gehouden met het vraagstuk van de verschijningswijze van evenwijdige lijnen.

Pierre Varignon (1654—1722) ¹⁾ schreef, dat hij om de volgende reden zich ging interesseren voor dit probleem: "... feu M. Carré de cette Académie me demanda suivant quelles lignes il faudroit planter des arbres pour que d'un certain point donné ils parussent en lignes droites parallèles entre elles ...".

Wanneer iemand aan het einde van een aan weerszijden met bomen beplante laan staat, neemt hij wel schijnbare convergentie der bomenrijen waar, maar uit de mate van schijnbare convergentie leidt hij af, — of: hij krijgt de indruk —, dat de rijen evenwijdig zijn. De vraag, zo als die hierboven is gesteld, zou men dus willen beantwoorden: men moet de bomen op twee evenwijdige rijen plaatsen. Carré heeft de vraag waarschijnlijk anders bedoeld en Varignon heeft deze ook op een andere manier opgevat. Het schijnt, dat hij wilde vinden op welke manier men de bomen moest plaatsen opdat zij geen schijnbare convergentie zouden vertonen.

Varignon, die, zoals hij zelf zegt, behoort tot de „géomètres, qui ne cherchent que des difficultés”, is het vraagstuk ijverig en uitvoerig gaan bestuderen.

In de oude literatuur kon hij een aantal gegevens, die op het onderwerp betrekking hebben, vinden.

Zeer bekend was Euclides' geschrift over optiek ²⁾. Men kende hiervan de oorspronkelijke Griekse tekst en een oude Latijnse vertaling. Even bekend was Theon's bewerking van het boek van

¹⁾ Mémoires de l'Ac. roy. des Sciences, MDCCXIX, p. 88, en: Histoire de l'Ac. roy. des Sciences, p. 48.

²⁾ Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, edidit I. L. Heiberg, Teubner, 1895.

Euclides, waarvan ook een Griekse en een Latijnse versie bestonden.

Het boek van Euclides is een verhandeling over gezichtshoeken en hun verhoudingen.

In de 6de stelling wordt het probleem van de evenwijdige lijnen behandeld. Deze stelling luidt: de afstanden tussen de lijnen verschijnen onder een des te kleinere gezichtshoek, naarmate zij verder van het oog zijn verwijderd. In de Griekse tekst staat hier het woord „φαίνεται”, en in de oude vertalingen bij Euclides en Theon staat resp. „apparent” en „videntur”. Vroeger werd de bewerking van Theon meer gebruikt dan de oorspronkelijke tekst van Euclides, en waarschijnlijk is, zoals later ter sprake zal komen, het woord „videntur” de oorzaak geweest, waarom men aan Euclides een verkeerde opvatting toeschreef.

Ook heeft Euclides onderzocht of er omgekeerde evenredigheid bestaat tussen gezichtshoeken en afstanden, wanneer voorwerpen van gelijke grootte op verschillende afstanden van het oog verwijderd zijn. Hij vindt dat dit niet het geval is: „Aequales et aequidistantes magnitudines inaequaliter distantes ab oculo non proportionaliter spatiis videntur” (stelling 8).

Euclides behandelt het onderwerp zuiver meetkundig en bespreekt psychologische factoren bij het zien niet.

Dit doet Ptolemaeus ³⁾ wel. Hij zegt, dat de grootte, die wij aan een zichtbaar voorwerp toeschrijven, wordt bepaald niet alleen in verband met de grootte van de gezichtshoek maar ook in verband met de afstand waarop het voorwerp zich van het oog bevindt.

Deze leerstellingen worden algemeen bekend gemaakt door vier schrijvers, die in de 13de eeuw de Renaissance der Optiek inleidden⁴⁾ Terwijl Euclides en Ptolemaeus het onderwerp meer kwalitatief dan quantitatief hadden behandeld, gingen in de 15de eeuw Kunstenaars en Theoretici, voornamelijk van Italiaanse origine, die zich met enthousiasme en ijver op de centrale perspectief toelagden, de optische problemen meer exact behandelen.

Men vond b.v. dat de lengte van de perspectief van een zelfde voorwerp omgekeerd evenredig is met de afstand tussen het voorwerp en het oog (of het perspectief-centrum).

Men vond dus dat de omgekeerde evenredigheid tussen hoek en

³⁾ l'Optica di Claudio Tolomeo etc.; Ed. Govi, Torino, 1885.

⁴⁾ Het waren drie Engelsen: Robert Grosseteste, Roger Bacon en John Peckham, en Vitellio, die „Thuringo-Polonus” wordt genoemd.

afstand, waarover Euclides had geschreven, wel bestond tussen een functie van de hoek (de tangens) en de afstand ⁵⁾6).

De reeds genoemde 6de stelling heeft later tot een onjuiste opvatting aanleiding gegeven.

Men kan „videntur” namelijk vertalen als: „worden waargenomen” (geometrisch) en als „verschijnen”. (psychologisch). Euclides heeft zeker wel het eerste bedoeld. Enige schrijvers echter vatten het op alsof de gezichtshoek en de waarnemingsgrootte identiek zijn. Dit waren Tacquet ⁷⁾ en Fabri ⁸⁾.

Tacquet geeft een eigenaardig „bewijs” voor zijn opvatting. Hij zegt, dat wij de zon en de maan, die onder gelijke gezichtshoeken worden gezien, als even groot waarnemen, ofschoon wij weten, dat zij zeer veel in grootte verschillen ⁹⁾.

Deze opvatting was onhoudbaar ¹⁰⁾.

Ptolemaeus had er reeds op gewezen, dat in de *waarneming* van grootte zowel gezichtshoek als afstand van belang zijn.

Nu moet men hebben opgemerkt dat men onder gewone omstandigheden in de onmiddellijke nabijheid perspectivische verkleining niet of nauwelijks waarneemt. In een kamer, waarin een aantal stoelen van gelijk maaksel staan, krijgt men de indruk, dat de stoelen even groot zijn, ofschoon de hoeken, waaronder zij voor het oog verschijnen, zeer veel van elkaar verschillen.

Men heeft dit verschijnsel later in verband gebracht met „visual size constancy”, waarvoor, voor zo ver het mij bekend is, geen Nederlandse uitdrukking bestaat.

Men verklaart dit door aan te nemen, dat men én de grootte van het beeld (door de gezichtshoek bepaald) én de afstand waarneemt. Het resultaat is: gelijkheid van waarnemings-grootte.

⁵⁾ Jean Pelerin Viator (*Perspectiva artificialis*) schreef: „Les quantités et les distances, ont concordables différences”.

⁶⁾ Joannes Kepler, *Dioptrice*, *Axioma opticum* LXVII, heeft er op gewezen, dat men bij zeer kleine hoeken wel de omgekeerde evenredigheid mag aannemen: „Intervallum inter oculum et rem minutam . . . in eversa proportionem angulorum visoriorum.”

⁷⁾ R. P. Andreae Tacquet e Soc. Jesu, *Opera mathematica*; Antwerpen, 1669, Deel II.

⁸⁾ Honoratus Fabri, *Synopsis optica*, Lugd. 1667.

⁹⁾ Prop. 3, p. 137: „Sol quippe et luna spectantur a nobis sub angulo quoad sensum aequali . . . et apparent aequales, quamvis hanc illo sciamus plus quam centies esse minorem”.

¹⁰⁾ Tacquet is er zelf niet van overtuigd, dat men de afstand nooit in rekening brengt: „Non affirmo tamen id nunquam accidere.”

Men heeft vroeger wel gedacht, dat iemand de gezichtshoek vermenigvuldigt met de afstand, wat tot een constant product leidt. Het is wel niet waarschijnlijk, dat men vermenigvuldigt, maar wel kan men zeggen, dat het resultaat, — gelijkheid van waarnemingsgrootte — doet denken aan een constant product. Met dit alles was echter het volgende in tegenspraak. Wanneer men één van de stoelen, die in het voorbeeld zijn genoemd, op zeer grote afstand buiten het huis zou plaatsen, zou iedereen die het zag, de perspectivische verkleining waarnemen. Hier geeft dus vermenigvuldiging van gezichtshoek met afstand een kleiner product. Hoe moet men dit verklaren.

De filosoof Nicole Malebranche (1638—1715) ¹¹⁾ vond de volgende oplossing. Hij zegt, dat men enigszins grote afstanden onderschat. Wanneer men nu de gezichtshoek *niet* vermenigvuldigt *met de ware* maar *wel met de onderschatte afstand*, verkrijgt men een product, dat kleiner is.

Dit gelooft ook Dechales ¹²⁾. (1621—1678). Hij zegt dat wij, alleen met behulp van het gezicht, geen oordeel kunnen vellen over afstanden die groter dan 115 voet lang zijn. De *waarnemingsgrootte* van de *zon* is ongeveer 1 *voet*, omdat wij dat hemellichaam op 115 voet ¹³⁾ localiseren, ondanks het feit, dat wij weten, dat dit niet zo is.

Hier vindt men het begrip van de beperkte en inhomogene fysiologische gezichtsruimte dat later nog tot veel studie aanleiding heeft gegeven.

Het is waarschijnlijk, dat bij de meeste mensen de uitgebreidheid van de fysiologisch-optische ruimte inderdaad zeer gering is en slechts zelden een straal van meer dan 100 meter heeft. Schr. heeft de voorlopige indruk gekregen, dat bij geroutineerde vliegers, als gevolg van ervaring, deze grens wordt overschreden.

Met deze kennis toegerust kon Varignon zijn onderzoek beginnen.

Varignon onderzoekt de beide hypothesen: wordt de waarnemingsgrootte bepaald door de gezichtshoek alleen of door de gezichtshoek in combinatie met de afstand? ¹⁴⁾

De eerste hypothese verwerpt hij al spoedig. Twee rechte lijnen, die gericht zijn op een snijpunt in het oog, maken allerm minst de in-

¹¹⁾ De la Recherche de la Vérité, Parijs, 1674.

¹²⁾ Claudii Franc. Milliet Dechales, Cursus seu Mundus mathematicus, Leiden, 1690, Lib. II, Prop. XXXII, p. 431.

¹³⁾ „Respondeo eam esse rationem quia ea est circiter maxima distantia de qua possumus vi duorum oculorum judicare”.

„Sol videtur sub angulo sub quo communiter spectatur magnitudo pedalis”.

¹⁴⁾ „... je n'en adopte aucune; je les essaye seulement...”

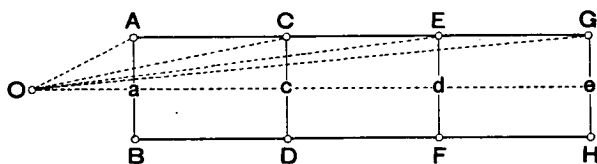
druk van evenwijdige lijnen, ofschoon de afstanden ertussen overal onder gelijke gezichtshoeken verschijnen.

Hetzelfde geldt voor twee hyperbolen, waarover Tacquet reeds had gesproken ¹⁵⁾, waarvan de tussenruimtes alle onder gelijke hoeken worden gezien ¹⁶⁾.

De redenering, die Varignon bij het onderzoek van de tweede hypothese toepast, is mij niet geheel duidelijk. Hij wil blijkbaar een constant product van afstand en functie van de gezichtshoek verkrijgen en tevens lijnen, die geen schijnbare convergentie vertonen.

Wanneer hij als functie de tangens had genomen zou het resultaat zijn geweest: evenwijdige lijnen.

Varignon kiest de sinus, omdat hij niet Oa, Oc, Oe als afstanden in rekening brengt maar wel de afstanden van het oog tot de bomen A, C, E en G. (fig. 1). Daar deze functie een andere stijgsnelheid heeft dan de tangens, komt hij tot een paradoxaal resultaat. Hij vindt als uitkomst: twee *convergerende* curven. *)



Figuur 1

De bedoeling was lijnen te vinden die geen schijnbare convergentie tonen. Men zou dus verwachten, dat dit bereikt kan worden door divergerende lijnen.

Varignon's resultaat is volmaakt onbevredigend. Hij staakt het onderzoek: „Nous avons déjà vû ailleurs d'autres exemples d'hypothèses physiques, qui, étant introduites dans les calculs géométriques, mènent à des conclusions visiblement fausses, ce qui fait voir que ces principes ou ne sont pas employés par la Nature, ou le sont avec des modifications que nous ne connaissons pas.”.

¹⁵⁾ l.c. Prop. 48.

¹⁶⁾ Het zijn hyperbolen, zoals men die kan waarnemen wanneer een lamp, die in de as van een aan beide kanten open cilindervormige mantel staat, schaduwen op een muur werpt. Wanneer het oog zich op de plaats van de lamp bevond, zou het de afstanden tussen de grenzen van de kap in alle richtingen onder gelijke hoeken zien.

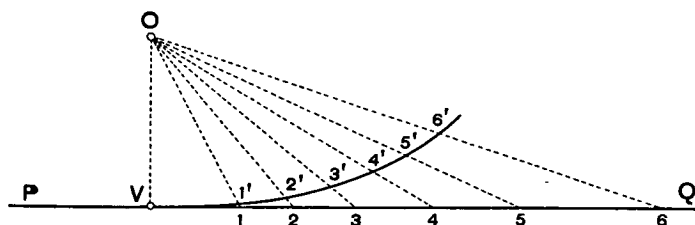
*) Men vindt, als de oorsprong in O gekozen wordt en de X-as langs Oa,

$x \sin \angle AOa = c$, dus $x \cdot \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = c$ of $y^2 = \frac{c^2 x^2}{x^2 - c^2}$. Als $x \rightarrow \infty$, dan

naderen de beide takken hiervan elkaar en is de limiet van hun afstand $2c$. (Red.).

Enige tientallen jaren later wordt het onderwerp weer geëntameerd door een ander lid van de Académie¹⁷⁾. Het was Pierre Bouguer (1698—1758) die door zijn in 1729 verschenen boek, *Essai d'Optique sur la gradation de la lumière*, naam had gemaakt als pionier der photometrie. Bouguer gaat uit van de onderstelling, waarvan reeds Malebranche en Dechales gebruikt hadden gemaakt. Hij neemt aan, dat men afstanden, wanneer deze enigszins groot zijn, onderschat en dat de mate van onderschatting toeneemt, naarmate de afstanden groter zijn. Hij heeft getracht de onderschatting te meten.

De geleidelijk toenemende onderschatting leidt er toe, dat men, wanneer men op de vlakke grond staat, deze in de verte ziet stijgen (fig. 2). De lijn $V1'6'$ is volgens Bouguer „une hyperbole très ouverte”.¹⁸⁾



Figuur 2

Verschillende delen van het grondvlak vertonen dus verschillende mate van schijnbare helling.

Volgens deze onderzoeker zal men twee lijnen dan als twee rechte lijnen zonder con- of divergentie waarnemen, wanneer de lijnen op het vlak van schijnbare helling evenwijdige perspectieven hebben.

Bouguer heeft twee methodes aangegeven, waarmee men de *schijnbare helling* van het horizontale grondvlak zou kunnen bepalen: „Le premier est de former avec deux longues ficelles sur le terrain un angle de trois ou de quatre degrés; en tournant le dos à la pointe de l'angle, de s'avancer entre les deux ficelles jusqu'à ce qu'on les voye parallèles: alors la ligne menée de la hauteur de l'oeil à la pointe de l'angle, aura à l'égard du terrain la même inclinaison que la plan apparent”. (fig. 3).

De twee koorden (AB en CD) zijn gericht op P. Het oog van de waarnemer (O) dat zich op een hoogte OV boven het horizontale vlak (1, 2, 3, 4) bevindt neemt de twee koorden als evenwijdige waar. Deze koorden liggen zó, dat zij op het vlak CAB'D' evenwijdige

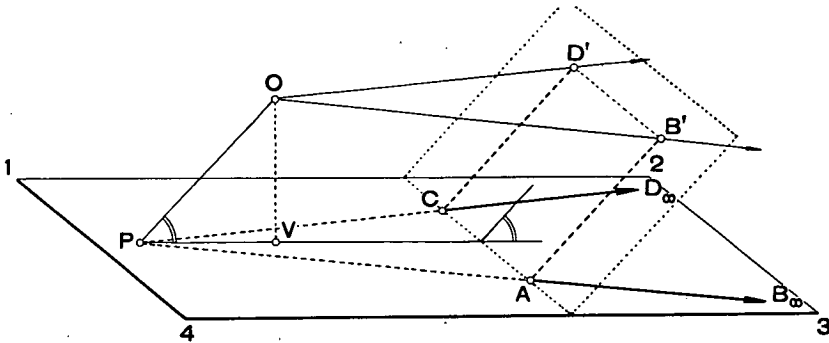
¹⁷⁾ Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1755.

¹⁸⁾ Op deze manier kan men ook verklaren waarom de rechtlijnige bundels van zoeklichten en vuurtorens gekromd kunnen schijnen.

projecties hebben. Het schijnbare vlak heeft dezelfde gradient als de lijn PO.

Bouguer verklaart niet waarom dit zo is. Hij maakt blijkbaar gebruik van een stelling, die toen betrekkelijk nieuw was en het eerst(?) is vermeld door G. Desargues (1593—1662).

Deze stelling luidt: Wanneer twee rechte lijnen gericht zijn op een punt, dat evenver van het projectievlak is verwijderd als het centrum van projectie, zijn haar projecties evenwijdige lijnen.

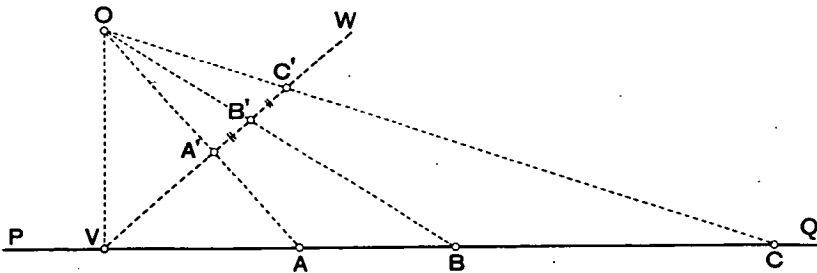


Figuur 3

In fig. 3 is het vlak $CAB'D'$ het projectievlak. O en P zijn even ver van het verlengde van dit vlak verwijderd.

De schijnbare helling van het grondvlak wordt dus aangegeven door $\angle OPV$.

De tweede methode van Bouguer wordt op de volgende manier beschreven: „... on placera à terre, sur une même ligne droite, ... trois objets à des distances inégales et croissantes, et on se reculera jusqu'à ce que ces distances paroissent égales: alors on mesurera la distance entre le point où est l'observateur et le premier de ces objets; on déterminera la hauteur de son oeil au dessus du plan, et ayant représenté le tout dans une figure, on cherchera une ligne, qui, partant du point, qui ... répond aux pieds de l'observateur, soit



Figuur 4

coupé en parties égales par les trois rayons visuels. Cette ligne aura, avec celle qui représente le plan réel, la même inclinaison que le plan apparent avec le terrain."

Er is echter een complicatie, die het uitvoeren van de proeven bemoeilijkt: „Ce que nous avons dit du plan apparent, ne doit pas au reste être entendu dans toute la rigueur géométrique: la ligne qui en représente la coupe n'est pas absolument droite, c'est plutôt une branche d'une hyperbole très ouverte . . .".

Voor zo ver het Schr. bekend is, zijn de experimenten van Bouguer nooit herhaald, en het is niet bewezen, dat hij gelijk had.

De schijnbare krommingen, waarover Bouguer spreekt, worden door verschillende personen in zeer verschillende mate waargenomen. Er zijn personen, in wier bewustzijn het *weten*, dat zij rechte lijnen zien, het observeren van curvaturen verhindert.

Zo vermeldt b.v. d'Alembert, die de prioriteit van Bouguer's onderzoekingen over de „allées" betwist, dat hij nooit de schijnbare kromming heeft waargenomen ¹⁹⁾.

Het onderwerp „Die Alleekurven" is later weer opgevat door F. Hillebrand ²⁰⁾ en verschillende andere onderzoekers en dit alles heeft geleid tot een ingewikkelde wiskundige behandeling van het probleem der binoculaire gezichtsruimte door R. K. Luneburg ²¹⁾.

Het onderzoek over dit onderwerp is echter nog in gang en behoort dus niet in een geschiedkundig opstel te worden besproken.

Samenvatting

Beschouwingen van twee leden der Franse Académie des Sciences over de verschijningswijze van evenwijdige lijnen met vermelding van datgene, wat hun voorgangers over dit onderwerp hadden gezegd.

¹⁹⁾ Opusculs mathématiques, Tome I, Parijs, 1761, p. 285.

²⁰⁾ Theorie der scheinbaren Groesse bei binokularem Sehen; Denkschriften der math.-naturw. Klasse der Kaiserlichen Akademie, Wien. 1902.

²¹⁾ The metric of binocular visual space; Journal Opt. Soc. America. 40: p. 628, 1950.

DE STELLING VAN PTOLEMAEUS EN HAAR OMGEKEERDE AFGELEID UIT ÉÉN HULPSTELLING

door

DR. L. M. DE HAAN

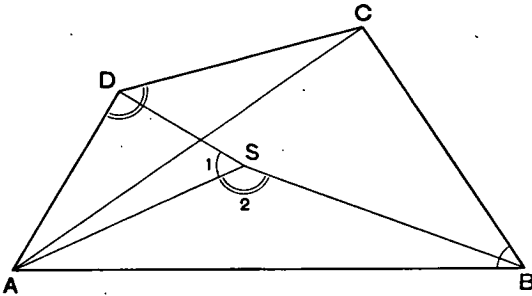
's-Gravenhage

Hulpstelling:

Zij ABCD een willekeurige vierhoek en S het punt zodanig, dat $\triangle ABS$ rechtstreeks gelijkvormig is met $\triangle ACD$. Dan geldt

$$(1) \quad AC \times (BS + SD) = AB \times CD + BC \times AD$$

Bewijs (zie de figuur):



Als $\triangle ABS \sim \triangle CDS$, dan volgt hieruit gemakkelijk, dat ook $\triangle ASD \sim \triangle BCS$. Uit de eerste gelijkvormigheid vinden we

$$AC \times BS = AB \times CD,$$

uit de tweede

$$AC \times SD = BC \times AD;$$

door optelling volgt hieruit (1).

Tevens blijkt:

$$(2) \quad \angle S_1 = \angle B \text{ en } \angle S_2 = \angle D.$$

Bewijs van de stelling van Ptolemaeus:

Zij nu ABCD een koordenvierhoek, dus $\angle B + \angle D = 180^\circ$. In verband met (2) volgt hieruit $\angle S_{12} = 180^\circ$, dus

$$BS + SD = BD$$

en door dit in (1) te substitueren krijgen wij:

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Bewijs van het omgekeerde:

Zij van vierhoek ABCD nu juist gegeven

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Ook geldt (1), want dit geldt voor elke vierhoek. Uit de twee relaties samen blijkt nu

$$BD = BS + SD,$$

en daaruit volgt

$$\angle S_{12} = 180^\circ,$$

of wegens (2)

$$\angle B + \angle D = 180^\circ;$$

dus ABCD is een koordenvierhoek.

DE TOELICHTING OP HET NIEUWE LEERPLAN VOOR WISKUNDE

De redactie ontving een afschrift van de hieronder volgende brief van enige leraren, welke gericht was aan Dr. L. M. van Dis, Inspecteur van het VHMO in rayon Va.

Enschede, 25 september '59

Zeer geleerde Heer.

In het maandblad Euclides van 1 september 1959 is een artikel van de inspecteurs Dr. H. A. Gribnau en Dr. D. N. van der Neut geplaatst onder de titel: Toelichting op het nieuwe leerplan voor wiskunde. Na lezing en bespreking hiervan voelen ondergetekenden, wiskunde-leraren bij het V.H.M.O. te Enschede, zich gedrongen de volgende beschouwingen onder Uw aandacht te brengen.

Tot de afkondiging van het Koninklijk Besluit van 30 augustus 1958 wisten wij uit de praktijk waar wij aan toe waren: het eind-examenprogramma had een kleinere inhoud dan het leerprogramma, dat dan ook, volgens vele docenten, onuitvoerbaar was (Zie b.v. het artikel van Dr. Streefkerk in Euclides 1945/'46, nr. 2). Een geroutineerd leraar paste zich bij de onbevredigende toestand aan en infinitesimaalrekening en de meetkundige behandeling van de kegelsneden werden door de meesten onzer slechts zeer summier (of in het geheel niet) behandeld. Dit hing af van de kwaliteit der leerlingen in de hogere klassen. Ook aan bij voorbeeld samengestelde interestrekening en wederkerige vergelijkingen werd in het algemeen weinig of geen tijd meer besteed. Het feit dat deze laatste twee onderwerpen, die reeds eerder uit het programma voor het schriftelijk eindexamen waren geschrapt, nu ook niet meer in het leerprogramma staan, geeft dus wel theoretisch, maar niet in de praktijk ruimte voor andere onderwerpen.

Het onderzoek naar de overlading van het programma, met de hulp van diverse collega's door Dr. Bunt verricht en waarvan de resultaten in de jaargang 1953/'54 van Euclides werden gepubliceerd, wees uit dat het leerprogramma voor de leerlingen, die nu eenmaal onze V.H.M.O.-scholen bevolken, stevig overladen was.

Vele leraren waren er niet alleen van overtuigd, dat het programma te veel vroeg, maar meenden bovendien dat het verouderd was en veel overbodigs bevatte, terwijl andere, belangrijker zaken niet aan de orde kwamen.

Tenslotte kwam het bekende, in vergaderingen van Liwenagel en Wimecos met grote meerderheid van stemmen goedgekeurde voorstel tot stand, waarvan het bovengenoemde K.B. de (op sommige punten van het voorstel afwijkende) neerslag was.

Naar onze mening was het de bedoeling van de ontwerpers van het voorstel, een programma te stellen dat:

- 1e moderner, beter en nuttiger was dan het voorafgaande,
- 2e uitvoerbaar zou zijn in de ter beschikking staande tijd en
- 3e geen verschil meer maakte tussen leer- en eindexamenprogramma.

Toen het K.B. van 30 augustus 1958 verscheen meenden wij, dat wij nu wisten waar wij ons aan te houden hadden. Dit laatste blijkt nu, volgens het artikel van Dr. Gribnau en Dr. van der Neut, een illusie te zijn geweest.

Op bladzijde 19, waar de eigenschappen van lijnstukken in een cirkel ter sprake komen, staat dat dit onderwerp, dat niet in het K.B. vermeld wordt, wel tot de leerstof behoort, „aangezien de behandeling daarvan berust op de combinatie van twee wel genoemde onderwerpen, namelijk gelijkvormigheid en verband tussen hoeken en bogen”.

Wij hebben geen bezwaar tegen de behandeling van deze stof, maar wel tegen de motivering. Op grond hiervan namelijk zouden de stellingen van b.v. Menelaos, de Ceva, Stewart en Ptolemaeus ook behandeld dienen te worden. Wij vragen ons af, wat niet door combinatie van twee (ook drie?), in het K.B. genoemde, onderwerpen ter sprake zou kunnen komen. Met de motivering in de „Toelichting” wordt het daarom voor ons volkomen onzeker wat nu wel en wat niet behandeld moet worden.

Op dezelfde bladzijde staat, dat „eenvoudige” combinaties van de in het K.B. genoemde algebraïsche en goniometrische functies wel aan de orde dienen te komen. Aannemende, dat genoemde combinaties voor variatie vatbaar zijn, vragen wij ons af, wat wel en wat niet onder „eenvoudige” combinaties moet worden verstaan. In het verleden hebben publikaties over het programma dikwijls termen bevat zoals: eenvoudig, gekunsteld, ingewikkelde berekeningen, overbodige stof, enz., termen die bruikbaar kunnen zijn in een gewoon gesprek, maar die door hun volmaakt subjectieve karakter onbruikbaar zijn bij het bepalen van een programma, daar

zij geen vast omlijnde inhoud hebben en dus verwarring stichten.

Bij de stof, die niet in het K.B. vermeld wordt, maar die volgens de „Toelichting” wel behandeld moet worden, behoort dan nog:

Het interpoleren in reken- en meetkundige reeksen, symmetrische vormen in de wortels van een vierkantsvergelijking: „b.v.” $x_1^2 + x_2^2$ en $x_1^3 + x_2^3$, (waar is nu weer de grens?), twee vierkantsvergelijkingen die een wortel gemeen hebben.

Dit behoort allemaal tot de stof, die volgens het oorspronkelijke voorstel moest verdwijnen, teneinde ruimte te maken voor nuttiger zaken. Tot deze „nuttiger zaken” rekenen wij niet alleen nieuwe stof, zoals differentiaal- en integraalrekening, maar ook de mogelijkheid, wat wij behandelen ook rustig en grondig door te werken. Het spreekt vanzelf dat bij een goede behandeling van de stof wel eens onderwerpen ter sprake komen, die niet op het officiële programma staan. Wij hoopten echter dat het aan ons zou worden overgelaten, van klas tot klas uit te maken wat in dit opzicht nuttig en verantwoord was.

Het valt ons op, dat in de „Toelichting” bij de stof van de eerste klas dan nog uitdrukkelijk als wel te behandelen worden genoemd: de ontbinding van $ax^2 + bx + c$ en van $x^3 + a^3$, benevens, bij de merkwaardige produkten, $(a - b - c + d)(a + b + c + d)$, welk laatste voorbeeld ook in de toelichting tot het oorspronkelijke voorstel wordt gebruikt, maar daar juist als voorbeeld van wat verdwijnen moet!

De winst in tijd, die verkregen wordt, doordat in de hogere klassen de trigonometrie verdwijnt, lijkt ons veel minder groot dan het de leerplancommissie destijds toescheen, wanneer wij tenminste afzien van de speciale training in de laatste maanden voor het eindexamen. Deze training zal nu toch ook moeten geschieden, zij het dan met andere stof. Daarbij komt, dat de trigonometrie nu tijd gaat eisen in de lagere klassen en dat in de „Toelichting” staat, dat berekening van merkwaardige lijnen tot de leerstof blijft behoren „ook” met gebruikmaking van de goniometrie; als wij het goed begrijpen dus op verschillende manieren.

Voor de meetkunde wordt als wel te behandelen stof vermeld: aangeschreven cirkels, machtlijn, raaklijnen vierhoek, constructies op de basis van een algebraïsche analyse, constructies van punten, lijnen en vlakken, die niet in een voorgeschreven afbeelding effectief kunnen worden uitgevoerd en vermenigvuldiging van figuren in de ruimte. Ook van deze onderwerpen, hoe belangwekkend ze mogen zijn, meenden wij dat zij, gezien het K.B., plaats moesten maken voor wat nuttiger is.

Overweging van het bovenstaande heeft gemaakt dat wij ons ernstig ongerust maken. Op de eerste bladzijde van deze brief staan drie criteria, waaraan het nieuwe programma zou moeten voldoen. Aan de onder 2e en 3e genoemde wordt, door de „Toelichting” der inspecteurs, niet meer voldaan volgens onze overtuiging.

Wij voelen het dan ook als een plicht U op de hoogte te stellen van onze bezorgdheid van de door de inspectie aan meergenoemd K.B. gegeven interpretatie en uitbreiding. Van deze gevolgen klemmt onzes inziens het meest, dat een doelmatige, rustige voorbereiding van de leerlingen voor het eindexamen ernstig wordt bedreigd, nu de grens van wat wel en wat niet behandeld moet worden en van wat op het mondelinge examen eventueel kan worden gevraagd, weer naar onbestemde verte is verlegd.

Op grond van de overweging, dat de bedoelde „Toelichting” geschreven werd door Dr. Gribnau en Dr. van der Neut, en gepubliceerd werd in „Euclides” zonden wij een afschrift van deze brief aan beide genoemde heren, benevens aan de redactie van het vermelde blad, ter eventuele plaatsing in een volgend nummer.

Hoogachtend,

W. F. H. Beck	J. C. Kuiper
G. W. Hoeksema	L. H. Landré
J. Hoepman	H. P. van der Sluis
A. Kramer	A. Yntema

Naschrift

Het voorgaande stuk geeft aanleiding tot het maken van de volgende opmerkingen.

1. Het is niet mogelijk tot in alle onderdelen nauwkeurig uit te maken wat wel en wat niet tot de leerstof behoort. Men kan in dit verband onderscheid maken tussen:

a. onderwerpen waarvan de behandeling volgens het K.B. is voorgeschreven;

b. onderwerpen waarvan de behandeling niet volgens het K.B. is voorgeschreven, maar wel in het geheel van het wiskundeonderwijs gewenst is;

c. onderwerpen waarvan de behandeling niet volgens het K.B. is voorgeschreven, maar wel in het geheel van het wiskundeonderwijs mogelijk is;

d. onderwerpen waarvan de behandeling ongewenst is.

Men zou deze categorieën resp. a. verplichte, b. gewenste, c. mogelijke, d. ongewenste onderwerpen kunnen noemen.

Het is duidelijk dat slechts de onder a. bedoelde onderwerpen vaststaan; of een onderwerp dat zelf niet tot categorie a. behoort, maar dat verwant is met een of meer wel tot a. behorende onderwerpen, moet worden ingedeeld in categorie b., c. of d. berust op persoonlijk inzicht. Hier bestaat vrijheid van keuze.

Wij zijn van mening dat beperking van het wiskundeonderwijs tot precies die onderwerpen die tot categorie a. behoren met weglating van alle andere onderwerpen dit onderwijs al te zeer zou verschrompelen. Nu behoren alle in het voorgaande stuk omstreden onderwerpen naar onze mening tot de categorieën b. of c. Dat hier vrijheid van keuze bestaat blijkt ook uit de voorzichtige woordkeuze in onze toelichting: „aan de orde kunnen komen” (blz. 19), „er is reden de vraag te stellen” (blz. 20), „hierbij speelt de vraag of er tijd voor beschikbaar is, een belangrijke rol” (blz. 21), enz.

Wanneer wij dus van enige onderwerpen, die niet in het K.B. worden genoemd, zeggen dat zij tot de leerstof behoren wil dit zeggen, dat zij o.i. gerekend moeten worden tot de categorieën b. of c., d.w.z. tot de gewenste of de mogelijke onderwerpen, zulks ter keuze en ter beslissing van de school.

2. Er dient onderscheid gemaakt te worden tussen „systematisch behandelen” en „aan de orde komen” van een onderwerp. Van een aantal onderwerpen kan gezegd worden dat enerzijds een systematische behandeling onnodig, zelfs ongewenst is, terwijl het anderzijds toch mogelijk is dat zij bij het onderwijs als toepassing aan de orde komen.

Concreet: een origineel eindexamenvraagstuk als toepassing van de voorgeschreven leerstof betekent geen uitbreiding van die stof met de systematische behandeling van het onderwerp waarop dit vraagstuk betrekking heeft. Dat dit in het verleden veelal wel zo is opgevat is een van de oorzaken van overlading door ongewenste uitgroei van het programma.

Het zou echter onjuist zijn hieruit de conclusie te trekken dat originaliteit als ongeoorloofde afwijking van het voorgeschreven programma zou moeten worden beschouwd. Deze opvatting zou leiden tot een onnodige en ongewenste verarming van het onderwijs in de wiskunde, waartegen gewaakt dient te worden door allen die voor dit onderwijs verantwoordelijkheid dragen.

3. Zoals ieder leerplan heeft ook dat voor de wiskunde, vastgelegd in het K.B. van 30 augustus 1958, het karakter van een compromis. In de bijeenkomsten met de leraren is dit telkens naar voren ge-

bracht. Ook bij het lezen van onze toelichting, die van de in het gesprek met de leraren aan de orde gestelde punten een samenvatting geeft, mag men dit niet uit het oog verliezen. Daarom hoede men zich er voor het leerplan en ook onze toelichting op een geforceerde, een „overtrokken” wijze te lezen en te interpreteren. Met name moet gewaarschuwd worden tegen het aanwijzen van bepaalde niet door ons aangegeven consequenties van onze opmerkingen, consequenties die wel juist lijken, maar die wij toch niet voor onze rekening nemen.

Voorts dient men de proporties niet uit het oog te verliezen. Wanneer wij van enkele detailonderwerpen zeggen, dat zij behoren tot de leerstof hoewel zij in het K.B. niet worden genoemd (categorieën b. en c.)-interpoleren in reeksen, symmetrische functies van de wortels van een vierkantsvergelijking, constructie van punten, lijnen en vlakken, die niet in een voorgeschreven afbeelding effectief kunnen worden uitgevoerd — dan verliest men de proporties toch wel uit het oog wanneer daarin een voortzetting wordt gezien van de toestand die van 1937 tot 1958 voor de h.b.s.-B heeft bestaan, toen gehele hoofdstukken van de wiskunde — meetkundige behandeling van de kegelsneden, beginselen van de infinitesimaalrekening — wel tot de verplichte leerstof maar niet tot het eindexamenprogramma behoorden.

Wie onze toelichting leest met inachtneming van de daarin voorkomende reserves ten aanzien van de beschikbare tijd zal moeilijk kunnen beweren dat niet voldaan is aan het criterium van de uitvoerbaarheid van het programma in de ter beschikking staande tijd.

En wat het vermeende verschil tussen leer- en eindexamenprogramma betreft zij opgemerkt dat elke bewering hierover iedere grond mist zolang de Koninklijke Besluiten betreffende de wijziging van de reglementen der verschillende eindexamens niet zijn verschenen. Er is overigens op dit punt naar onze mening geen enkele reden voor enige, laat staan „ernstige bezorgdheid”.

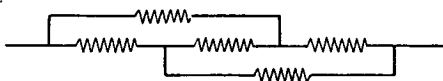
H. A. G.

D. N. v. d. N.

RECREATIE

16. Als men de oplossing van 15b heeft doorzien, is zonder twijfel de volgende opgave verrassend. Gegeven zijn 122 munten, waaronder één valse, die alleen te onderscheiden is door zijn afwijkend gewicht. Verder heeft men een weegschaal met twee schalen en zonder gewichten en beschikt men over slechts 9 munten, waarvan de echtheid vaststaat. Vind in 5 wegingen de valse munt.

17. In bijgaande figuur zijn vijf weerstanden getekend, elk van 2Ω . Hoe groot is de substitutieweerstand?



18. In de formule voor de tangentenboussole komt het moment van het magneetje niet voor. Waarom zet men er dan geen lucifershoutje in?

We zullen de oplossing niet publiceren. Mocht U echter twijfelen, dan moet U het maar eens proberen.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

15. a. Als $n = 1$, dus als men 3 munten heeft; legt men op beide schalen 1 munt. Is er evenwicht, dan is de derde munt de valse. Anders kan men aan de uitslag van de schaal zien, welke munt de valse is.

Is $n = 2$, dan verdeelt men de 9 munten in 3 groepen van 3. Op beide schalen legt men 3 munten. Men kan dan zien, in welk drietal de valse munt zit. Volgens het voorgaande kan men daarna volstaan met één weging om de valse munt te identificeren.

Zo doorgaande blijkt de juistheid van de bewering.

b. A. Heeft men 2 munten, dan legt men één van die munten op de ene schaal en op de andere een echte. Men weet dan, welke de valse munt is. Hierbij heeft men dus 1 echte munt nodig.

B. Heeft men 5 munten, dan legt men 2 ervan op de linkerschaal en 1 ervan plus 1 echte op de rechter. Is er evenwicht, dan bevindt de valse zich onder de resterende 2 en gaan we verder als onder A. Is er geen evenwicht, dan leggen we op beide schalen 1 munt van het tweetal, dat op de linker schaal lag. Is er nu evenwicht, dan was de munt op de rechter schaal de valse. Is er geen evenwicht, dan weten we uit de vorige weging nu, of de valse munt lichter of zwaarder dan de echte is, en uit de laatste weging, welke de valse munt is. Men heeft hierbij weer 1 echte munt nodig.

C. Heeft men 14 munten, dan legt men op de linker schaal 6 munten en op de rechter 3 plus 3 echte. Is er evenwicht, dan bevindt de valse munt zich onder de resterende 5 en gaan we verder als onder B. Is er evenwicht, dan leggen we 3 van de 6 munten van de linker schaal op de ene schaal en 3 op de andere. Is er nu evenwicht, dan bevindt de valse munt zich onder de resterende 3 (die op de rechter schaal lagen bij de eerste weging) en weten we, of deze te zwaar of te licht is. Volgens 15a is nu één weging voldoende om hem te vinden. Is er geen evenwicht, dan weten we uit de vorige weging, of de valse munt te licht of te zwaar is en uit de laatste weging, in welk drietal hij zich bevindt. En dus is hij volgens 15a. weer in één weging te vinden. Er zijn dus 3 echte munten nodig.

D. Op dezelfde wijze zien we in, dat uit 41 munten door 4 wegingen de valse te vinden is, als men over 9 echte munten beschikt. ($41 = 3 \cdot 14 - 1$).

E. En uit 122 plus 27 echte door middel van 5 wegingen. Enz.

13. Van Dr. J. W. Dekker werd van deze vraag (oktobernummer) nog het volgende aardige antwoord ontvangen:

Ten opzichte van een met 1 meebewegend coördinatenstelsel zal 1 in rust zijn en zullen 2, 3 en 4 zich weer eenparig langs rechte lijnen bewegen. Deze lijnen zullen door 1 gaan. Daar 2 en 3 niet gelijktijdig in 1 zijn, moet 3 om 2 te ontmoeten zich

langs de lijn 2—1 bewegen. Hetzelfde geldt voor 4. Dus zullen ook 3 en 4 elkaar ontmoeten of in het verleden ontmoet hebben, tenzij hun snelheden in het beschouwde stelsel en dus ook t.o.v. de "stilstaande" zee naar richting en grootte gelijk zijn.

CONTRIBUTIE WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden, die hun contributie over 1959/1960 nog niet hebben betaald, f 8,00 te willen overschrijven op postgirorekening 143917 t.n.v. Wimecos te Amsterdam.

LIWENAGEL

Ledenvergadering op dinsdag 29 december 1959 in samenwerking met WIMECOS om 14,15 uur in "Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht.

Enig agendapunt:

Bespreking van het verslag van de nomenclatuurcommissie, ingeleid door
Dr. P. G. J. Vredenduin.

Het bestuur van Wimecos heeft meegedeeld, dat de leden van Liwenagel ook hartelijk welkom zijn bij de voordracht van Prof. Dr. R. Timman over: *Moderne ontwikkelingen in de toegepaste wiskunde.*

Deze voordracht begint om ongeveer 11,30 uur.

De secretaris,
D. LEUJES.

*Notulen van de ledenvergadering op vrijdag 28 augustus 1959 om 14.30 uur
in het Eykmanhuis te Driebergen.*

De vergadering werd gepresideerd door Dr. R.L. Krans, die de aanwezigen welkom heette. In het bijzonder sprak hij zijn vreugde uit over de aanwezigheid van de heren Dr. D. N. van der Neut, inspecteur V.H.M.O., Dr. Wansink, Dr. Schuylen Vernout, vertegenwoordigers van Wimecos, Velines en de Wiskundewerkgroep van de W.V.O., het erelid Dr. Schrek, Genootschapsvoorzitter Roodenburg en de redactieleden van "Euclides" Lenstra en Koldijk.

De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd. Vervolgens besprak de heer Herman J. Jacobs Jr. de wiskundeopgaven van het schriftelijk eindexamen gymnasium-B in 1959. De stelkunde-opgaven vond hij op nr. 3 na te traditioneel. Bij het trigonometrie-vraagstuk was vraag a overbodig en in ieder geval veel minder waard dan vraag b. De analytische-meetkunde-vraagstukken waren, zoals na die van 1958 te verwachten was, aardig, gewoon en gemakkelijk. Van de opgaven voor meetkunde vond spreker, die zelf weinig waarde hecht aan vermenigvuldiging van figuren, vraag 1c moeilijk voor leerlingen. Ditzelfde gold voor vraag 2d. Van vraagstuk 3 was niet zoveel terecht gekomen naar wat spreker, die dit jaar geen gymnasium-eindexamen-klas had, ter ore was gekomen. Hij meende, dat dit zijn oorzaak kon hebben in het feit, dat de leerlingen moeite hebben met het onbegrensd zien van de zijvlakken van de kubus. De redactie zou op dit punt wat uitvoeriger kunnen zijn.

Bij de discussie, waaraan werd deelgenomen door de heren Slotboom, Dr. Bunt, Leujes, Koedam, Vernout en Dr. Van der Neut, bleek, dat verscheidene docenten de opgaven van dit jaar te gemakkelijk hadden gevonden.

Na de thee werden enige wiskunde-films van Nicolet vertoond. De heer Leujes gaf daarbij een toelichting, die inmiddels is gepubliceerd in "Euclides", 35e jrg., nr. 1.

Nadat bij de rondvraag Dr. Van der Neut en Dr. Wansink, de laatste ook namens de heer Vernout, hun dank hadden betuigd voor de ontvangen uitnodiging, sloot de voorzitter de vergadering.

De secretaris,
D. LEUJES

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Singel 13, Hoogezaand.

WIMECOS

Algemene vergadering op *dinsdag 29 december 1959* in „Esplanade”, Lucas Bolwerk, Utrecht. Aanvang 10,30. Voor de voorlopige agenda zie men het vorige nummer (blz. 111).

SYMPOSIUM VAN HET
NEDERLANDS WISKUNDIG GENOOTSCHAP
OP 23 DECEMBER 1959 TE EINDHOVEN.

Naast de maandelijkse wetenschappelijke bijeenkomsten van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam worden al gedurende vele jaren in de maand december symposia georganiseerd, waarbij elk jaar als plaats van samenkomst een andere stad in Nederland wordt uitgekozen. Het aantal voordrachten gerangschikt om een centraal thema bedroeg tot dusver vier en zal dit jaar drie bedragen. In 1958 was op de bijeenkomst te Utrecht als centraal onderwerp gekozen: „Enige aspecten van de analyse”, dit jaar zullen alle voordrachten samenhangen met het werk van de onlangs overleden hoogleraren Prof. dr. D. van Dantzig en Prof. dr. B. van der Pol. Bij de keuze van de datum, bij de keuze van de onderwerpen en bij de voordrachten zelf wordt rekening gehouden met de omstandigheid, dat deze symposia niet slechts bestemd zijn voor de wetenschappelijke medewerkers van universiteiten en hogescholen, maar zeer uitdrukkelijk ook voor de leraren wiskunde aan gymnasia en hogereburgerscholen. Deze mededeling in *Euclides* is dan ook bedoeld om de collega's, aan wier aandacht dit werk van het Wiskundig Genootschap tot dusver was ontsnapt, op de betekenis van deze symposia te wijzen. Voor de leraren, voor wie de 23e december buiten de kerstvakantie mocht vallen, zal het in de regel niet moeilijk blijken om voor deze bijeenkomst, die vakwetenschappelijk ook voor hen van betekenis is, een dag vrij te krijgen.

Aan het bijwonen van het symposium zijn geen kosten verbonden. Het lidmaatschap van het Wiskundig Genootschap is niet verplicht. Er is een gemeenschappelijke lunch, waaraan men voor f 3,— per persoon kan deelnemen. Men dient dit bedrag te storten of over te schrijven op postrekening 573247 ten name van dr. J. H. de Boer te Eindhoven. De kosten voor de ochtendkoffie en de middagthee zijn in dit bedrag van f 3,— inbegrepen.

De agenda luidt:

- 10,30 Ontvangst met koffie in gebouw THE, Insulindelaan 2, Eindhoven.
11,00—11,45 J. J. de Jongh, „Van Dantzig's ideeën over de grondslagen der wiskunde”.
12,00—13,00 Prof. dr. C. J. Bouwkamp, „Het wiskundige werk van B. van der Pol”.
13,15—14,15 Lunch in een der gebouwen van de THE.
14,30—15,30 Prof. dr. J. Hemelrijk, „Het statistische werk van D. van Dantzig”.

Na afloop thee.

Zojuist verscheen de 2e druk van

P. WIJDENES



Vlakke Meetkunde

voor voortgezette studie

met 342 figuren en 65 uitgewerkte voorbeelden
ingenaaid f 13,—; gebonden f 15,—.

De eerste druk werd opgetogen ontvangen. Enkele beoordelingen:

„De „veteraan” Wijdenes heeft hiermede het werk gecreëerd van de planimetrie voor hen, die studeren voor de akte Wiskunde L.O. De „grote” Molenbroek was inderdaad te uitgebreid. Er is uit het grote werk niet alleen geschraapt en vereenvoudigd, maar ook opnieuw bewerkt. Dat alles onder de meesterlijke hand van Wijdenes.”

(Ons Mulo-blad)

„Een uitstekend leerboek voor de akte Wiskunde L.O. Het wordt gekenmerkt door grote degelijkheid, systematische behandelingswijze, grondigheid. De opmerkingen van didactische aard, die men door het boek verspreid aantreft, zullen bij zelfstudie goede diensten kunnen bewijzen. De talrijke figuren munten uit door duidelijkheid en technische perfectie.”

(Wansink in Weekbl. v. d. A.V.M.O.)

„Een uitstekend leerboek voor het beoogde doel.”

(Weekblad St. Bonaventura)

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

zojuist verschenen

W. J. H. SALET e.a.

VRAAGSTUKKEN

OVER

ANALYSE en ALGEBRA II

2de druk f 6.50

„Dit tweede deel van deze vraagstukkenverzameling is al even voortreffelijk als het eerste.”

W. J. Brandenburg in Weekblad v.b. „Genootschap”

„Deze verzameling van zorgvuldig uitgekozen, systematisch gerangschikte en goed geredigeerde vraagstukken maakt op de lezer een prettige indruk.”

Weekblad v.d. A.V.M.O.

Van deel I is de 5de druk ter perse!

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

6 x favoriet!

C. J. ALDERS

- **ALGEBRA** voor M.O. en V.H.O.

Deel I - 36-38e druk f 2,25, geb. f 3,00
Antwoorden f 0,90
Deel II - 32-35e druk f 2,50, geb. f 3,35
Antwoorden f 0,75
Deel III - 14-16e druk f 1,90, geb. f 2,65
Antwoorden f 0,75

C. J. ALDERS

- **PLANIMETRIE** voor M.O. en V.H.O.

7-9e druk f 3,50, geb. f 4,40

C. J. ALDERS

- **STEREOMETRIE** voor M.O. en V.H.O.

13-14e druk f 2,50, geb. f 3,35

C. J. ALDERS

- **GONIOMETRIE** voor M.O. en V.H.O.

6-10e druk f 1,90, geb. f 2,75

C. J. ALDERS

- **DRIEHOEKSMETING** voor M.O. en V.H.O.

23e druk f 1,90, geb. f 2,75

C. J. ALDERS

- **INLEIDING
TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE**

2e druk f 2,50, geb. f 3,25
Antwoorden gratis.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook verkrijgbaar via de boekhandel